KAPITEL 4

Körperhomomorphismen, Zerfällungskörper und normale Körpererweiterungen

1. Körperhomomorphismen

Sind K, L Körper, so wird ein Ringhomomorphismus $\sigma : K \to L$ auch **Körperhomomorphismus** oder einfach nur **Homomorphismus** genannt. Für alle $a, b \in K$ gilt also

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b), \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \sigma(1) = 1.$$

Ist σ bijektiv, so spricht man von **Körperisomorphismus** oder **Isomorphismus**. Ist $K = L$ und $\sigma : K \to K$ bijektiv, so nennt man σ einen **Körperautomorphismus** oder einfach **Automorphismus**.

Beispiele:

(1) Ist K ein Körper, so ist die identische Abbildung $\mathrm{id} : K \to K$, $a \mapsto a$ natürlich ein Körperautomorphismus.

(2) Die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z} \quad \text{bzw.} \quad x + iy \mapsto x - iy \text{ für } x, y \in \mathbb{R}$$

ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$.

(3) Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, so liefert die komplexe Konjugation einen Körperhomomorphismus

$$K \to \mathbb{C}, \quad a \mapsto \overline{a}.$$

(Achtung: Dies muss kein Automorphismus von K sein.)

Bemerkungen: Sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus.

(1) $\sigma : K \to L$ ist injektiv: Sind $a, b \in K$ mit $a \neq b$, so folgt aus $a - b \neq 0$

$$1 = \sigma(1) = \sigma((a - b) \cdot \frac{1}{a - b}) = \sigma(a - b) \cdot \sigma(\frac{1}{a - b}) = (\sigma(a) - \sigma(b)) \cdot \sigma(\frac{1}{a - b}),$$

woraus sofort $\sigma(a) - \sigma(b) \neq 0$, also $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ folgt.

(2) Für $a \in K$, $b \in K^*$ gilt

$$\sigma(\frac{a}{b}) = \frac{\sigma(a)}{\sigma(b)},$$

denn

$$\sigma(b) \cdot \sigma(\frac{a}{b}) = \sigma(b \cdot \frac{a}{b}) = \sigma(a), \quad \text{also} \quad \sigma(\frac{a}{b}) = \frac{\sigma(a)}{\sigma(b)}.$$

(3) $\sigma(K)$ ist ein Unterkörper von L: Natürlich ist $\sigma(K)$ ein Unterring. Wegen $\frac{1}{\sigma(a)} = \sigma(\frac{1}{a})$ für $a \neq 0$ ist $\sigma(K)$ auch ein Unterkörper.

(4) $\sigma(K)$ ist ein zu K isomorpher Körper.

Erinnerung:

(1) Ist K ein Körper, so ist $\phi : \mathbb{Z} \to K$ mit $\phi(n) = n$ ein Ringhomomorphismus. Der Kern ist ein Primideal in $\mathbb{Z}$, also (0) oder (p) für eine Primzahl p. Man sagt K hat Charakteristik 0 bzw. p.

Datei: kt_hom.tex. Version vom 3.6.2024

(2) Hat K Charakteristik p, so ist $\phi : \mathbb{F}_p \to K$ in Körperhomomorphismus, $\phi(\mathbb{F}_p)$ ist zu $\mathbb{F}_p$ isomorph, wir können $\mathbb{F}_p$ als Unterkörper von K auffassen:

$$\mathbb{F}_p \simeq \{0, 1, 1+1, \dots, \underbrace{1+1+\dots+1}_{p-1 \text{ Summanden}}\} \subseteq K.$$

(3) Hat K Charakteristik 0, so ist der Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \to K$ injektiv. Durch

$$\sigma : \mathbb{Q} \to K, \quad \frac{m}{n} \mapsto \frac{\phi(m)}{\phi(n)}$$

wird ein Körperhomomorphismus definiert. $\sigma(\mathbb{Q})$ ist ein zu $\mathbb{Q}$ isomorpher Körper, weswegen wir $\mathbb{Q}$ auch als Teilmenge von K betrachten können:

$$\mathbb{Q} \simeq \{\frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Lemma. *Seien K, L Körper und $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus.*

(1) *K und L haben die gleiche Charakteristik.*
(2) *Hat K Charakteristik p und denken wir uns $\mathbb{F}_p \subseteq K$ und $\mathbb{F}_p \subseteq L$, so gilt*

$$\sigma(m) = m \text{ für alle } m \in \mathbb{F}_p.$$

(3) *Hat K Charakteristik 0 und denken wir uns $\mathbb{Q} \subseteq K$ und $\mathbb{Q} \subseteq L$, so gilt*

$$\sigma(a) = a \text{ für alle } a \in \mathbb{Q}.$$

Beweis:

(1) Hat K Charakteristik p, so gilt $p = \sum_{i=1}^{p} 1_K = 0$ in K, woraus in L natürlich auch $p = \sum_{i=1}^{p} 1_L = \sum_{i=1}^{p} \sigma(1_K) = \sigma(\sum_{i=1}^{p} 1_K) = \sigma(0) = 0$ folgt. Hat dagegen K Charakteristik 0, so ist $\mathbb{Z} \to K$ injektiv, und damit natürlich auch $\mathbb{Z} \to K \to L$, sodass auch L Charakteristik 0 hat.
(2) Dies folgt sofort aus $\sigma(1) = 1$.
(3) Nun habe K Charakteristik 0.
   - Zunächst folgt aus $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 1$ durch Induktion $\sigma(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
   - Für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt aus $0 = \sigma(0) = \sigma(n + (-n)) = \sigma(n) + \sigma(-n) = n + \sigma(-n)$ sofort $\sigma(-n) = -n$, also insgesamt $\sigma(m) = m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.
   - Für $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt

   $$m = \sigma(m) = \sigma(n \cdot \frac{m}{n}) = \sigma(n) \cdot \sigma(\frac{m}{n}) = n \cdot \sigma(\frac{m}{n}), \quad \text{also} \quad \sigma(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}.$$

   Damit haben wir $\sigma(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ bewiesen. ■

Im Folgenden werden wir oft Oberkörper eines Grundkörpers betrachten. Körperhomomorphismen, die den Grundkörper elementweise festlassen, haben eine eigene Bezeichnung:

Definition. *Sei K ein Körper und $L|K$, $L'|K$ Körpererweiterungen.*

(1) *Ein* K**-Homomorphismus** $L \to L'$ *ist ein Körperhomomorphismus*

$$\sigma : L \to L' \text{ mit } \sigma(c) = c \text{ für alle } c \in K.$$

Anders ausgedrückt:

$$\sigma|_K = \mathrm{id}_K.$$

(2) *Ein* K**-Automorphismus** *von L ist ein Körperautomorphismus von L, der K elementweise festlässt.*
(3) *Die* **Automorphismengruppe** *der Erweiterung $L|K$ wird so definiert:*

$$\mathrm{Aut}(L|K) = \{\sigma : L \to L : \sigma \text{ ist } K\text{-Automorphismus}\}.$$

(Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung ist $\mathrm{Aut}(L|K)$ *eine Gruppe mit* id_L *als neutralem Element.)*

Bemerkung: Das vorangegangene Lemma zeigt: Ist $\sigma : L \to L'$ ein Körperhomomorphismus, so ist σ ein $\mathbb{F}_p$-Homomorphismus, falls L und L' Charakteristik p haben, und ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus, falls L und L' Charakteristik 0 haben.

Beispiele:

(1) In den Übungen wird gezeigt, dass nur die Identität ein Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Insbesondere gilt dann
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}|\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}.$$

(2) Welche $\mathbb{R}$-Homomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt es? Die Identität die die komplexe Konjugation sind sogar $\mathbb{R}$-Automorphismen von $\mathbb{C}$. Gibt es weitere $\mathbb{R}$-Homomorphismen? Sei $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Homomorphismus. Dann gilt
$$(\sigma(i))^2 = \sigma(i^2) = \sigma(-1) = -1 = i^2, \quad \text{also folgt} \quad \sigma(i) = \pm i.$$
Für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt
$$\sigma(x + iy) = \sigma(x) + \sigma(i)\sigma(y) = x + \sigma(i)y.$$
Im Fall $\sigma(i) = i$ ist σ die Identität, im Fall $\sigma(i) = -i$ ist σ die komplexe Konjugation. Insbesondere folgt
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, (\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z})\}.$$

(3) Man kann zeigen, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})$ unendlich ist. (Vgl. Lang. Algebra. S.374)

Wir wollen nun Körperhomomorphismen konstruieren. Wir beginnen mit einer grundlegenden Idee:

Satz. *Sei K ein Körper und L ein Oberkörper von K, d.h. $K \subseteq L$. Sei α algebraisch über K mit Minimalpolynom $f \in K[x]$. Sei L_f die Menge der Nullstellen von f in L, d.h.*
$$L_f = \{\beta \in L : f(\beta) = 0.\}.$$
Dann gilt:

(1) *Ist $\sigma : K(\alpha) \to L$ ein K-Homomorphismus, so ist $\sigma(\alpha) \in L_f$, d.h. eine Nullstelle von f in L.*

(2) *Ist $\beta \in L_f$, d.h. $f(\beta) = 0$, so gibt es genau einen K-Homomorphismus $\sigma : K(\alpha) \to L$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$, nämlich*
$$\sigma(\sum_i c_i\alpha^i) = \sum_i c_i\beta^i \ \textit{mit}\ c_i \in K.$$

(3) *Die Abbildung*
$$\{\sigma : K(\alpha) \to L : \ K\textit{-Homomorphismus}\} \to \{\beta \in L : f(\beta) = 0\}, \quad \sigma \mapsto \sigma(\alpha)$$
ist bijektiv, die K-Homomorphismen $K(\alpha) \to L$ stehen also in Bijektion zu den Nullstellen von f in L.

(4) *Die Anzahl der K-Homomorphismen $K(\alpha) \to L$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in L.*

Beweis: Sei $f = \sum_i a_i x^i$.

(1) Sei $\sigma : K(\alpha) \to L$ ein K-Homomorphismus. Dann folgt:
$$0 = \sigma(f(\alpha)) = \sigma(\sum_i a_i\alpha^i) = \sum_i \sigma(a_i)\sigma(\alpha)^i = \sum_i a_i\sigma(\alpha)^i = f(\sigma(\alpha)),$$
d.h. $\sigma(\alpha)$ ist eine Nullstelle von f in L, also $\sigma(\alpha) \in L_f$.

(2) Sei nun $\beta \in L_f$, d.h. $f(\beta) = 0$.

- Wir betrachten den Ringhomomorphismus
$$\phi : K[x] \to L, \quad \sum_i c_i x^i \mapsto \sum_i c_i\beta^i.$$
Dann gilt
$$\phi(f) = \phi(\sum_i a_i^i) = \sum_i a_i\beta^i = f(\beta) = 0,$$

also ist $f \in \mathrm{Kern}(\phi)$. Wir erhalten also einen Ringhomomorphismus

$$\overline{\phi} : K[x]/(f) \to L, \quad \sum_i c_i \overline{x}^i \mapsto \sum_i c_i \beta^i.$$

- Wir wissen: Der Ringhomomorphismus

$$\psi : K[x] \to K(\alpha), \quad \sum_i c_i x^i \mapsto \sum_i c_i \alpha^i$$

hat als Kern (f) und ist surjektiv, liefert also einen Isomorphismus

$$\overline{\psi} : K[x]/(f) \to K(\alpha), \quad \sum_i c_i \overline{x}^i \mapsto \sum_i c_i \alpha^i.$$

- Aus obigen Abbildungen erhalten wir einen K-Homomorphismus

$$\overline{\phi} \circ \overline{\psi}^{-1} : K(\alpha) \to L, \quad \sum_i c_i \alpha^i \mapsto \sum_i c_i \beta^i.$$

- Natürlich ist σ durch $\sigma(\alpha) = \beta$ eindeutig bestimmt, denn dann gilt

$$\sigma(\sum_i c_i \alpha^i) = \sum_i c_i \beta^i.$$

(3) Dies folgt sofort aus (1) und (2). ■

Beispiele:

(1) Wir wollen die Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$ bestimmen. Das Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $f = x^2 - 2$. Die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind $\pm\sqrt{2}$. Daher gibt es genau zwei Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$, nämlich

$$\sigma_1(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}, \quad \sigma_2(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}.$$

(2) Wir wollen die Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$ bestimmen. Das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $x^3 - 2$. Mit $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ gilt

$$f = (x - \sqrt[3]{2})(x - \zeta\sqrt[3]{2})(x - \zeta^2\sqrt[3]{2}).$$

Daher gibt es genau drei Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$, die durch

$$\sigma_1(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \quad \sigma_2(\sqrt[3]{2}) = \zeta\sqrt[3]{2}, \quad \sigma_3(\sqrt[3]{2}) = \zeta^2\sqrt[3]{2}$$

bestimmt sind.

(3) Wir wollen die Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ bestimmen. Da $f = x^3 - 2$ nur eine reelle Nullstelle hat, nämlich $\sqrt[3]{2}$, gibt es genau einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, nämlich die Identität:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}\}.$$

Lemma. *Sei $L|K$ algebraisch, $f \in K[x]$ ein Polynom und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Nullstellen von f in L. Ist $\sigma : L \to L$ ein K-Homomorphismus, so gilt*

$$\sigma(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

(σ permutiert also die in L gelegenen Nullstellen von f.)

Beweis: Sei $f = \sum_i a_i x^i$. Ist $f(\alpha) = 0$, so folgt

$$f(\sigma(\alpha)) = \sum_i a_i \sigma(\alpha)^i = \sum_i \sigma(a_i \alpha^i) = \sigma(\sum_i a_i \alpha^i) = \sigma(f(\alpha)) = 0,$$

mit α ist also auch $\sigma(\alpha)$ eine Nullstelle von f. Dies impliziert

$$\sigma(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Da σ injektiv ist, folgt aus der Endlichkeit von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die Bijektivität, also

$$\sigma(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

was zu zeigen war. ■

Satz. *Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \to L$ ein K-Homomorphismus. Dann ist σ bereits ein Automorphismus. Insbesondere gilt also*

$$\mathrm{Aut}(L|K) = \{\sigma : L \to L : \ K\textit{-Homomorphismus}\}.$$

Beweis: Wir müssen nur zeigen, dass ein K-Homomorphismus $\sigma : L \to L$ surjektiv ist. Sei $\alpha \in L$ ein beliebiges Element. Sei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von α über K und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die in L liegenden Nullstellen von f, wobei wir o.E. $\alpha_1 = \alpha$ annehmen können. Nach dem letzten Lemma gilt

$$\sigma(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\},$$

es gibt also in α_i mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_1 = \alpha$. Dies beweist die Surjektivität von σ, und damit die Behauptung. ■

Bemerkung: Die Aussage des letzten Satzes stimmt nicht mehr allgemein, wenn man auf die Voraussetzung „algebraische Körpererweiterung“ verzichtet. Dies zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel: Sei K ein Körper und $K(x)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[x]$ in der Unbestimmten x. Dann ist

$$\sigma : K(x) \to K(x), \quad \frac{a(x)}{b(x)} \mapsto \frac{a(x^2)}{b(x^2)}$$

ein K-Körperhomomorphismus, der nicht surjektiv ist. (Genauer gilt $\sigma(K(x)) = K(x^2)$ und $[K(x) : K(x^2)] = 2$.)

Bemerkungen:

(1) Sei K ein Körper und L ein Oberkörper von K. Ist α algebraisch über K, so haben wir gesehen, wie man die K-Homomorphismen $K(\alpha) \to L$ erhält. Ist β algebraisch über $K(\alpha)$, wie erhält man dann die K-Homomorphismen $K(\alpha, \beta) \to L$? Dazu dient das nachfolgende Lemma.

(2) Sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Ist α algebraisch über K, kann man σ zu einem Homomorphismus $K(\alpha) \to L$ fortsetzen? Wir beginnen mit einer Fortsetzung auf die Polynomringe: $K[x] \to L[x]$.

Lemma. *Sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Dann ist*

$$K[x] \to L[x], \quad \sum_i c_i x^i \mapsto \sum_i \sigma(c_i) x^i$$

ein Ringhomomorphismus, der wieder mit σ bezeichnet wird, also

$$\sigma(\sum_i c_i x^i) = \sum_i \sigma(c_i) x^i.$$

Für $f \in K[x]$ und $a \in K$ gilt

$$\sigma(f(a)) = \sigma(f)(\sigma(a)).$$

Beweis: Die Ringhomomorphismus rechnet man einfach nach. Sei nun $f = \sum_i c_i x^i \in K[x]$ und $a \in K$. Dann gilt

$$\sigma(f(a)) = \sigma(\sum_i c_i a^i) = \sum_i \sigma(c_i)\sigma(a)^i = \sigma(f)(\sigma(a)),$$

wie behauptet. ■

Lemma. *Sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus und α algebraisch über K mit Minimalpolynom $f \in K[x]$. Sei L_f die Menge der Nullstellen von $\sigma(f) \in L[x]$ in L, d.h.*

$$L_f = \{\beta \in L : \sigma(f)(\beta) = 0\}.$$

(1) *Ist $\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L$ ein Körperhomomorphismus, der σ fortsetzt, d.h. $\widetilde{\sigma}(c) = \sigma(c)$ für alle $c \in K$, so ist $\widetilde{\sigma}(\alpha)$ eine Nullstelle von $\sigma(f)$, d.h. $\widetilde{\sigma}(\alpha) \in L_f$.*

(2) *Zu jeder Nullstelle $\beta \in L$ von $\sigma(f) \in L[x]$ gibt es genau eine Fortsetzung $\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L$ mit $\widetilde{\sigma}(\alpha) = \beta$, nämlich*

$$\widetilde{\sigma}(\sum_i c_i\alpha^i) = \sum_i \sigma(c_i)\beta^i.$$

(3) *Die Abbildung*

$$\{\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L \text{ Fortsetzung von } \sigma\} \to \{\beta \in L : \sigma(f)(\beta) = 0\}, \quad \widetilde{\sigma} \mapsto \widetilde{\sigma}(\alpha)$$

ist bijektiv, d.h. die Fortsetzungen $\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L$ stehen in Bijektion zu den Nullstellen von $\sigma(f)$ in L.

(4) *Die Anzahl der verschiedenen Fortsetzungen $\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L$ von $\sigma : K \to L$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Nullstellen β von $\sigma(f)$.*

Beweis: Sei $f(x) = \sum_i a_ix^i$ mit $a_i \in K$. Dann ist $\sigma(f)(x) = \sum_i \sigma(a_i)x^i$.

(1) Sei $\widetilde{\sigma} : K(\alpha) \to L$ ein Körperhomomorphismus, der σ fortsetzt. Dann gilt

$$\sigma(f)(\widetilde{\sigma}(\alpha)) = \sum_i \sigma(a_i)\widetilde{\sigma}(\alpha)^i = \widetilde{\sigma}(\sum_i a_i\alpha^i) = \widetilde{\sigma}(f(\alpha)) = \widetilde{\sigma}(0) = 0,$$

d.h. $\widetilde{\sigma}(\alpha)$ ist eine Nullstelle von $\sigma(f)$.

(2)
- Sei $\beta \in L$ mit $\sigma(f)(\beta) = 0$, d.h. $\sum_i \sigma(a_i)\beta^i = 0$. Dann erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\phi : K[x] \to L[x] \to L, \quad \sum_i c_ix^i \mapsto \sum_i \sigma(c_i)x^i \mapsto \sum_i \sigma(c_i)\beta^i.$$

  Das Polynom f liegt im Kern von ϕ, sodass wir eine induzierte Abbildung

$$\overline{\phi} : K[x]/(f) \to L, \quad \overline{\sum_i c_ix^i} \mapsto \sum_i \sigma(c_i)\beta^i$$

  erhalten.
- Weiter ist

$$\psi : K[x] \to K(\alpha), \quad \sum_i c_ix^i \mapsto \sum_i c_i\alpha^i$$

  ein Ringhomomorphismus mit Kern (f), woraus sich ein Körperisomorphismus

$$\overline{\psi} : K[x]/(f) \to K(\alpha), \quad \overline{\sum_i c_ix^i} \mapsto \sum_i c_i\alpha^i$$

  ergibt.
- Der Körperhomomorphismus

$$\overline{\phi} \circ \overline{\psi}^{-1} : K(\alpha) \to L, \quad \sum_i c_i\alpha^i \mapsto \sum_i \sigma(c_i)\beta^i$$

  setzt σ fort und bildet α auf β ab. Mit $\widetilde{\sigma} = \overline{\phi} \circ \overline{\psi}^{-1}$ folgt die Existenz der Fortsetzung.
- Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt sofort aus

$$\widetilde{\sigma}(\sum_i c_i\alpha^i) = \sum_i \widetilde{\sigma}(c_i)\widetilde{\sigma}(\alpha)^i = \sum_i \sigma(c_i)\beta^i.$$

(3) Dies folgt sofort aus (1) und (2). ■

Beispiel: Sei $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$. Wir wollen alle Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha, i\alpha) \to \mathbb{C}$ beschreiben. Wir beginnen mit den Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$ und wollen diese zu Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha)(i\alpha) \to \mathbb{C}$ mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas fortsetzen.

- Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist $f = x^4 - 2$. Es zerlegt sich über $\mathbb{C}$ wie folgt:

$$f = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - i\alpha)(x + i\alpha).$$

  Also erhalten wir vier Körperhomomorphismen $\sigma_i : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$:

$$\sigma_1(\alpha) = \alpha, \quad \sigma_2(\alpha) = -\alpha, \quad \sigma_3(\alpha) = i\alpha, \quad \sigma_4(\alpha) = -i\alpha.$$

- Wir schreiben $\mathbb{Q}(\alpha, i\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)(i\alpha)$. Das Minimalpolynom von $i\alpha$ über $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist
$$g = x^2 + \alpha^2 = (x - i\alpha)(x + i\alpha).$$
- Wir wollen beispielhaft σ_3 mit $\sigma_3(\alpha) = i\alpha$ fortsetzen. Wir betrachten
$$\sigma_3(g) = x^2 + \sigma_3(\alpha^2) = x^2 + (i\alpha)^2 = x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha).$$
Es gibt also zwei Fortsetzungen $\tau_{3,1}$ und $\tau_{3,2}$, die durch
$$\tau_{3,1}(i\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad \tau_{3,2}(i\alpha) = -\alpha$$
beschrieben werden. Beispielsweise gilt für $c_{kl} \in \mathbb{Q}$
$$\begin{aligned}\tau_{3,2}\left(\sum_{k,l} c_{kl}\,\alpha^k \cdot (i\alpha)^l\right) &= \sum_{k,l} c_{kl}\,\tau_{3,2}(\alpha)^k \cdot \tau_{3,2}(i\alpha)^l = \\ &= \sum_{k,l} c_{kl}\,\sigma_3(\alpha)^k \cdot \tau_{3,2}(i\alpha)^l = \\ &= \sum_{k,l} c_{kl}\,(i\alpha)^k \cdot (-\alpha)^l.\end{aligned}$$

Wir führen das vorangegangene Beispiel noch anders durch:

Beispiel: Wir wollen alle Homomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \to \overline{\mathbb{Q}}$ sowie deren Bilder bestimmen.
- $\sqrt[4]{2}$ hat das Minimalpolynom $x^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$. In $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ faktorisiert das Polynom wie folgt:
$$x^4 - 2 = x^4 - \sqrt{2}^2 = (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2}).$$
Wir erhalten also vier Homomorphismen $\sigma_i : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \to \overline{\mathbb{Q}}$, die durch
$$\sigma_1(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}, \quad \sigma_2(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}, \quad \sigma_3(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}, \quad \sigma_4(\sqrt[4]{2}) = -i\sqrt[4]{2}.$$
- Wegen $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ist $x^2 + 1$ das Minimalpolynom von i über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, das über $\overline{\mathbb{Q}}$ so faktorisiert
$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$
Jeder Homomorphismus σ_i besitzt also zwei Fortsetzungen.
$$\begin{aligned}
\sigma_{1,1}(\sqrt[4]{2}) &= \sqrt[4]{2}, & \sigma_{1,1}(i) &= i,\\
\sigma_{1,2}(\sqrt[4]{2}) &= \sqrt[4]{2}, & \sigma_{1,2}(i) &= -i,\\
\sigma_{2,1}(\sqrt[4]{2}) &= -\sqrt[4]{2}, & \sigma_{2,1}(i) &= i,\\
\sigma_{2,2}(\sqrt[4]{2}) &= -\sqrt[4]{2}, & \sigma_{2,2}(i) &= -i,\\
\sigma_{3,1}(\sqrt[4]{2}) &= i\sqrt[4]{2}, & \sigma_{3,1}(i) &= i,\\
\sigma_{3,2}(\sqrt[4]{2}) &= i\sqrt[4]{2}, & \sigma_{3,2}(i) &= -i,\\
\sigma_{4,1}(\sqrt[4]{2}) &= -i\sqrt[4]{2}, & \sigma_{4,1}(i) &= i,\\
\sigma_{4,2}(\sqrt[4]{2}) &= -i\sqrt[4]{2}, & \sigma_{4,2}(i) &= -i.
\end{aligned}$$
Zwar sind die 8 Abbildungen verschieden, die Bilder sind aber immer gleich, nämlich $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

SATZ. *Sei $\widetilde{K}|K$ eine algebraische Körpererweiterung, L ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Dann gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{\sigma} : \widetilde{K} \to L$.*

Beweis: Dies beweist man mit dem Lemma von Zorn.
- Wir betrachten Paare (E, σ_E), wo E ein Zwischenkörper $K \subseteq E \subseteq \widetilde{K}$ und $\sigma_E : E \to L$ eine Fortsetzung von $\sigma : K \to L$ ist.
- Sei M die Menge aller solcher Paare. Wir führen eine Ordnung $\leq$ ein:
$$(E_1, \sigma_{E_1}) \leq (E_2, \sigma_{E_2}) \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 \subseteq E_2 \text{ und } \sigma_{E_2}|_{E_1} = \sigma_{E_1}.$$

- Ist
$$(E_1, \sigma_{E_1}) \leq (E_2, \sigma_{E_2}) \leq (E_3, \sigma_{E_3}) \leq \dots$$
eine Kette in M, so erhält man eine obere Schranke (E, σ_E) durch
$$E = \bigcup_{i \geq 1} E_i \quad \text{und} \quad \sigma_E(\beta) = \beta, \text{ falls } \beta \in E_i.$$
- Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element (E, σ_E) in M.
- Wäre $E \subsetneq \widetilde{K}$, so könnte man $\alpha \in \widetilde{K} \setminus E$ wählen. Ist $f \in E[x]$ das Minimalpolynom von α über E und $\beta \in L$ eine Nullstelle von $\sigma_E(f)$, so erhält man mit dem vorangegangenen Lemma eine Fortsetzung von σ_E auf $E(\alpha)$. Dies würde aber der Maximalität von (E, σ_E) widerspruchen.
- Also muss gelten $E = \widetilde{K}$, was die Behauptung beweist. ■

Beispiel: Wir haben gesehen, dass es genau 3 Körperhomomorphismen $\sigma_i : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$ gibt, die durch
$$\sigma_1(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \quad \sigma_2(\sqrt[3]{2}) = \zeta \sqrt[3]{2}, \quad \sigma_3(\sqrt[3]{2}) = \zeta^2 \sqrt[3]{2} \quad \text{mit } \zeta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
bestimmt sind.

- Der Satz besagt, dass sich diese Körperhomomorphismen zu Körperhomomorphismen $\widetilde{\sigma}_i : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ fortsetzen lassen.
- Betrachtet man die Körperhomomorphismen als Körperhomomorphismen mit Bild im algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$, d.h. $\sigma_i : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \overline{\mathbb{Q}}$, so sind die Fortsetzungen sogar Körperautomorphismen von $\overline{\mathbb{Q}}$. (Die Fortsetzungen sind nicht eindeutig bestimmt.)

Der algebraische Abschluss eines Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt:

Folgerung. *Seien $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ zwei algebraische Abschlüsse eines Körpers K. Dann existiert ein Isomorphismus $\overline{K}_1 \to \overline{K}_2$, der die Identität $K \to K$ fortsetzt.*

Beweis: Nach dem vorangegangenen Satz lässt sich die Identität $K \to K$ zu einem Körperhomomorphismus $\sigma : \overline{K}_1 \to \overline{K}_2$ fortsetzen. Man sieht leicht, dass $\sigma(\overline{K}_1)$ algebraisch abgeschlossen ist. Da $\overline{K}_2$ algebraisch über K ist, ist $\overline{K}_2$ auch algebraisch über $\sigma(\overline{K}_1)$. Da aber ein algebraisch abgeschlossener Körper keine echten algebraischen Erweiterungen hat, folgt $\sigma(\overline{K}_1) = \overline{K}_2$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Der Zerfällungskörper eines Polynoms ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt:

Folgerung. *Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein nichtkonstantes Polynom. Sind Z_1 und Z_2 Zerfällungskörper von f über K, so sind Z_1 und Z_2 isomorph über K.*

Beweis: Sei $\overline{Z}_2$ ein algebraischer Abschluss von Z_2. Dann ist natürlich $\overline{Z}_2$ auch ein algebraischer Abschluss von K. Die Identität $K \to K$ lässt sich dann zu einem Homomorphismus
$$\sigma : Z_1 \to \overline{Z}_2$$
fortsetzen. Es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Z_1$ mit
$$Z_1 = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ und } f(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$
und $\beta_1, \dots, \beta_n \in Z_2$ mit
$$Z_2 = K(\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ und } f(x) = c(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n).$$
Es gilt
$$c(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n) = f(x) = \sigma(f)(x) = c(x - \sigma(\alpha_1)) \dots (x - \sigma(\alpha_n)).$$
Wegen der eindeutigen Faktorzerlegung in $\overline{Z}_2[x]$ gilt also
$$\{\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)\} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$
Daher folgt
$$\sigma(Z_1) = \sigma(K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = K(\beta_1, \dots, \beta_n) = Z_2.$$

Daher ist σ ein K-Isomorphismus $Z_1 \to Z_2$. ■

2. Zerfällungskörper und normale Körpererweiterungen

Wir haben den Zerfällungskörper für ein Polynom definiert. Dies wird nun etwas verallgemeinert:

Definition. *Ist K ein Körper und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Polynomen $f_i \in K[x]$ vom Grad ≥ 1, so heißt ein Oberkörper Z von K ein* **Zerfällungskörper** *von $(f_i)_{i\in I}$, wenn jedes f_i in $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.*

$$f_i(x) = c_i(x - \alpha_{i,1}) \dots (x - \alpha_{i,d_i}),$$

und wenn Z über K von den Nullstellen der Polynome f_i erzeugt wird, d.h.

$$Z = K(\{\alpha_{i,j} : i, j\}).$$

Beispiel: Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n(x) = x^2 - n \in \mathbb{Q}[x]$. Ein Zerfällungskörper für die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ ist dann

$$\mathbb{Q}(\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{i\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}).$$

Zerfällungskörper haben einige interessante Eigenschaften.

Satz. *Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$ und L eine algebraische Erweiterung mit $K \subseteq L \subseteq \overline{K}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(1) *L ist Zerfällungskörper einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Polynomen aus $K[x]$.*
(2) *Jedes irreduzible Polynom $f \in K[x]$, das eine Nullstelle in L hat, zerfällt über L in Linearfaktoren.*
(3) *Jeder K-Homomorphismus $\sigma : L \to \overline{K}$ erfüllt $\sigma(L) = L$, definiert also einen Automorphismus von L.*

Beweis:

- (3)$\Longrightarrow$(2) Sei $f \in K[x]$ irreduzibel und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Sei $\widetilde{\alpha} \in \overline{K}$ eine beliebige Nullstelle von f. Dann gibt es einen K-Homomorphismus $K(\alpha) \to \overline{K}$ mit $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$. Dieser K-Homomorphismus kann zu einem K-Homomorphismus $\sigma : L \to \overline{K}$ mit $\sigma(\alpha) = \widetilde{\alpha}$ fortgesetzt werden. Aus $\sigma(L) = L$ folgt nun $\widetilde{\alpha} \in L$. Da dies für alle Nullstellen von f gilt, zerfällt f über L in Linearfaktoren.
- (2)$\Longrightarrow$(1) Sei $(\alpha_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von L, die L über K erzeugen, d.h. $L = K(\{\alpha_i : i \in I\})$. Sei $f_i \in K[x]$ das Minimalpolynom von α_i über K. Nach Voraussetzung sind nun alle Nullstellen von f_i in L enthalten. Daher ist L der Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_{i\in I}$.
- (1)$\Longrightarrow$(3) Sei also L der Zerfällungskörper einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Polynomen aus $K[x]$ und $\sigma : L \to \overline{K}$ ein K-Homomorphismus. Seien $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_i}$ die Nullstellen von f_i; nach Voraussetzungen liegen alle Nullstellen in L. Es ist

$$f_i(\sigma(\alpha_{i,j})) = \sigma(f_i(\alpha_{i,j})) = \sigma(0) = 0,$$

daher ist auch $\sigma(\alpha_{i,j})$ eine Nullstelle von f_i, es gibt also einen Index j' mit $\sigma(\alpha_{i,j}) = \alpha_{i,j'} \in L$. Da L von den $\alpha_{i,j}$ erzeugt wird, folgt $\sigma(L) \subseteq L$. In einem früheren Satz haben wir gesehen, dass dann $\sigma(L) = L$ folgt. Daher ist $\sigma : L \to L$ ein K-Automorphismus. ■

Definition. *Eine Körpererweiterung $L|K$ heißt* **normal***, wenn eine der äquivalenten Bedingungen des letztes Satzes erfüllt ist.*

Beispiele:

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$ ist normal, denn $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist Zerfällungskörper des Polynoms x^2-2. Natürlich zerfällt x^2-2 auch über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in Linearfaktoren:
$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$
Die Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind
$$\sigma_1(a+b\sqrt{2})=a+b\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \sigma_2(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}.$$
σ_1 ist natürlich die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ ist nicht normal, denn das Polynom x^3-2 hat zwar die Nullstelle $\sqrt[3]{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, die anderen Nullstellen sind aber $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}$ und liegen offensichtlich nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Die Körperhomomorphismen $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \overline{\mathbb{Q}}$ sind gegeben durch
$$\sigma_1(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}, \quad \sigma_2(\sqrt[3]{2})=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}, \quad \sigma_3(\sqrt[3]{2})=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2}.$$
Offensichtlich besteht $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q})$ nur aus der Identität.

Das erste Beispiel verallgemeinert sich wie folgt:

Satz. *Jede Körpererweiterung $L|K$ vom Grad 2 ist normal.*

Beweis: Sei $\alpha \in L \setminus K$ und $f = x^2 - ax + b \in K[x]$ das Minimalpolynom von α über K. Für $\beta \in L$ mit $\alpha + \beta = a$ gilt dann $f = (x-\alpha)(x-\beta)$. Also ist L Zerfällungskörper des Polynoms f, also ist L normal über K. ■

Satz. *Ist K ein endlicher Körper der Charakteristik p, so ist K eine normale Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$.*

Beweis: Ist $|K| = p^d$, so haben wir gesehen, dass in $K[x]$ die Beziehung
$$x^{p^d}-x=\prod_{a\in K}(x-a)$$
gilt. Also ist K der Zerfällungskörper des Polynoms $x^{p^d}-x \in \mathbb{F}_p[x]$, und damit normal über $\mathbb{F}_p$. ■

Satz. *Seien $E|K$ und $F|E$ algebraische Körpererweiterungen. Ist $F|K$ eine normale Erweiterung, so auch $F|E$.*
$$\underbrace{K \subseteq E \subseteq F}_{normal} \quad \Longrightarrow \quad K \subseteq \underbrace{E \subseteq F}_{normal}.$$

Beweis: Ist F normal über K, so ist F Zerfällungskörper einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Polynomen $f_i \in K[x]$. Dann ist natürlich F auch Zerfällungskörper dieser Polynome über E. Also ist F normal über E. ■

Bemerkung: Wir betrachten algebraische Erweiterungen $K \subseteq E \subseteq F$:

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ E \\ | \\ K \end{array}$$

(1) Ist $F|K$ normal, so auch $F|E$. Allerdings muss $E|K$ nicht normal sein, wie ein nachfolgendes Beispiel zeigt.

(2) $F|K$ muss nicht normal sein, auch wenn $E|K$ und $F|E$ normal sind.

Beispiel:

(1) Sei $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$. Über $\mathbb{Q}$ hat α das Minimalpolynom $f = x^4 - 2$. Über einem algebraischen Abschluss zerfällt f wie folgt:
$$f = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - i\alpha)(x + i\alpha).$$
Daher ist $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ nicht normal. Nach Konstruktion ist aber $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ normal über $\mathbb{Q}$.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

(2) Wir betrachten $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Die Erweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind normal, da sie Erweiterungen vom Grad 2 sind. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}$ ist aber nicht normal, wie wir oben gesehen haben.

Satz. *Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, seien N_1, N_2 normale Körpererweiterungen von K mit $N_1, N_2 \subseteq L$. Dann sind auch*
$$N_1 N_2 \quad \textit{und} \quad N_1 \cap N_2$$
normal über K.

Beweis: Sei N_1 Zerfällungskörper der Polynome $f_i \in K[x]$, $i \in I$ und N_2 Zerfällungskörper der Polynome $g_j \in K[x]$, $j \in J$. Dann ist das Kompositum $N_1 N_2$ der Zerfällungskörper der Polynome f_i, g_j, $i \in I, j \in J$. Also ist $N_1 N_2$ normal über K.
Sei $\sigma : N_1 \cap N_2 \to \overline{K}$ ein K-Homomorphismus. Wir können σ fortsetzen zu K-Homomorphismen
$$\sigma_1 : N_1 \to \overline{K} \quad \text{und} \quad \sigma_2 : N_2 \to \overline{K},$$
also
$$\sigma_1|_{N_1 \cap N_2} = \sigma = \sigma_2|_{N_1 \cap N_2}.$$
Da N_1 normal über K ist, gilt $\sigma_1(N_1) \subseteq N_1$, analog $\sigma_2(N_2) \subseteq N_2$. Sei nun $a \in N_1 \cap N_2$ beliebig. Dann folgt
$$\sigma(a) = \sigma_1(a) \in N_1 \quad \text{und} \quad \sigma(a) = \sigma_2(a) \in N_2,$$
also
$$\sigma(a) \in N_1 \cap N_2,$$
woraus $\sigma(N_1 \cap N_2) \subseteq N_1 \cap N_2$ folgt. Daher ist auch $N_1 \cap N_2$ normal über K. ■

Satz. *Seien N_i, $i \in I$ normale Körpererweiterungen von K mit $K \subseteq N_i \subseteq \overline{K}$. Dann ist auch der Durchschnitt*
$$\bigcap_{i \in I} N_i$$
eine normale Körpererweiterung von K.

Definition. *Ist $L|K$ eine algebraische Erweiterung, so heißt eine Erweiterung $N|L$ eine* **normale Hülle** *der Erweiterung $L|K$, wenn $N|K$ normal ist und N minimal mit dieser Eigenschaft ist.*

Bemerkung: Ist $L|K$ endlich, sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ mit
$$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$
sind $f_i \in K[x]$ die Minimalpolynome der α_i, so kann man für N den Zerfällungskörper der Polynome $f_1, \dots, f_n$ wählen.

Beispiel: Für $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ eine normale Hülle, wie ein vorangegangenes Beispiel zeigt.