Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Anmerkungen:

(1) In der Klausur sind keine Hilfsmittel erlaubt.
(2) Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!
(3) Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten.

Aufgabe 1: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

(1) Schreibe
$$\frac{1+2\sqrt{6}}{3+4\sqrt{6}}$$
als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \sqrt{6}$.

(2) Berechne für $x, y \in \mathbb{Q}$ die Spur $\mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(x + y\sqrt{6})$ und die Norm $\mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(x + y\sqrt{6})$.

Aufgabe 2: Sei $f = x^6 + 6x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ und α das Bild von x in $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$.

(1) Zeige, dass K ein Körper ist.
(2) Gib eine $\mathbb{Q}$-Basis von K an.
(3) Schreibe $\frac{1}{\alpha}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination der $\mathbb{Q}$-Basis aus (2).

Aufgabe 3: Sei K ein Körper der Charakteristik p und $\pi : K \to K$ mit $\pi(x) = x^p$.

(1) Ist π ein Körperhomomorphismus?
(2) Wieviele Elemente kann K haben, wenn $\pi \circ \pi = \mathrm{id}_K$ gilt?

Aufgabe 4: Sei $f = x^3 - 9x - 9 \in \mathbb{Q}[x]$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine Nullstelle von f. Weiter sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\beta = 6 + \alpha - \alpha^2$.

(1) Zeige, dass f irreduzibel ist.
(2) Zeige, dass $f(\beta) = 0$ gilt.
(3) Zeige, dass ein $\gamma \in K \setminus \{\alpha, \beta\}$ existiert mit $f(\gamma) = 0$. Schreibe γ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$.
(4) Warum ist $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung? Bestimme den Isomorphie-Typ der Galoisgruppe.

Aufgabe 5: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$.

(1) Zeige, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt mit $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$.
(2) Bestimme $[K : \mathbb{Q}]$.
(3) Bestimme das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

Datei: kt_klausur_0.tex. Version vom 21.7.2023

Aufgabe 6: Sei $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$.

(1) Zeige, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.
(2) Gib eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ an, die α enthält.

Aufgabe 7: Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) Ist $L|K$ algebraisch, so ist $L|K$ endlich.
(2) Ist $L|K$ endlich, so ist $L|K$ algebraisch.
(3) Gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$, so ist $L|K$ algebraisch.
(4) Ist $L|K$ endlich, so gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 8: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$. Gilt dann

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]\,?$$

Aufgabe 9: Warum ist ein endlicher Körper K nicht algebraisch abgeschlossen?

Aufgabe 10: Wahr oder falsch. Beweise oder widerlege.

(1) Der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ ist eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
(2) Der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{C}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 11: Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) Die komplexe Konjugation ist ein Element von $\mathrm{Aut}(K|\mathbb{Q})$.
(2) Gilt $K \not\subseteq \mathbb{R}$, so ist K über $K \cap \mathbb{R}$ algebraisch vom Grad 2.
(3) Gilt $K \not\subseteq \mathbb{R}$ und ist $K|\mathbb{Q}$ galoissch, so ist K über $K \cap \mathbb{R}$ algebraisch vom Grad 2.

Aufgabe 12: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.

(1) Bestimme $[K : \mathbb{Q}]$.
(2) Ist $K|\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung?

Aufgabe 13: Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) In Charakteristik 0 ist jedes Polynom separabel.
(2) In Charakteristik p ist jedes Polynom f vom Grad ≥ 1 mit $f' = 0$ inseparabel.
(3) In Charakteristik p ist jedes Polynom f vom Grad p inseparabel.
(4) Ist p eine Primzahl und $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ mit $\alpha^p + 1 = 0$, so ist $\mathbb{F}_p(\alpha)$ eine separable Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 14: Ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ galoissch über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 15: Sei $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung und K ein Zwischenkörper, d.h. $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$. Richtig oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) $K|\mathbb{Q}$ ist galoissch.
(2) $L|K$ ist galoissch.

Aufgabe 16: Sei $f = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und

$$\alpha_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\sqrt{3}}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2.$$

(1) Zeige, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die komplexen Nullstellen von f sind.
(2) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\alpha_2)$ gilt.
(3) Zeige, dass gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$.
(4) Zeige, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha_1)|\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\alpha_2)|\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ galoissch sind.
(5) Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $K|\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ galoissch ist und bestimme den Isomorphietyp der Galoisgruppe.

Aufgabe 17: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(1) Warum ist K galoissch über $\mathbb{Q}$? Bestimme $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.
(2) Zeige:

$$K = \mathbb{Q}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}).$$

Aufgabe 18: Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \zeta\alpha$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.

(1) Zeige, dass $[K : \mathbb{Q}] = 6$ gilt.
(2) Zeige, dass $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.
(3) Beschreibe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ durch Angabe von $\sigma(\alpha)$ und $\sigma(\zeta)$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.
(4) Zeige:

$$\mathbb{Q}(\alpha + \beta) \subsetneq K, \quad \mathbb{Q}(\alpha - \beta) = K.$$

Aufgabe 19: Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) Es gibt eine Galoiserweiterung $K|\mathbb{F}_2$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{Z}_{100}$.
(2) Es gibt eine Galoiserweiterung $K|\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_{100}$.
(3) Es gibt eine Galoiserweiterung $K|\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}_{100}$.

Aufgabe 20: Sei K ein Körper und $\alpha, \beta \in \overline{K}$ mit $\alpha^2 = 2$ und $\beta^2 = 3$. Sei $Z = K(\alpha, \beta)$. Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) Für $K = \mathbb{F}_5$ ist $Z|K$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(Z|K) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(2) Für $K = \mathbb{Q}$ ist $Z|K$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(Z|K) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 21: Gibt es einen Körper K, sodass

(1) $K|\mathbb{Q}$ algebraisch vom Grad 100 ist?
(2) $K|\mathbb{Q}$ galoissch vom Grad 100 ist?
(3) $K|\mathbb{Q}$ abelsch vom Grad 100 ist?
(4) $K|\mathbb{Q}$ zyklisch vom Grad 100 ist?

Aufgabe 22: Was ist $\Phi_{p^2}(1)$ für eine Primzahl p?

Aufgabe 23: Berechne das 12-te Kreisteilungspolynom $\Phi_{12}(x)$.

Aufgabe 24: Sei $\zeta = \zeta_{11}$ eine primitive 11-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta_{11})$.

(1) Zeige, dass $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^{-5}, \zeta^{-4}, \zeta^{-3}, \zeta^{-2}, \zeta^{-1}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K ist.
(2) $K|\mathbb{Q}$ ist zyklisch. Bestimme ein σ mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$. Was ist $\sigma(\zeta)$?
(3) Sei
$$\alpha = \zeta - \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 - \zeta^{-5} - \zeta^{-4} - \zeta^{-3} + \zeta^{-2} - \zeta^{-1}.$$
Berechne $\sigma(\alpha)$ und zeige, dass $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ gilt.
(4) Erstelle ein Unterkörperdiagramm von K und gib für jeden echten Zwischenkörper von $K|\mathbb{Q}$ ein primitives Element an.

Aufgabe 25: Welche Kreisteilungskörper haben Grad 4 über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 26: Sei $\zeta = \zeta_8$ eine primitive 8-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

(1) Bestimme das 8-te Kreisteilungspolynom $\Phi_8(x)$.
(2) Warum ist $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K?
(3) $K|\mathbb{Q}$ ist galoissch. Beschreibe die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ durch Angabe von $\sigma(\zeta)$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.
(4) Schreibe für $\alpha = \zeta - \zeta^3$ die Bilder $\sigma(\alpha)$ als Linearkombination von $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$. Was ist α^2?
(5) Erstelle ein Unterkörperdiagramm von K und gib für jeden echten Zwischenkörper von $K|\mathbb{Q}$ ein primitives Element an.

Aufgabe 27: Sei $n \geq 3$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ der n-te Kreisteilungskörper mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel ζ_n. Zeige: Ist K ein Unterkörper von L, so ist $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung.

Aufgabe 28: Sei p eine Primzahl. Bestimme alle Unterkörper von $\mathbb{F}_{p^{30}}$ und erstelle ein zugehöriges Unterkörperdiagramm.

Aufgabe 29: Wieviele Elemente $a \in \mathbb{F}_{625}$ gibt es mit $\mathbb{F}_5(a) = \mathbb{F}_{625}$?

Aufgabe 30: Wieviele Körper K gibt es mit
(1) $\mathbb{F}_8 \subseteq K \subseteq \mathbb{F}_{1024}$?
(2) $\mathbb{F}_{32} \subseteq K \subseteq \mathbb{F}_{1024}$?

Aufgabe 31: Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.
(1) $\mathbb{F}_9 \subseteq \mathbb{F}_{27}$.
(2) Es gibt einen Körper mit 6 Elementen.
(3) Alle Körper mit 4 Elementen sind isomorph.

Aufgabe 32: Von einem endlichen Körper K weiß man, dass gilt
$$|K| \leq 10 \quad \text{und} \quad 1+1+1+1+1+1=0.$$
Wieviele Elemente kann K haben?

Aufgabe 33: Sei $f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_2$ mit $f(\alpha) = 0$.
(1) Zeige, dass $f(\beta) = 1$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.
(2) Zeige, dass f über $\mathbb{F}_2$ irreduzibel ist.
(3) Zeige, dass f über $\mathbb{F}_2(\alpha)$ so zerfällt:
$$f = (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8).$$
(4) Zeige, dass
$$(x-\alpha)(x-\alpha^4)$$
Koeffizienten in $\mathbb{F}_4$ hat.

Aufgabe 34: $f = x^3 + x + 1$ und $g = x^3 + x + 3$ sind irreduzible Polynome aus $\mathbb{F}_{101}[x]$. Seien $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_{101}$ mit $f(\alpha) = 0$ und $g(\beta) = 0$. Wieviele Körperhomomorphismen
$$\mathbb{F}_{101}(\alpha) \to \mathbb{F}_{101}(\beta)$$
gibt es?

Aufgabe 35: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_7$ mit $\alpha^2 = 2$, $\beta^2 = 3$, $\gamma^2 = 5$. Wieviele Körperhomomorphismen
$$\mathbb{F}_7(\alpha) \to \mathbb{F}_7(\beta), \quad \mathbb{F}_7(\beta) \to \mathbb{F}_7(\gamma), \quad \mathbb{F}_7(\gamma) \to \mathbb{F}_7(\alpha)$$
gibt es?

Aufgabe 36: Welche der folgenden Gruppen kommen als Galoisgruppen einer endlichen Erweiterung $K|\mathbb{F}_2$ vor?

(1) $\mathbb{Z}_2$
(2) $\mathbb{Z}_3$
(3) $\mathbb{Z}_4$
(4) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
(5) $\mathbb{Z}_5$
(6) $\mathbb{Z}_6$
(7) S_3

Aufgabe 37: Wieviele irreduzible normierte Polynome vom Grad 6 gibt es in $\mathbb{F}_3[x]$?

Aufgabe 38: (Die Antworten müssen begründet werden.)

(1) Ist die Zahl $\frac{2+\sqrt[4]{3}}{5}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
(2) Ist die Zahl $\sqrt{10+\sqrt{10}}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
(3) Ist die Zahl $\sqrt[4]{4+\sqrt[3]{2}}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
(4) Ist das regelmäßige 9-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Aufgabe 39: Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles normiertes Polynom mit den komplexen Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sodass $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist. Erstelle ein Unterkörperdiagramm des Zerfällungskörpers von f.

Aufgabe 40: Ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ habe mindestens eine reelle und mindestens eine komplexe, nicht reelle Nullstelle. Zeige, dass die Galoisgruppe des Polynoms nicht abelsch ist.

Aufgabe 41: Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ normiert und separabel. Wahr oder falsch? Beweise oder widerlege.

(1) Aus $\mathrm{grad}(f) = |\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})| = 3$ folgt, dass f irreduzibel ist.
(2) Aus $\mathrm{grad}(f) = |\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})| = 4$ folgt, dass f irreduzibel ist.

Aufgabe 42: Bestimme den Isomorphietyp der Galoisgruppen der Polynome x^3-3x+3, x^3-1, x^3-3x+1 über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 43: Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein normiertes irreduzibles kubisches Polynom mit den Nullstellen α, β, γ in einem Zerfällungskörper K von f, d.h.

$$K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{und} \quad f = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Was kann man über $\sigma(\beta)$ und $\sigma(\gamma)$ sagen, falls

(1) $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_3$,
(2) $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq S_3$

ist?