KAPITEL 4

Oberflächenintegrale

1. Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Erinnerung an das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$:

(1) Zu zwei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ist das **Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$** durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

definiert. (Das Skalarprodukt hat eine Reihe von Eigenschaften, die hier nicht wiederholt werden sollen.) Für das Skalarprodukt gibt es auch einige andere Bezeichungen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

(2) Fasst man die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ als $n \times 1$-Matrizen und 1×1-Matrizen als Zahlen auf, so kann man das Skalarprodukt auch durch das Matrizenprodukt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

berechnen.

(3) Die **Länge** (oder **Norm**) eines Vektors $\mathbf{a}$ wird als

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

definiert, d.h.

$$\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

(4) Der **Abstand** zweier Punkte $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ist

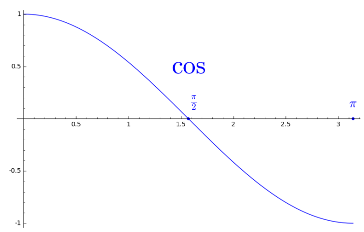
$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|.$$

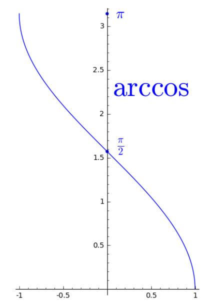
Insbesondere ist $\|\mathbf{p}\|$ der Abstand des Punktes $\mathbf{p}$ zum Nullpunkt.

(5) Der **Winkel** zwischen zwei von 0 verschiedenen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ wird über den Cosinus durch

$$\cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Datei: al_int4.tex. Version vom 3.2.2020 definiert; dabei wählt man $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in [0,\pi]$. Nun ist cos als Abbildung $[0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$,





weswegen man auch schreiben kann

$$\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

Der so definierte Winkel hängt nicht von der Reihenfolge der Vektoren ab: $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sphericalangle(\mathbf{b},\mathbf{a})$.

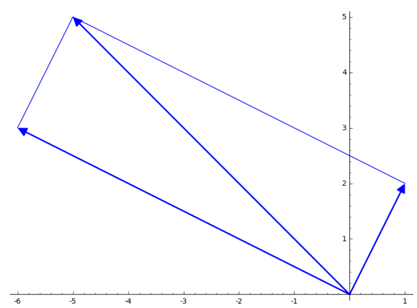
(6) Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ **stehen senkrecht aufeinander**, man sagt auch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind **orthogonal**, wenn $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$ gilt, was man mit dem Skalarprodukt durch

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$$

ausdrücken kann.

(7) Stehen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht aufeinander, so gilt der **Satz von Pythagoras**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$



Die Begründung folgt mit $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Während das Skalarprodukt für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ definiert ist, beschränken wir uns bei der folgenden Bildung auf den $\mathbb{R}^3$:

Definition. *Zu zwei Vektoren*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \textit{und}\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ *wird das* **Kreuzprodukt** *(oder* **Vektorprodukt***) definiert durch*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Das Kreuzprodukt von $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wird also aus den 2×2-Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

gebildet:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Den i-ten Eintrag erhält man also durch Streichen der i-ten Zeile und anschließende Determinantenbildung, wobei im Fall $i = 2$ noch mit -1 multipliziert werden muss.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz enthält erste Rechenregeln:

Satz. *Für Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ *und* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.
(2) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
(3) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *(Antisymmetrie).*
(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Beweis: Die Aussagen folgen einfach aus der Definition des Kreuzprodukts. ∎

Bemerkung: Sind

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Einheitsvektoren, so gilt

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,$$

und damit

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1.$$

Außerdem haben wir

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0.$$

Benutzt man nun die Rechenregeln des Satzes, so kann man jedes Kreuzprodukt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = \\
&= a_1b_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + a_1b_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + a_1b_3(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + \\
&\quad + a_2b_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + a_2b_2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + a_2b_3(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \\
&\quad + a_3b_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + a_3b_2(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) + a_3b_3(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3) = \\
&= a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_1b_3\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_3 + a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_3b_2\mathbf{e}_1 = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(Die gezeigte Formel entspricht natürlich genau unserer Definition des Kreuzprodukts.)

Lemma. *Für Vektoren*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ *gilt*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

(Man nennt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ *auch das* **Spatprodukt** *der Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*.) Weiter hat man die Eigenschaften:*

(1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$. *(Zyklische Vertauschung der Vektoren ändert den Wert des Spatprodukts nicht.)*
(2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$.
(3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Beweis: Mit der Formel für 3×3-Determinanten erhält man

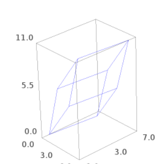
$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},
\end{aligned}$$

wie behauptet. Damit kann man dann auch die anderen Eigenschaften zeigen. ■

Geometrische Bedeutung: Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so heißt

$$P = \{t\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c} : 0 \le t \le 1, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$$

das von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannte **Parallelotop** (oder **Parallelepiped** oder **Spalt**).



Mit Hilfe der Integraltransformationsformel findet man für das Volumen von P

$$\mu(P) = \int_P d(x,y,z) = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c})| = |\det(\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c})|.$$

Im folgenden Satz sind weitere Eigenschaften für das Kreuzprodukt zusammengestellt:

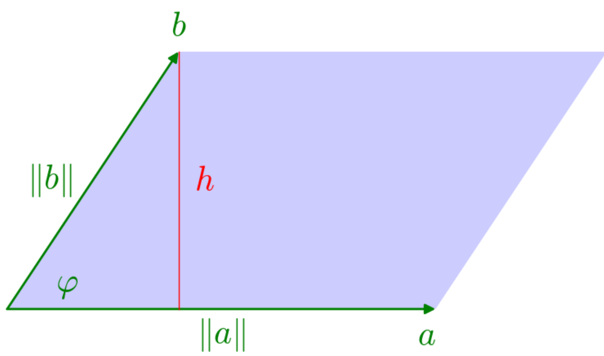
Satz. *Für Vektoren* $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ *gilt:*

(1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = 0$ *und* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = 0$*, d.h.* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *steht senkrecht auf* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$*.*
(2) $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *sind genau dann linear abhängig, wenn* $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$ *gilt.*
(3) *Sind* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *linear unabhängig, so auch* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$*.*
(4) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$.
(5) *Sind* $\mathbf{a},\mathbf{b}$ *von* 0 *verschieden und ist* φ *der Winkel zwischen* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$*, so gilt*

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\varphi.$$

Geometrische Bedeutung: Seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

(1) Sei $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Wir betrachten das von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannte Parallelogramm:



Der Flächeninhalt F des Parallelogramms ist dann gemäß Skizze

$$F = \|\mathbf{a}\|\cdot h.$$

Nach Definition des Sinus gilt

$$\sin\varphi = \frac{h}{\|\mathbf{b}\|},$$

woraus dann $h = \|\mathbf{b}\|\cdot\sin\varphi$ und damit

$$F = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\varphi$$

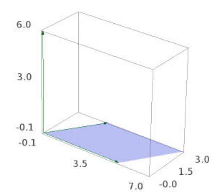
folgt. Nun ist aber nach dem letzten Satz $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\varphi$, d.h. wir erhalten

$$F = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|.$$

Zusammengefasst: Die Länge von $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ist der **Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms**.

(2) Da $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ als linear unabhängig vorausgesetzt sind, ist der Vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ von 0 verschieden, außerdem steht $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Da $\mathbb{R}\,\mathbf{a}+\mathbb{R}\,\mathbf{b}$ Dimension 2 hat, hat das orthogonale Komplement $(\mathbb{R}\,\mathbf{a}+\mathbb{R}\,\mathbf{b})^\perp$ Dimension 1, also ist $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ein Basisvektor dieses orthogonalen Komplements:

$$(\mathbb{R}\,\mathbf{a}+\mathbb{R}\,\mathbf{b})^\perp = \mathbb{R}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$



(3) Ist $\mathbf{v}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, sodass
- die Norm von $\mathbf{v}$ gleich dem Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist und
- $\mathbf{v}$ auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht steht,

so folgt aus (1) und (2) sofort, dass

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{oder} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

gilt. Eine geometrische Unterscheidung der beiden Fälle liefert die **Rechte-Hand-Regel**: Man dreht die rechte Hand von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ mit einem Winkel zwischen 0 und π. Der (ausgestreckte) Daumen zeigt dann in Richtung von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

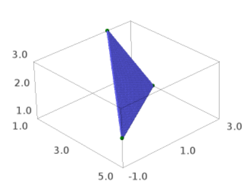
Beispiel: Die Rechte-Hand-Regel kann man gut bei den Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$$

beobachten.

Dreiecke: Drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ spannen ein Dreieck auf. Die Fläche ist gerade die Hälfte der Fläche des von den Vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ und $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ aufgespannten Parallelogramms, also

$$\text{Fläche}(\text{Dreieck}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \frac{1}{2} \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|.$$



Es gibt noch eine Reihe von Regeln für das Kreuzprodukt. Beispielhaft geben wir folgenden Satz an:

Satz (Graßmann-Identitäten). *Für* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *gilt*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a} \quad \textit{und} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

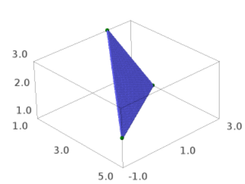
2. Flächen im $\mathbb{R}^3$

Flächen im $\mathbb{R}^3$: Wir haben Kurven durch ihre Parametrisierung beschrieben. Ähnlich gehen wir auch hier vor:

- Eine **Fläche** F wird hier durch eine Parametrisierung
$$\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$$
gegeben, wo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist und einige Eigenschaften erfüllt sein sollten.
- Wir schreiben die Parameter meist als u und v, also $\mathbf{\Phi}(u, v)$.
- $\mathbf{\Phi}(u, v)$ sollte (fast überall) stetig partiell differenzierbar nach u und v sein. Die Vektoren
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}$$
heißen auch **Tangentialvektoren** (der Fläche im Punkt $\mathbf{\Phi}(u, v)$).
- Die Tangentialvektoren
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}$$
sollten (fast immer) linear unabhängig sein. Dies ist gleichwertig damit, dass das Kreuzprodukt von 0 verschieden ist:
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}.$$
- Der Vektor
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}$$
heißt (ein) **Normalenvektor** der Fläche im Punkt $\mathbf{\Phi}(u, v)$. Er steht senkrecht auf den Tangentialvektoren.

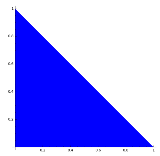
Wir geben eine Reihe von Beispielen an.

Dreieck: Gegeben seien drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Die Dreiecksfläche Δ, die durch die drei Punkte bestimmt wird, ist
$$\Delta = \{\mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 - u\}.$$
Man kann dies auch in der Form
$$\Delta = \{(1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c} : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 - u\}$$
schreiben.



Eine Parametrisierung erhalten wir durch
$$\mathbf{\Phi} : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 - u\} \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Der Definitionsbereich ist ebenfalls eine Dreieck:



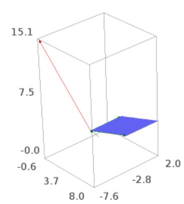
Insbesondere ist der Definitionsbereich ein Normalbereich. Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \mathbf{c} - \mathbf{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

(Wir hatten früher erwähnt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{1}{2}\|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$ ist.

Parallelogramm: Wir heften ein Parallelogramm mit Seitenvektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ an einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ an:

$$P = \{\mathbf{a} + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$



Die Parametrisierung ist also

$$\mathbf{\Phi} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u,v) = \mathbf{a} + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2.$$

Es ist

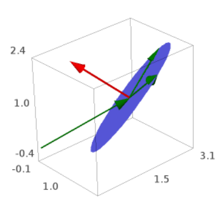
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \mathbf{w}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \mathbf{w}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2.$$

Der Vektor $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\mathbf{\Phi}}{\partial v}$ steht auf dem Parallelogramm senkrecht und ist im Bild rot eingezeichnet.

Ellipsen: Sind $\mathbf{a}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$, so definiert

$$E = \{\mathbf{a} + r\cos(\varphi)\mathbf{w}_1 + r\sin(\varphi)\mathbf{w}_2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

eine Ellipse.



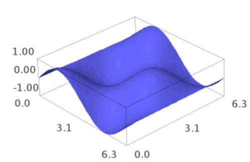
Eine Parametrisierung ist

$$\mathbf{\Phi} : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(r,\varphi) = \mathbf{a} + r\cos(\varphi)\mathbf{w}_1 + r\sin(\varphi)\mathbf{w}_2.$$

Es ist
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} = \cos(\varphi)\mathbf{w}_1 + \sin(\varphi)\mathbf{w}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} = -r\sin(\varphi)\mathbf{w}_1 + r\cos(\varphi)\mathbf{w}_2.$$
Hier findet man
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} &= \Big(\cos(\varphi)\mathbf{w}_1 + \sin(\varphi)\mathbf{w}_2\Big) \times \Big(-r\sin(\varphi)\mathbf{w}_1 + r\cos(\varphi)\mathbf{w}_2\Big) = \\ &= r\cos(\varphi)^2\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 - r\sin(\varphi)^2\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_1 = r(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2)\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \\ &= r\,\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Funktionsgraphen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine (geeignete) Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Graph der Funktion ist
$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}.$$
Eine Parametrisierung ist also
$$\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}.$$
Hier ist
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Viele unserer Flächen werden so entstehen oder sich aus solchen Flächen zusammensetzen.

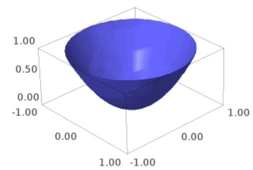
Beispiel: Wir betrachten $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ und $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.



Eine Parametrisierung ist
$$\mathbf{\Phi} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sin(u)\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Manchmal ist es auch sinnvoll, die Definitionsmenge D geeignet zu parametrisieren um zu einer schöneren Parametrisierung des Funktionsgraphen zu kommen.

Beispiel: Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis und $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Funktionsgraph ist also
$$F = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Wir schreiben mit Polarkoordinaten

$$D = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) : 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

mit $(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 = r^2$ erhalten wir folgende Parametrisierung von F

$$\mathbf{\Phi} : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Rotationsflächen: Wir starten mit einer Kurve in der x-z-Ebene, die wir uns durch eine Parametrisierung

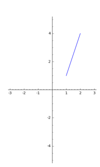
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

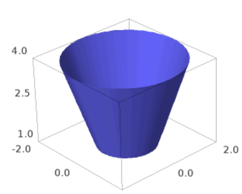
gegeben denken. Die zugehörige Rotationsfläche ist dann

$$\Phi : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \Phi(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha(t)\cos(\varphi) \\ \alpha(t)\sin(\varphi) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

(1) Wir wählen eine Strecke in der x-z-Ebene, die die z-Achse nicht schneidet, beispielsweise die Strecke von $(1,1)$ zu $(2,4)$





Für die Strecke wählen wir die Parametrisierung

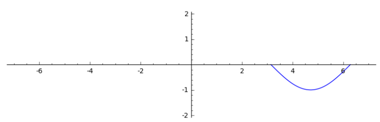
$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 3t-2 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \le t \le 2,$$

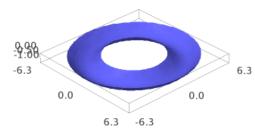
sodass wir für die Rotationsfläche die Parametrisierung

$$\mathbf{\Phi} : [1,2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos(\varphi) \\ t\sin(\varphi) \\ 3t-2 \end{pmatrix}$$

erhalten.

(2) Wir wählen das Stück der Sinuskurve zwischen π und 2π und rotieren es um die z-Achse:





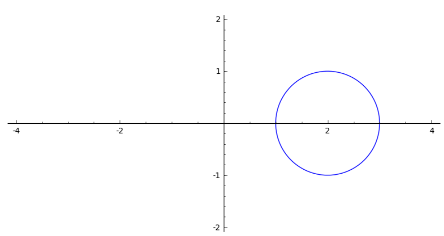
Wählen wir

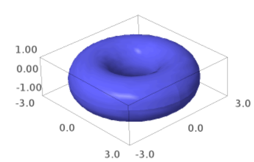
$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ mit } \pi \le t \le 2\pi,$$

so erhalten wir für die Parametrisierung des Rotationskörpers

$$\mathbf{\Phi} = [\pi, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos(\varphi) \\ t\sin(\varphi) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(3) Wir nehmen einen Kreis in der x-z-Ebene, der die z-Achse nicht schneidet. Dann erhalten wir einen Torus.





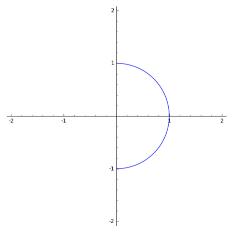
Hat der Kreis Radius r und der Mittelpunkt Abstand R vom Nullpunkt, so erhalten wir eine Kreisparametrisierung durch

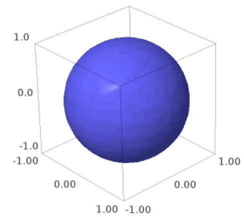
$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\cos(t) \\ 0 \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für den Torus die Parametrisierung:

$$\mathbf{\Phi} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos(t))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(t))\sin(\varphi) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(4) Die Kugeloberfläche erhalten wir, wenn wir einen Halbkreis, dessen Enden auf der z-Achse sind, um die z-Achse rotieren





Wählen wir für den Halbkreis die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq \pi,$$

so erhalten wir für die Kugel die Parametrisierung

$$\mathbf{\Phi} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(\varphi) \\ \sin(t)\sin(\varphi) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

(Dies ist eigentlich die Parametrisierung der Kugel mit Kugelkoordinaten, nur dass hier t statt ϑ verwendet wird.)

3. Skalares Oberflächenintegral

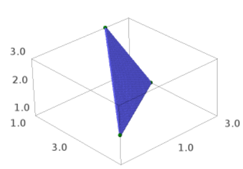
Skalares Oberflächenintegral oder Oberflächenintegral 1. Art: Für eine Fläche F gegeben durch eine Parametrisierung $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ und eine (auf F stetige) skalare Funktion f wird das **Oberflächenintegral** durch

$$\int_F f d\sigma = \int_D f(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \, \| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \| \, d(u, v)$$

definiert. Der **Flächeninhalt** von F wird definiert durch

$$\operatorname{vol}_2(F) = \int_F d\sigma = \int_D \| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \| \, d(u, v)$$

Beispiel: Drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ bestimmen ein Dreieck Δ.



Als Parametrisierung wählen wir mit

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

die Abbildung

$$\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u,v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + v(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \mathbf{b}-\mathbf{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \mathbf{c}-\mathbf{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}), \quad \|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\| = \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|.$$

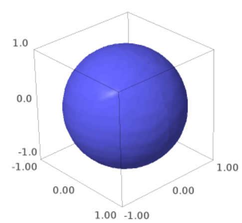
Also erhalten wir für die Fläche

$$\begin{aligned}
\int_\Delta d\sigma &= \int_D \|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\| \, d(u,v) = \int_D \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| \, d(u,v) = \\
&= \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=0}^{1-u} \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| \, dv \right) du = \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| \int_{u=0}^{1} (1-u) du = \\
&= \frac{1}{2} \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der Flächenformel für Dreiecke überein, die wir früher erwähnt hatten.

Beispiel: Die Oberfläche der Kugel K vom Radius 1 hatten wir so parametrisiert:

$$\mathbf{\Phi} : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(\varphi) \\ \sin(t)\sin(\varphi) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$



Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\varphi) \\ \cos(t)\sin(\varphi) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(t)\sin(\varphi) \\ \sin(t)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t)^2\cos(\varphi) \\ \sin(t)^2\sin(\varphi) \\ \cos(t)\sin(t)(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sin(t)^2\cos(\varphi) \\ \sin(t)^2\sin(\varphi) \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \\
\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi}\| &= \sqrt{\sin(t)^4\cos(\varphi)^2 + \sin(t)^4\sin(\varphi)^2 + \cos(t)^2\sin(t)^2} = \\
&= \sqrt{\sin(t)^4 + \cos(t)^2\sin(t)^2} = \sin(t)^2\sqrt{1+\cos(t)^2} = \\
&= \sqrt{\sin(t)^2 \cdot (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)} = \sqrt{\sin(t)^2} \overset{0 \leq t \leq \pi}{=} \sin(t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Oberfläche der Kugel

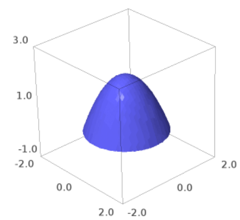
$$\begin{aligned}
\int_K d\sigma &= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\| \, d(t,\varphi) = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sin(t) \, d(t,\varphi) = \\
&= \int_{t=0}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(t) d\varphi \right) dt = \int_{t=0}^{\pi} 2\pi \sin(t) dt = [-2\pi\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

Beispiel: Sei F die Oberfläche des oberhalb der xy-Ebene gelegenen Teils des Paraboloids $z = 2-(x^2+y^2)$, also

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2-(x^2+y^2), z \geq 0\}.$$

Wegen $z \geq 0$ können wir auch schreiben

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2, z = x^2+y^2\}.$$



Sei

$$f = 3z.$$

Wir wollen das Integral

$$\int_F f d\sigma$$

berechnen. Verschiedene Parametrisierungen sind möglich. Da $x^2+y^2 \leq 2$ eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{2}$ beschreibt, wählen wir Polarkoordinaten, also

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = 2-(x^2+y^2) = 2-r^2$$

und erhalten damit

$$\mathbf{\Phi} : [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_F f d\sigma &= \int_{[0,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]} f(\mathbf{\Phi}(r,\varphi)) \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} \right\| d(r,\varphi) = \\
&= \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} 3(2-r^2)\sqrt{4r^4+r^2} d\varphi \right) dr = 6\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (2-r^2) r\sqrt{1+4r^2} dr \overset{\substack{u = 1+4r^2 \\ du = 8rdr \\ r^2 = \frac{u-1}{4} \\ rdr = \frac{1}{8}du}}{=} \\
&= 6\pi \int_{u=1}^{9} (2 - \frac{u-1}{4})\sqrt{u} \cdot \frac{1}{8} du = \frac{6}{32}\pi \int_{u=1}^{9} (9-u) u^{\frac{1}{2}} du = \frac{3}{16}\pi \int_{u=1}^{9} (9u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}) du = \\
&= \frac{3}{16}\pi \left[\frac{9u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{u=1}^{9} = \frac{3}{16}\pi \left[6u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_{u=1}^{9} = \frac{3}{16}\pi \left(6 \cdot 3^3 - \frac{2}{5} \cdot 3^5 - 6 + \frac{2}{5} \right) = \\
&= \frac{111}{10}\pi
\end{aligned}$$

4. Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche

Oberflächenintegral 2. Art oder Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche: Für eine Fläche S, die durch eine Parametrisierung $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist, und ein (auf S stetiges) Vektorfeld $\mathbf{F}$ wird das Oberflächenintegral 2. Art oder der Fluss des Vektorfelds $\mathbf{F}$ durch S definiert durch

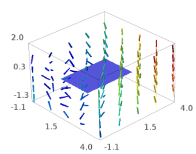
$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right) d(u,v).$$

Beispiel: Wir betrachten das in der xy-Ebene gelegene Rechteck

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, z = 0\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sin(x) + z^2 \\ \cos(y) - z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$



Wir wählen für S die Parametrisierung

$$\mathbf{\Phi} : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right) = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ \cos(v) \\ u+v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u + v.$$

Wir erhalten für den Fluss von $\mathbf{F}$ durch S

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{[0,3]\times[0,2]} \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right) d(u,v) = \int_{[0,3]\times[0,2]} (u+v) d(u,v) = \\ &= \int_{u=0}^{3} \left(\int_{v=0}^{2} (u+v) dv \right) du = \int_{u=0}^{3} \left[uv + \frac{1}{2}v^2 \right]_{v=0}^{2} du = \int_{u=0}^{3} (2u+2) du = \\ &= \left[u^2 + 2u \right]_{u=0}^{3} = 15. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(1) Eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt zweiseitig oder **orientierbar**, wenn man eindeutig von einer Ober- und Unterseite bzw. einer inneren und äußeren Seite sprechen kann.

(2) Ist $\mathbf{\Phi}$ die Parametrisierung einer Fläche, so zeigt der Normalenvektor

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}$$

nach oben bzw. außen.

(3) Man kann die Seiten (einer zweiseitigen Fläche) auch vertauschen, indem man bei der Parametrisierung die Rolle der 1. und 2. Variable vertauscht: Definiert man zu einer Parametrisierung $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ der Fläche S

$$D_1 = \{(v,u) \in \mathbb{R}^2 : (u,v) \in D\}$$

und

$$\mathbf{\Phi}_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}_1(v,u) = \mathbf{\Phi}(u,v),$$

so beschreibt auch $\mathbf{\Phi}_1$ die Fläche S, aber der Normalenvektor zeigt genau in die Gegenrichtung, denn

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial u} = -\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}.$$

Dann ändert auch das Flussintegral sein Vorzeichen:

$$\int_{D_1} \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}_1(v,u)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial u}\right) d(v,u) = -\int_D \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right) d(u,v).$$

(4) Wenn man für eine Fläche S eine Parametrisierung wählt, muss man also darauf achten, in welche Richtung die Normalenvektoren zeigen.

Beispiel: Wir betrachten nochmals das in der xy-Ebene gelegene Rechteck

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, z = 0\}.$$

Die Normalenvektoren bei der letzten Parametrisierung $\mathbf{\Phi}$ waren also konstant $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun wählen wir für S die Parametrisierung

$$\mathbf{\Phi}_1 : [0,2] \times [0,3] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}_1(v,u) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Normalenvektoren findet man

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Verhältnis zur vorangegangenen Parametrisierung haben wir nun oben und unten vertauscht.

Bemerkungen:

(1) Schreibt man die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik in Integralform, so nehmen sie die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \int_S \left(\mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \\ \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \\ \int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= 0, \\ \int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_V \rho_{\text{el}} d(x,y,z) \end{aligned}$$

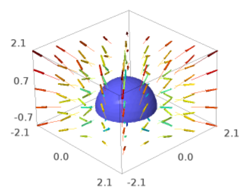
an. Dabei ist $\mathbf{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathbf{D}$ die elektrische Verschiebungsdichte, $\mathbf{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathbf{J}$ die Stromdichte, ρ_{el} die Raumladungsdichte. S steht für eine Fläche, V für eine 3-dimensionale Menge.

(2) Bei einer Strömung wird die Menge aller lokalen Geschwindigkeitsvektoren durch ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ beschrieben. (Hängt $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nicht von der Zeit ab, heißt die Strömung stationär.) In strömenden Flüssigkeiten wird die Dichte ρ im Allgemeinen überall gleich sein; solche Strömungen heißen imkompressibel. Der Fluss durch eine beliebig geformte und orientierte Fläche S ist

$$\Phi = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Beispiel: Sei S der oberhalb der xy-Ebene gelegene Teil der Einheitshalbkugel, also

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\},$$



der sich unter Verwendung von Kugelkoordinaten durch

$$\boldsymbol{\Phi} : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \boldsymbol{\Phi}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

parametrisieren lässt, und $\mathbf{F}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Man überlegt sich, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(\vartheta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \varphi}\right) &= \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \\
&= \sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta) = \\
&= 2\sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta).
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir

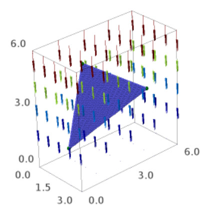
$$\begin{aligned}
\int_F \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(\vartheta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \varphi}\right) d(\vartheta,\varphi) = \\
&= \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(2\sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\right) d\varphi\right) d\vartheta = \\
&= \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\sin(\vartheta)^3\sin(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta)\cdot\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi}\right) d\vartheta = \\
&= 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta)^2\sin(\vartheta) d\vartheta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos(\vartheta)^3\right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Beispiel: Sei Δ das Dreieck mit den Ecken

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{F}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z^2 \end{pmatrix}.$$



Mit

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

erhalten wir für das Dreieck die Parametrisierung

$$\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{\Phi}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+u \\ 1+4u+v \\ 1+2u+4v \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(\vartheta, \varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+2u+4v)^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+2u+4v)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -(1+2u+4v)^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_\Delta \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_D \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(\vartheta, \varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} \right) d(u, v) = \\ &= \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=0}^{1-u} \left(-(1+2u+4v)^2 \right) dv \right) du = \cdots = -\frac{29}{6}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sei eine Fläche S durch eine Parametrisierung $\mathbf{\Phi}(u, v)$ gegeben. Der **Einheitsnormalenvektor** im Punkt $\mathbf{\Phi}(u, v)$ ist dann

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|}.$$

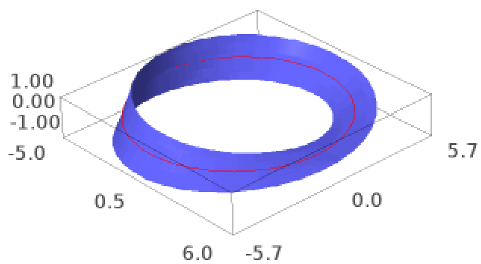
Damit können wir auch schreiben

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Für den Fluss ist nur der Anteil des Vektorfelds wichtig, der senkrecht auf die Fläche trifft.

Bemerkung: Es gibt auch nicht orientierbare Flächen. Ein Beispiel ist das **Möbiusband**: Man nimmt einen Papierstreifen und klebt die Enden so zusammen, dass die Enden um 180^0 gegeneinander verdreht sind. Das Bild folgender Parametrisierung ist ein Möbiusband:

$$\Phi : [-1,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \Phi(t,\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos(\varphi) + t\cos(\frac{\varphi}{2})\cos(\varphi) \\ 5\sin(\varphi) + t\cos(\frac{\varphi}{2})\sin(\varphi) \\ t\sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$



Man findet

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)(t,\varphi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} & \text{für } (t,\varphi) = (0,0), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} & \text{für } (t,\varphi) = (0,2\pi). \end{cases}$$

Der „Normalenvektor“ verhält sich also nicht stetig im Punkt $(5,0,0)$.