Die Quintessenz der Tschebyscheff-Polynome

Den Titel müssen wir gleich zurücknehmen: Die Tschebyscheff-Polynome haben so vielfältige Anwendungen und wurden so umfassend erforscht, dass ihre Theorie ganze Bücher füllt – wie z.B. das schöne Buch von *Th. J. Rivlin*.

Also geht es hier nur um einen schnellen und kurzen ersten Blick auf diese ganz außergewöhnlichen Polynome. Die kürzeste *Definition* ist

$$\boldsymbol{T_n(x) := \cos(n \arccos x) \quad (-1 \le x \le 1,\ n \in \mathbb{N}_0)}.$$

Es braucht ein paar Nebenüberlegungen, überhaupt zu erkennen, dass dadurch *Polynome* definiert sind. Wegen $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx$ sowie $\arccos x \in [0, \pi]$ $(-1 \le x \le 1)$ folgt $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$ und damit

$$T_n(x) = \Re\big(\cos(\arccos x) + \mathrm{i} \sin(\arccos x)\big)^n = \Re\big(x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\big)^n = \boldsymbol{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} (-1)^k (1-x^2)^k}.$$

Somit ist T_n ein Polynom n-ten Grades mit führendem Koeffizienten 2^{n-1}, da ja $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$; die Anzahl der *geraden* Teilmengen, diejenigen mit *gerader* Elementzahl, einer n-elementigen Menge ist ebenso groß ist wie die der ungeraden. Man sieht dies aber auch ganz leicht per Induktion durch die *Rekursion*

$$\boldsymbol{T_0(x) \equiv 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\ (n \ge 1)},$$

die aus $\cos((n \pm 1) \arccos x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) \mp \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$ folgt. Wenn x von -1 bis 1 läuft, läuft $\arccos x$ von π bis 0 und $n \arccos x$ von $n\pi$ bis 0, also $\cos(n \arccos x)$, bei $\cos n\pi = (-1)^n$ beginnend, n-mal zwischen -1 und 1 hin und her, endend bei $\cos 0 = 1$. Das Polynom T_n hat also n einfache Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$. Diese Nullstellen kann man auch explizit benennen; denn die Nullstellen des Cosinus in $[0, n\pi]$ sind $\xi_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ $(1 \le k \le n)$, also sind die *Nullstellen* von T_n die Punkte $\boldsymbol{x_k = \cos\big(\frac{2k-1}{2n}\pi\big)\ (1 \le k \le n)}$.

Wohl wichtigste Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome:

> *Einziges* Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit führendem Koeffizienten $a_n = 2^{n-1}$, für das $\boldsymbol{|p(x)| \le 1\ (-1 \le x \le 1)}$ gilt, ist $p(x) = T_n(x)$.

Beweis: Erfüllt $p(x)$ die Bedingungen, hat $T_n - p$ höchstens den Grad $n-1$. An den Stellen $x_k^* = \cos\big(\frac{k}{n}\pi\big)$ $(0 \le k \le n)$ nimmt T_n abwechselnd die Werte ± 1 an, so dass mit $\tilde{p}(x) := T_n(x) - p(x)$ gilt: $\tilde{p}(x_0^*) \ge 0$, $\tilde{p}(x_1^*) \le 0$, $\tilde{p}(x_2^*) \ge 0$, usw. In jedem Intervall $[x_{k+1}^*, x_k^*]$ hat $\tilde{p}$ also eine Nullstelle. Ist einer der Intervall-*Rand*punkte $x_k^*\,(1 \le k < n)$ Nullstelle, ist es gemeinsames *Extremum* von T_n und p, also *doppelte* Nullstelle. Die Gesamtnullstellen-Ordnung ist also mindestens so groß wie die Anzahl n der Teilintervalle, weshalb $\tilde{p} \equiv 0$ folgt. ■

Orthogonalität: Es gilt $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0\ (m \ne n)}$.

Denn durch die Substitution $\arccos x = \varphi, \mathrm{d}\varphi = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ entsteht $\int_0^\pi \cos m\varphi \, \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi$ und damit $\int_0^\pi \frac{1}{2}\big(\cos(m+n)\varphi + \cos(m-n)\varphi\big)\mathrm{d}\varphi = 0$. (Und $\dots = \frac{\pi}{2}$ im Falle $m = n \ne 0$.)

Verkettung: Es gilt $\boldsymbol{T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)\ (x \in \mathbb{R})}$.

Denn $\arccos(\cos x) = x$ $(0 \le x \le \pi)$, $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ $(\pi \le x \le 2\pi)$, so dass allgemein $\cos m\big(\arccos(\cos n \arccos x)\big) = \cos m\big(\pm n \arccos x + 2k\pi\big) = \cos mn \arccos x$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$.