Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 13 (10.7.2024-17.7.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P61: Im $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte

$$P_1 = (-2,-1), \quad P_2 = (-1,0), \quad P_3 = (2,2), \quad P_4 = (1,-2), \quad P_5 = (-1,-3), \quad P_6 = (-3,1)$$

gegeben. Bestimme die Schnittpunkte der Kreise

$$K(P_1, |P_2P_3|) \quad \text{und} \quad K(P_4, |P_5P_6|).$$

Aufgabe P62: Gegeben sei ein Winkel φ (mit $0 < \varphi \leq \pi$) durch die Punkte $(0,0), (1,0), (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. In Aufgabe P30 wurde wiederholt, wie man den Winkel φ mit Zirkel und Lineal halbiert.
Zeige algebraisch, dass man den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ mit Zirkel und Lineal aus φ konstruieren kann. Wie erhält man $\cos(\frac{\varphi}{2})$ aus $\cos(\varphi)$?
Hinweis: Verdoppelungsformel für Cosinus oder H12 (für $n = 2$).

Aufgabe P63: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ bilden die n-Punkte

$$P_{n,j} = \left(\cos(\frac{2\pi}{n} \cdot j), \sin(\frac{2\pi}{n} \cdot j)\right), \quad j = 0, \dots, n-1$$

die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks A_n (vgl. Aufgabe P40).

(1) Zeige, dass für ungerades n gilt:

$$P_{2n,j} = \begin{cases} P_{n,\frac{j}{2}} & \text{für } j \equiv 0 \bmod 2, \\ -P_{n,\frac{n+1}{2}\cdot j \bmod n} & \text{für } j \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

(Dabei ist $\frac{n+1}{2} \cdot j \bmod n$ der Rest der Division von $\frac{n+1}{2} \cdot j$ durch n.)

(2) Welche Beziehungen zwischen den Punkten von A_{10} und den Punkten von A_5 erhält man mit den Formeln aus (1)? Skizziere die Situation.

(3) Nutze Aussage (1) um für ungerade $n \geq 3$ das regelmäßige $2n$-Eck A_{2n} aus dem regelmäßigen n-Eck A_n mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Aufgabe P64: Zeige, dass das regelmäßige 15-Eck mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ konstruierbar ist.

Datei: kt_u13.tex. Version vom 8.7.2024

Aufgabe P65: Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $L|K$ eine quadratische Erweiterung. Dann ist $L|K$ normal und separabel, also galoissch. Sei $\mathrm{Gal}(L|K) = \{\mathrm{id}, \sigma\}$.
Zeige: Ist $\alpha \in L$, so ist

$$A = \frac{\alpha + \sigma(\alpha)}{2} \in K \quad \text{und} \quad B = (\frac{\alpha - \sigma(\alpha)}{2})^2 \in K$$

und

$$\alpha = A \pm \sqrt{B}, \quad \text{d.h.} \quad \alpha \in \{A + \sqrt{B}, A - \sqrt{B}\}.$$

(Zur Notation: Für $C \in K$ steht die Bezeichnung $\sqrt{C}$ für ein Element aus dem algebraischen Abschluss, das quadriert C ergibt. $\sqrt{C}$ ist durch diese Bedingung nicht eindeutig, sondern nur bis aufs Vorzeichen bestimmt.)

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H37: Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = (1, 2), \quad P_2 = (-1, 1), \quad P_3 = (1, 3).$$

Bestimme die Schnittpunkte des Kreises $K(P_1, \sqrt{3})$ mit der Geraden $G(P_2, P_3)$.

Aufgabe H38: Gegeben sei ein Kreis mit Flächeninhalt 1, o.E. kennen wir also die Punkte $(0, 0), (1, 0), (r, 0)$, wobei r der Radius eines Kreises mit Flächeninhalt 1 ist.
Kann man damit mit Zirkel und Lineal einen Kreis mit Flächinhalt 2 konstruieren?

Aufgabe H39: (Staatsexamensaufgabe)
Beweisen Sie mit Mitteln der Algebra, dass das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, das regelmäßige Siebeneck aber nicht.

[1]Abgabe der Hausaufgaben bis 17.7.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen