TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM

Folgen und Reihen

© Edgar M.E. Wermuth
TH Nürnberg

V/2018

1. Folgen und ihre Grenzwerte

Folgen sind Abbildungen mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ heißt **Nullfolge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{für fast alle } n\,.$$

(„fast alle" = alle bis auf *endlich viele* Ausnahmen)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;:\Leftrightarrow\; (x_n - x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\,.$$

Dabei heißt x der **Grenzwert** oder *Limes* der Folge. Man schreibt auch: $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

1.1 Grenzwert-Rechenregeln

$$x_n \to x,\ y_n \to y \;\Rightarrow\; \alpha\, x_n + \beta\, y_n \to \alpha\, x + \beta\, y$$
$$x_n \to x,\ y_n \to y \;\Rightarrow\; x_n\, y_n \to xy$$
$$x_n \to x,\ y_n \to y \neq 0 \;\Rightarrow\; x_n/y_n \to x/y$$
$$x_n > 0,\ x_n \to x > 0,\ y_n \to y \;\Rightarrow\; x_n^{y_n} \to x^y$$
$$x_n \geq 0,\ x_n \to x \;\Rightarrow\; x \geq 0$$
$$a_n \to c,\ b_n \to c,\ a_n \leq x_n \leq b_n \;\Rightarrow\; x_n \to c$$
$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \to x$$
$$x_n > 0,\ x_n \to x \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \to x$$
$$x_n > 0,\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \to q \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{x_n} \to q$$

(Aus Platzgründen wurde überall $(n \to \infty)$ weggelassen.)

1.2 Beispiele:

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{n}} \to 0 \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = \frac{n-1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1} \to 1 \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = \frac{3n^2-5n+3}{5n^2+17}} = \frac{3-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{17}{n^2}} \to \frac{3}{5} \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = \sqrt[n]{n}} \to 1 \quad (n \to \infty), \text{ da } x_n > 1 \text{ und}$$
$$x_n < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \text{ wegen } \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n};$$
$$\boldsymbol{x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)^n \leq \frac{1}{1+\frac{n}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = q^n} \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ im Falle } |q| < 1;$$
$$\boldsymbol{x_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}} = \frac{(2/3)^n - 1}{(2/3)^n + 1} \to -1 \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \mathrm{e} \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n} \to \mathrm{e}^a \quad (n \to \infty);$$
$$\boldsymbol{x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)} \to \ln a \quad (n \to \infty) \text{ für } a > 0;$$
$$\boldsymbol{x_n = \sqrt[n]{n!}/n} \to 1/\mathrm{e} \quad (n \to \infty), \text{ denn}$$
$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e}\,;$$
$$\boldsymbol{x_n = \sqrt{2\pi\, n}\,(n/\mathrm{e})^n/n!} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Der letzte Grenzwert heißt *Stirlingsche Formel*, stammt aber bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$ (Stirlings Beitrag) von *Abraham de Moivre*.

Grenzwert-Rechenregeln berechnen aus vorausgesetzten Grenzwerten diejenigen zusammengesetzter Folgen. *Konvergenzkriterien* hingegen nennen Voraussetzungen, aus denen die *Existenz* von Grenzwerten – aber nicht unbedingt ihr Wert – unmittelbar folgt.

1.3 Monotoniekriterium

Eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent (d.h.: hat einen Grenzwert).

1.4 Kontraktionskriterium

Gilt für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$|x_{n+1} - x_n| \le q \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad (n \ge n_0)$$

mit einem $q < 1$, ist die Folge konvergent.
Hinreichend: $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}| < 1$.

1.5 Beispiele

1) $x_n := (1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$ (allg. binomische Formel) zeigt, dass die Werte x_n streng wachsen, außerdem, dass $x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots) = \frac{87}{32} = 2.71875$. Also ist die Folge konvergent. Limes: die *Eulersche Zahl* e, neben π wichtigste Konstante der Mathematik; $\mathrm{e} \ge \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} = \frac{1957}{720} = 2.71805\ldots$

2) Mit a, $x_0 > 0$, $x_{n+1} := a/(1+x_n)$ sind alle $x_n > 0$, und es folgt $x_{n+1} - x_n = a(x_{n-1} - x_n)/(1+x_n)(1+x_{n-1})$ $= a(x_{n-1} - x_n)/(1 + x_{n-1} + x_n(1 + x_{n-1}))$ $= a(x_{n-1} - x_n)/(1 + x_{n-1} + a)$. Mit $q = a/(1+a)$ gilt das Kontraktionskriterium, die Folge ist konvergent. Für den Grenzwert x folgt aus den Grenzwert-Rechenregeln $x = a/(1+x)$, also $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

3) $x_n := n^k q^n$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$. Wegen

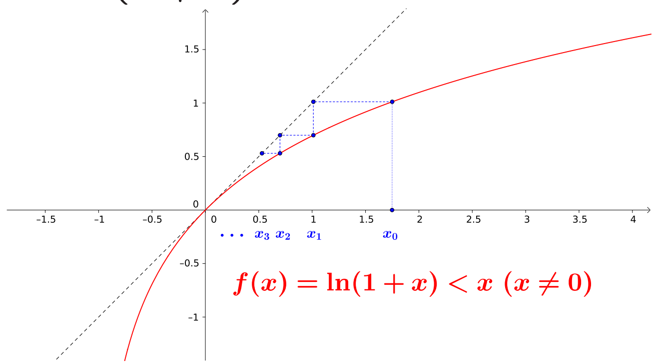
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{(n+1)^k q^{n+1} - n^k q^n}{n^k q^n - (n-1)^k q^{n-1}} = \frac{(1+1/n)^k q - 1}{1 - (1-1/n)^k q^{-1}} \to \frac{q-1}{1-q^{-1}} = q \;\; (n \to \infty)$$

ist die Folge gemäß Kontraktionskriterium konvergent. Sei x der Grenzwert. Dann folgt aus $x_{n+1} = (1+\frac{1}{n})^k q\, x_n$, dass $x = q\,x$, also $x = 0$.
Fazit: $\boldsymbol{n^k q^n \to 0 \;\; (n \to \infty)}$, falls $\boldsymbol{|q| < 1}$.

4) $x_0 > 0$, $x_{n+1} := \ln(1 + x_n)$.
Da ln streng monoton wächst und $\ln 1 = 0$, folgt $x_n > 0$ für alle n. Da außerdem

$$x > \ln(1+x) \quad (x \in (-1,\infty) \setminus \{0\}),$$

folgt $x_{n+1} < x_n$ für alle n. Gemäß Monotonie-Kriterium ist die Folge konvergent gegen einen Limes x.
Also $x = \ln(1+x)$ und damit $x = 0$.



5)* Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_0 \in (0,1)$ und $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n(1-x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)}$.

Zunächst ist leicht einzusehen (Induktion), dass $x_n \in (0,1)$ und damit auch $x_{n+1} < x_n$ für alle n. Somit handelt es sich um eine monoton fallende beschränkte, also konvergente Folge. Für den Grenzwert x gilt $x = x(1-x)$, folglich $\boldsymbol{x = \lim_{n\to\infty} x_n = 0}$.

Wir leiten noch eine etwas genauere Aussage über das Wachstumsverhalten der Folgen her. Wegen $x_{n+1} = \frac{1}{4} - \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2$ gilt $x_n \le \frac{1}{4}$ $(n \ge 1)$. Wir betrachten nun die Folge der Werte $y_n = \frac{1}{x_n}$. Deren Rekursion lautet

$$y_{n+1} = y_n + 1 + \frac{1}{y_n - 1}.$$

Mit $y_1 \ge 4$ folgt

$$y_n \ge y_1 + n - 1 \ge n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

außerdem für $n \ge 2$

$$y_n \le y_1 + n - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

Fazit:

$$\boldsymbol{\frac{1}{n+3} \ge x_n \ge \frac{1}{y_1 + n - 1 + \sum_{k=3}^{n+1} 1/k} \quad (n \in \mathbb{N})}$$

und damit $\boxed{\boldsymbol{x_n = \frac{1-\varepsilon_n}{n}}}$ mit einer *Nullfolge* (ε_n), da $\big(1/3 + 1/4 + \cdots + 1/(n+1)\big)/n \to 0$ $(n \to \infty)$.

6) *Das Stolzsche Lemma*

(nach Otto Stolz, 1842-1905):

Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton gegen Unendlich strebende Folge positiver Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

falls der Limes rechts existiert.

(Der Beweis, *komponentenweise* angewendet, zeigt: Die a_n könnten auch in einem endlichdimensionalen Vektorraum liegen.)

Beweis:

Sei L der Limes rechts und $\varepsilon > 0$. Dann gilt
$(L-\varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (L+\varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$
für alle $n \ge n_0$. Aufsummieren dieser Ungleichungen für $n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ ergibt
$(L-\varepsilon)(b_n - b_{n_0}) < a_n - a_{n_0} < (L+\varepsilon)(b_n - b_{n_0})$, folglich
$(L-\varepsilon)\big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\big) + \frac{a_{n_0}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (L+\varepsilon)\big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\big) + \frac{a_{n_0}}{b_n}$ und daher $L - 2\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + 2\varepsilon$ für genügend große n. ■

Zum Beispiel gilt allgemein:
$\boldsymbol{x_n \to x \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \to x}$,
wie Anwendung des Lemmas auf $a_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $b_n := n$ zeigt; eine schon ganz zu Anfang formulierte Grenzwert-Regel.

Ist (x_n) die Folge aus Beispiel 5) und $y_n = 1/x_n$, folgt $y_{n+1} - y_n = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{1-x_n} \to 1$ wegen $x_n \to 0$ und daher nach Stolz auch $\frac{y_n}{n} = \frac{1}{n\,x_n} \to 1$ $(n \to \infty)$.

Die bisherigen Konvergenzkriterien sind *hinreichend*, aber nicht *notwendig* für Konvergenz; es gibt konvergente Folgen, die weder monoton noch kontrahierend sind. Simples **Beispiel:** $x_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}\frac{1}{n}$, also $(x_n) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots)$.

Das nun zu formulierende eher theoretische Konvergenzkriterium ist *notwendig und hinreichend*. Es drückt aus, dass die Glieder einer konvergenten Folge mit fortschreitendem n immer enger zusammenrücken.

1.6 Cauchy-Folgen, Cauchy-Kriterium

Eine Folge (x_n) heißt *Cauchy-Folge* (nach A.L.Cauchy), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \text{ für alle } m, n \geq n_0.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, und jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweis:

Konvergiert eine Folge (x_n) gegen einen Grenzwert x, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$. Es folgt $|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \varepsilon$ für $m, n \geq n_0$. Nun sei umgekehrt eine Cauchy-Folge gegeben. Wir haben zu zeigen, dass sie einen Grenzwert besitzt.

Zunächst stellen wir fest, dass die Folge *beschränkt* ist, also komplett in einem Bereich $|x| \leq M$ mit genügend groß gewähltem M liegt. Denn wählen wir n_0 so, dass $|x_m - x_n| < 1$ für $m, n \geq n_0$, so ist $M := 1 + \max_{n \leq n_0} |x_n|$ offenbar geeignet. In (mindestens) einem der beiden Intervalle $[-M, 0]$, $[0, M]$ liegen unendlich viele Glieder der Folge. Wir wählen ein solches Teilintervall, nennen es I_1. Wir betrachten wieder dessen abgeschlossene Halbintervalle, wählen eines aus, in dem unendlich viele Folgenglieder liegen, nennen es I_2; usw.

Wir erhalten so eine Folge (I_n) abgeschlossener und ineinandergeschachtelter ($I_{n+1} \subseteq I_n$) Intervalle, deren Längen $|I_n| = M/2^{n-1}$ gegen 0 streben.

Die fundamentale Eigenschaft der **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$:

> *Zu jeder Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $I_n \neq \emptyset$, $|I_n| \to 0$ gibt's stets genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $M/2^{n_0-1} < \varepsilon/2$ und $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$ für $m, n \geq n_0$. Laut Konstruktion gibt es unendlich viele Glieder der Folge in I_{n_0}, also auch ein Element x_{n_1} mit $n_1 \geq n_0$. Dann folgt für $n \geq n_0$:

$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x| < \varepsilon/2 + M/2^{n_0-1} < \varepsilon$. ■

Wir schließen noch eine weitere wichtige Aussage an, die mit praktisch derselben Argumentationsmethode bewiesen werden kann. Vorab ein paar begriffliche Ergänzungen: Ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, heißt $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** der Folge (x_n); z.B. $(x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots)$ oder $(x_1, x_4, x_9, x_{16}, x_{25}, \ldots)$ sind Teilfolgen. Strebt eine Teilfolge gegen einen Grenzwert, nennt man diesen einen **Häufungswert** der ursprünglichen Folge. Eine Folge kann *mehrere*, sogar unendlich viele Häufungswerte haben; aber eine Cauchy-Folge hat, wie wir sahen, *genau einen*, ihren Grenzwert.

1.7 Satz von Bolzano/Weierstraß

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Der **Beweis** ergibt sich wieder aus einem Bisektions- und Vollständigkeitsargument. Man definiert ganz analog die Intervalle I_n und wählt dann eine Teilfolge (x_{k_n}) mit $x_{k_n} \in I_n$. ■

Ein grundlegendes analytisches Argumentationsmittel, das ebenfalls auf dieselbe Art bewiesen werden kann, ist der *Überdeckungssatz von Heine/Borel*.

Einige Begriffe: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt **offen**, wenn sie zu jedem ihrer Punkte eine ganze Umgebung umfasst. Offene Intervalle sind Beispiele.

Eine Menge A heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist. Abgeschlossene Intervalle sind Beispiele. Leicht zu zeigen: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist *genau dann* abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (x_n) reeller Zahlen mit $x_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt, dass auch $\lim x_n \in A$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **kompakt**, wenn sie *abgeschlossen und beschränkt* ist. Eine Famile von Mengen $(O_i)_{i \in I}$ heißt **offene Überdeckung** einer Menge A, wenn alle O_i offene Mengen sind und $\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq A$.

1.8 Überdeckungssatz von Heine/Borel

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A, so gibt es *endlich viele* Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, so dass schon $O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n} \supseteq A$.

Kurz gesagt: Jede offene Überdeckung einer kompakten Menge besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis:

Wir gehen aus von der *Widerspruchsannahme*, es liege eine offenene Überdeckung $\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq A$ vor, zu der *keine* endliche Teilüberdeckung existiert.

Sei I_0 ein A umfassendes abgeschlossenes Intervall. Wir definieren durch fortgesetzte Bisektion (Halbierung) rekursiv eine Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle mit der Eigenschaft, dass keine der abgeschlossenen Mengen $I_n \cap A$ durch endlich viele der O_i überdeckt wird. (Für jedes I_n gilt: Mindestens eine seiner beiden Hälften umfasst einen Teil von A, der nicht durch endlich viele O_i überdeckt wird.) Insbesondere also $|I_n| = 2^{-n} \cdot |I_0|$, $I_{n-1} \supset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Der durch diese Intervallschachtelung gegebene Punkt x^* ist Limes einer Folge von Punkten aus A (z.B. $x_n := \min(I_n \cap A)$ ergibt eine solche Folge), weshalb wegen Abgeschlossenheit auch $x^* \in A$. Es gibt daher ein O_i mit $x^* \in O_i$, also auch $I_n \subseteq O_i$ für alle hinreichend großen n. Widerspruch! ■

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes:

Besitzt jede offene Überdeckung einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilüberdeckung, ist A kompakt.

Beweis: Ist eine Menge A nicht beschränkt, wird sie von den offenen Intervallen $O_n := (-n, n)$ $(n \in \mathbb{N})$ überdeckt, aber *nicht* von endlich vielen von ihnen. Gibt es eine konvergente Folge (x_n) in A mit $x^* := \lim x_n \notin A$ ($\Leftrightarrow$ A nicht abgeschlossen), ergeben die Mengen $O_n := \mathbb{R} \setminus [x^* - n^{-1}, x^* + n^{-1}]$, aber *nicht* endlich viele von ihnen, eine offene Überdeckung von A. ■

Satz und Beweis lassen sich ohne weiteres auf den n-dimensionalen Fall übertragen. Auch die Gleichung „kompakt = abgeschlossen und beschränkt“ gilt genauso für Mengen im $\mathbb{R}^n$. Aber in allgemeineren, insbesondere unendlichdimensionalen Räumen sieht's anders aus. In diesem Fall macht man die „Heine/Borel-Eigenschaft“ (d.h. die Existenz endlicher Teilüberdeckungen bei offenen Überdeckungen) zur *Definition* der Kompaktheit. Diese Eigenschaft ist ein *Finitarisierungs-Prinzip*; kompakte Mengen sind wichtig, da *konstruktiven* Überlegungen besonders zugänglich.

Beweise der wichtigen Kriterien 1.3 und 1.4 mittels des Cauchy-Kriteriums 1.6:

1.9 Jede monotone beschränkte Folge ist Cauchy-Folge.

Beweis:
Angenommen, es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ Zahlen $m > n \geq n_0$ existieren mit $x_m - x_n \geq \varepsilon$ und damit auch $x_m - x_{n_0} \geq \varepsilon$. Wähle $n_1 > 1$ mit $x_{n_1} - x_1 \geq \varepsilon$, dann $n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} - x_{n_1} \geq \varepsilon$, usw., also für alle $k \in \mathbb{N}$ $x_{n_k} - x_1 = (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots + (x_{n_1} - x_1) \geq k\varepsilon$.
Widerspruch zur Beschränktheit! ∎

1.10 Unter der Voraussetzung von 1.4 folgt

$$|x_m - x_{m-1}| \leq q^{m-n}|x_n - x_{n-1}| \quad (m \geq n \geq n_0),$$

$$|x_m - x_n| < \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q} \quad (m \geq n \geq n_0).$$

Beweis:
$|x_m - x_{m-1}| \leq q|x_{m-1} - x_{m-2}| \leq \cdots \leq q^{m-n}|x_n - x_{n-1}|$,
also auch
$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq (q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + 1)|x_{n+1} - x_n| < \frac{|x_{n+1}-x_n|}{1-q}$. ∎

Damit ist das Kontraktionskriterium bewiesen wegen $\boldsymbol{|x_m - x_n| \leq \frac{q^{n+1-n_0}}{1-q}|x_{n_0} - x_{n_0-1}| \ (m \geq n \geq n_0)}$; d.h.: Jede kontrahierende Folge ist Cauchy-Folge. Ferner $\boldsymbol{|x - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \ (n \geq n_0)}$ für $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Unendliche Reihen

Eine *unendliche Reihe* ist eine Folge (S_n), die als Summe der Differenzen $a_n = S_n - S_{n-1}$ ihrer Glieder geschrieben wird:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

also $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Die a_n heißen *Glieder* und die S_n *Partialsummen* der Reihe.

Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge der Partialsummen einen Grenzwert S besitzt; dieser heißt dann der *Wert* der Reihe. Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dient im Falle der Konvergenz zugleich als Bezeichnung für diesen *Grenzwert*:

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots}$$

Da aus $S_n \to S$ $(n \to \infty)$ unmittelbar $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt, ergibt sich:

2.1 Notwendiges Konvergenzkriterium
Eine unendliche Reihe ist *höchstens* dann konvergent, wenn ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

Hinreichend für Konvergenz ist es aber *nicht*, wie das **Beispiel** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zeigt (Grundidee zu 2.11):

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Man schreibt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ und sagt, die Reihe $\sum 1/n$ sei *divergent*.

Eine Reihe kann auch *unbestimmt divergent* sein, d.h. die Partialsummen streben weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$, haben aber keinen Grenzwert, sondern *mehrere* Häufungswerte; dies gilt z.B. für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ mit den beiden Häufungswerten 0 und 1:

$$\begin{aligned}
S_0 &= (-1)^0 = 1,\\
S_1 &= (-1)^0 + (-1)^1 = 0,\\
S_2 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1,\\
S_3 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 0,\\
&\vdots\\
S_n &= (-1)^0 + (-1)^1 + \cdots + (-1)^n = \frac{1+(-1)^n}{2},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Grenzwert-Rechenregeln ergeben

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c\,a_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n}$$

für beliebige konvergente Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Durchläuft die Folge $(k_n) = (k_0, k_1, k_2, \ldots)$ in irgendeiner Reihenfolge die Menge $\mathbb{N}_0$, heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n}$ eine **Umordnung** der unendlichen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ändern dabei *unendlich viele* a_n ihre Plätze, *kann* sich die Summe ändern!

2.2 Beispiel:

Die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

ist konvergent. Denn

$$\begin{aligned}
S_{2n-1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\\
&< (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots\\
&\qquad \cdots + (\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}) + (\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})\\
&= 1 - \frac{1}{2n}; \quad (\text{„Teleskopsumme“})
\end{aligned}$$

also ist die Folge (S_{2n-1}) monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent, und $S_{2n} = S_{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$ hat *denselben* Grenzwert S, den Wert der Reihe $\sum (-1)^n/(n+1)$.

Die Umordnung $+\,-\,-$ dieser Reihe:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \cdots\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - \cdots = \frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

Die Umordnung $+\,+\,-$ der Reihe:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + + - \cdots\\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + - \cdots\\
&\quad + \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad + \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} \qquad + \frac{1}{10} \qquad + - \cdots\\
&= \frac{3}{2}S.
\end{aligned}$$

Konvergente unendliche Reihen, bei denen das gerade demonstrierte Phänomen *nicht* auftritt, die also bei jeder Umordnung immer dieselbe Summe haben, heißen **unbedingt konvergent**.

2.3 Satz (absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum a_n$ ist genau dann unbedingt konvergent, wenn $\sum |\boldsymbol{a_n}|$ konvergiert.
Man drückt letzteres auch aus durch $\sum |a_n| < \infty$ und nennt die Reihe in diesem Fall **absolut konvergent**.

Jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe mit reellen Gliedern lässt sich so umordnen, dass die Partialsummen gegen eine beliebig vorgegebene Summe streben oder auch ein ganzes Intervall an Häufungswerten besitzen (*Riemannscher Umordnungssatz*). Die absolut konvergenten Reihen sind also diejenigen, die sich „normal“ verhalten, weil man ihre Glieder beliebig umsortieren kann und immer dieselbe Summe erhält. Es folgen einige Kriterien für *absolute* Konvergenz.

2.4 Majorantenkriterium
Eine Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn es eine konvergente Reihe $\sum b_n$ gibt mit $|a_n| \le b_n$ für fast alle n; man nennt dann $\sum b_n$ eine *konvergente Majorante*.

2.5 Beispiel:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent und der Wert der Reihe ist 1, da für die Partialsummen gilt (Teleskopsumme „zusammenschieben“):

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Also sind wegen $\frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^3} > \cdots \quad (n \ge 2)$ gemäß Majorantenkriterium auch alle Reihen $\sum \boldsymbol{1/n^k}$ mit $\boldsymbol{k = 2, 3, 4, \ldots}$ *konvergent*. Die *Werte* dieser Reihen lassen sich nicht leicht bestimmen: Euler zeigte $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; für $\sum \frac{1}{n^3}$ ist bis heute keine einfache „geschlossene Darstellung“ der Summe bekannt.

2.6 Minorantenkriterium
Eine Reihe $\sum a_n$ ist divergent, wenn es eine divergente Reihe $\sum b_n$ gibt mit $a_n \ge b_n \ge 0$ für fast alle n. ($\sum b_n$ *divergente Minorante*)

2.7 Beispiele:
Da $\sum 1/n = \infty$, ist auch $\sum \frac{1+2n}{3n^2+1}$ divergent wegen $\frac{1+2n}{3n^2+1} > \frac{2n}{3n^2+3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$.
Wegen $n \ge \sqrt{n}$ divergiert auch $\sum 1/\sqrt{n}$.

$$\boxed{\boldsymbol{1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & 0 \le q < 1, \\ \infty, & q \ge 1, \end{cases}}}$$

die *unendliche geometrische Reihe*, ist die einfachste Vergleichsreihe; auf ihr beruhen das Quotienten- und das Wurzelkriterium.

2.8 Quotientenkriterium (d'Alembert)

Eine Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn es ein $q < 1$ gibt mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$ für fast alle n. *Hinreichend:* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$.

Gilt hingegen $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ für fast alle n, ist die Reihe divergent.

Das Kriterium setzt implizit voraus, dass fast alle $a_n \neq 0$.

2.9 Wurzelkriterium (Cauchy)

Eine Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn es ein $q < 1$ gibt mit $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für fast alle n. *Hinreichend:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Gilt hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, ist die Reihe divergent.

2.10 Beispiele:

1) $\sum \frac{(2x+3)^n}{2^n+3^n}$, also $a_n = \frac{(2x+3)^n}{2^n+3^n}$.

Für $2x+3=0$, also $x=-3/2$ trivialerweise absolut konvergent. Für $2x+3 \neq 0$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|2x+3|^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} \cdot \frac{2^n+3^n}{|2x+3|^n} = |2x+3| \cdot \frac{1+(2/3)^n}{3+2\cdot(2/3)^n}$$
$$\to \frac{|2x+3|}{3} \quad (n\to\infty).$$

Also ist nach Quot.krit. für $|2x+3| < 3$, d.h. für $|x-(-\frac{3}{2})| < \frac{3}{2}$ die Reihe absolut konvergent, für $x > 0$ und für $x < -3$ divergent.

$(|ax\pm b| < c \Leftrightarrow -c < ax \pm b < c \Leftrightarrow \mp\frac{b}{a} - \frac{c}{a} < x < \mp\frac{b}{a} + \frac{c}{a})$

Im Falle $x=0$ und $x=-3$ ($\Leftrightarrow |2x+3|=3$) gilt $|a_n| = 3^n/(2^n+3^n) \to 1 \neq 0$ für $n\to\infty$; also ist die notwendige Bedingung $a_n \to 0$ nicht erfüllt und daher die Reihe divergent.

2) $\sum \frac{1}{(3+\sin n)^n}$, also $a_n = (3+\sin n)^{-n}$.

Es gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+\sin n} \leq \frac{1}{2}$ für alle n; also konvergiert gemäß Wurzelkriterium die Reihe absolut (es sind ohnehin alle $a_n > 0$).

Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar, da $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ sowohl größer als auch kleiner als 1 sein kann.

Nun ein Kriterium für Reihen mit monoton fallenden positiven Gliedern, das gerade in manchen Fällen weiterhilft, die weder vom Quotienten- noch vom Wurzelkriterium erfasst werden.

2.11 Cauchys Verdichtungssatz

Gilt $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < \infty\,.$$

Beweis:
Wegen

$$2^k \cdot a_{2^k} \geq a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}} \geq 2^k \cdot a_{2^{k+1}}$$

gilt $a_0+a_1+\sum_{i=0}^{k} 2^i\, a_{2^i} \geq \sum_{n=0}^{2^{k+1}} a_n \geq a_0+a_1+\sum_{i=0}^{k} 2^i\, a_{2^{i+1}}$.

Da die Partialsummen von $\sum a_n$ monoton wachsen, folgt die Aussage des Satzes. ■

2.12 Beispiele:

1) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Diese Reihe hat dasselbe Konvergenzverhalten wie $\sum \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \sum \left(2^{1-\alpha}\right)^n$. Also (geometrische Reihe!):

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

2) $\sum \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$. Die Reihe hat dasselbe Konvergenzverhalten wie $\sum \frac{2^n}{2^n\,(\ln(2^n)\,)^\alpha} = \sum \frac{1}{(\ln 2)^\alpha\, n^\alpha}$. Nach Beispiel 1) also:

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

Ein weiteres leistungsfähiges Kriterium für Reihen mit positiven monoton fallenden Gliedern ist das

2.13 Integralkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty\,,$$

sofern $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend.

Die beiden Beispiele zum Verdichtungssatz hätten auch mit diesem Kriterium behandelt werden können. Wegen der analytischen Kraft des Integralkalküls ist dieses Kriterium noch brauchbarer als der Verdichtungssatz.

Die Reihe $\sum(-1)^n/n$ ist nur *bedingt* und nicht *absolut* konvergent, da ja die Reihe $\sum 1/n$ divergiert. Das bedeutet: Die positiven Summanden allein – und ebenso die negativen – ergeben eine divergente Reihe. Durch das Sich-Abwechseln immer kleiner werdender positiver und negativer Summanden pendeln sich die Partialsummen allmählich auf einen Grenzwert ein. Den Allgemeinfall dieser Form bedingter Konvergenz hat schon Leibniz erkannt:

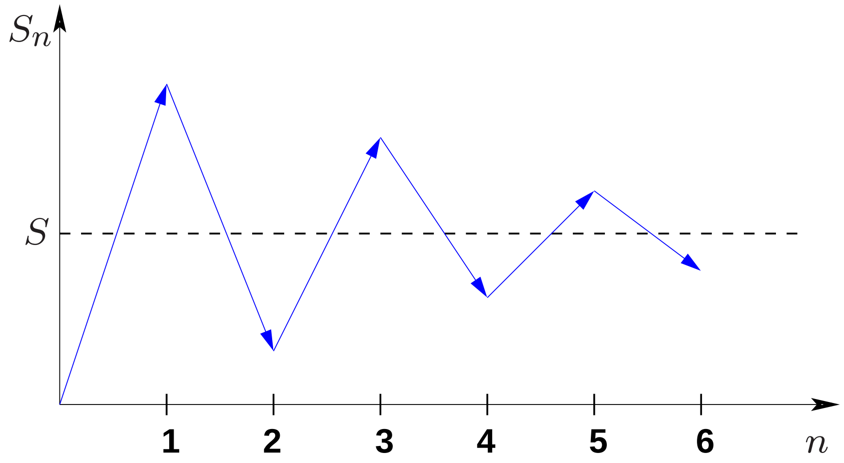
2.14 Leibniz-Kriterium

Gilt $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist die Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + - \cdots$$

konvergent.

Ein Bild macht klar, wie die Konvergenz einer solchen *alternierenden Reihe* zustandekommt:



Man entnimmt der Grafik auch eine einfache *Abschätzung des Reihen-Rests* $S - S_n$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \leq |a_{n+1}|}$$

Beispiele für nach Leibniz (bedingt) konvergente Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n} \quad \text{und}^* \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}.$$

*Hinweis: $\frac{2}{k+1} < \left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+k-1}\right)+\left(\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right) < \frac{2}{k}$.

Die Reihe $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ ist *absolut* konvergent, besitzt – anders als $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – bei beliebiger Umordnung immer dieselbe Summe.

2.15 Definition (Potenzreihe)

Eine unendliche Reihe der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit dem *Entwicklungspunkt* x_0 und den *Koeffizienten* a_n.

Viele der wichtigsten Funktionen der Mathematik werden durch Potenzreihen dargestellt:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \quad \ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n, \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Funktionen, die als Potenzreihen berechnet werden können, haben viele Eigenschaften mit *Polynomen* gemeinsam:
Man kann von der *Vielfachheit von Nullstellen* sprechen; gilt $\sum a_n(x-x_0)^n = \sum b_n(x-x_0)^n$ in einer Umgebung von x_0, folgt $a_n = b_n$ für alle n (*Koeffizientenvergleich*); usw.
Potenzreihen sind aber – anders als Polynome – nicht immer für alle x definiert.

2.16 Definition (Konvergenzradius)

Jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ entspricht eine Zahl $R \geq 0$, der **Konvergenzradius**; er gibt den *Konvergenzbereich* der Reihe an.

$\boldsymbol{R=0}$: Die Reihe ist absolut konvergent für $x = x_0$ und ansonsten divergent.

$\boldsymbol{0 < R < \infty}$: *Absolut*konvergenz der Reihe für $|x-x_0| < R$, Divergenz für $|x-x_0| > R$, Verhalten in den *Randpunkten* $x_0 - R$ und $x_0 + R$ von Fall zu Fall unterschiedlich.

$\boldsymbol{R=\infty}$: Reihe absolut konvergent für alle x.

Erste **Beispiele:**

Potenzreihe	konvergent für...	R
$\sum n!\cdot(x-x_0)^n$	$x = x_0$	0
$\sum(x-x_0)^n/n!$	alle x	∞
$\sum 2^n\cdot(x-x_0)^n$	$\lvert x-x_0\rvert < 1/2$	1/2
$\sum(x-x_0)^n/n$	$x_0 - 1 \leq x < x_0 + 1$	1

Den Konvergenzradius bestimmt man oft mit dem Quotientenkriterium.

2.17 Beispiele:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+2)^n$.
Absolutkonvergenz trivial für $x = x_0 = -2$. (Diese Bemerkung lasssen wir bei den weiteren Beispielen weg.) Für $x \neq -2$ gilt (Quot.krit.!)

$$\frac{3^{n+1}|x+2|^{n+1}}{3^n|x+2|^n} = 3|x+2| < 1 \;\Leftrightarrow\; -2-\frac{1}{3} < x < -2+\frac{1}{3}$$

Also ist die Reihe für $-2-\frac{1}{3} < x < -2+\frac{1}{3}$ absolut konvergent; $x_0 = -2, R = \frac{1}{3}$.
Randpunkte:
$x = -2 \pm \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; |3^n (x+2)^n| = 1$. Die notwendige Bedingung für Konvergenz ist nicht erfüllt; die Reihe divergiert in beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{(n+1)\,5^n}$. $\quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{5})^n \frac{(x+1/2)^n}{n+1}\right)$

$$\frac{|2x+1|^{n+1}}{(n+2)\,5^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)\,5^n}{|2x+1|^n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{|2x+1|}{5} \to \frac{|2x+1|}{5}$$

für $n \to \infty$.
Also Reihe abs. konv. für $-5 < 2x+1 < 5$ und damit für $-3 < x < 2$; $x_0 = -\frac{1}{2}, R = \frac{5}{2}$.
Randpunkte:
Für $x = 2$ lautet die Reihe $\sum 1/(n+1)$, ist also divergent.(Reihe vom Typ $\sum 1/n^\alpha$ mit $\alpha \leq 1$)
Für $x = -3$ lautet die Reihe $\sum (-1)^n/(n+1)$, ist also konvergent nach Leibniz.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n/2^{n^2}$.

$$\frac{|x-1|^{n+1}}{2^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{2^{n^2}}{|x-1|^n} = \frac{|x-1|}{2^{2n+1}} \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

Also ist die Reihe für alle x absolut konvergent; $x_0 = 1, R = \infty$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n (x+2)^{n^2}$ mit $a \neq 0$.

$$\frac{|a|^{n+1}\,|x+2|^{n^2+2n+1}}{|a|^n\,|x+2|^{n^2}} = |a|\,|x+2|^{2n+1} \begin{cases} \to 0, & |x+2| < 1 \\ \to \infty, & |x+2| > 1 \\ \leq |a|, & |x+2| \leq 1 \\ \geq |a|, & |x+2| \geq 1 \end{cases}$$

Also ist gemäß Quotientenkriterium der Konvergenzradius $R = 1$, $x_0 = -2$.
Randpunkte:
Im Falle $|a| < 1$ auch noch absolute Konvergenz für $x = -2 \pm 1$, im Falle $|a| \geq 1$ hingegen Divergenz.

5)** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/(2+\sin n)^n$.
Das Quotientenkriterium hilft hier nicht weiter. Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2+\sin n} \leq |x|$.
Konvergenzradius also mindestens 1.

Nach einem Satz von P.L.Tschebyscheff (s. A.Khinchin, *Continued Fractions*, Dover 1992, p. 39f.) gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{n}{2\pi} - m - \frac{3}{4}| < \frac{1}{n}$ bei passend gewähltem $m \in \mathbb{N}$. Also gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\sin n = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\theta\, 2\pi}{n}) = -\cos\frac{\theta\, 2\pi}{n}$ $= -1 + \frac{4\theta^2\pi^2}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$ mit $|\theta| < 1$, so dass für solche n $(2+\sin n)^n =$ $(1+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2}))^n \to 1$. Also Divergenz für $x = \pm 1$ und $R = 1$.

Einen wichtigen Typ von Reihen – einfaches Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ – kann man mittels der bisherigen Kriterien nicht erfassen. Hier hilft eine Umformung, die (Abelsche) **partielle Summation** genannt wird:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m}$$

mit $A_k := \sum_{i=0}^{k} a_i \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \ A_{-1} = 0$.

Begründung: $a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n =$
$= (A_m - A_{m-1}) b_m + (A_{m+1} - A_m) b_{m+1} + \cdots$
$\cdots + (A_{n-1} - A_{n-2}) b_{n-1} + (A_n - A_{n-1}) b_n =$
$= A_m(b_m - b_{m+1}) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n - A_{m-1} b_m$.
(Im Falle $m = 0$ fällt der Summand $-A_{m-1} b_m$ weg.)

Diese Umformung ist dann nützlich, wenn man die Teilsummen A_k gut berechnen oder abschätzen kann.

2.18 Beispiel*: Für $0 < x < 2\pi$ gilt (vgl. Seite 30)

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

und daher (partielle Summation)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(k + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \frac{1}{n}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Partialsummen S_n für $0 < x < 2\pi$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$, da die Konvergenz für $x = 0$ trivial ist und $\sin nx$ 2π-periodisch.

2.19 Abelscher Stetigkeitssatz

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Beweis:

Zunächst bemerken wir, dass gemäß Wurzelkriterium die Potenzreihe für $|x| < 1$ offensichtlich konvergiert, da ja $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

O.B.d.A. können wir annnehmen, dass $\sum a_n = 0$, da man den Reihenwert einfach von a_0 abziehen kann.

Nun setzen wir $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und wählen zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein N_0, so dass $|A_n| < \varepsilon$ für $N \geq N_0$. Dann folgt

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n (1 - x^n) \right| + \left| \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n (1 - x^n) \right|.$$

Der *erste* Summand rechts ist $< \varepsilon$ für alle genügend nahe bei 1 liegenden $x < 1$.

Den *zweiten* Summanden rechts formen wir um durch *partielle Summation* und erhalten folgende Abschätzung:

$$\left| \sum_{n=N_0+1}^{N-1} A_n (x^{n+1} - x^n) + A_N (1 - x^N) - A_{N_0} (1 - x^{N_0+1}) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{n=N_0+1}^{N-1} |x^{n+1} - x^n| + 2\varepsilon = (2 + x^{N_0+1} - x^N)\varepsilon < 3\varepsilon \ (0 < x < 1).$$

■

Als **Beispiel** betrachten wir die geometrische Reihe $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots$ $(|x| < 1)$. Gliedweise Integration ergibt die Taylor-Entwicklung $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots \ (|x| < 1)$.

Da die alternierende harmonische Reihe konvergiert, folgt aus dem Stetigkeitssatz somit: $\boxed{1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + - \cdots = \ln 2}$

2.20 Cauchy-Produkt

Sind die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und ebenso ihr *Cauchy-Produkt*, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \geq 0)$ *konvergent*, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Man beachte: Ist nur *einfache* Konvergenz der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ vorausgesetzt, kann *nicht* einfach gemäß Distributivgesetz durchmultipliziert und zur Einfachreihe umsortiert werden.

Beweis:

Wir betrachten zunächst die für $|x| < 1$ absolut konvergenten Reihen $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$. Es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m||x|^m \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n < \infty,$$

weshalb das Produkt beider Reihen, da absolut konvergent, ausmultipliziert und beliebig umsortiert werden darf:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n x^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{m+n=k} a_m b_n \Big)}_{=c_k} x^k$$

Mit $x \to 1-$ und Abels Stetigkeitssatz folgt die Behauptung. ∎

Das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen *braucht nicht zu konvergieren*; **Beispiel:**

Das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / \sqrt{n+1}$ mit sich selbst. In diesem Fall gilt $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n+1-k}}$, und wegen $\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k} \leq \frac{1}{2}((k+1)+(n+1-k))$ folgt $|c_n| \geq \frac{2n+2}{n+2} > 1$.

Klar: Sind *beide* Reihen *absolut* konvergent, konvergiert auch das Cauchy-Produkt und ergibt das Produkt der Reihen-Summen.

Es gilt aber sogar:

2.21 Satz von Mertens

Ist *eine* der beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut* konvergent, die andere konvergent, konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt und ergibt das Produkt der Reihen-Summen.

Beweis:

Die Reihe $\sum a_n$ sei absolut konvergent, die Reihe $\sum b_n$ konvergent. Wir betrachten – mit c_m wie im Satz 2.20 – die Differenz

$$\Delta_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l - \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=n-k+1}^{n} b_l \quad \text{und erhalten}$$

$|\Delta_n| \leq \sum_{1 \leq k < n/2} |a_k| \Big| B_n - B_{n-k} \Big| + \sum_{n/2 \leq k \leq n} |a_k| \Big| B_n - B_{n-k} \Big|$ mit $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$ mit $|B_n| < M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < M$.

Nun wählen wir, bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$, ein n_0 so groß, dass $|B_m - B_n| < \varepsilon/2M$ für $m, n \geq n_0$ und $\sum_{k \geq n_0} |a_k| < \varepsilon/4M$.

Dann folgt für $n \geq 2n_0$: $|\Delta_n| < M \cdot \varepsilon/2M + \varepsilon/4M \cdot 2M = \varepsilon$. ∎

2.22 **Beispiele** für Cauchy-Produkte:

a) Potenzen der geometrischen Reihe.

Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ $(|x| < 1)$ ergibt das Cauchy-Produkt $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\cdots$ $(|x| < 1)$ und weiter $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (k+1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$ $(|x| < 1)$. Per Induktion: $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m-1+n}{n} x^n$ (Spezialfall d. binom. Reihe).

b) Die Funktion $\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Cauchy-Produkt: $\exp x \cdot \exp y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$ wegen $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$. Also $\boldsymbol{\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)}$.

Trigonometrische Reihen, d.h. Reihen der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sind neben den *Potenzreihen* das wichtigste Hilfsmittel zur analytischen Darstellung von Funktionen; während die Potenzreihen nur „unendlich glatte“ (= beliebig oft differenzierbare) Funktionen darstellen, lassen sich mit trigonometrischen Reihen nahezu beliebige Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ erfassen. Dabei gilt dann

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ (n \geq 0), \ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ (n \geq 1)}$$

(*Euler/Fourier-Koeffizientenformeln*); die *mit diesen Koeffizienten gebildete* trigonometrische Reihe heißt **Fourierreihe** der Funktion f, nach Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Die Konvergenztheorie der Fourierreihen ist weit komplizierter als z.B. die der Potenzreihen. Schon das noch vergleichsweise einfache Beispiel 2.18 ($a_n = 0$ $(n \geq 0)$, $b_n = 1/n$ $(n \geq 1)$), bei dem es sich um die Fourierreihe der Funktion

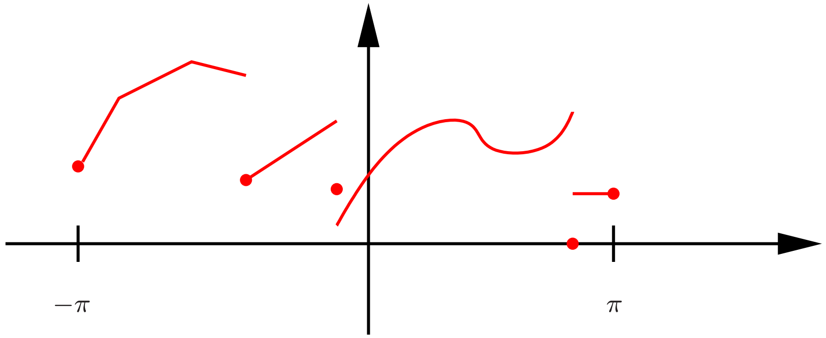
$$f(x) = \tfrac{\pi - x}{2} \ \ (0 < x \leq \pi), \ \ f(0) = 0, \ \ f(-x) = -f(x)$$

handelt, macht dies deutlich. Der einfachste Konvergenzsatz:

2.23 Fourierreihen-Konvergenz

Ist f auf $[-\pi, \pi]$ stückweise glatt, so konvergiert die zugehörige Fourierreihe überall gegen $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$; in den Randpunkten $\pm\pi$ bezieht sich dieser Wert auf die 2π-periodische Fortsetzung.

Eine typische „stückweise glatte“ Funktion:



2.24 Beispiel: ein Rechteckpuls $h(x) = 1$ $(-\pi/2 \leq x \leq \pi)$, $h(x) = 0$ $(-\pi < x < -\pi/2)$, 2π-periodisch fortgesetzt.

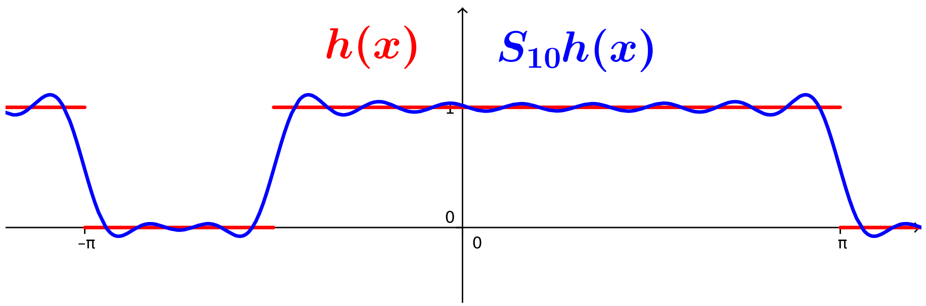
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx = \frac{3}{2}$, und für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\cdot \frac{\sin nx}{n}\Big|_{x=-\pi/2}^{\pi} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{x=-\pi/2}^{\pi} = \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n\pi}.$$ Also

$$h(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos nx + \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n\pi}\sin nx\Big).$$

Bild der Funktion und der *Fourierreihen-Partialsumme* S_{10}:



Wir beweisen nun unabhängig von 2.23 direkt (Euler, 1744):

$$\boxed{\textbf{2.25} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)}$$

Der Beweis in 2.18 zeigte ja nur, dass die Reihe *konvergiert*, ohne den Grenzwert, die Grenz*funktion* zu bestimmen.

Aus $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$ folgt durch Übergang zum Realteil $1 + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x + \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}$, also

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

und daher (gliedweise Integration von π bis x)

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} + \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Das Integral schätzen wir nun ab mittels partieller Integration und mit dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Da für ein $x \in (0, 2\pi)$ zwischen π und x das Vorzeichen von $\cos(t/2)$ nicht wechselt, gilt mit einem ξ zwischen x und $\pi/2$ (bei $(*)$ erweiterter Mittelwertsatz)

$$\int_\pi^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}} - \int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{2n+1}\mathrm{d}t$$
$$\underset{(*)}{=} \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\xi}{2n+1}\int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} + \cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\xi\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right)\right)$$

und daher für $0 < x < 2\pi$

$$\left|\boldsymbol{\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} - \frac{\pi - x}{2}}\right| \le \boldsymbol{\frac{2 - \sin\frac{x}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}}}\,.$$

Das beweist 2.25.

Wir berechnen nun die Summe der Quadratzahlen-Kehrwerte, die – nach langen vergeblichen Versuchen der Bernoullis – Euler 1736 fand:

$$\boxed{\mathbf{2.26} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934}$$

Dazu integrieren wir die (weiter oben hergeleitete) Identität

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - x}{2} + \int_\pi^t \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}\tau \quad (0 < t < 2\pi)$$

bzgl. t von π bis x und erhalten mit anschließender partieller Integration:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n - \cos nx}{n^2} = -\frac{(\pi-x)^2}{4} + \int_\pi^x \int_\pi^t \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{(\pi-x)^2}{4} + x\int_\pi^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}\tau - \int_\pi^x \frac{t\,\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

Für festes $x \in (0, 2\pi)$ streben beide Integrale – dies zeigt eine partielle Integration, die den Faktor $\frac{1}{n+1/2}$ erzeugt – mit $n \to \infty$

gegen 0, und im Falle $x = 0$ bleibt nur das zweite Integral übrig und strebt auch gegen 0. Also ($x = 2\pi$ wegen Periodizität):

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(\pi - x)^2}{4} \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

Für $x = 0$ ergibt sich

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wegen $\sum \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum \frac{1}{n^2}$, also $\sum \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4}\sum\frac{1}{n^2}$, folgt 2.26.

(Die hier formulierten Beweise von 2.25 und 2.26 sind *nicht* die ursprünglich von Euler angegebenen Begründungen.)

Nebenbei $(1/6 - 1/4 = -1/12)$ folgt noch

$$\boxed{\mathbf{2.27} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (0 \le x \le 2\pi)}$$

Analog zur Herleitung von 2.25 integrieren wir nun

$$\sum_{n=1}^N \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

von π bis $x \in (0, 2\pi)$ und erhalten

$$\sum_{n=1}^N \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} - \int_\pi^x \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} - \ln\Big(\sin\frac{x}{2}\Big) + \int_\pi^x \frac{\cos(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

Das letzte Integral strebt gegen 0 für $N \to \infty$ (folgt unmittelbar durch partielle Integration, vgl. auch Seite 31).

Es folgt daher wegen $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

$$\boxed{\mathbf{2.28} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big) \quad (0 < x < 2\pi)}$$

Bleibt aber noch der Nachweis, dass diese trigonometrische Reihe wirklich die *Fourier*reihe der rechts stehenden Funktion ist.

D.h.: die Berechnung der *Fourierkoeffizienten* der Funktion auf der rechten Seite von 2.28 fehlt noch.

Dazu integrieren wir die Koeffizientenformeln partiell (man beachte $x^\alpha \log x \to 0$ $(x \to 0+)$ für $\alpha > 0$ sowie $\sin x \sim x\,(x \to 0)$, $\sin x \sim \pi - x\,(x \to \pi)$):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot\ln(2\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\frac{\sin nx}{\pi n}\ln(2\sin\frac{x}{2})\Big|_{x=0}^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{\pi n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x}{4\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\Big(1+\big(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\big)\cos kx\Big)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{n}.$$

Wir haben dabei $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nx=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ benutzt (S. 30).

Der konstante Term der Fourierreihe *verschwindet*. Dies folgt aus 2.28, da die Fourierreihe wegen Glattheit der Funktion (in der Umgebung aller $x \in (0, 2\pi)$) gegen diese konvergiert, wie folgender wichtige Satz zeigt; trotz Unbeschränktheit in den Randpunkten gilt ja $\int_0^{2\pi} |f| < \infty$.

2.29 Riemannsches Lokalisationsprinzip

Das Konvergenzverhalten der Fourier-Entwicklung einer Funktion f mit $\int_{-\pi}^{\pi}|f| < \infty$ an einer Stelle x hängt nur ab *vom Funktionsverlauf in einer beliebigen Umgebung* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Also $\int_0^{2\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x = 0$ und auch $\int_0^{\pi}\Big(\ln 2+\ln(\sin\frac{x}{2})\Big)\mathrm{d}x = 0$.

Folglich ergibt sich nebenbei (Umkehrfkt. u. Subst. $\mathrm{e}^x = t$)

2.30 $$-\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2=\int_0^1\frac{\arcsin t}{t}\mathrm{d}t\approx 1.0888$$

So wie die Taylor-Entwicklungen (Potenzreihen) *gerader* Funktionen ($f(-x) = f(x)$) nur gerade Potenzen x^{2n} enthalten und die Taylorentwicklungen *ungerader* Funktionen ($f(-x) = -f(x)$) nur ungerade Potenzen x^{2n-1}, ist die Fourierreihe einer *geraden* Funktion eine *reine Cosinusreihe*, diejenige einer *ungeraden* Funktion eine *reine Sinusreihe*.

Aus den Koeffizientenformeln auf Seite 29 folgt dann

$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x}$ für $\boldsymbol{n \geq 0}$ und $\boldsymbol{b_n = 0\ (n \geq 1)}$ bzw.

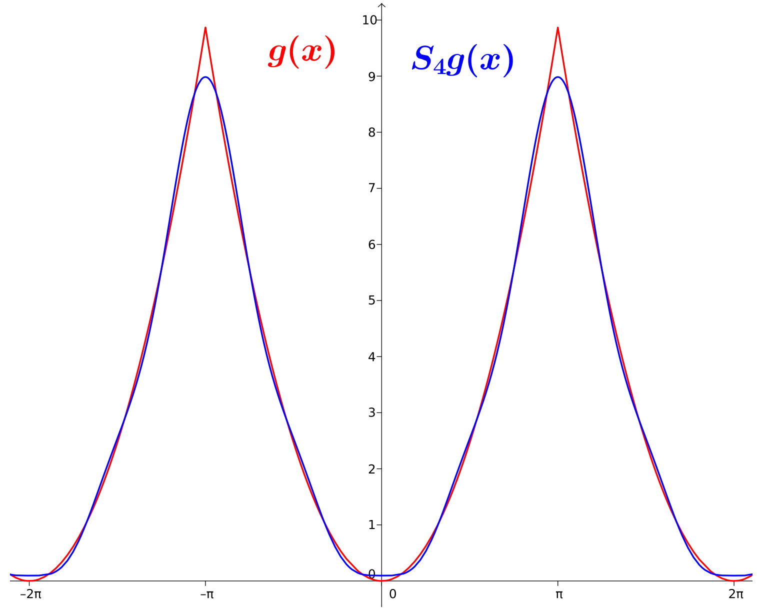
$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x}$ für $\boldsymbol{n \geq 1}$ und $\boldsymbol{a_n = 0\ (n \geq 0)}$.

2.31 Beispiel: Die Funktion $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ $\boldsymbol{(-\pi \leq x \leq \pi)}$, 2π-periodisch fortgesetzt.

Die Funktion ist gerade, also ergibt sich eine reine Cosinusreihe.

$\boldsymbol{a_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{2\pi^2}{3}}$, $\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x =$
$\frac{2}{\pi}\cdot x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x = \frac{4x\cos nx}{\pi n^2}\Big|_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x$
$= \frac{4(-1)^n}{n^2} - 0 = \boldsymbol{(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}}$ $\quad\boldsymbol{(n \in \mathbb{N})}$. Also (für $x = 0$ folgt 2.26!)

$$\boldsymbol{S_n g\,(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4\,(-1)^k}{k^2}\cdot\cos kx\,.}$$



Wir haben bisher – entsprechend der Periodizität von Sinus und Cosinus – nur 2π-periodische Funktionen betrachtet. Dies ist keine echte Einschränkung, da durch einfache *Umskalierung* jede andere Periode erfasst wird:

Gegeben $f:(-T,T]\to\mathbb{R}$, $2T$-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt, betrachten wird die 2π-periodische Funktion $\tilde{f}(x):=f(\frac{T}{\pi}x)$ und die zugeordnete Fourierreihe

$$\tilde{f}(x)\ \sim\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

mit $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ und $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

Setzen wir $x=\frac{\pi}{T}t$, erhalten wir $\tilde{f}(x)=f(t)$, also

$$\boxed{\textbf{2.32}\quad f(t)\ \sim\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{n\pi}{T}t\right)}$$

mit (Substitution, $\mathrm{d}x=\frac{\pi}{T}\mathrm{d}t$)

$$\boxed{a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos\frac{n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t,\quad b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\sin\frac{n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t}$$

Beide Funktionen f und $\tilde{f}$ haben also *dieselben* Fourierkoeffizienten, die nur im ersten Fall, dem der Periode $2T$, auf die Entwicklungs-Funktionen $\cos\frac{n\pi}{T}t,\sin\frac{n\pi}{T}t$ (anstelle von $\cos nx,\sin nx$) bezogen sind und mittels dieser als $\int_{-T}^{T}$-Integrale berechnet werden können.

Daher ist es ausreichend, exemplarisch nur 2π-periodische Funktionen und Fourierreihen zu behandeln.

Es versteht sich von selbst, dass man die bisherigen Überlegungen zu Fourierreihen auch auf *komplexwertige* Funktionen anwenden kann, da bei den Integralen wie bei der Konvergenz Real- und Imaginärteil gesondert betrachtet werden können.

Es ist oft vorteilhaft, bei Fourierreihen die *Euler-Relationen* zu nutzen, d.h. zu einer *komplexen Fourierreihen-Darstellung* überzugehen; *Fourier-Partialsumme:*

$$S_nf\,(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_n\cos kx+b_n\sin kx)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

mit $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_k=\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}$, $c_{-k}=\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}$ $(1\le k\le n)$.

Dies folgt durch einfaches Umsortieren, nachdem $\cos kx$ und $\sin kx$ durch $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2}$ bzw. $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}$ ersetzt wurden.

Die Euler-Relationen ergeben auch *unmittelbare* Formeln für die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\quad(-n\le k\le n)\ .$$

Schon diese Koeffizienten-Darstellung ist eleganter und einheitlicher als die reellen Formeln. Einsetzen in die Partialsumme ergibt („Faltung“ mit dem Dirichlet-Kern)

$$S_nf\,(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei ist der *Dirichlet-Kern* (siehe Seite 30)

$$D_n(t):=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}=\frac{1}{2\pi}\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$$

der Schlüssel zur Konvergenztheorie der Fourierreihen.

Insbesondere gilt („Summation“ der Fourierreihe):

$\sigma_nf\,(x):=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_kf\,(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)F_n(x-t)\,\mathrm{d}t$ mit dem

Fejér-Kern $\quad F_n(t):=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\pi(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$

wegen $2\sin(k+\frac{1}{2})t\,\sin\frac{t}{2}=\cos kt-\cos(k+1)t$ („Teleskop-Summe“) und $1-\cos(n+1)t=2\sin^2\frac{n+1}{2}t$.

> **2.33 Satz von Fejér** (1900)
>
> Ist $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, über $[-\pi,\pi]$ (absolut) integrierbar, folgt $\sigma_nf\,(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$ für jede *Stetigkeitsstelle* x von f.
> Ist f insgesamt stetig, strebt σ_nf *gleichmäßig* gegen f.

Beweis des Satzes von Fejér:

Wegen $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\big(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt\big)\mathrm{d}t = 1$ gilt auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \qquad (*)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und unmittelbar aus der hergeleiteten Formel für $F_n(t)$ folgt

$$F_n(t) \le \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \quad (0 < \varepsilon \le |t| \le \pi) \qquad (**)$$

sowie

$$F_n(t) \ge 0 \;\; (-\pi \le t \le \pi) \qquad (***)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nun sei $x \in [-\pi, \pi]$ eine Stetigkeitsstelle von f. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ für $|t - x| < \delta$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_n f(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x-t)|F_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x-t)|F_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\int_{-\pi}^{\pi}|f|}{2\pi(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \\
&< \varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \ge n(\delta)$.

Im Falle einer auf ganz $[-\pi, \pi]$ stetigen, also *gleichmäßig* stetigen 2π-periodischen Funktion f sind δ und $n(\delta)$ nicht von x, sondern nur von ε abhängig. ■

Dies ist sicher einer der *schönsten* Sätze der Fourier-Analysis: Bei relativ einfachem und doch raffiniertem Beweis ist er zugleich methodisch wie inhaltlich von *weitreichender* Bedeutung.

Der Beweis benutzte nur die Eigenschaften $(*)$, $(**)$, $(***)$.

Die stetige 2π-periodische Funktionenfolge (K_n) sei ein *regulärer Kern* genannt, wenn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{K_n \to 1 \; (n\to\infty)}, \qquad \boldsymbol{K_n(t) \ge 0 \; (|t| \le \pi)}$$

sowie $\Big(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\Big) \boldsymbol{K_n \to 0 \; (n\to\infty)}$ für $\varepsilon > 0$.

Offenbar ist der Fejér-Kern regulär, aber nicht der Dirichlet-Kern.

Der Beweis klappt, leicht variiert, mit diesen etwas *schwächeren* K_n-Eigenschaften, *wenn* wir f als *beschränkt* voraussetzen:

Gegeben den Punkt x und $\varepsilon > 0$, wähle erst n so groß, dass

$$|f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\,\mathrm{d}t| < \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

dann $\delta > 0$ so klein, dass $\int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x-t)|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$ für alle n, schließlich n so groß, dass $M\Big(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\Big)K_n < \varepsilon$ mit $M = \sup|f|$.

Andere reguläre Kerne: $\boldsymbol{K_n(t) := k_n(1+\cos t)^n, L_n(t) := l_n\big(1-\frac{t^2}{\pi^2}\big)^n}$, wobei $\boldsymbol{k_n, l_n}$ durch $\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi} K_n = \int_{-\pi}^{\pi} L_n = 1}$ festgelegt sind.

Da $1 > \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} K_n > \varepsilon k_n (1+\cos\varepsilon/2)^n$, folgt $k_n < \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{1+\cos\varepsilon/2}\Big)^n$ und damit $\Big(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\Big)K_n < 2\pi k_n(1+\cos\varepsilon)^n < \frac{2\pi}{\varepsilon}\Big(\frac{1+\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon/2}\Big)^n \to 0 \;(n\to\infty)$.

Wir setzen nun $\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty}$ voraus und folgern aus dem Satz von Fejér die *Vollständigkeit* der trigonometrischen Funktionen.

Kurzschreibweisen:

$\int := \int_{-\pi}^{\pi}$, $\sum := \sum_{-n}^{n}$, $\|f\| := \sqrt{\int |f|^2}$, $\epsilon_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $c_k := \frac{1}{2\pi}\int f\,\bar{\epsilon}_k$.

Damit: $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$, $\int(f - \sum c_k\epsilon_k)\bar{\epsilon}_m = 0 \;(-n \le m \le n)$ (ausmultiplizieren!), $\sum c_k\epsilon_k = S_n f$. Es folgt $\|f - \sum \alpha_k\epsilon_k\|^2 = \|(f - \sum c_k\epsilon_k) + \sum(c_k - \alpha_k)\epsilon_k\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + 2\pi\sum|c_k - \alpha_k|^2$.

Speziell $\boldsymbol{\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + 2\pi\sum|c_k|^2}$, und $\|f - S_n f\|$ ist eindeutig bestimmtes *Minimum* unter allen $\|f - \sum \alpha_k\epsilon_k\|$.

Stetige f sind (Fejér!) gleichmäßig durch trigonometrische Summen approximierbar; also $\|f - S_n f\| \to 0\,(n\to\infty)$ für solche f. Zu *beliebigem* f gibt's ein stetiges f_0 mit $\|f - f_0\| < \varepsilon$, also $\|f - S_n f\| \le \|f - S_n f_0\| \le \|f - f_0\| + \|f_0 - S_n f_0\| < 2\varepsilon$ für große n. Daher

2.34 $\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2}$ für $\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 < \infty}$ (Parseval-Gleichung , *Vollständigkeitsrelation*). Somit: $\boldsymbol{\int |f|^2 = 0} \;\Leftrightarrow\;$ *alle* $\boldsymbol{c_k = 0}$.

Anhang: Anwendungen des Heine/Borel-Satzes

1) Beh.: Ist A kompakt und O offene Obermenge von A, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass noch die ε-Umgebung $U_\varepsilon(A) := \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \varepsilon$ für ein $x \in A\}$ Teilmenge von O ist.

Beweis:

Zu jedem $x \in A$ gibt's ein $\rho_x > 0$, so dass $U_{\rho_x}(x) := U_{\rho_x}(\{x\}) \subseteq O$. Nach Heine/Borel überdecken endlich viele der $U_{\rho_x/2}(x)$ (!) ganz A, etwa (mit $\rho_i := \rho_{x_i}$)

$$A \subseteq U_{\rho_1/2}(x_1) \cup U_{\rho_2/2}(x_2) \cup \cdots \cup U_{\rho_n/2}(x_n).$$

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}\min_{1\le i\le n}\rho_i$. Dann gilt:

$x \in A, |y-x| < \varepsilon \Rightarrow |x-x_i| < \frac{1}{2}\rho_i$ für ein i und

$$|y-x_i| \le |y-x| + |x-x_i| < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\rho_i \le \rho_i$$

Kurz: $x \in A, |y-x| < \varepsilon \Rightarrow y \in U_{\rho_{x_i}}(x_i) \subseteq O$ für ein i. ■

2) Beh.: Ist f auf dem Kompaktum A *stetig*, gibt's zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für beliebige $x_1, x_2 \in A$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Kurz: Jede auf einem *Kompaktum* stetige Funktion ist dort *gleichmäßig stetig*.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in A$ gibt's ein $\delta_x > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|x-y| < \delta_x$. Endlich viele $U_{\delta_x/2}(x)$, etwa $U_{\delta_{x_1}/2}(x_1), \ldots, U_{\delta_{x_n}/2}(x_n)$, überdecken ganz A.

Für $x, y \in A$ mit $|x-y| < \delta := \min_{1\le i\le n}\delta_{x_i}/2$ folgt:

$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, wobei i so gewählt sei, dass $|x-x_i| < \delta_{x_i}/2$ und damit $|y-x_i| < \delta_{x_i}$. ■

Bem.: Aus der *gleichmäßigen* Stetigkeit eines auf $[a,b]$ stetigen f folgt z.B. leicht die Existenz des Riemann-Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3)* Wir betrachten Teilmengen von $[0,1]$, die Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle sind; einpunktige Intervalle $[a,a]$ sind dabei auch zugelassen. Klar: (i) Das Komplement (bzgl. $[0,1]$) jeder solchen Menge ist wieder eine ebensolche Menge. (ii) Die Vereinigung zweier solcher Mengen ist wieder eine.

Damit bilden diese Mengen eine *Algebra* $\mathcal{A}$, und es gilt auch $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (de Morgan!).

Jedem $A = (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \cdots \cup (a_n,b_n) \in \mathcal{A}$ (wobei $b_i \le a_{i+1}$ $(1 \le i < n)$) ordnen wir das Maß $\mu(A) = \sum(b_i - a_i)$ zu, die Summe der Längen der Intervalle; analog bei nichtoffenen Komponenten-Intervallen.

Beh.: Das Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ ist ***σ*-additiv**.

Beweis:

Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und sei $A_0 := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. (Letzteres ist nicht selbstverständlich, da $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra.) Zu zeigen: $\boldsymbol{\mu(A_0) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)}$. Wir zeigen erst „$\ge$“, dann „$\le$“.

Zunächst ist klar: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$; denn die Teilintervalle, aus denen A und B bestehen, überlappen sich ja nicht. Also folgt auch $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Teilintervalle von $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sind in denen von A_0 enthalten; also $\mu(A_0) \ge \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i)$. Also „$\ge$“. Nun *offene* Umgebungen A_i^ε der A_i: die Teilintervalle werden überall beidseitig verlängert, und zwar um *insgesamt* ε. Offene Überdeckung von $A_0^{[\varepsilon]}$ (:= A_0 gestutzt auf *abgeschlossene* Teilintervalle, Längenverlust ε) ist $\bigcup_{i=1}^\infty A_i^{\varepsilon 2^{-i}}$. Es gibt eine endliche Teilüberdeckung, o.B.d.A. die Indizes $1 \le i \le N$. Da $\mu(A_i^{\varepsilon 2^{-i}} \cap [0,1]) \le \mu(A_i) + \varepsilon 2^{-i}$, folgt $\mu(A_0) - \varepsilon \le \mu([0,1] \cap \bigcup_{i=1}^N A_i^{\varepsilon 2^{-i}}) \le \sum_{i=1}^N \mu(A_i) + \varepsilon(2^{-1} + \cdots + 2^{-N})$.

■