Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 13 (9.7.2021)

Aufgabe 61: Gegeben sei eine Kurve E vom Geschlecht 1 und zwei Punkte $O, \widetilde{O} \in E$. Dann sind

$$\psi : E \to \mathrm{Pic}^0(E) \text{ mit } \psi(P) = \overline{[P] - [O]} \quad \text{und} \quad \widetilde{\psi} : E \to \mathrm{Pic}^0(E) \text{ mit } \widetilde{\psi}(P) = \overline{[P] - [\widetilde{O}]}$$

Bijektionen. Durch

$$P_1 \oplus P_2 = \psi^{-1}(\psi(P_1) + \psi(P_2)) \quad \text{und} \quad P_1 \widetilde{\oplus} P_2 = \widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{\psi}(P_1) + \widetilde{\psi}(P_2))$$

erhält man Verknüpfungen auf E, die E zu einer abelschen Gruppe machen mit O bzw. $\widetilde{O}$ als neutralem Element. Zeige, dass durch

$$\alpha : E \to E \text{ mit } \alpha(P) = P \oplus \widetilde{O}$$

ein Gruppenisomorphismus

$$(E, \oplus, O) \to (E, \widetilde{\oplus}, \widetilde{O})$$

definiert wird.

Aufgabe 62: Sei C eine nichtsinguläre ebene Kubik und seien $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in C$. Zeige, dass genau dann

$$[P_1] + [P_2] \sim [Q_1] + [Q_2]$$

gilt, wenn sich die Gerade durch P_1, P_2 und die Gerade durch Q_1, Q_2 in einem Kurvenpunkt schneiden.

Aufgabe 63: Sei C eine Kurve vom Geschlecht 1. Ist D ein Divisor vom Grad 2, so gibt es wegen $\ell(D) = 2$ Funktionen $f_0, f_1 \in K(C)$ mit

$$\mathcal{L}(D) = K \cdot f_0 + K \cdot f_1.$$

Zugehörig definiert man einen Morphismus

$$\phi_{D,f_0,f_1} : C \to \mathbb{P}^1 \text{ mit } \phi_{D,f_0,f_1} = (f_0 : f_1).$$

Da D Grad 2 hat, ist ϕ_{D,f_0,f_1} ein Morphismus vom Grad 2 und $\phi^*_{D,f_0,f_1}(K(\mathbb{P}^1))$ ein Unterkörper von $K(C)$ vom Index 2. Zeige:

(1) Es gilt

$$\phi^*_{D,f_0,f_1}(K(\mathbb{P}^1)) = K(\frac{f_1}{f_0}).$$

(2) Ist g_0, g_1 eine andere Basis von $\mathcal{L}(D)$, so gilt

$$K(\frac{g_1}{g_0}) = K(\frac{f_1}{f_0}).$$

Daher ist der Unterkörper unabhängig von der gewählten Basis von $\mathcal{L}(D)$ und wir können schreiben

$$\phi^*_D(K(\mathbb{P}^1)) = K(\frac{f_1}{f_0}) = K(\frac{g_1}{g_0}).$$

(3) Sind D_1, D_2 zwei Divisoren vom Grad 2, so gilt:

$$D_1 \sim D_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \phi^*_{D_1}(K(\mathbb{P}^1)) = \phi^*_{D_2}(K(\mathbb{P}^1)).$$

Aufgabe 64: Sei C eine nichtsinguläre ebene Kubik in Charakteristik $\neq 2, 3$, P ein nicht auf C liegender Punkt und G eine Gerade, die P nicht enthält. Eine Abbildung $\pi : C \to G$ wird wie folgt definiert: Ist $Q \in C$, so sei $\pi(Q)$ der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von P und Q mit G. Man kann sehen, dass π ein Morphismus ist.

(1) Welchen Grad hat π?
(2) Welche Verzweigungsindizes $e_\pi(Q)$ treten auf?
(3) Welche geometrische Bedeutung haben die Verzweigungspunkte?
(4) Wieviele Geraden durch P sind Tangenten an C? (Eventuell muss man mit Vielfachheiten zählen.)

Aufgabe 65: Sei $f(x) \in K[x]$ ein separables Polynom vom Grad $n \geq 1$, $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und C die durch $y^2 = f(x)$ definierte ebene projektive Kurve. Zeige:

(1) Im Fall $n = 1$ oder $n = 2$ ist C eine nichtsinguläre projektive ebene Quadrik und hat Geschlecht 0.
(2) Im Fall $n = 3$ ist C eine nichtsinguläre projektive ebene Kubik und hat Geschlecht 1.