Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 5 (15.5.2024-22.5.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P21: Warum ist ein endlicher Körper K nicht algebraisch abgeschlossen?

Aufgabe P22: (Staatsexamensaufgabe) Sei

$$f(x) := x^4 - 6x^2 - 14 \in \mathbb{Q}[x].$$

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{23}}, \sqrt{-14})$ der Zerfällungskörper von f ist.
b) Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = 8$.

Aufgabe P23: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe)
Sei $a \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 + ax^2 - (3+a)x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$. Zeige:

(1) f ist irreduzibel.
(2) $\frac{1}{1-\alpha}$ ist eine weitere, von α verschiedene Nullstelle von f.
(3) $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist ein Zerfällungskörper von f.

Aufgabe P24: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe)
Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom vom Grad ≥ 1. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f und $Z = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$. Zeige:

(1) Ist $\alpha = \beta + i\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$) eine Nullstelle von f, so auch $\overline{\alpha} = \beta - i\gamma$.
(2) Ist $\alpha = \beta + i\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$) eine Nullstelle von f, so gilt
$$\beta, \gamma^2, i\gamma \in Z.$$
(3) Für $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
$$[\mathbb{Q}(i\gamma) : \mathbb{Q}(\gamma^2)] = 2.$$
(4) Besitzt f eine komplexe, nicht-reelle Nullstelle, so gilt
$$2 \mid [Z : \mathbb{Q}].$$
(5) Ist $[Z : \mathbb{Q}]$ ungerade, so folgt $Z \subseteq \mathbb{R}$.

Datei: kt_u5.tex. Version vom 13.5.2024

Aufgabe P25: Auf dem vorangegangenen Übungsblatt wurde folgendes **Irreduzibilitätskriterium** angegeben: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a \in K^*$, sodass gilt

- $a \notin \{c^p : c \in K\}$ für alle Primzahlen p mit $p \mid n$,
- $a \notin \{-4c^4 : c \in K\}$, falls $4 \mid n$,

so ist das Polynom $x^n - a \in K[x]$ irreduzibel.
Zeige:

(1) Ist p eine Primzahl mit $p \mid n$ und ist $a \in \{c^p : c \in K\}$, so ist $x^n - a$ reduzibel in $K[x]$.
(2) Gilt $4 \mid n$ und ist $a \in \{-4c^4 : c \in K\}$, so ist $x^n - a$ reduzibel in $K[x]$.

Die im Kriterium angegebenen Bedingungen sind also notwendig und hinreichend für die Irreduzibilität von $x^n - a \in K[x]$.

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H13: (Staatsexamensaufgabe)
Sei $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ (mit $i^2 = -1$) und seien $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[4]{2})$. Zeigen Sie:

(a) $\zeta^4 = -1$, und K ist der Zerfällungskörper von $X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$.
(b) $f(X) = X^4 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
(c) L ist der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe H14: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Zeige, dass L Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[x]$ ist.

Aufgabe H15: (Staatsexamensaufgabe)

a) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.
b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper Z von f über $\mathbb{Q}$ und $[Z : \mathbb{Q}]$.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 22.5.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen