KAPITEL 8

Divisoren auf nichtsingulären Kurven

Im Folgenden sei C eine nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive Kurve, die über einem vollkommenen Körper K definiert ist.

Definition. (1) *Die* **Divisorengruppe** $\mathrm{Div}(C)$ *von* C *ist die freie abelsche Gruppe, die von den Punkten auf* C *erzeugt wird. Ein* **Divisor** $D \in \mathrm{Div}(C)$ *ist also eine formale Linearkombination*

$$D = \sum_{P \in C} n_P[P]$$

mit $n_P \in \mathbb{Z}$ *und* $n_P \neq 0$ *für nur endlich viele Punkte von* C*. (Dabei dient die Schreibweise* $[P]$ *nur dazu, eine Verwechslung mit anderen Objekten auszuschließen.)*

(2) *Der* **Grad** $\mathrm{grad}(D)$ *eines Divisors* $D = \sum n_P[P]$ *ist* $\mathrm{grad}(D) = \sum n_P$.

(3) *Die Divisoren vom Grad* 0 *bilden eine Untergruppe:*

$$\mathrm{Div}^0(C) = \{D \in \mathrm{Div}(C) : \mathrm{grad}(D) = 0\}.$$

(4) *Die Galoisgruppe* G_K *operiert auf* $\mathrm{Div}(C)$ *und* $\mathrm{Div}^0(C)$ *durch*

$$\sigma(\sum n_P[P]) = \sum n_P[\sigma P].$$

(5) *Man sagt,* $D \in \mathrm{Div}(C)$ *ist über* K *definiert, falls* $\sigma D = D$ *für alle* $\sigma \in G_K$ *gilt. Sei* $\mathrm{Div}_K(C)$ *bzw.* $\mathrm{Div}^0_K(C)$ *die Gruppe der Divisoren bzw. Divisoren vom Grad* 0*, die über* K *definiert sind.*

(6) *Ist* $f \in \overline{K}(C)^*$*, so heißt*

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f)[P]$$

der zu f *gehörige Hauptdivisor. Manchmal schreibt man statt* $\mathrm{div}(f)$ *auch einfach* (f)*.*

Beispiel: Wir betrachten $\mathbb{P}^1$ mit x als Koordinate im Endlichen und $u = \frac{1}{x}$ im Unendlichen. Ein $f \in \overline{K}(\mathbb{P}^1), f \neq 0$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$f = c\frac{(x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_r)^{m_r}}{(x-b_1)^{n_1} \dots (x-b_s)^{n_s}},$$

mit $m_i, n_j \geq 1$, alle a_i, b_j verschieden. Im Unendlichen ist $\mathrm{ord}_\infty(f) = (\sum_j n_j) - (\sum_i m_i)$ und damit folgt

$$\mathrm{div}(f) = \sum_i m_i[a_i] - \sum_j n_j[b_j] + (\sum_j n_j - \sum_i m_i)[\infty].$$

Insbesondere sieht man hier auch sofort $\mathrm{grad}(\mathrm{div}(f)) = 0$.

Beispiel: Wir betrachten die Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^2$, die durch $y = x^2$ gegeben wird. Dann ist

$$[(\sqrt{2}, 2)] + [(-\sqrt{2}, 2)]$$

ein über $\mathbb{Q}$ definierter Divisor. Ist $\alpha^3 = 2$ und $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ eine primitive dritte Einheitswurzel, so ist

$$[(\alpha, \alpha^2)] + [(\zeta\alpha, \zeta^2\alpha^2)] + [(\zeta^2\alpha, \zeta\alpha^2)]$$

ebenfalls über $\mathbb{Q}$ definiert.

Lemma. *Seien* $f, g \in \overline{K}(C)^*$*. Dann gilt:*

(1) $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$*, die Hauptdivisoren bilden also eine Untergruppe.*

Datei: algku8.tex. Version vom 18.7.2021

(2) $\operatorname{div}(f) = 0 \iff f \in \overline{K}^*$.
(3) $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g) \iff f = cg$ *für ein* $c \in \overline{K}$.
(4) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(f)) = 0$, *d.h. Hauptdivisoren haben Grad* 0.

Beweis:

(1) Dies folgt sofort aus $\operatorname{ord}_P(fg) = \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_P(g)$.
(2) $\operatorname{div}(f) = 0$ heißt, f hat weder Pol- noch Nullstellen. Da ein nichtkonstantes $f \in \overline{K}(C)$ aber einen surjektiven Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ mit $\phi = (1 : f)$ liefert, ist klar, dass $\operatorname{div}(f) = 0$ mit $f \in \overline{K}(C)$ äquivalent ist.
(3) Es gilt $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g)$ genau dann, wenn $0 = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(\frac{f}{g})$, woraus mit der letzten Aussage die Behauptung folgt.
(4) Aus dem letzten Abschnitt wissen wir: $\sum_P \operatorname{ord}_P(f) = 0$, also $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(f)) = 0$. ∎

Beispiel: Seien $e_1, e_2, e_3 \in \overline{K}$ paarweise verschieden, $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Dann definiert $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$ eine nichtsinguläre Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^2$ mit einem unendlich fernen Punkt $P_\infty = (0 : 0 : 1)$. Sei $P_i = (e_i, 0)$. In P_1 ist $x - e_1 = 0$ Tangente, also y uniformisierend, außerdem $(x - e_2)(x - e_3)$ Einheit. Daher

$$2 = \operatorname{ord}_{P_1}(y^2) = \operatorname{ord}_{P_1}((x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)) = \operatorname{ord}_{P_1}(x - e_1).$$

Da $x - e_1$ höchstens in P_1 eine Nullstelle hat, höchstens in P_∞ eine Polstelle hat, folgt

$$\operatorname{div}(x - e_1) = 2[P_1] - 2[P_\infty].$$

Analog

$$\operatorname{div}(x - e_2) = 2[P_2] - 2[P_\infty] \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(x - e_3) = 2[P_3] - 2[P_\infty].$$

Daraus ergibt sich $\operatorname{div}(y^2) = 2[P_1] + 2[P_2] + 2[P_3] - 6[P_\infty]$, also

$$\operatorname{div}(y) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[P_\infty].$$

Definition. *Zwei Divisoren* $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(C)$ *heißen* **linear äquivalent**, $D_1 \sim D_2$, *wenn es einen Hauptdivisor* $\operatorname{div}(f)$ *gibt mit*

$$D_2 = D_1 + \operatorname{div}(f).$$

Die **Picardgruppe** *oder* **Divisorenklassengruppe** $\operatorname{Pic}(C)$ *ist der Quotient von* $\operatorname{Div}(C)$ *modulo der Untergruppe der Hauptdivisoren. Entsprechend definiert man*

$$\operatorname{Pic}^0(C) = \{\textit{Divisoren vom Grad } 0\}/\{\textit{Hauptdivisoren }\}.$$

Sei weiter

$$\operatorname{Pic}_K(C) = \{c \in \operatorname{Pic}(C) : \sigma c = c \textit{ für alle } \sigma \in G_K\}$$

und analog $\operatorname{Pic}^0_K(C)$.

Bemerkungen:

(1) $\operatorname{Pic}^0(C) = 0$ heißt, dass jeder Divisor vom Grad 0 Hauptdivisor ist. $\operatorname{Pic}^0(C)$ misst also, wieweit Divisoren vom Grad 0 von Hauptdivisoren abweichen. Man vergleiche die Funktion der Klassengruppe von Zahlkörpern.
(2) Da Hauptdivisoren Grad 0 haben, erhalten wir durch die Gradfunktion eine induzierte Abbildung $\operatorname{grad} : \operatorname{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$. Der Kern ist $\operatorname{Pic}^0(C)$. Man kann dies auch mit der exakten Sequenz schreiben:

$$0 \to \operatorname{Pic}^0(C) \to \operatorname{Pic}(C) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Ist $P_0 \in C$, so definiert $(D_0, n) \mapsto D_0 + nP_0$ einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\operatorname{Pic}^0(C) \oplus \mathbb{Z} \simeq \operatorname{Pic}(C),$$

der von der Auswahl des Punktes P_0 abhängt.

Der folgende Satz gibt einen ersten Hinweis, wie wichtig $\operatorname{Pic}(C)$ für die Klassifikation von Kurven ist:

Satz. *Für eine Kurve* C *sind äquivalent:*

(1) *$C \simeq \mathbb{P}^1$ (über $\overline{K}$).*
(2) $\mathrm{Pic}^0(C) = 0$.
(3) *Es gibt ein $f \in \overline{K}(C)$ mit $\mathrm{div}(f) = [P_1] - [P_2]$ und $P_1 \neq P_2$.*

Beweis:

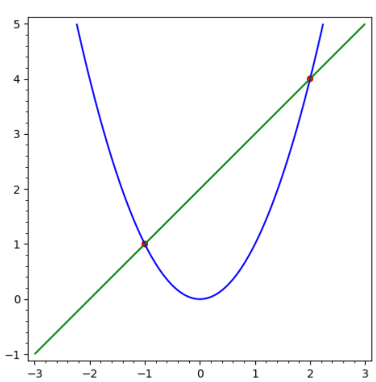
- $1 \Rightarrow 2$: Jeder Divisor D auf $\mathbb{P}^1$ vom Grad 0 kann in der Form
$$D = \sum_i m_i[\alpha_i] - \sum_j n_j[\beta_j] + (\sum_j n_j - \sum_i m_i)[\infty]$$
mit $m_i, n_j \geq 0$ geschrieben werden. Offensichtlich gilt nun für
$$f = \frac{(x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_r)^{m_r}}{(x-\beta_1)^{n_1} \dots (x-\beta_s)^{n_s}}$$
$\mathrm{div}(f) = D$, also ist D Hauptdivisor und damit $\mathrm{Pic}^0(C) = 0$.
- $2 \Rightarrow 3$: Wähle zwei verschiedene Punkte $P_1, P_2 \in C$. Dann hat der Divisor $[P_1] - [P_2]$ Grad 0, also gibt es eine Funktion f mit $\mathrm{div}(f) = [P_1] - [P_2]$.
- $3 \Rightarrow 1$: f induziert einen Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ mit $\phi = (1 : f)$ vom Grad
$$\mathrm{grad}(\phi) = \sum_{\substack{P \in C \\ f(P)=0}} \mathrm{ord}_P(f) = 1,$$
also ist ϕ ein Isomorphismus. (Alternativ: Es ist $\overline{K}(C) = \overline{K}(f) \simeq \overline{K}(\mathbb{P}^1)$ und damit $C \simeq \mathbb{P}^1$.) ■

Wir wollen jetzt wichtige Beispiele von Divisoren kennenlernen.

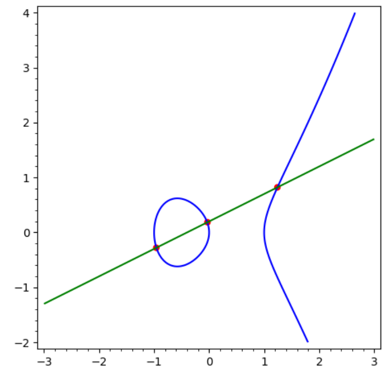
Hyperebenenschnitte: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^n$ und C nicht in einem echten linearen Teilraum von $\mathbb{P}^n$ enthalten. Sei $\ell = a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ die Gleichung einer Hyperebene. Wir wollen den Divisor $\mathrm{div}(\ell)$ definieren, den Hyperebenenschnitt $\{\ell = 0\} \cap C$.
Sei $P \in C$. Ist $P \in U_i = \{x_i \neq 0\}$, so sei $n_P = \mathrm{ord}_P(\frac{\ell}{x_i})$. Ist P auch in U_j, so ist wegen $\mathrm{ord}_P(\frac{x_i}{x_j}) = 0$
$$\mathrm{ord}_P(\frac{\ell}{x_i}) = \mathrm{ord}_P(\frac{\ell}{x_i}) + \mathrm{ord}_P(\frac{x_i}{x_j}) = \mathrm{ord}_P(\frac{\ell}{x_j}),$$
d.h. n_P ist wohldefiniert. Nun setzt man
$$\mathrm{div}(\ell) = \sum_{P \in C} n_P[P].$$
Ist $\ell' = 0$ eine andere Hyperebene, so ist $\frac{\ell}{\ell'}$ eine rationale Funktion auf C, und man sieht sofort, dass die Hyperebenenschnitte $\mathrm{div}(\ell)$ und $\mathrm{div}(\ell')$ linear äquivalent sind. Man nennt $\mathrm{grad}(\mathrm{div}(\ell))$ den **Grad der Kurve C im $\mathbb{P}^n$**.

Beispiele:

(1) Sei $C = \{x_0x_2 = x_1^2\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Je zwei Punkte auf C bilden einen Hyperebenenschnitt.



(2) Für die Kurve C in affiner Darstellung $y^2 = x^3 - x$ bestehen die Hyperebenenschnitte aus 3 Punkten, die auf einer Geraden liegen.



Sei nun $\phi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus glatter projektiver Kurven. Wir definieren

$$\phi^* : \mathrm{Div}(C_2) \to \mathrm{Div}(C_1), \quad [Q] \mapsto \sum_{P \in \phi^{-1}(Q)} e_\phi(P)[P] \text{ und lineare Fortsetzung,}$$

$$\phi_* : \mathrm{Div}(C_1) \to \mathrm{Div}(C_2), \quad [P] \mapsto [\phi(P)] \text{ und lineare Fortsetzung.}$$

Beispiel: Interpretieren wir eine nichtkonstante Funktion $f \in \overline{K}(C)$ als $f : C \to \mathbb{P}^1$, so gilt

$$\mathrm{div}(f) = f^*([0] - [\infty]).$$

Satz. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein Morphismus glatter projektiver Kurven. Dann gilt*

(1) $\mathrm{grad}(\phi^* D) = \mathrm{grad}\phi \cdot \mathrm{grad}(D)$.
(2) $\phi^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\phi^*(f))$.
(3) $\mathrm{grad}(\phi_* D) = \mathrm{grad}(D)$.
(4) $\phi_* \circ \phi^* = \mathrm{grad}(\phi)$, *d.h. Multiplikation mit* $\mathrm{grad}(\phi)$ *auf* $\mathrm{Div}(C_2)$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen und früher erwähnten Eigenschaften.