Die j-Invariante

Vorbemerkungen: Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Abschnitt 3.3 des 7. Kapitels von „A Course in Arithmetic“ von Jean-Pierre Serre (Graduate Texts in Mathematics 7. Springer, 1973).
In den Notationen weichen wir aber teilweise von Serre ab.
Die ersten Abschnitte wiederholen einiges, was wir im Seminar bereits kennengelernt haben.

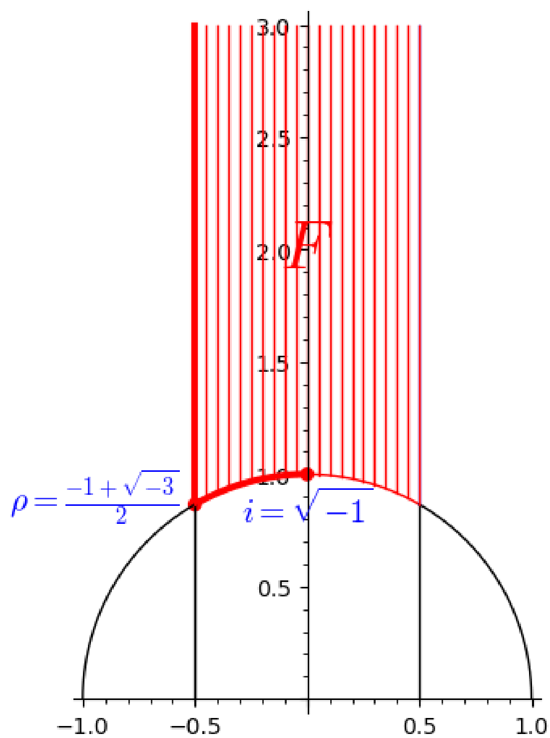
1. Das Fundamentalgebiet F der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ durch

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Die Menge

$$F = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,(z) < \frac{1}{2}, |z| > 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,(z) \le 0\}$$



ist in folgendem Sinn ein **Fundamentalgebiet**: Zu jedem $z \in \mathbb{H}$ gibt es genau einen Punkt $z_F \in F$ mit

$$z = \frac{az_F + b}{cz_F + d} \text{ für (mindestens) eine Matrix } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

(Serre verwendet den topologischen Abschluss $\overline{F}$ als Fundamentalgebiet und bezeichnet ihn mit D. Natürlich muss man dann die obige Charakterisierung eines Fundamentalbereiches etwas abändern.)

Datei: modf_j.tex. Version vom 5.6.2021

2. Die Abbildung $z \mapsto q = e^{2\pi i z}$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) ist

$$e^{2\pi i z} = e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y} \cdot e^{2\pi i x} = e^{-2\pi y}\left(\cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)\right) \quad \text{und} \quad \left|e^{2\pi i z}\right| = e^{-2\pi y}.$$

Die Funktion $e^{2\pi i z}$ ist periodisch mit der Periode 1:

$$e^{2\pi i(z+1)} = e^{2\pi i z}.$$

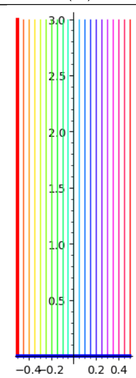
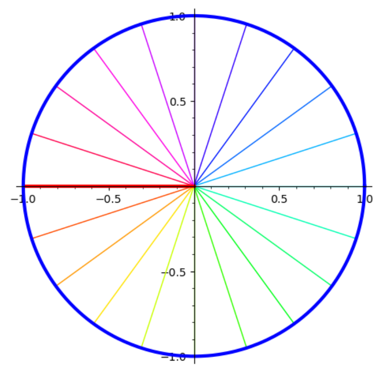
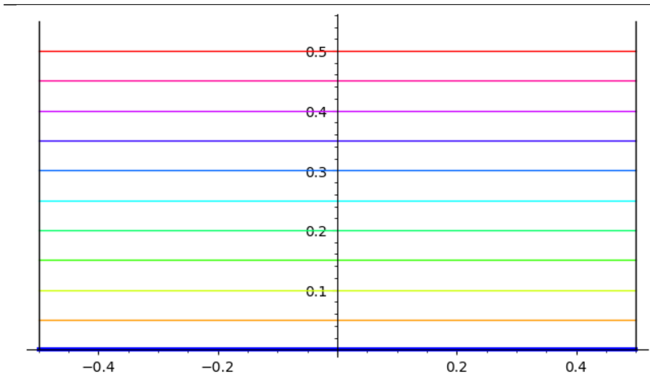
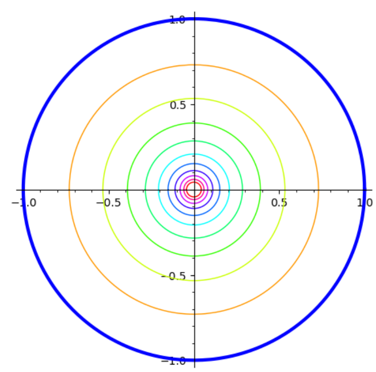
Die Abbildung

$$\{z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,(z) < \frac{1}{2}\} \to \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}, \quad z \mapsto e^{2\pi i z}$$

ist bijektiv: Schreibt man q mit $0 < |q| < 1$ als $q = |q| \cdot e^{2\pi i \varphi}$ mit $\varphi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, so gilt

$$e^{2\pi i \cdot \left(\varphi + i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{|q|}\right)} = q.$$

Die folgenden Bilder sollen diese Bijektion etwas illustrieren:

$\{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\,(z) < \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$	$z \mapsto e^{2\pi i z}$	$\{q \in \mathbb{C} : \|q\| < 1\} \setminus \{0\}$
		
		

Für $R \ge 1$ erhalten wir dann eine Bijektion

$$F \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > R\} \xrightarrow{z \mapsto e^{2\pi i z}} \{q \in \mathbb{C} : |q| < e^{-2\pi R}\} \setminus \{0\}.$$

3. Modulfunktionen

Wir interessieren uns für Funktionen f, die auf (Teilmengen) der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ definiert sind und folgende Gleichungen (für eine gebene ganze Zahl k) erfüllen:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Die Zahl k bezeichnet man auch als Gewicht.

Hier sind ein paar Eigenschaften solcher Funktionen:

(1) Wendet man die Transformationsformel auf die negative Einheitsmatrix an, so erhält man
$$f(z) = (-1)^k f(z).$$
Ist k ungerade, so erfüllt nur die Nullfunktion diese Bedingung, weswegen man sich im Folgenden auf gerade Zahlen k beschränkt.

(2) Die obigen Bedingungen lassen sich (für gerade k) auf folgende Bedingungen reduzieren:
$$f(z+1) = f(z) \quad \text{und} \quad f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z).$$

(3) Da die Abbildung
$$\{z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,(z) < \frac{1}{2}\} \to \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}, \quad z \mapsto e^{2\pi i z}$$
bijektiv ist und $f(z+1) = f(z)$ gilt, erhält man eine Funktion $\widetilde{f}$ auf (einer Teilmenge von) $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$ mit
$$f(z) = \widetilde{f}(e^{2\pi i z}).$$

Wir schränken die Funktionen noch weiter ein:

- Eine **schwache Modulfunktion vom Gewicht** k ist eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$, für die die Transformationsgleichungen
$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$
erfüllt sind. Die zugehörige Funktion $\widetilde{f}$ ist dann auch meromorph auf $\{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$. Die Funktion $\widetilde{f}$ ist aber nicht notwendig meromorph in $q = 0$. (Wir werden später ein Beispiel einer solchen Funktion für $k = 0$ sehen, die auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph ist, aber in F unendlich viele Nullstellen besitzt.)
  - Sind f, g zwei schwache Modulfunktionen vom Gewicht k, so ist auch die Summe $f + g$ eine schwache Modulfunktion vom Gewicht k.
  - Sind f, g zwei schwache Modulfunktionen vom Gewicht k_f bzw. k_g, so ist das Produkt fg eine schwache Modulfunktion vom Gewicht $k_f + k_g$.
  - Ist f eine von 0 verschiedene schwache Modulfunktion vom Gewicht k, so ist $\frac{1}{f}$ eine schwache Modulfunktion vom Gewicht $-k$.
- Eine **Modulfunktion vom Gewicht** k ist eine schwache Modulfunktion vom Gewicht k, bei der auch die zugehörige Funktion $\widetilde{f}$ mit
$$f(z) = \widetilde{f}(e^{2\pi i z})$$
meromorph auf $\{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ ist. Wegen der Meromorphie in $q = 0$ besitzt $\widetilde{f}$ eine Laurentreihenentwicklung
$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \text{ mit } n_0 \in \mathbb{Z}.$$
Es ist dann
$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \text{ mit } q = e^{2\pi i z}.$$
Wir haben gesehen, dass eine solche Funktion nur endlich viele Null- und Polstellen in F besitzt. Im Fall $f \neq 0$ gilt die $\frac{k}{12}$**-Formel**
$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_{p \in F \setminus \{\rho, i\}} v_p(f) = \frac{k}{12}.$$
Dabei ist $v_\infty(f) = v_0(\widetilde{f})$.

- Eine **Modulform vom Gewicht** k ist eine Modulfunktion vom Gewicht k, die auf $\mathbb{H}$ und in ∞ holomorph ist, d.h. es gilt $v_p(f) \geq 0$ für alle $p \in F$ und $v_\infty(f) \geq 0$. Die Menge der Modulformen vom Gewicht k bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, der mit M_k bezeichnet wird:

$$M_k = \{f \text{ Modulform vom Gewicht } k\}.$$

Darin enthalten ist die Menge der Spitzenformen

$$M_k^0 = \{f \in M_k : f(\infty) = 0\}.$$

(Was hier als M_k bezeichnet wird, ist bei Serre $M_{\frac{k}{2}}$, da nur gerade Zahlen k von Interesse sind. Für ungerades k ist $M_k = 0$.)

4. Die Eisensteinreihen

Für gerade $k \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ sind die Funktionen

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

Modulformen vom Gewicht k mit

$$G_k(\infty) = 2\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^k}.$$

Insbesondere gilt

$$G_4(\infty) = \frac{\pi^4}{45} \quad \text{und} \quad G_6(\infty) = \frac{2\pi^6}{945}.$$

Wir schauen uns G_4 und G_6 nochmals genauer an.

- **Die Modulform G_4:** Die $\frac{k}{12}$-Formel lautet hier

$$v_\infty(G_4) + \frac{1}{2}v_i(G_4) + \frac{1}{3}v_\rho(G_4) + \sum_{p\in F\setminus\{\rho,i\}} v_p(G_4) = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt sofort

$$v_\rho(G_4) = 1 \quad \text{und} \quad v_p(G_4) = 0 \text{ für } p \in F \setminus \{\rho\} \quad \text{und} \quad v_\infty(G_4) = 0.$$

Abgeleitet davon betrachten wir die Funktion

$$g_2(z) = 60\, G_4(z).$$

Es gilt

$$v_\rho(g_2) = 1, \quad v_i(g_2) = 0, \quad g_2(\infty) = \frac{4}{3}\pi^4, \quad g_2^{-1}(0) \cap F = \{\rho\}.$$

g_2 hat also genau eine Nullstelle in $F \cup \{\infty\}$, nämlich in ρ, und zwar von 1. Ordnung.

- **Die Modulform G_6:** Die $\frac{k}{12}$-Formel lautet hier

$$v_\infty(G_6) + \frac{1}{2}v_i(G_6) + \frac{1}{3}v_\rho(G_6) + \sum_{p\in F\setminus\{\rho,i\}} v_p(G_6) = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$v_i(G_6) = 1 \quad \text{und} \quad v_p(G_6) = 0 \text{ für alle } p \in F \setminus \{i\} \quad \text{und} \quad v_\infty(G_6) = 0.$$

Abgeleitet davon betrachten wir

$$g_3(z) = 140\, G_6(z).$$

Es gilt

$$v_\rho(g_3) = 0, \quad v_i(g_3) = 1, \quad g_3(\infty) = \frac{8}{27}\pi^6, \quad g_3^{-1}(0) \cap F = \{i\}.$$

g_3 hat also genau eine Nullstelle in $F \cup \{\infty\}$, nämlich in i, und zwar von 1. Ordnung.

- **Die Modulform $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$:** Δ ist eine Modulform vom Gewicht 12. Wegen
$$\Delta(\infty) = g_2(\infty)^3 - 27g_3(\infty)^2 = \left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3 - 27\left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2 = 0$$
ist Δ eine Spitzenform, also $\Delta \in M_{12}^0$. Die $\frac{k}{12}$-Formel für Δ lautet
$$v_\infty(\Delta) + \frac{1}{2}v_i(\Delta) + \frac{1}{3}v_\rho(\Delta) + \sum_{p\in F\setminus\{\rho,i\}} v_p(\Delta) = 1.$$
Aus $v_\infty(\Delta) \geq 1$ folgt dann sofort
$$\Delta(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad v_\infty(\Delta) = 1.$$
Δ hat also keine Nullstelle in $\mathbb{H}$ und eine Nullstelle 1. Ordnung in ∞.

Nach dieser Wiederholungen kommen wir zum eigentlichen Thema des Vortrags:

5. Die j-Invariante

Wir definieren
$$j(z) = 1728 \cdot \frac{g_2(z)^3}{\Delta(z)} = 1728 \cdot \frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}.$$
Als Quotient von zwei Modulformen vom Gewicht 12 ist j eine Modulfunktion vom Gewicht 0, d.h.
$$j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = j(z) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$
Da Δ keine Nullstelle in $\mathbb{H}$ besitzt, ist j holomorph auf $\mathbb{H}$. Da Δ eine Nullstelle 1. Ordnung in ∞ hat und $g_2(\infty) \neq 0$ ist, hat j einen Pol 1. Ordnung in ∞. Wir formulieren dies nochmals als Satz:

Satz. *Die Funktion $j(z)$ ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0, sie ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und hat in ∞ einen Pol 1. Ordnung:*
$$v_p(j) \geq 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad v_\infty(j) = -1.$$

Aus $g_2(\rho) = 0$, $g_2(i) \neq 0$ und $g_3(\rho) \neq 0$, $g_3(i) = 0$ folgt für $j(z) = 1728\frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}$
$$j(\rho) = 0 \quad \text{und} \quad j(i) = 1728.$$
Wir können sogar noch etwas mehr zu den Werten von j sagen:

Satz. *Für die j-Invariante gilt:*

(1) *Es ist*
$$j(\rho) = 0, \quad v_\rho(j) = 3 \quad \text{und} \quad j^{-1}(0) \cap F = \{\rho\}.$$
(2) *Es ist*
$$j(i) = 1728, \quad v_i(j - 1728) = 2 \quad \text{und} \quad j^{-1}(1728) \cap F = \{i\}.$$
(3) *Zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$ gibt es genau eine Zahl $z_\lambda \in F$ mit $j(z_\lambda) = \lambda$. Es ist*
$$j(z_\lambda) = \lambda, \quad v_{z_\lambda}(j - \lambda) = 1 \quad \text{und} \quad j^{-1}(\lambda) \cap F = \{z_\lambda\}.$$

Beweis:

(1) Da g_2 in F nur die Nullstelle ρ (mit $v_\rho(g_2) = 1$) hat, folgt die Behauptung zusammen mit $g_3(\rho) \neq 0$ aus
$$j(z) = 1728 \cdot \frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}.$$
(2) Es ist
$$j(z) - 1728 = 1728 \cdot \left(\frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2} - 1\right) = 1728 \cdot \frac{27g_3(z)^2}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}.$$
Da g_3 genau eine Nullstelle in F hat, nämlich in i, und zwar von 1. Ordnung, folgt die Behauptung mit $g_2(i) \neq 0$.

(3) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$. Wir wollen zeigen, dass es genau eine Zahl $z_\lambda \in F$ gibt mit $j(z_\lambda) = \lambda$, und dass dann gilt

$$j(z_\lambda) = \lambda, \quad v_{z_\lambda}(j - \lambda) = 1, \quad j^{-1}(\lambda) \cap F = \{z_\lambda\}.$$

Wir betrachten die Funktion $f(z) = j(z) - \lambda$, die wie $j(z)$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, einen Pol 1. Ordnung in ∞ besitzt ($v_\infty(f) = -1$) und eine Modulfunktion vom Gewicht 0 ist. Es ist

$$f(\rho) = -\lambda \neq 0, \quad f(i) = 1728 - \lambda \neq 0,$$

also $v_\rho(f) = 0$, $v_i(f) = 0$. Die $\frac{k}{12}$-Formel

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_{p \in F \setminus \{\rho, i\}} v_p(f) = \frac{k}{12} = 0$$

wird dann zu

$$-1 + \sum_{p \in F \setminus \{\rho, i\}} v_p(f) = 0, \text{ also } \sum_{p \in F \setminus \{\rho, i\}} v_p(f) = 1.$$

Es gibt also genau einen Punkt $z_\lambda \in F \setminus \{\rho, i\}$ mit

$$v_{z_\lambda}(f) = 1, \quad v_p(f) = 0 \text{ für alle } p \in F \setminus \{z_\lambda\}.$$

Dies bedeutet wegen $f(z_\lambda) = 0$

$$j(z_\lambda) = \lambda, \quad v_{z_\lambda}(j - \lambda) = 1 \quad \text{ und } \quad j^{-1}(\lambda) \cap F = \{z_\lambda\}.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Folgerung. *Die eingeschränkte Abbildung*

$$F \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto j(z)$$

ist bijektiv. Mit den Bezeichnungen des letzten Satzes gilt nämlich

$$j^{-1}(\lambda) \cap F = \begin{cases} \{\rho\} & \text{für } \lambda = 0, \\ \{i\} & \text{für } \lambda = 1728, \\ \{z_\lambda\} & \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}. \end{cases}$$

Wir erhalten noch eine andere Folgerung etwas technischer Natur, die wir deswegen als Lemma formulieren:

Lemma. *Für $\alpha \in F$ gilt*

$$v_\alpha(j(z) - j(\alpha)) = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha = \rho, \\ 2 & \text{für } \alpha = i, \\ 1 & \text{für } \alpha \in F \setminus \{\rho, i\} \end{cases}$$

und

$$(j(z) - j(\alpha))^{-1}(0) \cap F = \{\alpha\}, \quad \text{also} \quad v_\beta(j(z) - j(\alpha)) = 0 \text{ für } \beta \in F \setminus \{\alpha\}.$$

6. Modulfunktionen vom Gewicht 0

Lemma. *Die Modulfunktionen vom Gewicht 0 bilden einen Körper, der $\mathbb{C}$ und j enthält.*

Beweis: Modulfunktionen vom Gewicht 0 sind auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktionen f, sodass dazu auf $\{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ meromorphe Funktionen $\widetilde{f}$ existieren mit

$$f(z) = \widetilde{f}(e^{2\pi i z})$$

und außerdem

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Da die Menge aller auf einem Gebiet meromorphen Funktionen einen Körper bilden, ist klar, dass auch die Modulfunktionen vom Gewicht 0 einen Körper bilden. ■

Die Funktionen $j(z) - j(\alpha)$ ($\alpha \in F$) sind Modulfunktionen vom Gewicht 0 mit der angenehmen Eigenschaft, dass sich $v_p(j(z) - j(\alpha))$ für $p \in F$ genau beschreiben lässt.
Damit können wir uns nun leicht Modulfunktionen vom Gewicht 0 konstruieren:

SATZ. *Seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in F \setminus \{\rho, i\}$ *paarweise verschiedene Zahlen und* $n_\rho, n_i, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$. *Definiert man*

$$f(z) = j(z)^{n_\rho}(j(z) - 1728)^{n_i} \prod_{k=1}^{r} (j(z) - j(\alpha_k))^{n_k},$$

so ist $f(z)$ *eine Modulfunktion vom Gewicht* 0 *mit*

$$v_\rho(f) = 3n_\rho, \quad v_i(f) = 2n_i, \quad v_{\alpha_k}(f) = n_k \textit{ für } k = 1, \ldots, r$$

und

$$v_p(f) = 0 \textit{ für } p \in F \setminus \{\rho, i, \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}.$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich sofort aus den Eigenschaften der Funktionen $j(z) - j(\alpha)$, die wir zuvor gezeigt haben und hier nochmals aufgeschrieben sind: Für $\alpha \in F$ gilt

$$v_\alpha(j(z) - j(\alpha)) = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha = \rho, \\ 2 & \text{für } \alpha = i, \\ 1 & \text{für } \alpha \in F \setminus \{\rho, i\} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad v_\beta(j(z) - j(\alpha)) = 0 \text{ für } \beta \in F \setminus \{\alpha\}.$$

Dies beweist den Satz. ■

Was kann man allgemein über Modulfunktionen vom Gewicht 0 sagen? Es ist naheliegend, die $\frac{k}{12}$-Formel heranzuziehen. Wir formulieren das Ergebnis als Lemma:

LEMMA. *Ist* f *eine von* 0 *verschiedene Modulfunktion vom Gewicht* 0, *so gilt*

$$3 \mid v_\rho(f) \quad \textit{und} \quad 2 \mid v_i(f).$$

Beweis: Die $\frac{k}{12}$-Formel lautet für Gewicht 0

$$v_\infty(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{p \in F \setminus \{\rho, i\}} v_i(f) = \frac{0}{12} = 0.$$

Da alle Bewertungen ganze Zahlen sind, folgt

$$\frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{1}{2}v_i(f) = m \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}.$$

Multiplikation mit 6 liefert

$$2v_\rho(f) + 3v_i(f) = 6m.$$

Modulo 2 folgt

$$3v_i(f) \equiv 0 \bmod 2, \quad \text{also} \quad v_i(f) \equiv 0 \bmod 2.$$

Modulo 3 folgt

$$2v_\rho(f) \equiv 0 \bmod 3, \quad \text{also} \quad v_\rho(f) \equiv 0 \bmod 3.$$

Dies beweist die Behauptung. ■

Damit können wir nun zeigen, dass unsere zuvor konstruierten Modulfunktionen vom Gewicht 0 (bis auf multiplikative Konstanten) alle sind:

SATZ. *Ist* f *eine von* 0 *verschiedene Modulfunktion vom Gewicht* 0, *sind* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *die von* ρ *und* i *verschiedenen Null- und Polstellen von* f *in* F, *d.h.*

$$\{p \in F \setminus \{\rho, i\} : v_p(f) \neq 0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\},$$

setzt man

$$n_\rho = \frac{1}{3}v_\rho(f), \quad n_i = \frac{1}{2}v_i(f) \quad \textit{und} \quad n_k = v_{\alpha_k}(f) \textit{ für } k = 1, \ldots, r,$$

so gilt $n_\rho, n_i \in \mathbb{Z}$ und es gibt eine Konstante c mit

$$f(z) = c \cdot j(z)^{n_\rho} \cdot (j(z) - 1728)^{n_i} \cdot \prod_{k=1}^{r} (j(z) - j(\alpha_k))^{n_k}.$$

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass nach dem vorangegangenen Lemma die Zahlen n_ρ und n_i ganzzahlig sind. Wir betrachten die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{j(z)^{n_\rho} \cdot (j(z) - 1728)^{n_i} \cdot \prod_{k=1}^{r} (j(z) - j(\alpha_k))^{n_k}}.$$

Mit dem früheren Satz folgt

$$v_p(g) = 0 \text{ für alle } p \in F.$$

Die $\frac{k}{12}$-Formel für Gewicht-0-Modulfunktionen impliziert dann auch $v_\infty(g) = 0$. Also ist f sogar eine Modulform vom Gewicht 0, also $g \in M_0 = \mathbb{C}$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Ist $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein von 0 verschiedenes Polynom, so gibt es eine Faktorisierung

$$p(x) = c \cdot \prod_{k=1}^{r} (x - z_k)^{n_k} \text{ mit } z_k \in \mathbb{C}, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{C}^*.$$

Dann ist

$$p(j(z)) = c \cdot \prod_{k=1}^{r} (j(z) - z_k)^{n_k}.$$

Da die meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$ einen Körper bilden, j keine konstante Funktion ist, ist $p(j)$ nicht die Nullfunktion.

Folgerung. *Der Körper der Modulfunkionen vom Gewicht 0 ist*

$$\mathbb{C}(j) = \left\{ \frac{p(j)}{q(j)} : p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x], q(x) \neq 0 \right\} \simeq \mathbb{C}(x).$$

Die Modulfunktionen vom Gewicht 0 sind also die rationalen Funktionen in j.

Bemerkungen:

- Sind $g(z)$ und $h(z)$ zwei von 0 verschiedene Modulformen gleichen Gewichts, so ist $\frac{g(z)}{h(z)}$ eine Modulfunktion vom Gewicht 0.
- Umgekehrt wollen wir sehen, dass sich jede von 0 verschiedene Modulfunktion vom Gewicht 0 als Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts schreiben lässt. Betrachten wir die Darstellung

  $$f(z) = c \cdot j(z)^{n_\rho} \cdot (j(z) - 1728)^{n_i} \cdot \prod_{k=1}^{r} (j(z) - j(\alpha_k))^{n_k},$$

  so sieht man, dass es reicht, dies für eine Funktion der Form $j(z) - \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ zu zeigen. Nun ist

  $$j(z) - \lambda = 1728 \cdot \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} - \lambda = \frac{1728g_2^3 - \lambda(g_2^3 - 27g_3^2)}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{(1728 - \lambda)g_2^3 + 27\lambda g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

  In der letzten Darstellung stehen im Zähler und Nenner Modulformen vom Gewicht 12, was die Behauptung beweist.

7. Woher kommt die Zahl $1728 = 12^3$ in der Definition von j?

Nach Definition von Modulfunktionen bzw. der Meromorphie im Unendlichen besitzt jede Modulfunktion f eine q-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n \text{ mit } q = e^{2\pi iz} \text{ und } n_0 \in \mathbb{Z},$$

die wir uns nun für die j-Invariante anschauen wollen.

Vorbemerkung: Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

wobei die Summation über alle Teiler (aus $\mathbb{N}$) von n geht. $\sigma_0(n)$ gibt die Anzahl der Teiler der Zahl n an, $\sigma_1(n)$ ist die Summe aller Teiler von n. SAGE berechnet die Funktion mit `sigma(n,k)`. Hier sind ein paar Zahlenwerte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_0(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$\sigma_1(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18
$\sigma_2(n)$	1	5	10	21	26	50	50	85	91	130
$\sigma_3(n)$	1	9	28	73	126	252	344	585	757	1134
$\sigma_4(n)$	1	17	82	273	626	1394	2402	4369	6643	10642
$\sigma_5(n)$	1	33	244	1057	3126	8052	16808	33825	59293	103158

Um die q-Entwicklung von j zu bestimmen, brauchen wir die q-Entwicklung von g_2 und g_3, die erst später im Seminar hergeleitet werden. Bei Serre (Abschnitt 4.2) finden sich folgende Entwicklungen:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{(2\pi)^4}{2^2 \cdot 3} \cdot \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right), \\ g_3 &= \frac{(2\pi)^6}{2^3 \cdot 3^3} \cdot \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} g_2^3 &= \frac{(2\pi)^{12}}{2^6 \cdot 3^3} \cdot \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^3 = \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^3, \\ g_3^2 &= \frac{(2\pi)^{12}}{2^6 \cdot 3^6} \cdot \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right)^2 = \frac{(2\pi)^{12}}{1728 \cdot 27} \cdot \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right)^2, \\ \Delta &= g_2^3 - 27 g_3^2 = \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left(\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^3 - \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right)^2\right), \\ j &= 1728 \cdot \frac{g_2^3}{\Delta} = 1728 \cdot \frac{\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^3}{\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^3 - \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right)^2} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n &= 1+240\cdot\left(q+9q^2+\dots\right)=1+240q+2160q^2+\dots,\\
\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3 &= \left(1+240q+2160q^2+\dots\right)^3=\\
&= 1+3\cdot(240q+2160q^2+\dots)+3\cdot(240q+2160q^2+\dots)^2+\dots=\\
&= 1+720q+6480q^2+3\cdot(57600q^2+\dots)+\dots=\\
&= 1+720q+179280q^2+\dots,\\
1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n &= 1-504\cdot\left(q+33q^2+\dots\right)=1-504q-16632q^2+\dots,\\
\left(1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right)^2 &= \left(1-504q-16632q^2+\dots\right)^2=\\
&= 1-2\cdot(504q+16632q^2+\dots)+(504q+16632q^2+\dots)^2+\dots=\\
&= 1-1008q-33264q^2+254016q^2+\dots=\\
&= 1-1008q+220752q^2+\dots
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\left(1+240\sum_{n_1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3-\left(1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right)^2 &= \left(1+720q+179280q^2+\dots\right)\\
&\quad -\left(1-1008q+220752q^2+\dots\right)=\\
&= 1728q-41472q^2+\dots=\\
&= 1728\cdot q\cdot(1-24q+\dots),
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
j &= 1728\cdot\frac{g_2^3}{\Delta}=1728\cdot\frac{\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3}{\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right)^3-\left(1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right)^2}=\\
&= 1728\cdot\frac{1+720q+179280q^2+\dots}{1728\cdot q\cdot(1-24q+\dots)}=\frac{1}{q}\cdot\frac{1+720q+179280q^2+\dots}{1-24q+\dots}=\\
&= \frac{1}{q}\cdot(1+744q+\dots)=\frac{1}{q}+744+\dots
\end{aligned}$$

Die Wahl von 1728 in der Definition der j-Invariante bewirkt also, dass die q-Entwicklung von j mit $\frac{1}{q}$ beginnt.

Man kann mit SAGE auch die Anfänge der q-Entwicklung von j bestimmen:

```
R.<q>=LaurentSeriesRing(QQ)
E4=eisenstein_series_qexp(4,23,var="q",normalization="constant")
E6=eisenstein_series_qexp(6,23,var="q",normalization="constant")
j=1728*E4^3/(E4^3-E6^2)
```

(Die Zahl 23 gibt an, dass die Entwicklungen bis q^{22} bestimmt werden.)

$$
\begin{aligned}
j \;=\; & \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856256q^4 + 333202640600q^5 + \\
& +4252023300096q^6 + 44656994071935q^7 + 401490886656000q^8 + 3176440229784420q^9 + \\
& +22567393309593600q^{10} + 146211911499519294q^{11} + 874313719685775360q^{12} + \\
& +4872010111798142520q^{13} + 25497827389410525184q^{14} + 126142916465781843075q^{15} + \\
& +593121772421445058560q^{16} + 2662842413150775245160q^{17} + \\
& +11459912788444786513920q^{18} + 47438786801234168813250q^{19} + \\
& +189449976248893390028800q^{20} + \ldots
\end{aligned}
$$

(Es fällt auf, dass bis q^{20} alle Koeffizienten natürliche Zahlen sind. Dies setzt sich fort, wir werden dies aber hier nicht beweisen.)

8. Beispiele schwacher Modulfunktionen, die keine Modulfunktionen sind

(1) Da die Funktion j holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, ist es auch die Funktion

$$f(z) = \sin(j(z)).$$

Natürlich gilt ebenso

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Also ist f eine schwache Modulfunktion.

(a) Welche Nullstellen hat $f(z)$ in F? Die (komplexen) Nullstellen der Sinus-Funktion sind die Zahlen πn mit $n \in \mathbb{Z}$. Daher gilt für $z \in F$ (mit den zuvor eingeführten Zahlen z_λ mit $j^{-1}(\lambda) \cap F = \{z_\lambda\}$)

$$\sin(j(z)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad j(z) = \pi n \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad z = z_{\pi n} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}.$$

Also:

$$\{z \in F : \sin(j(z)) = 0\} = \{z_{\pi n} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

$\sin(j(z))$ hat also unendlich viele Nullstellen in F, und ist damit keine Modulfunktion.

(b) Natürlich kann man die zugehörige Funktion $\widetilde{f} : \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sin(j(z)) = \widetilde{f}(e^{2\pi i z})$$

betrachten. Sie ist analytisch auf $\{0 < |q| < 1\}$. Dann ist natürlich 0 eine isolierte Singularität von $\widetilde{f}$. Da es aber unendlich viele Nullstellen gibt, handelt es sich um eine wesentliche Singularität.

(c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,(z_{\pi n}) = \infty.$$

Beweis: Sei $R \geq 1$ beliebig. Da j auf $F \cap \{\mathrm{Im}\,(z) \leq R\}$ beschränkt ist, gibt es eine Zahl M_R mit

$$z \in F \text{ und } \mathrm{Im}\,(z) \leq R \quad \Longrightarrow \quad |j(z)| \leq M_R.$$

Damit folgt:

$$n > \frac{M_R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \pi n > M_R \quad \Longrightarrow \quad j(z_{\pi n}) > M_R \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z_{\pi n}) > R.$$

Dies impliziert die Behauptung. ■

(2) Nun betrachten wir noch

$$g(z) = \frac{1}{\sin(j(z))}.$$

Dies ist eine schwache Modulfunktion vom Gewicht 0 mit unendlich vielen Polstellen in F. Die zugehörige Funktion $\widetilde{g}$ ist in $q = 0$ nicht definiert und hat dort keine isolierte Singularität, da es in F unendliche viele Polstellen von $g(z)$ gibt.

9. Für welche $z \in F$ gilt $j(z) \in \mathbb{R}$?

Wir betrachten nochmals die für $k \geq 4$ auf $\mathbb{H}$ definierten Eisensteinreihen

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k},$$

die Modulformen vom Gewicht k sind.

LEMMA. *Es gilt:*

(1) $\overline{G_k(z)} = G_k(-\overline{z})$ *für* $z \in \mathbb{H}$. *(Mit* z *ist auch* $-\overline{z}$ *in* $\mathbb{H}$.*)*
(2) *Für* $z \in \mathbb{H}$ *mit* $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ *gilt* $G_k(z) \in \mathbb{R}$.
(3) *Für* $z \in \mathbb{H}$ *mit* $\mathbb{R}(z) = -\frac{1}{2}$ *gilt* $G_k(z) \in \mathbb{R}$.
(4) *Für* $z \in \mathbb{H}$ *mit* $|z| = 1$ *gilt* $\overline{G_k(z)} = z^k \cdot G_k(z)$.

Beweis:

(1) Ist $z = x + yi \in \mathbb{H}$, so ist $\overline{z} = x - yi \notin \mathbb{H}$, aber $-\overline{z} = -x + yi \in \mathbb{H}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{G_k(z)} &= \overline{\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\overline{z}+n)^k} = \\
&= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0,0)\}} \frac{1}{((-m)\overline{z}+n)^k} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m(-\overline{z})+n)^k} = \\
&= G_k(-\overline{z}).
\end{aligned}$$

(2) **Fall** $\mathrm{Re}\,(z) = 0$**:** Für $z = yi$ ist $-\overline{z} = yi = z$. Es folgt

$$\overline{G_k(z)} = G_k(-\overline{z}) = G_k(z),$$

also

$$G_k(z) \in \mathbb{R}.$$

(3) **Fall** $\mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}$**:** Für $z = -\frac{1}{2} + yi$ ist $-\overline{z} = \frac{1}{2} + yi = z + 1$. Daher gilt:

$$\overline{G_k(z)} = G_k(-\overline{z}) = G_k(z+1) = G_k(z).$$

Damit folgt

$$G_k(z) \in \mathbb{R}.$$

(4) **Fall** $|z| = 1$**:** Es ist

$$-\overline{z} = -\frac{z\overline{z}}{z} = -\frac{|z|^2}{z} = -\frac{1}{z}.$$

Es folgt

$$\overline{G_k(z)} = G_k(-\overline{z}) = G_k(-\frac{1}{z}) = z^k G_k(z).$$

Damit sind alle Behauptungen bewiesen. ■

FOLGERUNG. *Für* $z \in F$ *mit*

$$\mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2} \text{ oder } |z| = 1 \text{ oder } \mathrm{Re}\,(z) = 0$$

gilt

$$j(z) \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Es ist $g_2 = 60G_4$, $g_3 = 140G_6$, $j = 1728\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$.

- **Fall** $\mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}$ **oder** $\mathrm{Re}\,(z) = 0$**:** Nach dem letzten Lemma gilt dann $G_4(z) \in \mathbb{R}$ und $G_6(z) \in \mathbb{R}$, was natürlich sofort $j(z) \in \mathbb{R}$ liefert.

- **Fall** $|z| = 1$**:** Wegen $\overline{G_k(z)} = z^k \cdot G_k(z)$ gilt

$$\overline{g_2(z)} = z^4 \cdot g_2(z) \quad \text{und} \quad \overline{g_3(z)} = z^6 \cdot g_3(z).$$

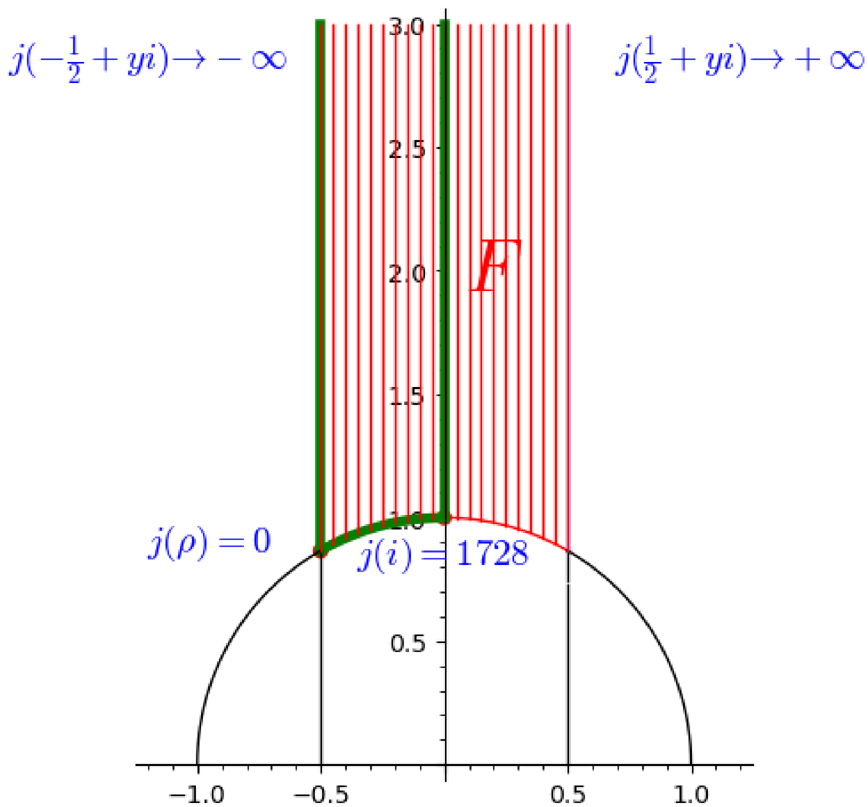
Damit folgt

$$\overline{j(z)} = \overline{1728 \cdot \frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27 \cdot g_3(z)^2}} = 1728 \cdot \frac{z^{12} \cdot g_2(z)^3}{z^{12} \cdot g_2(z)^3 - 27 \cdot z^{12} \cdot g_3(z)^2} = j(z),$$

also

$$j(z) \in \mathbb{R}.$$

Dies wollten wir zeigen. ■



Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} j^{-1}((-\infty, 0]) &= \{z \in F : \mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}\}, \\ j^{-1}([0, 1728]) &= \{z \in F : |z| = 1\}, \\ j^{-1}([0, \infty)) &= \{z \in F : \mathrm{Re}\,(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt aus der Injektivität von j auf F, $\lim_{\mathrm{Im}\,(z) \to \infty} |j(z)| = \infty$ und dem Zwischenwertsatz (für stetige reelle Funktionen). ■