KAPITEL 3

Projektive Räume, projektive algebraische Mengen und ebene projektive Kurven

Projektive Räume sollen affine Räume vervollständigen bzw. kompaktifizieren.

1. Projektive Räume

Definition.

- *Auf $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ wird wie folgt eine Äquivalenzrelation definiert:*

$$(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \iff b_0 = \lambda a_0, \dots b_n = \lambda a_n \text{ für ein } \lambda \in \overline{K}^* \iff$$
$$\iff (b_0, \dots, b_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \text{ für ein } \lambda \in \overline{K}^*.$$

- *Die Äquivalenzklasse von $(a_0, \dots, a_n)$ wird mit $(a_0 : \dots : a_n)$ bezeichnet. Dann gilt also*

$$(a_0 : \dots : a_n) = (b_0 : \dots : b_n) \iff (b_0, \dots, b_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \text{ für ein } \lambda \in \overline{K}^*$$

  und

$$(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \dots : \lambda a_n) \text{ für alle } \lambda \in \overline{K}^*.$$

- *Die Menge der Äquivalenzklassen heißt n-dimensionaler projektiver Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\overline{K})$. Also*

$$\mathbb{P}^n = \{(a_0 : \dots : a_n) : (a_0, \dots, a_n) \in \overline{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

- *$\mathbb{P}^1$ bezeichnet man als projektive Gerade, $\mathbb{P}^2$ als projektive Ebene.*
- *Wie im affinen Fall definiert man die Menge der K-rationalen Punkte von $\mathbb{P}^n$ durch*

$$\mathbb{P}^n(K) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n : a_i \in K\}.$$

Beispiel: In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ über $\mathbb{Q}$ gilt:

$$(2 : 3 : 5) = (1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{2}) = (\frac{2}{3} : 1 : \frac{5}{3}) = (\frac{2}{5} : \frac{3}{5} : 1) = (-4 : -6 : -10) = \dots$$

Bemerkung: Aus $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ folgt noch nicht $a_i \in K$, wie das Beispiel

$$(\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{2}}) = (2 : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ mit } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

zeigt.

Da die Elemente von $\mathbb{P}^n$ Äquivalenzklassen sind, ist es sinnvoll, ein Repräsentantensystem anzugeben. Wir machen dies zunächst für $\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^2$.

- **Ein Repräsentantensystem für $\mathbb{P}^1$.** Sei $(a : b) \in \mathbb{P}^1$. Dann ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
  - **Fall $a \neq 0$:** Hier ist $(a : b) = (1 : \frac{b}{a})$.
  - **Fall $a = 0$:** Da dann $b \neq 0$ ist, folgt $(a : b) = (0 : b) = (0 : 1)$.

  Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}^1 = \{(1 : x) : x \in \overline{K}\} \cup \{(0 : 1)\}.$$

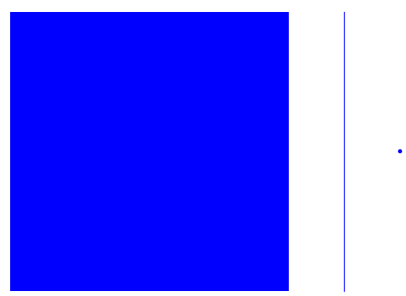
  Wegen

$$(1 : x) = (1 : x') \iff x = x' \quad \text{und} \quad (1 : x) \neq (0 : 1)$$

Datei: algku3.tex. Version vom 19.7.2021 handelt es sich tatsächlich um ein Repräsentantensystem. Mengenmäßig entsteht $\mathbb{P}^1$ also, indem man zu $\mathbb{A}^1 \simeq \overline{K}$ einen Punkt hinzunimmt. Das folgende Bild ist nur mengenmäßig zu verstehen.

- **Ein Repräsentantensystem für $\mathbb{P}^2$.** Sei $(a:b:c) \in \mathbb{P}^2$.
  - **Fall $a \neq 0$:** Dann ist $(a:b:c) = (1 : \frac{b}{a} : \frac{c}{a})$.
  - **Fall $a = 0$, $b \neq 0$:** Dann ist $(a:b:c) = (0:b:c) = (0:1:\frac{c}{b})$.
  - **Fall $a = 0$, $b = 0$:** Da $c \neq 0$ gilt, folgt $(a:b:c) = (0:0:c) = (0:0:1)$.

  Wir erhalten
  $$\mathbb{P}^2 = \{(1:x:y) : x,y \in \overline{K}\} \cup \{(0:1:z) : z \in \overline{K}\} \cup \{(0:0:1)\}.$$
  (Auch hier handelt es sich um ein Repräsentantensystem.) Mengenmäßig entsteht $\mathbb{P}^2$ also, indem man zu $\mathbb{A}^2 \simeq \overline{K}^2$ eine Gerade $\mathbb{A}^1 \simeq \overline{K}$ und einen Punkt hinzunimmt. Das folgende Bild soll diese mengenmäßige Zerlegung darstellen:



Überdeckung der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ durch affine Ebenen $\mathbb{A}^2$: Wir definieren für $i = 0,1,2$
$$U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_i \neq 0\} \text{ und } H_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_i = 0\},$$
sodass sich also eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{P}^2 = U_i \cup H_i$ ergibt.
Wir definieren
$$\begin{aligned} \phi_0 &: \mathbb{A}^2 \to U_0, && (x,y) \mapsto (1:x:y), \\ \phi_1 &: \mathbb{A}^2 \to U_1, && (u,v) \mapsto (u:1:v), \\ \phi_2 &: \mathbb{A}^2 \to U_2, && (r,s) \mapsto (r:s:1). \end{aligned}$$
Die Abbildungen ϕ_i sind bijektiv mit den Umkehrabbildungen
$$\begin{aligned} \phi_0^{-1} &: U_0 \to \mathbb{A}^2, && (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}), \\ \phi_1^{-1} &: U_1 \to \mathbb{A}^2, && (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}), \\ \phi_2^{-1} &: U_2 \to \mathbb{A}^2, && (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}). \end{aligned}$$
Wir können also U_i mit $\mathbb{A}^2$ identifizieren. Zur Unterscheidung verwenden wir in U_0 die affinen Koordinaten x,y, in U_1 die affinen Koordinaten u,v und in U_2 die affinen Koordinaten r,s.

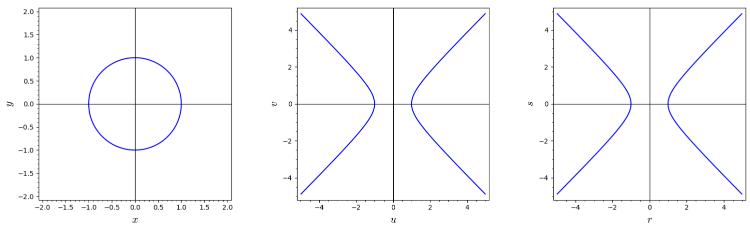
Natürlich gilt
$$\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2.$$

Beispiel: Wir betrachten (über $\mathbb{R}$)

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_1^2 + x_2^2 = x_0^2\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} X \cap U_0 &= \{(1 : x : y) : x^2 + y^2 = 1\}, \\ X \cap U_1 &= \{(u : 1 : v) : u^2 - v^2 = 1\}, \\ X \cap U_2 &= \{(r : s : 1) : r^2 - s^2 = 1\}. \end{aligned}$$

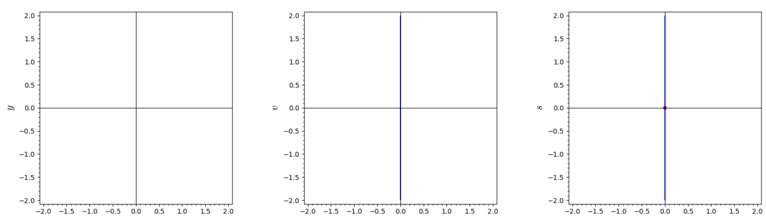


X schaut in U_0 wie ein Kreis $x^2 + y^2 = 1$, in U_1 und U_2 wie eine Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ aus. Kreis und Hyperbel sind also nur verschiedene affine Ansichten von $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$.
Beispiel: Wir betrachten in $\mathbb{P}^2$

$$H_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} H_0 \cap U_0 &= \emptyset, \\ H_0 \cap U_1 &= \{(u : 1 : v) : u = 0\}, \\ H_0 \cap U_2 &= \{(r : s : 1) : r = 0\}. \end{aligned}$$

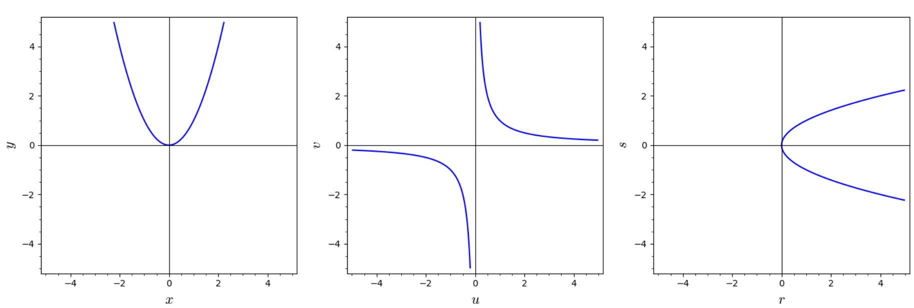


In U_0 ist kein Punkt von H_0 zu sehen. In U_1 sind fast alle Punkte von H_0 zu sehen, bis auf den Punkt $(0 : 0 : 1)$, der nur in U_2 mit den Koordinaten $(r, s) = (0, 0)$ zu sehen ist (und hier rot gezeichnet ist).
Beispiel: Wir betrachten (über $\mathbb{R}$)

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 x_2 - x_1^2 = 0\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} X \cap U_0 &= \{(1 : x : y) : y = x^2\}, \\ X \cap U_1 &= \{(u : 1 : v) : uv = 1\}, \\ X \cap U_2 &= \{(r : s : 1) : r = s^2\}. \end{aligned}$$



X schaut in U_0 wie eine Parabel, in U_1 wie eine Hyperbel, in U_2 wie eine Parabel aus. Hyperbel und Parabel sind also nur verschiedene affine Ansichten von $x_0x_2 - x_1^2 = 0$.
Überdeckung von $\mathbb{P}^n$ durch affine Räume $\mathbb{A}^n$: Wir definieren für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} U_i &= \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}, \\ H_i &= \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i = 0\}, \end{aligned}$$

sodass sich eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{P}^n = U_i \cup H_i$ ergibt. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{A}^n \to U_0, &\qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n), \\ \phi_1 : \mathbb{A}^n \to U_1, &\qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : 1 : x_2 : \cdots : x_n), \\ \vdots &\qquad \vdots \\ \phi_n : \mathbb{A}^n \to U_n, &\qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : x_2 : \cdots : x_n : 1). \end{aligned}$$

Die Abbildungen ϕ_i sind bijektiv mit den Umkehrabbildungen

$$\phi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{A}^n, \quad (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Wir können also U_i mit $\mathbb{A}^n$ identifizieren.
Überdeckung von $\mathbb{P}^1$ durch affine Geraden $\mathbb{A}^1$: Wir definieren für $i = 0, 1$

$$U_i = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 : x_i \neq 0\} \text{ und } H_i = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 : x_i = 0\},$$

sodass wir eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{P}^1 = U_i \cup H_i$ haben. H_i ist jeweils nur ein Punkt:

$$H_0 = \{(0 : 1)\} \quad \text{und} \quad H_1 = \{(1 : 0)\}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{A}^1 \to U_0, &\qquad x \mapsto (1 : x), \\ \phi_1 : \mathbb{A}^1 \to U_1, &\qquad u \mapsto (u : 1). \end{aligned}$$

Die Abbildungen ϕ_i sind bijektiv mit den Umkehrabbildungen

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1} : U_0 \to \mathbb{A}^1, &\qquad (x_0 : x_1) \mapsto \frac{x_1}{x_0}, \\ \phi_1^{-1} : U_1 \to \mathbb{A}^1, &\qquad (x_0 : x_1) \mapsto \frac{x_0}{x_1}. \end{aligned}$$

Wir können daher U_i mit $\mathbb{A}^1$ bzw. $\overline{K}$ identifizieren. Zur Unterscheidung verwenden wir in U_0 die affine Koordinate x, in U_1 die affine Koordinate u. Natürlich gilt $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$.
Wir betrachten nochmals einen Punkt $P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$.

- **Fall $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$:** Dann ist
$$P = (x_0 : x_1) = (1 : \frac{x_1}{x_0}) = (\frac{x_0}{x_1} : 1).$$
Der Punkt hat also in U_0 die Koordinate $x = \frac{x_1}{x_0}$, in U_1 die Koordinate $u = \frac{x_0}{x_1}$. Insbesondere gilt $u = \frac{1}{x}$.
- **Fall $x_0 = 0$:** Dann ist $x_1 \neq 0$ und damit $P = (0 : 1)$. In U_0 ist der Punkt P nicht zu sehen, in U_1 hat der Punkt die Koordinate $u = 0$.
- **Fall $x_1 = 0$:** Dann ist $x_0 \neq 0$ und daher $P = (1 : 0)$. In U_0 hat der Punkt P die Koordinate $x = 0$, in U_1 ist der Punkt nicht zu sehen.

Einbettung von $\mathbb{A}^n$ in $\mathbb{P}^n$: Mit obiger Abbildung ϕ_0 identifiziert man oft $\mathbb{A}^n$ mit U_0, d.h. man denkt sich $\mathbb{A}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{A}^n \simeq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \simeq (1 : x_1 : \cdots : x_n).$$

Damit ist

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n = H_0 = \{(0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}.$$

H_0 wird auch die „unendlich ferne Hyperebene“, im Fall $n = 1$ der „unendlich ferne Punkt“, im Fall $n = 2$ die „unendlich ferne Gerade“ genannt.

Im Fall $\mathbb{P}^1$ schreibt man auch $\infty = (0:1)$ und hat dann

$$\mathbb{P}^1 = \{(1:x) : x \in \overline{K}\} \cup \{\infty\}.$$

(Der unendlich ferne Punkt ∞ hat die u-Koordinate 0.)

2. Projektive algebraische Mengen

Vorbemerkung: Wir wollen nun algebraische Teilmengen im $\mathbb{P}^n$ definieren als Nullstellenmenge von Polynomen, wie wir das auch bei den algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^n$ gemacht haben.
Man kann aber Polynome $f \in \overline{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ nicht einfach als Funktionen auf $\mathbb{P}^n$ auffassen, indem man einen Repräsentanten eines Punkts in ein Polynom einsetzt, wie folgendes Beispiel zeigen soll:

Beispiel: Wir betrachten das Polynom $f = 1 + x_0$ und den Punkt

$$P = (1:2) \in \mathbb{P}^1.$$

Repräsentanten von P sind die Paare $(\lambda, 2\lambda)$ (mit $\lambda \neq 0$). Nun ist

$$f(\lambda, 2\lambda) = 1 + \lambda.$$

Also nimmt f auf verschiedenen Repräsentanten von P verschiedene Werte an. Daher kann man „$f(P)$“ auf diese Weise nicht definieren.
Um die Nullstellenmenge eines Polynoms f in $\mathbb{P}^n$ zu definieren, werden wir folgende Bedingung an das Polynom f stellen: Für alle Punkte $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ wollen wir haben, dass gilt

$$f(a_0, \dots, a_n) = 0 \iff f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \overline{K}.$$

Dann liegt nämlich einer der beiden Fälle vor:

- $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ für alle $(a_0, \dots, n)$ mit $P = (a_0 : \dots : a_n)$. (Wir schreiben dafür auch $f(P) = 0$.)
- $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ für alle $(a_0, \dots, n)$ mit $P = (a_0 : \dots : a_n)$. (Wir schreiben dafür auch $f(P) \neq 0$.)

Diese Bedingung wird von den sogenannten homogenen Polynomen erfüllt.
Ein Polynom $f(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \overline{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ heißt **homogen vom Grad** d, falls gilt

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n) \text{ für alle } \lambda \in \overline{K}.$$

Äquivalent dazu ist, dass in f nur Monome vom Grad d auftreten, d.h. f hat die Form

$$f = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}.$$

Daher ist für $P \in \mathbb{P}^n$ die Aussage $f(P) = 0$ oder $f(P) \neq 0$ sinnvoll, d.h. unabhängig vom ausgewählten Repräsentanten für P.

Beispiele: In $\overline{K}[x_0, x_1, x_2]$ haben die homogenen Polynome vom Grad 1 die Gestalt

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

die homogenen Polynome vom Grad 2 sehen so aus:

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2.$$

Satz (Eulersche Relation). *Ist $f \in \overline{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d, so gilt*

$$d \cdot f = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i.$$

Beweis: Seien $p_0, p_1, \dots, p_n \in \overline{K}$ beliebig gegeben. Wir definieren

$$g(t) = f(tp_0, tp_1, \dots, tp_n).$$

Die Kettenregel liefert

$$g'(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tp_0, \dots, tp_n) \cdot p_i, \text{ also } g'(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0, \dots, p_n) \cdot p_i.$$

Da f homogen vom Grad d ist, gilt aber auch

$$g(t) = t^d f(p_0, \dots, p_n).$$

Differenzieren liefert

$$g'(t) = dt^{d-1} f(p_0, \dots, p_n) \text{ und } g'(1) = df(p_0, \dots, p_n).$$

Vergleich der beiden Darstellungen für $g'(1)$ ergibt

$$d \cdot f(p_0, \dots, p_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0, \dots, p_n) \cdot p_i.$$

Da die Gleichung für alle $p_0, p_1, \dots, p_n \in \overline{K}$ gilt, gilt sie auch für die Polynome. ■

Definition. *Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt* **algebraische Teilmenge in** $\mathbb{P}^n$, *falls es homogene Polynome $f_1, \dots, f_r \in \overline{K}[x_0, \dots, x_n]$ gibt mit*

$$X = \{P \in \mathbb{P}^n : f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\} = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}.$$

Man sagt, die algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ist über K definiert, falls es Polynome $g_1, \dots, g_s \in K[x_0, \dots, x_n]$ gibt mit $X = \{g_1 = \dots = g_s = 0\}$. In diesem Fall heißt

$$X(K) = X \cap \mathbb{P}^n(K)$$

die Menge der K-rationalen Punkte von X.

Bemerkung: Wir haben den Begriff „algebraische Menge“ für Teilmengen von $\mathbb{A}^n$ und für Teilmengen von $\mathbb{P}^n$ definiert. Zur Unterscheidung sprechen wir deswegen auch manchmal von **affinen algebraischen** und **projektiven algebraischen** Mengen.

Beispiele:

- $\mathbb{P}^n = \{0 = 0\}$ und $\emptyset = \{x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0\}$ sind algebraische Teilmengen des $\mathbb{P}^n$.
- Ein Punkt $P = (p_0 : p_1 : \dots : p_n) \in \mathbb{P}^n$ ist eine algebraische Teilmenge des $\mathbb{P}^n$, denn es gilt
$$\{P\} = \{p_j x_i - p_i x_j = 0 \text{ für alle } i, j\}.$$
- Sind $X = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$ und $Y = \{g_1 = \dots = g_s = 0\}$ algebraische Teilmengen des $\mathbb{P}^n$, so auch
$$X \cup Y = \{f_1 g_1 = \dots = f_1 g_s = \dots = f_r g_1 = \dots = f_r g_s = 0\}$$
und
$$X \cap Y = \{f_1 = \dots = f_r = g_1 = \dots = g_s = 0\}.$$
- Man kann auch zeigen, dass beliebige Durchschnitte algebraischer Mengen des $\mathbb{P}^n$ wieder algebraisch sind.

Bemerkung: Die algebraischen Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ erfüllen die Axiome für die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie. Man nennt diese Topologie die **Zariski-Topologie**.
Als konkretes geometrisches Objekt wollen wir uns zunächst die Geraden in $\mathbb{P}^2$ etwas genauer anschauen:

Definition. *Eine* **Gerade** *in $\mathbb{P}^2$ ist eine Teilmenge der Gestalt*

$$G = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$$

mit $a_0, a_1, a_2 \in \overline{K}$ und $(a_0, a_1, a_2) \neq 0$.

Die „unendlich ferne Gerade“ $H_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}$ ist also die durch $x_0 = 0$ definierte Gerade.

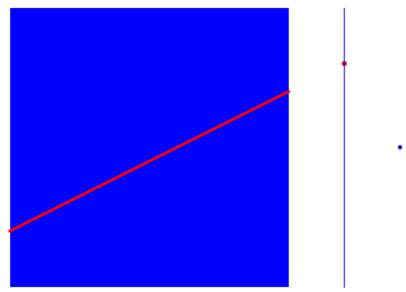
Es ist klar, dass für $\lambda \neq 0$ durch $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ und $\lambda a_0 x_0 + \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 = 0$ die gleichen Geraden definiert werden.

Der affine Teil von Geraden im $\mathbb{P}^2$: Wir denken uns $\mathbb{A}^2 \simeq U_0 = \{(1 : x : y) : x, y \in \overline{K}\} \subseteq \mathbb{P}^2$. Es ist $\mathbb{P}^2 \setminus U_0 = H_0 = \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2\}$.
Sei G gegeben durch $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ (mit $(a_0, a_1, a_2) \neq 0$). Dann ist

$$\begin{aligned} G \cap U_0 &= \{(1 : x : y) \in \mathbb{P}^2 : a_0 + a_1x + a_2y = 0\}, \\ G \cap H_0 &= \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Ist $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, so ist $G \cap U_0$ also die affine Gerade $a_0 + a_1x + a_2y = 0$ und $G \cap H_0 = \{(0 : a_2 : -a_1)\}$ besteht aus einem Punkt.



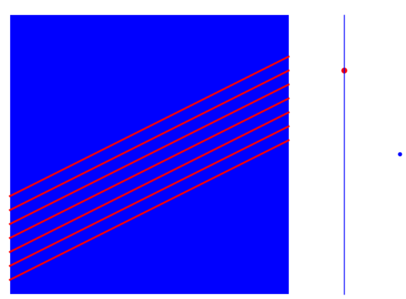
- Ist $(a_1, a_2) = (0, 0)$, so ist $G \cap U_0 = \emptyset$ und $G = H_0$.

Bis auf die unendlich ferne Gerade H_0 sieht man also alle Geraden von $\mathbb{P}^2$ als affine Geraden im endlichen Teil $\mathbb{A}^2$.
Man überlegt sich nun schnell, dass die Zuordnung

$$\{\text{Geraden in } \mathbb{P}^2\} \setminus \{H_0\} \to \{\text{Geraden in } \mathbb{A}^2\}, \quad G \mapsto G \cap U_0$$

eine Bijektion ist. (Der Geraden $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ im $\mathbb{P}^2$ wird die Gerade $a_0 + a_1x + a_2y = 0$ im $\mathbb{A}^2$ zugeordnet.)
Welche Punkte haben affine Geraden im Unendlichen? Nach der letzten Bemerkung können wir jede affine Gerade uns denken als $G \cap U_0$ bzw. $G \cap \mathbb{A}^2$ mit einer projektiven Geraden G. Was ist dann $G \cap H_0$?

- Die affine Gerade $y = ax + b$ ist der endliche Teil der projektiven Geraden $bx_0 + ax_1 - x_2 = 0$. Der Schnitt mit $H_0 = \{x_0 = 0\}$ ergibt den Punkt $(0 : 1 : a)$. (Variiert man b, so erhält man parallele Geraden, die sich im Unendlichen im Punkt $(0 : 1 : a)$ schneiden.)



- Die affine Gerade $x = c$ ist der endliche Teil der projektiven Geraden $cx_0 - x_1 = 0$. Der Schnitt mit H_0 ergibt den Punkt $(0 : 0 : 1)$. (Verschiedene Werte von c ergeben parallele Geraden im Endlichen.)

Wir sehen insbesondere: Schneiden sich zwei Geraden auf der unendlich fernen Geraden, so sind ihre affinen Teile parallele Geraden.
Weitere Betrachtungen zu Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$:

- Zwei Geraden

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}, \\ G_2 &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\} \end{aligned}$$

können in folgenden Beziehungen stehen:
- Sind (a_0, a_1, a_2) und (b_0, b_1, b_2) linear unabhängig, so gilt
$$G_1 \cap G_2 = \{(p_0 : p_1 : p_2)\},$$
wobei (p_0, p_1, p_2) durch
$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt ist. (G_1 und G_2 schneiden sich in einem Punkt.)
- Sind (a_0, a_1, a_2) und (b_0, b_1, b_2) linear abhängig, so gilt offensichtlich
$$G_1 = G_2.$$
(G_1 und G_2 sind identisch.)

• Seien $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ und $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^2$.
  - Es gibt genau eine Gerade G, die P und Q enthält, nämlich $G = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$, wobei (a_0, a_1, a_2) eine nichttriviale Lösung der Gleichung
$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ist. (Je zwei nichttriviale Lösungen unterscheiden sich nur um eine multiplikative Konstante.)
  - Alternativ kann man die G beschreibende lineare Gleichung auch in der Form
$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$
angeben.
  - Man kann die Gerade durch P und Q auch in parametrisierter Form angeben:
$$G = \{(p_0u + q_0v : p_1u + q_1v : p_2u + q_2v) \in \mathbb{P}^2 : (u : v) \in \mathbb{P}^1\}.$$

• Da $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ und $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ genau dann die gleiche Gerade in $\mathbb{P}^2$ definieren, wenn gilt $(a_0 : a_1 : a_2) = (b_0 : b_1 : b_2)$, so ist klar, dass die Zuordnung
$$\mathbb{P}^2 \to \{\text{Geraden in } \mathbb{P}^2\}, \quad (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$
eine Bijektion ist. Man sagt: Die Geraden in $\mathbb{P}^2$ bilden wieder einen $\mathbb{P}^2$.

• Drei Punkte $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$, $R = (r_0 : r_1 : r_2)$ der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn gilt
$$\det \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{pmatrix} = 0.$$
Eine zugehörige Gerade G mit der Gleichung $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ergibt sich dann aus der Bedingung
$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Bemerkung: Ist $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive algebraische Menge, gegeben durch
$$X = \{f_1(x_0, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\},$$
wo die f_i's homogene Polynome sind, so ist $X \cap \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge, gegeben durch die Gleichungen
$$X \cap \mathbb{A}^n = \{f_1(1, x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(1, x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Wichtiger ist die Umkehrung:

Definition. *Ist $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge, so denken wir uns X mit $X \subseteq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ als Teilmenge des $\mathbb{P}^n$. Die kleinste projektive algebraische Menge, die X enthält, heißt der projektive Abschluss $\overline{X}$ von X. (In der Zariski-Topologie ist $\overline{X}$ der topologische Abschluss von X in $\mathbb{P}^n$.)*

Wie berechnet man den projektiven Abschluss?

Vorbemerkung: Um die rationalen Lösungen der Gleichung $f = 5x^2 + 19y^2 - 1 = 0$ zu bestimmen, kann man substituieren $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$ und dann nach den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $g = 5X^2 + 19Y^2 - Z^2 = 0$ suchen. ($(1, 2, 9)$ ist eine Lösung.) Dies entspricht dem Übergang vom Affinen zum Projektiven.

Homogenisierung von Polynomen: Sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ ein Polynom vom Grad d, d.h. man kann schreiben

$$f = \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

wobei es ein Tupel $(j_1, \ldots, j_n)$ gibt mit

$$j_1 + \cdots + j_n = d \quad \text{und} \quad a_{j_1\ldots j_n} \neq 0.$$

Beim Homogenisieren machen wir jedes Monom $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ durch eine neue Variable x_0 zu einem Monom vom Grad d:

$$x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \quad \longrightarrow \quad x_0^{d-i_1-\cdots-i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Das homogenisierte Polynom ist dann

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} a_{i_1\ldots i_n} x_0^{d-i_1-\cdots-i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \\ &= \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_n = d} a_{i_1\ldots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann $f^*(1, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Man kann die Homogenisierung auch etwas anders schreiben:

$$\begin{aligned} f^*(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} a_{i_1\ldots i_n} x_0^{d-i_1-\cdots-i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} a_{i_1\ldots i_n} x_0^d (\frac{x_1}{x_0})^{i_1} \ldots (\frac{x_n}{x_0})^{i_n} = \\ &= x_0^d \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} a_{i_1\ldots i_n} (\frac{x_1}{x_0})^{i_1} \ldots (\frac{x_n}{x_0})^{i_n} = \\ &= x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}). \end{aligned}$$

Beispiel: Das Polynom $f = x_1^3 + 5x_2x_3 - x_2^3 + 2$ hat Grad 3. Die Homogenisierung ist dann

$$f^* = x_1^3 + 5x_0x_2x_3 - x_2^3 + 2x_0^3.$$

Bemerkung: Bei der Homogenisierung von Polynomen $f(x, y)$ in zwei Variablen x, y werden wir meist x durch x_1 und y durch x_2 ersetzen. Dann erhält man

$$f^*(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}).$$

Etwas ausführlicher: Aus

$$f = \sum_{j+k \leq d} a_{jk} x^j y^k$$

erhält man

$$f^* = \sum_{j+k \leq d} a_{jk} x_0^{d-j-k} x_1^j x_2^k = \sum_{i+j+k=d} a_{jk} x_0^i x_1^j x_2^k.$$

(Manchmal findet man auch die Homogenisierung mit einer neuen Variablen z.)

Beispiel: Aus $f = x^3 + ax + b - y^2$ erhält man
$$f^* = x_1^3 + ax_0^2x_1 + bx_0^3 - x_0x_2^2.$$

Bemerkung: Sei $X = \{f_1 = \cdots = f_r = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n$ und f_i^* die Homogenisierung von f_i. Mit unserer Konvention gilt $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ und damit
$$X \subseteq \{f_1^* = \cdots = f_r^* = 0\},$$
also
$$\overline{X} \subseteq \{f_1^* = \cdots = f_r^* = 0\}.$$
Leider muss im Allgemeinen hier keine Gleichheit gelten.

Beispiel: Es ist
$$\{(0,0)\} = \{x = 0, y - x^2 = 0\},$$
aber
$$\{x_1 = 0, x_0x_2 - x_1^2 = 0\} = \{(1:0:0), (0:1:0)\},$$
während der projektive Abschluss natürlich
$$\{x_1 = 0, x_2 = 0\} = \{(1:0:0)\}$$
ist.

Wenn aber die algebraische Menge nur durch ein Polynom definiert wird, ist die Sache einfacher. Wir geben den folgenden Satz ohne Beweis an.

Satz. *Ist $X = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n$ mit $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, und ist $f^* \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ die Homogenisierung von f, so ist der projektive Abschluss von X einfach*
$$\overline{X} = \{f^* = 0\}.$$

Wir werden projektive algebraische Mengen der Gestalt $\{g(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ oft einfach durch die affine Gleichung $g(1, x_1, \ldots, x_n) = 0$ angeben, weil dies einfacher aussieht. Die Punkte $X \cap H_0$ werden auch die unendlich fernen Punkte von X genannt.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^2$ gegeben durch $y = x^2$. Homogenisieren liefert $x_0x_2 = x_1^2$. Es gibt einen unendlich fernen Punkt, nämlich $(0 : 0 : 1)$. Betrachtet man X im affinen Teil $x_1 \neq 0$, so kann man setzen $(x_0 : x_1 : x_2) = (u : 1 : v)$ und man erhält die Gleichung $uv = 1$. Parabel und Hyperbel sind also nur verschiedene affine Ansichten der gleichen projektiven Kurve.

Definition. *Eine projektive Transformation (oder ein projektiver Koordinatenwechsel) ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, sodass eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\overline{K})$ existiert mit*
$$\phi(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n) \iff A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in \overline{K}^*.$$
ϕ ist offensichtlich bijektiv, ϕ^{-1} ist eine projektive Transformation, die durch die Matrix A^{-1} beschrieben wird.
Zwei Mengen $V, W \subseteq \mathbb{P}^n$ heißen projektiv äquivalent, wenn es eine projektive Transformation ϕ gibt mit $W = \phi(V)$. Die Mengen V, W heißen projektiv äquivalent über K, wenn die Matrix A in $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ gewählt werden kann.

Lemma. *Seien $P, Q, R \in \mathbb{P}^2$ drei verschiedene Punkte der projektiven Ebene. Liegen P, Q, R nicht auf einer Geraden, so gibt es einen projektiven Koordinatenwechsel mit*
$$\phi(P) = (1:0:0), \quad \phi(Q) = (0:1:0), \quad \phi(R) = (0:0:1).$$
Sind $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^2$ vier Punkte der projektiven Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, so gibt es einen projektiven Koordinantenwechsel mit
$$\phi(P) = (1:0:0), \quad \phi(Q) = (0:1:0), \quad \phi(R) = (0:0:1), \quad \phi(S) = (1:1:1).$$

Beweis: Sei $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$, $R = (r_0 : r_1 : r_2)$. Da P, Q, R nicht auf einer Geraden liegen, ist ψ mit

$$\psi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ein projektiver Koordinatenwechsel mit

$$\psi((1:0:0)) = P, \quad \psi((0:1:0)) = Q, \quad \psi((0:0:1)) = R.$$

Mit $\phi = \psi^{-1}$ folgt dann die erste Aussage.
Für die zweite Behauptung können wir nun o.E.

$$P = (1:0:0), \quad Q = (0:1:0), \quad R = (0:0:1), \quad S = (s_0 : s_1 : s_2)$$

annehmen. P und Q liegen auf der Geraden $x_2 = 0$, P und R auf der Geraden $x_1 = 0$, Q und R auf der Geraden $x_0 = 0$. Da S auf keiner der Geraden liegen soll, ist $s_0, s_1, s_2 \neq 0$. Dann ist

$$\rho \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ein projektiver Koordinatenwechsel mit

$$\rho((1:0:0)) = (1:0:0), \quad \rho((0:1:0)) = (0:1:0),$$
$$\rho((0:0:1)) = (0:0:1), \quad \rho((1:1:1)) = S,$$

sodass ρ^{-1} ein geeigneter Koordinantenwechsel ist. ■

3. Ebene projektive Kurven

Definition. *Eine ebene projektive Kurve C über K vom Grad $d \geq 1$ wird durch ein homogenes Polynom $f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad d gegeben. (Man sagt auch, dass C durch die Gleichung $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ definiert wird.) Das zugehörige geometrische Objekt ist die Nullstellenmenge*

$$C(\overline{K}) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : f(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Die Menge

$$C(K) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K) : f(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

heißt die Menge der K-rationalen Punkte von C. Etwas allgemeiner betrachtet man für einen Oberkörper L von K die Menge der L-rationalen Punkte von C:

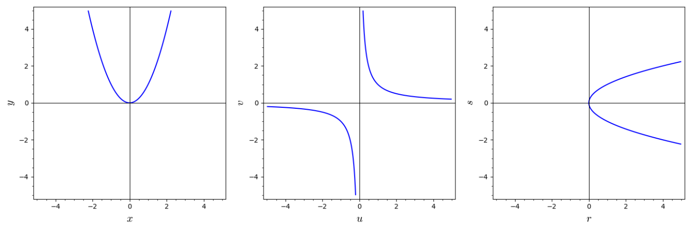
$$C(L) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(L) : f(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Ist $c \in K^*$, so unterscheidet man nicht zwischen der durch $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ und der durch $cf(x_0, x_1, x_2) = 0$ definierten Kurve.
Die Kurve C heißt irreduzibel über K, wenn $f(x_0, x_1, x_2)$ als Polynom über K irreduzibel ist, C heißt absolut irreduzibel, wenn $f(x_0, x_1, x_2)$ als Polynom über $\overline{K}$ irreduzibel ist.

Beispiele:

- Eine Gerade in $\mathbb{P}^2$, gegeben als $G = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$ können wir mit einer projektiven ebenen Kurve vom Grad 1, gegeben durch das Polynom $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, identifizieren.
- Ebene projektive Kurven vom Grad 2 nennt man Quadriken, Kurven vom Grad 3 heißen Kubiken.
- Wir betrachten die durch $f(x_0, x_1, x_2) = x_0x_2 - x_1^2$ definierte Quadrik Q. Wir haben bereits früher gesehen, wie die Quadrik Q in den affinen Teilen U_i aussieht:

$$\begin{aligned} Q(\overline{K}) \cap U_0 &= Q(\overline{K}) \cap \{(1 : x : y) : (x, y) \in \mathbb{A}^2\} = \{(1 : x : y) : y = x^2\}, \\ Q(\overline{K}) \cap U_1 &= Q(\overline{K}) \cap \{(u : 1 : v) : (u, v) \in \mathbb{A}^2\} = \{(u : 1 : v) : uv = 1\}, \\ Q(\overline{K}) \cap U_2 &= Q(\overline{K}) \cap \{(r : s : 1) : (r, s) \in \mathbb{A}^2\} = \{(r : s : 1) : r = s^2\}. \end{aligned}$$



Die projektive Quadrik sieht also in den affinen Teilen wie eine Parabel oder wie eine Hyperbel aus.

Sei die ebene projektive Kurve C gegeben durch das homogene Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$. Mit der Identifikation $\mathbb{A}^2 \simeq U_0 = \{(1 : x : y)\} \subseteq \mathbb{P}^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} C(\overline{K}) \cap \mathbb{A}^2 &= \{(1 : x : y) \in \mathbb{P}^2 : f(1, x, y) = 0\} \simeq \\ &\simeq \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : f(1, x, y) = 0\} \quad \text{ und} \\ C(\overline{K}) \cap H_0 &= \{(0 : z_1 : z_2) : f(0, z_1, z_2) = 0\}. \end{aligned}$$

Ist $f(1, x, y)$ ein nichtkonstantes Polynom, so entspricht der affine Teil von C also der affinen Kurve $f(1, x, y) = 0$. Ist $f(1, x, y)$ konstant, so ist $f = cx_0^d$ und mengenmäßig $C(\overline{K}) = H_0$.

Definition. *Sei C eine affine ebene Kurve gegeben durch ein Polynom $f(x, y) \in K[x, y]$ vom Grad d. Ist dann*

$$f^*(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$$

die Homogenisierung von f, so heißt die durch $f^*(x_0, x_1, x_2)$ definierte projektive ebene Kurve der projektive Abschluss $\overline{C}$ von C.

Beispiel: Wir betrachten die Parabel C mit der Gleichung $f = y - x^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2$. Die Homogenisierung von $f(x, y)$ ist $f^*(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = x_0 x_2 - x_1^2$. Der projektive Abschluss von C ist also $\overline{C}$, gegeben durch das homogene Polynom $f^* = x_0 x_2 - x_1^2$.

Überlegung: Sei eine ebene affine Kurve C gegeben durch das Polynom $f(x, y) \in K[x, y]$. Wir schreiben

$$f(x, y) = \sum_{\ell=0}^{d} f_\ell(x, y), \quad f_\ell(x, y) \text{ homogen vom Grad } \ell, \quad f_d(x, y) \neq 0.$$

Dann definiert die Homogenisierung

$$f^*(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\ell=0}^{d} x_0^{d-\ell} f_\ell(x_1, x_2) = x_0^d f_0(x_1, x_2) + x_0^{d-1} f_1(x_1, x_2) + \cdots + x_0 f_{d-1}(x_1, x_2) + f_d(x_1, x_2)$$

den projektiven Abschluss $\overline{C}$ von C. Faktorisieren wir

$$f_d(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{d} (\lambda_i x_1 - \mu_i x_2),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \overline{C}(\overline{K}) \cap \mathbb{A}^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : f^*(1, x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : f(x, y) = 0\} = C(\overline{K}), \\ \overline{C}(\overline{K}) \cap H_0 &= \{(0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : f^*(0, z_1, z_2) = 0\} = \{(0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : f_d(z_1, z_2) = 0\} = \\ &= \{(0 : \mu_1 : \lambda_1), \ldots, (0 : \mu_d : \lambda_d)\}, \end{aligned}$$

wobei nicht alle Punkte $(0 : \mu_i : \lambda_i)$ notwendig verschieden sind. Wir nennen die Punkte von $\overline{C}(\overline{K}) \cap H_0$ auch die Punkte im Unendlichen der Kurve C.

Beispiel: Wir betrachten nochmals die affine Kurve C mit der Gleichung $y = x^2$, die also durch das Polynom $f(x, y) = y - x^2$ gegeben wird. Die Homogenisierung ist $f^*(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2 - x_1^2$. Der projektive Abschluss von C wird also durch $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ gegeben. Wegen

$$\overline{C}(\overline{K}) \cap H_0 = \{(0 : 0 : 1)\}$$

hat C nur einen Punkt im Unendlichen, nämlich $(0 : 0 : 1)$.

Lokale Betrachtung: Sei die projektve ebene Kurve C vom Grad d gegeben durch das Polynom $F(x_0, x_1, x_2)$. Wir schreiben

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\ell=0}^{d} x_0^{d-\ell} f_\ell(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad f(x, y) = F(1, x, y) = \sum_{\ell=0}^{d} f_\ell(x, y)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \\
\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \\
\frac{\partial F}{\partial x_0}(1, x, y) &= dF(1, x, y) - x\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x, y) - y\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, x, y) = df(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).
\end{aligned}$$

Sei weiter $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in C(\overline{K})$ ein Punkt der projektiven Kurve.
Wir betrachten den Fall $p_0 \neq 0$, d.h. $P = (1 : \frac{p_1}{p_0} : \frac{p_2}{p_0})$. Wegen $F(P) = F(p_0, p_1, p_2) = p_0^d f(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) = 0$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0})(x - \frac{p_1}{p_0}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0})(y - \frac{p_2}{p_0}) = \\
= \; & x\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) - \left(\frac{p_1}{p_0}\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) + \frac{p_2}{p_0}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0})\right) = \\
= \; & x\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) + y\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) - \left(dF(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) - \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0})\right) = \\
= \; & \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) + x\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) + y\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}) = \\
= \; & \frac{1}{p_0^{d-1}}\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2) + x\frac{\partial F}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2) + y\frac{\partial F}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2)\right)
\end{aligned}$$

hat (bis auf eine Konstante) die Homogenisierung (vom Grad 1)

$$x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2) + x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2) + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2).$$

Daher gilt: P ist auf dem affinen Teil der Kurve genau dann singulär, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) = 0.$$

Ist P ein glatter Punkt, so ist der projektive Abschluss der Tangente die Gerade

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)x_2 = 0.$$

Man definiert nun:

Definition. *Ist die projektive ebene Kurve C gegeben durch das Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$, so heißt $P \in C(\overline{K})$ ein singulärer Punkt, wenn gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0.$$

Im andern Fall heißt P nichtsingulärer oder glatter Punkt, die Gerade

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)x_2 = 0$$

heißt die Tangente an C in P.

Mit der vorangegangenen lokalen Betrachtung sieht man, dass man Singularitäten in affinen Teilen untersuchen kann. Natürlich muss man sich überlegen, dass diese Begriffe mit Koordinatenwechsel verträglich sind.

Beispiel: Der projektive Abschluss der durch $y^2 = x^3 - 2x$ definierten Kurve ist $x_0x_2^2 = x_1^3 - 2x_0^2x_1$, wird also beschrieben durch das Polynom

$$f = -2x_0^2x_1 - x_0x_2^2 + x_1^3.$$

Der Punkt $(2,2) \simeq (1:2:2)$ liegt auf der Kurve. Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -4x_0x_1 - x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_0^2 + 3x_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_0x_2$$

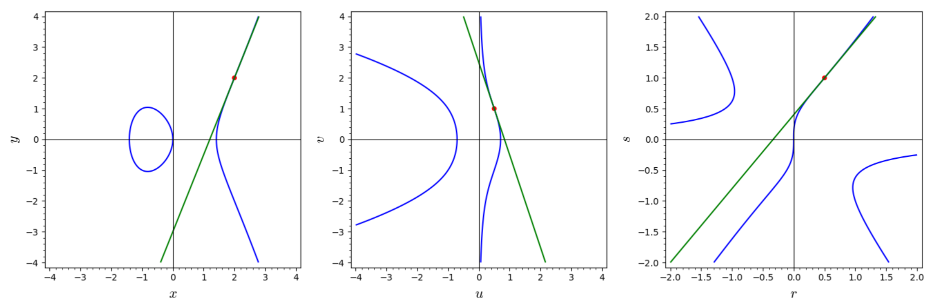
erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(1,2,2) = -12, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,2,2) = 10, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,2,2) = -4.$$

Man sieht, dass $(1:2:2)$ nichtsingulär ist und die Tangente

$$-12x_0 + 10x_1 - 4x_2 = 0, \qquad \text{also} \qquad 6x_0 - 5x_1 + 2x_2 = 0$$

besitzt. Die folgenden Bilder zeigen die Situation in den drei affinen Teilen U_0, U_1, U_2:



Schnitte von Kurven und Geraden: Wir wollen jetzt noch Schnitte von Kurven mit Geraden in $\mathbb{P}^2$ betrachten. Die Schnittvielfachkeit $(C \cdot G)_P$ in einem Punkt wird lokal definiert, indem man den Punkt in einem affinen Teil anschaut.

Wir geben eine algorithmische Darstellung der Berechnung der Schnittmultiplizität:

Die Kurve C sei durch das Polynom $f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$ definiert, die Gerade G sei durch eine Parametrisierung gegeben:

$$G = \{(p_0u + q_0v : p_1u + q_1v : p_2u + q_2v) : (u : v) \in \mathbb{P}^1\}.$$

(Die Punkte $(p_0 : p_1 : p_2)$ und $(q_0 : q_1 : q_2)$ liegen auf der Kurve.)

- Wir bilden das homogene Polynom

$$g(u,v) = f(p_0u + q_0v, p_1u + q_1v, p_2u + q_2v) \in K[u,v].$$

- Ist das Polynom $g(u,v) = 0$, so gilt $G(\overline{K}) \subseteq C(\overline{K})$ und das Polynom $f(x_0,x_1,x_2)$ spaltet über $\overline{K}$ einen Linearfaktor ab.
- Ist $g(u,v) \neq 0$, so erhält man über dem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ eine Zerlegung

$$g(u,v) = cu^{n_0} \prod_{i=1}^{r} (v - \alpha_i u)^{n_i}$$

  mit $c \in K^*$, paarweise verschiedenen $\alpha_i \in \overline{K}$, $n_0 \geq 0$, $r \geq 0$, $n_1 \geq 1, \ldots, n_r \geq 1$.
  - Ist $n_0 \geq 1$, so ist $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ ein Schnittpunkt mit Schnittmultiplizität $(C \cdot G)_Q = n_0$.
  - Für $i = 1, \ldots, r$ ist $P_i = (p_0 + \alpha_i q_0 : p_1 + \alpha_i q_1 : p_2 + \alpha_i q_2)$ ein Schnittpunkt mit Schnittmultiplizität $(C \cdot G)_{P_i} = n_i$.

Da das Polynom g Grad d hat, gilt $n_0 + n_1 + \cdots + n_r = d$, und damit

$$\sum_{P \in C(\overline{K}) \cap G(\overline{K})} (C \cdot G)_P = d.$$

Wir formulieren dieses wichtige Ergebnis nochmals als Satz:

Satz. *Sei G eine Gerade, C eine Kurve vom Grad d in $\mathbb{P}^2$ mit $G(\overline{K}) \not\subseteq C(\overline{K})$. Dann gilt*

$$\sum_{P \in C(\overline{K}) \cap G(\overline{K})} (C \cdot G)_P = d,$$

d.h. C schneidet G in genau d Punkten, wenn man mit Multiplizitäten zählt.

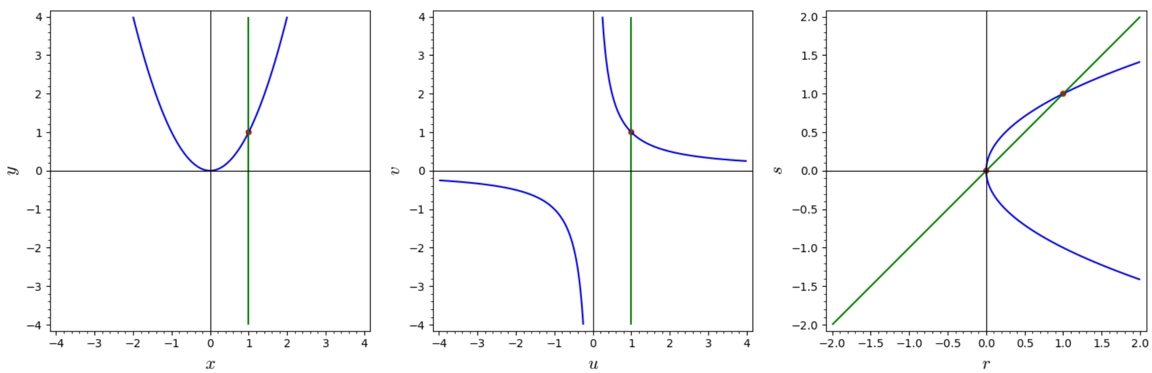
Beispiel: Wir betrachten die ebene Kurve C mit der affinen Gleichung $y = x^2$ bzw. der projektiven Gleichung $f = x_0x_2 - x_1^2 = 0$.
Wir wollen den Schnitt mit den Geraden G_c der Form $x = c$ bzw. $x_1 = cx_0$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} G_c &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_1 = cx_0\} = \{(x_0 : cx_0 : x_2) \in \mathbb{P}^2\} = \\ &= \{(u : cu : v) : (u : v) \in \mathbb{P}^1\}. \end{aligned}$$

Wir setzen die letzte Parametrisierung in f ein:

$$f(u, cu, v) = uv - c^2u^2 = u(v - c^2u).$$

Für $(u : v) = (0 : 1)$ erhält man den Schnittpunkt $(0 : 0 : 1)$ mit der Schnittmultiplizität 1, für $(u : v) = (1 : c^2)$ erhält man den Schnittpunkt $(1 : c : c^2)$, ebenfalls mit Schnittmultiplizität 1. Die Bilder zeigen die Situation in den drei affinen Teilen U_0, U_1, U_2:



Bemerkung: Ist C eine absolut irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad $d \geq 2$, so schneidet jede Gerade die Kurve in genau d Punkten, wenn man mit Vielfachheiten zählt.

Beispiel: Sei Q eine absolut irreduzible projektive ebene Quadrik. Jede Tangente schneidet die Quadrik genau in einem Punkt, und zwar mit Vielfachheit 2. Insbesondere besitzt Q keine Wendepunkte.

Bemerkung: Der Satz ist ein Spezialfall des Satzes von Bézout, der besagt, dass sich ebene projektive Kurven C und D in genau $\mathrm{grad}(C) \cdot \mathrm{grad}(D)$ Punkten schneiden, wenn man mit Multiplizitäten zählt und wenn es nur endlich viele Schnittpunkte gibt.
Beispiel: Wir betrachten wieder den projektiven Abschluss der durch $y^2 = x^3 - 2x$ gegeben Kurve, der durch

$$f = -2x_0^2x_1 - x_0x_2^2 + x_1^3$$

beschrieben wird. Die Tangente im Punkt $P = (1 : 2 : 2)$ wird durch $6x_0 - 5x_1 + 2x_2$ beschrieben, lässt sich also durch die Gleichung

$$x_2 = -3x_0 + \frac{5}{2}x_1$$

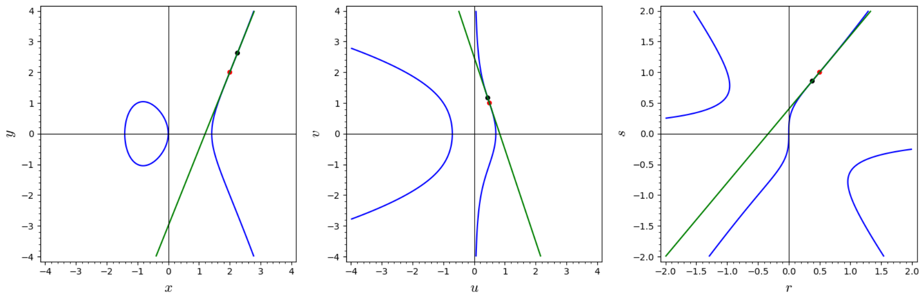
beschreiben. Um den Schnitt der Tangente mit der Kurve zu bestimmen, verwenden wir die letzte Darstellung (mit den Parametern x_0, x_1), wir setzen x_2 in f ein:

$$f(x_0, x_1, -3x_0 + \frac{5}{2}x_1) = -9x_0^3 + 13x_0^2x_1 - \frac{25}{4}x_0x_1^2 + x_1^3 = (x_1 - 2x_0)^2(x_1 - \frac{9}{4}x_0).$$

$(x_0 : x_1) = (1 : 2)$ liefert den Punkt $P = (1 : 2 : 2)$ mit Schnittmultiplizität 2, $(x_0 : x_1) = (1 : \frac{9}{4})$ liefert den neuen Punkt

$$Q = (1 : \frac{9}{4} : \frac{21}{8}) = (\frac{4}{9} : 1 : \frac{7}{6}) = (\frac{8}{21} : \frac{6}{7} : 1)$$

mit Schnittmultiplizität 1.



Die Tangente schneidet die Kurve in drei Punkten, wenn man mit Vielfachheiten zählt. Obwohl die Tangente ursprünglich wie eine Wendetangente aussah, ist es doch keine.

DEFINITION. *Ein nichtsingulärer Punkt P einer projektiven ebenen Kurve C heißt* **Wendepunkt**, *falls die Tangente T in P die Kurve mit Multiplizität ≥ 3 in P schneidet, d.h. $(C \cdot T)_P \geq 3$. Die Tangente wird dann auch eine* **Wendetangente** *von C genannt.*

Dass ein Punkt ein Wendepunkt ist, ist eine lokale Eigenschaft, d.h. kann in den affinen Teilen untersucht werden. Für die globale Beschreibung von Wendepunkten ist folgende Definition wichtig:

DEFINITION. *Sei C eine projektive ebene Kurve vom Grad $d \geq 3$, gegeben durch ein homogenes Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$ vom Grad d. Dann heißt das Polynom*

$$H_f = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

die **Hessesche** *von f. H_f ist homogen vom Grad $3(d-2)$. Ist $H_f \neq 0$, so heißt die durch $H_f = 0$ definierte Kurve die* **Hessesche Kurve** *(oder einfach die* **Hessesche***) H_C zu C.*

Bemerkungen:

- Hat der Grundkörper K die Charakteristik p, ist d der Grad des homogenen Polynoms $f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$ und gilt in K die Gleichheit $d = 1$, d.h. $p \mid d - 1$, so ist $H(f) = 0$ (als Polynom).
- Im Fall der Charakteristik 0 hat Hesse 1851 Folgendes behauptet, das 1876 von Gordan und Noether bewiesen wurde: H_f ist genau dann 0, wenn $f = 0$ aus lauter Geraden besteht, die durch einen Punkt gehen.

Beispiele:

- Für $f = x_0^d + x_1^d + x_2^d$ (mit $d \geq 3$) ergibt sich aus
$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = dx_0^{d-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = dx_1^{d-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = dx_2^{d-1}$$
für die Hessesche zu f
$$H_f = \begin{vmatrix} d(d-1)x_0^{d-2} & 0 & 0 \\ 0 & d(d-1)x_1^{d-2} & 0 \\ 0 & 0 & d(d-1)x_2^{d-2} \end{vmatrix} = d^3(d-1)^3 x_0^{d-2} x_1^{d-2} x_2^{d-2}.$$
- Für $f = x_0 x_1 x_2$ ist
$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = x_1 x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_0 x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_0 x_1,$$
und damit
$$H_f = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 x_1 x_2.$$

- Für $f = x_1x_2(x_1+x_2)$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$, was sofort $H_f = 0$ liefert. ($f = 0$ besteht aus drei Geraden, die alle durch den Punkt $(1:0:0)$ gehen.)

LEMMA. *Geht eine projektive ebene Kurve C bei einem Koordinatenwechsel in die Kurve C' über, so die Hessesche H_C von C in die Hessesche $H_{C'}$ von C'.*

Beweis: Die Kurve C werde definiert durch das homogene Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$. Bei einem Koordinatenwechsel werden durch

$$x_0 = a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{02}y_2, \quad x_1 = a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad x_2 = a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

neue Variable y_0, y_1, y_2 eingeführt. Definiert man

$$g(y_0, y_1, y_2) = f(a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{02}y_2, a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2),$$

so wird C' gegeben durch das Polynom g. Nun ist

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial x_0}(\dots)a_{0j} + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\dots)a_{1j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\dots)a_{2j}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(\dots)a_{0i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_0}(\dots)a_{1i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_0}(\dots)a_{2i}\right) a_{0j} + \dots = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_0}(\dots)a_{ki}\right) a_{0j} + \dots = \\
&= \sum_{l=0}^{2}\left(\sum_{k=0}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(\dots)a_{ki}\right) a_{lj} \overset{b_{ik}=a_{ki}}{=} \sum_{0\le k,l\le 2} b_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(\dots)a_{lj},
\end{aligned}$$

sodass für die Matrizen ($M_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$) folgt

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}\right)(y_0, y_1, y_2) = (b_{ik})_{i,k} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + \dots)\right)_{k,l} \cdot (a_{lj})_{l,j}$$

also

$$M_g(y_0, y_1, y_2) = A^t \cdot M_f(a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + \dots) \cdot A.$$

Determinantenbildung liefert

$$H_g(y_0, y_1, y_2) = (\det A)^2 \cdot H_f(a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + \dots),$$

was die Behauptung beweist. ■

Für die Wendepunkte erhalten wir folgenden Satz:

SATZ. *(Die Charakteristik von K sei 0.) Sei C eine projektive ebene Kurve vom Grad $d \geq 3$, die nicht nur aus Geraden besteht, die alle durch einen Punkt gehen. Dann gilt:*

$$P \in C(\overline{K}) \cap H_C(\overline{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad P \textit{ singulär oder Wendepunkt.}$$

Die singulären Punkte und die Wendepunkte von C sind also genau die Punkte, in denen sich die Kurve C und die Hessesche H_C schneiden.

Beweis: Die Kurve C werde durch das Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$ beschrieben. Sei $P \in C(\overline{K})$. Das vorangegangene Lemma erlaubt uns, einen Koordinatenwechsel zu machen, sodass $P = (1:0:0)$ gilt. Dann ist $f(1,0,0) = 0$. Wir wollen $H_f(1,0,0)$ bestimmen und berechnen dazu zunächst die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}
\end{pmatrix}$$

in $(1,0,0)$. Wir schreiben f in der Form

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\ell=1}^{d} x_0^{d-\ell} f_\ell(x_1, x_2) = x_0^{d-1} f_1(x_1, x_2) + \dots + x_0 f_{d-1}(x_1, x_2) + f_d(x_1, x_2),$$

wobei die Polynome $f_\ell(x_1, x_2)$ homogen vom Grad ℓ sind.
Wir bilden die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_0} &= \sum_{\ell=1}^{d-1}(d-\ell)x_0^{d-\ell-1}f_\ell(x_1,x_2) = (d-1)x_0^{d-2}f_1(x_1,x_2) + \cdots + f_{d-1}(x_1,x_2),\\
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \sum_{\ell=1}^{d} x_0^{d-\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}(x_1,x_2) = x_0^{d-1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_0^{d-2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_0^{d-3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \dots\\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \sum_{\ell=1}^{d} x_0^{d-\ell}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_0^{d-1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_0^{d-2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_0^{d-3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1,x_2) + \dots
\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} &= \sum_{\ell=1}^{d-2}(d-\ell)(d-\ell-1)x_0^{d-\ell-2}f_\ell(x_1,x_2) = (d-1)(d-2)x_0^{d-3}f_1(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}(1,0,0) &= 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} &= \sum_{\ell=1}^{d-1}(d-\ell)x_0^{d-\ell-1}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}(x_1,x_2) = (d-1)x_0^{d-2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (d-2)x_0^{d-3}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}(1,0,0) &= (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_2} &= \sum_{\ell=1}^{d-1}(d-\ell)x_0^{d-\ell-1}\frac{\partial f_\ell}{\partial x_2}(x_1,x_2) = (d-1)x_0^{d-2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + (d-2)x_0^{d-3}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_2}(1,0,0) &= (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \sum_{\ell=2}^{d} x_0^{d-\ell}\frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = x_0^{d-2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + x_0^{d-3}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1,0,0) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sum_{\ell=2}^{d} x_0^{d-\ell}\frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = x_0^{d-2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_0^{d-3}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(1,0,0) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \sum_{\ell=2}^{d} x_0^{d-\ell}\frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = x_0^{d-2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + x_0^{d-3}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) + \dots,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(1,0,0) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Wir führen nochmals einen Koordinatenwechsel durch, sodass wir

$$f_1(x_1, x_2) = Ax_1$$

annehmen können. (Im Fall eines singulären Punkts ist $A = 0$.) Außerdem sei

$$f_2(x_1, x_2) = Bx_1^2 + Cx_1x_2 + Dx_2^2.$$

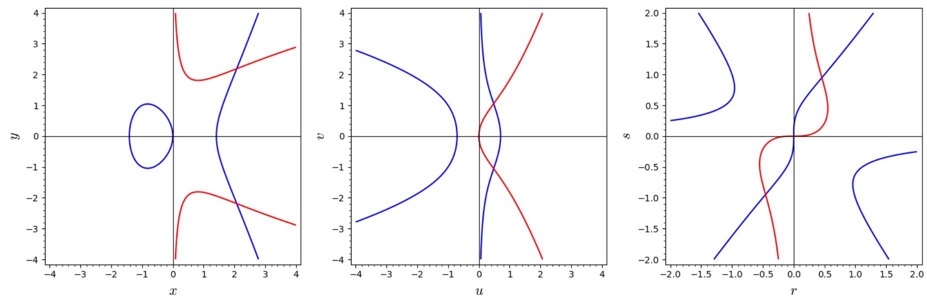
Dann ist
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = A, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.$$
Weiter gilt
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2Bx_1 + Cx_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = Cx_1 + 2Dx_2,$$
und damit
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} = 2B, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = C, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 2D.$$
Unsere Matrix wird zu
$$\begin{pmatrix} 0 & (d-1)A & 0 \\ (d-1)A & 2B & C \\ 0 & C & 2D \end{pmatrix}$$
und hat die Determinante
$$H_f(1,0,0) = -2(d-1)^2 A^2 D.$$
Nochmals:
$$H_f(1,0,0) = -2(d-1)^2 A^2 D.$$
Es gilt also in Charakteristik 0
$$H_f(1,0,0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0 \text{ oder } D = 0.$$

- **Fall** $A = 0$**:** In diesem Fall ist die Kurve singulär im Punkt $(1:0:0)$.
- **Fall** $A \neq 0$**:** Die Kurve ist nichtsingulär in $(1:0:0)$.
  Wie schaut die Taylorentwicklung affin aus?
  $$f(1,x,y) = Ax + Bx^2 + Cxy + Dy^2 + \dots$$
  Wir können o.E. $A = 1$ annehmen:
  $$f(1,x,y) = x + Bx^2 + Cxy + Dy^2 + \dots$$
  Die Tangente T wird durch $x = 0$ beschrieben:
  $$T = \{(x,y) : x = 0\} = \{(0,t) : t \in \overline{K}\}.$$
  Um die Schnittvielfachheit zu bestimmen, setzen wir die Parametrisierung $x = 0$, $y = t$ in die $f(1,x,y)$ ein:
  $$f(1,0,t) = Dt^2 + \dots = t^2(D + \dots).$$
  - **Fall** $D \neq 0$**:** Dann ist die Schnittmultiplizität 2, die Tangente ist keine Wendetangente. Es gilt $H_f(1,0,0) \neq 0$.
  - **Fall** $D = 0$**:** Dann ist die Schnittmultiplizität ≥ 3, die Tangente ist eine Wendetangente, $(1:0:0)$ ein Wendepunkt und $H_f(1,0,0) = 0$.

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Beispiel: Sei C der projektive Abschluss der durch $y^2 = x^3 - 2x$ definierten affinen Kurve. C wird durch das Polynom
$$f = -2x_0^2 x_1 - x_0 x_2^2 + x_1^3$$
beschrieben. Es ist
$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -4x_0 x_1 - x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_0^2 + 3x_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_0 x_2.$$
Daher wird die zugehörige Hessesche Kurve definiert durch das Polynom
$$H = \begin{vmatrix} -4x_1 & -4x_0 & -2x_2 \\ -4x_0 & 6x_1 & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2x_0 \end{vmatrix} = 32x_0^3 + 48x_0 x_1^2 - 24x_1 x_2^2.$$

Man sieht, dass $(0:0:1)$ auf der Kurve und der Hesseschen Kurve liegt. Daher ist $(0:0:1)$ ein Wendepunkt. ($\frac{\partial f}{\partial x_0}(0,0,1) = -1 \neq 0$, weswegen $(0:0:1)$ keine Singularität ist.) In den Bildern ist die Kurve blau, die Hessesche Kurve rot gezeichnet.



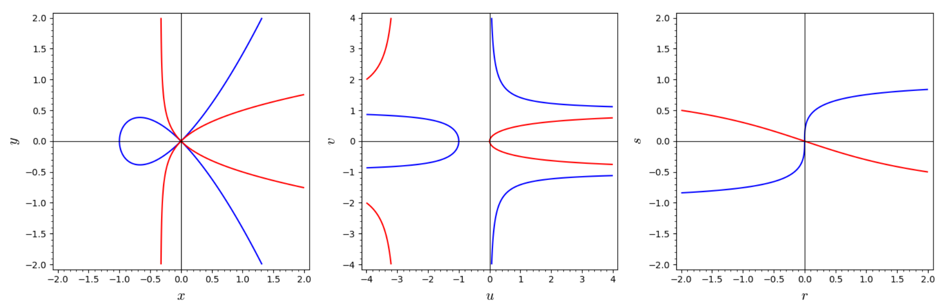
Beispiel: Der projektive Abschluss der Kurve $y^2 = x^2 + x^3$ wird beschrieben durch das Polynom

$$f = x_0x_1^2 - x_0x_2^2 + x_1^3.$$

Die Kurve hat in $(1:0:0)$ eine Singularität. (Dies ist die einzige Singularität der Kurve.) Die Hessesche wird beschrieben durch

$$H = 8x_0x_1^2 - 8x_0x_2^2 - 24x_1x_2^2.$$

Die Hessesche geht also durch die Singularität $(1:0:0)$ der Kurve.
Außerdem sieht man, dass $(0:0:1)$ ein Wendepunkt ist, da der Punkt im Durchschnitt von Kurve und Hessescher liegt.



Wir wollen nun den Durchschnitt von Kurve und Hessescher, also $f = H = 0$ bestimmen.
Wir wollen den Durchschnitt der durch

$$f = x_0x_1^2 - x_0x_2^2 + x_1^3 \quad \text{und} \quad H = 8x_0x_1^2 - 8x_0x_2^2 - 24x_1x_2^2$$

definierten Kurven bestimmen.

- **Punkte im Unendlichen:** Es ist

$$f(0, x_1, x_2) = x_1^3 \quad \text{und} \quad H(0, x_1, x_2) = -24x_1x_2^2.$$

Man sieht sofort, dass $(0:0:1)$ der einzige Punkt im Durchschnitt ist.

- **Punkte im Endlichen:** Wir verwenden affine Koordinaten x, y, betrachten also

$$f(1, x, y) = x^3 + x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad H(1, x, y) = -24xy^2 + 8x^2 - 8y^2.$$

Resultantenbildung liefert

$$R_x(f(1, x, y), H(1, x, y))(y) = -13824y^6(y^2 + \frac{16}{27})$$

und

$$R_y(f(1, x, y), H(1, x, y))(x) = 576x^6(x + \frac{4}{3})^2.$$

Die Punkte im Durchschnitt müssen also x-Koordinate 0 oder $-\frac{4}{3}$ haben. Wir setzen dies in f und H ein:

$$f(1, 0, y) = -y^2, \quad H(1, 0, y) = -8y^2.$$

Dies liefert den Schnittpunkt $(x, y) = (0, 0)$ bzw. $(1 : 0 : 0)$, der eine Singularität von $f = 0$ ist. Nun setzen wir $x = -\frac{4}{3}$ ein:

$$f(1, -\frac{4}{3}, y) = -(y^2 + \frac{16}{27}) \quad \text{und} \quad H(1, -\frac{4}{3}, y) = 24(y^2 + \frac{16}{27}).$$

Wir erhalten also die beiden Schnittpunkte

$$(-\frac{4}{3}, \pm\sqrt{-\frac{16}{27}}).$$

Diese Punkte sind über $\mathbb{C}$ definierte Wendepunkte der Kurve, die reell nicht sichtbar sind.

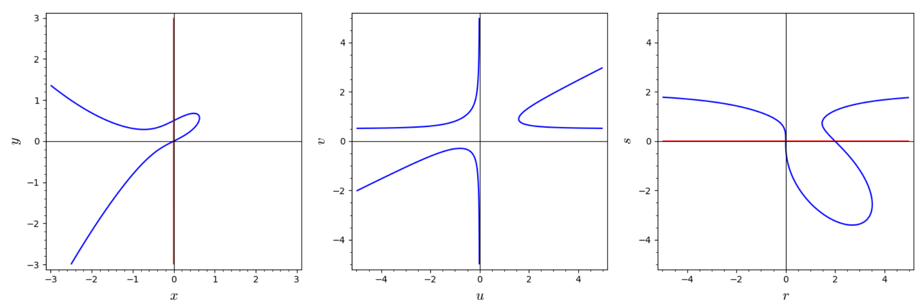
Beispiel: Wir betrachten die ebene projektive Kurve, die durch das Polynom

$$f = x_1^3 + x_0x_1^2 - 4x_0x_1x_2 + 4x_0x_2^2 + x_0^2x_1 - 2x_0^2x_2$$

definiert wird. Die zugehörige Hessesche ist

$$\begin{aligned} H_f &= -96x_0^2x_1 - 96x_0x_1^2 + 192x_0x_1x_2 - 96x_1^3 + 384x_1^2x_2 - 384x_1x_2^2 = \\ &= -96 \cdot x_1 \cdot \left(x_0^2 + x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2\right). \end{aligned}$$

Die Gerade $x_1 = 0$ schneidet die Kurve wegen $f(x_0, 0, x_2) = 4x_0x_2^2 - 2x_0^2x_2 = 2x_0x_2(2x_2 - x_0)$ in den Punkten $(1 : 0 : 0)$, $(1 : 0 : \frac{1}{2})$, $(0 : 0 : 1)$.



Warum scheint bei der Hesseschen nur die Gerade $x_1 = 0$ sichtbar zu sein?
Sei

$$g = x_0^2 + x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Man findet, dass $g = 0$ genau eine Singularität hat, und zwar in $(0 : 2 : 1)$. Im affinen Teil U_2 mit den affinen Koordinaten r, s hat die Singularität also die Koordinaten $(r, s) = (0, 2)$. Führt man affine Koordinaten r, t ein durch $(x_0, x_1, x_2) = (r, 2 + t, 1)$, so erhält man

$$g(r, 2 + t, 1) = r^2 + rt + t^2.$$

Zwar ist dieses Polynom über $\mathbb{R}$ irreduzibel, über $\mathbb{C}$ zerfällt es aber:

$$g(r, 2 + t, 1) = (r - \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}t)(r - \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}t).$$

Der einzige $\mathbb{R}$-rationale Punkt von $g = 0$ ist also $(0 : 2 : 1)$.
Wir betrachten noch Beispiele von Hesseschen Polynomen zu gegebenen homogenen Polynomen $f(x_0, x_1, x_2)$.
Für ein allgemeines quadratisches Polynom

$$f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$$

ist

$$H_f = 8a_0a_3a_5 - 2a_0a_4^2 - 2a_1^2a_5 + 2a_1a_2a_4 - 2a_2^2a_3$$

einfach eine Zahl. Für ein allgemeines kubisches Polynom

$$f = a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_3x_0x_1^2 + a_6x_1^3 + a_2x_0^2x_2 + a_4x_0x_1x_2 + a_7x_1^2x_2 + a_5x_0x_2^2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3$$

ist

$$
\begin{aligned}
H_f \quad = \quad & \left(24a_0a_3a_5 - 6a_0a_4^2 - 8a_1^2a_5 + 8a_1a_2a_4 - 8a_2^2a_3\right) x_0^3 + \\
& + \left(24a_0a_3a_8 - 24a_0a_4a_7 + 72a_0a_5a_6 - 8a_1^2a_8 + 16a_1a_2a_7 - 8a_1a_3a_5 + 2a_1a_4^2 - 24a_2^2a_6\right) x_0^2x_1 + \\
& + \left(72a_0a_6a_8 - 24a_0a_7^2 - 8a_1a_3a_8 + 24a_1a_5a_6 + 16a_2a_3a_7 - 24a_2a_4a_6 - 8a_3^2a_5 + 2a_3a_4^2\right) x_0x_1^2 + \\
& + \left(24a_1a_6a_8 - 8a_1a_7^2 - 8a_3^2a_8 + 8a_3a_4a_7 - 6a_4^2a_6\right) x_1^3 + \\
& + \left(72a_0a_3a_9 - 24a_0a_4a_8 + 24a_0a_5a_7 - 24a_1^2a_9 + 16a_1a_2a_8 - 8a_2^2a_7 - 8a_2a_3a_5 + 2a_2a_4^2\right) x_0^2x_2 + \\
& + \left(216a_0a_6a_9 - 24a_0a_7a_8 - 24a_1a_3a_9 - 8a_1a_4a_8 + 24a_1a_5a_7 + 24a_2a_3a_8 - 8a_2a_4a_7 - 24a_2a_5a_6 - 8a_3a_4a_5 + 2a_4^3\right) x_0x_1x_2 + \\
& + \left(72a_1a_6a_9 - 8a_1a_7a_8 + 24a_2a_6a_8 - 8a_2a_7^2 - 24a_3^2a_9 + 16a_3a_5a_7 + 2a_4^2a_7 - 24a_4a_5a_6\right) x_1^2x_2 + \\
& + \left(72a_0a_7a_9 - 24a_0a_8^2 - 24a_1a_4a_9 + 16a_1a_5a_8 + 24a_2a_3a_9 - 8a_2a_5a_7 - 8a_3a_5^2 + 2a_4^2a_5\right) x_0x_2^2 + \\
& + \left(24a_1a_7a_9 - 8a_1a_8^2 + 72a_2a_6a_9 - 8a_2a_7a_8 - 24a_3a_4a_9 + 16a_3a_5a_8 + 2a_4^2a_8 - 24a_5^2a_6\right) x_1x_2^2 + \\
& + \left(24a_2a_7a_9 - 8a_2a_8^2 - 6a_4^2a_9 + 8a_4a_5a_8 - 8a_5^2a_7\right) x_2^3
\end{aligned}
$$

wieder ein kubisches Polynom.