KAPITEL 9

Differentialformen auf nichtsingulären Kurven

Sei wieder C eine nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive Kurve, die über einem vollkommenen Körper K definiert ist.

Definition. *Der Raum Ω_C der meromorphen Differentialformen auf C ist der $\overline{K}(C)$-Vektorraum, der von Symbolen df mit $f \in \overline{K}(C)$ erzeugt wird, zusammen mit den Relationen*

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = fdg + gdf, \quad dc = 0 \text{ für alle } c \in \overline{K}.$$

Jedes $\omega \in \Omega_C$ hat also eine Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dg_i \text{ mit } f_i g_i \in \overline{K}(C).$$

Wir üben etwas den Umgang mit den Differentialen: Seien $f, g \in \overline{K}(C)$.

- $d(f^2) = fdf + fdf = 2fdf$ und induktiv dann
$$d(f^n) = nf^{n-1}df \text{ für alle natürlichen Zahlen } n.$$
- Ist $f \neq 0$, so gilt:
$$0 = d(1) = d(f \cdot \frac{1}{f}) = fd(\frac{1}{f}) + \frac{1}{f}df,$$
woraus sofort
$$d(\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2}df$$
folgt. Wie üblich erhält man dann
$$d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$
- Ist $F = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_i \in \overline{K}$, so können wir die formale Ableitung $F' = \sum i a_i x^{i-1}$ bilden. Setzt man f ein, so erhält man
$$dF(f) = d(\sum a_i f^i) = \sum i a_i f^{i-1} df = F'(f)df.$$
Ist G ein weiteres Polynom mit $G(f) \neq 0$, so ist
$$d(\frac{F(f)}{G(f)}) = \frac{F'(f)G(f) - F(f)G'(f)}{G(f)^2}df.$$

Beispiel: Wegen $\overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$ folgt aus den obigen Betrachtungen sofort, dass jedes $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}^1}$ die Form

$$\omega = \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

hat, mit Polynomen p und q.

Satz. *Ω_C ist ein 1-dimensionaler $\overline{K}(C)$-Vektorraum.*

Datei: algku9.tex. Version vom 18.7.2021

Beweisidee: Der Funktionenkörper $\overline{K}(C)$ kann erzeugt werden von Elementen x und y mit einer Relation $f(x,y)=0$. Wie oben überlegt man sich

$$\Omega_C = \overline{K}(C)dx + \overline{K}(C)dy.$$

Wir differenzieren jetzt die Relation $f(x,y)=0$:

$$0 = d0 = d(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Ist $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, so folgt

$$dy = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx,$$

und damit $\Omega_C = \overline{K}(C)dx$. Zu zeigen bliebe noch, dass $\Omega_C \neq 0$ gilt, worauf wir aber verzichten. ■

Bemerkung: Für $c \in \overline{K}$ gilt $dc = 0$. In Charakteristik p gilt außerdem $d(f^p) = 0$ für jede Funktion f.

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an, der die von uns benötigten Aussagen enthält:

SATZ. (1) *Ist* $\mathrm{char}(K) = 0$*, so gilt für* $f \in \overline{K}(C)$*:*

$$df = 0 \iff f \in \overline{K}.$$

(2) *Ist* $P \in C$ *und* t *uniformisierend in* P*, d.h.* $\mathrm{ord}_P(t) = 1$*, so ist* $dt \neq 0$*, insbesondere* $\Omega_C = \overline{K}(C)dt$*.*

Ist also t uniformisierend in $P \in C$ und $f \in \overline{K}(C)$, so gibt es eine Funktion $g \in \overline{K}(C)$ mit $df = gdt$. Wir schreiben dann auch manchmal $g = \frac{df}{dt}$. Ohne Beweis geben wir folgendes Lemma an:

LEMMA. *Ist* t *uniformisierend in* $P \in C$ *und* $f \in \overline{K}(C)$ *definiert in* P*, so ist* $\frac{df}{dt}$ *auch definiert in* P*.*

DEFINITION. (1) *Ist* $\omega \in \Omega_C, \omega \neq 0$, $P \in C$ *und* t *uniformisierend in* P*, so gibt es eine Funktion* g *mit* $\omega = gdt$*. Man definiert*

$$\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(g).$$

Man sagt, ω *ist holomorph oder regulär in* P*, falls* $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq 0$ *ist.*

(2) *Der Divisor eines Differentials* $\omega \in \Omega_C$ *wird wie folgt definiert:*

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(\omega)[P].$$

Den Divisor eines Differentials nennt man auch einen **kanonischen Divisor***.*

Bemerkung: Man kann jetzt leicht zeigen, dass die Definition von $\mathrm{ord}_P(\omega)$ nicht von der Auswahl der Uniformisierenden in P abhängt.

Beispiel: $C = \mathbb{P}^1$ und $\omega = dx$. Was ist $\mathrm{div}(dx)$? Im Endlichen: In einem Punkt a ist $x-a$ uniformisierend, wegen $dx = d(x-a) = 1 \cdot d(x-a)$ gilt also $\mathrm{ord}_a(dx) = 0$. Im unendlich fernen Punkt ∞ ist $u = \frac{1}{x}$ uniformisierend, mit

$$dx = d(\frac{1}{u}) = -\frac{1}{u^2}du = (-1)u^{-2}du$$

gilt also $\mathrm{ord}_\infty(dx) = -2$, womit man schließlich erhält:

$$\mathrm{div}(dx) = -2[\infty] \quad \text{und} \quad \mathrm{grad}(\mathrm{div}(dx)) = -2.$$

LEMMA. *Für* $f \in \overline{K}(C) \setminus \{0\}$ *und* $\omega \in \Omega_C \setminus \{0\}$ *gilt*

$$\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega).$$

Beweis: Sei $P \in C$ und t uniformisierend in P. Dann gibt es eine Funktion g mit $\omega = g\,dt$. Mit $f\omega = fgdt$ folgt

$$\mathrm{ord}_P(f\omega) = \mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(\omega).$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega),$$

wie behauptet. ■

Satz. (1) *Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.*
(2) *Ist ein Divisor linear äquivalent zu einem kanonischen Divisor, so ist er selbst ein kanonischer Divisor.*

Die kanonischen Divisoren bilden also eine ganze Äquivalenzklasse von Divisoren. Man nennt sie auch die **kanonische Klasse** *und schreibt dafür k_C.*

Beweis:
(1) Seien ω_1, ω_2 zwei von 0 verschiedene Differentialformen, so gibt es eine Funktion f mit $\omega_2 = f\omega_1$. Aus dem vorangegangenen Lemma folgt sofort

$$\mathrm{div}(\omega_2) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega_1).$$

Also sind ω_1 und ω_2 linear äquivalent.
(2) Sei ein Divisor D linear äquivalent zu einem Divisor $\mathrm{div}(\omega)$ mit $\omega \in \Omega_C \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine Funktion $f \neq 0$ mit $D = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$. Das vorangegangene Lemma impliziert $D = \mathrm{div}(f\omega)$, also ist D ein kanonischer Divisor, wie behauptet. ■

Beispiel: ($\mathrm{char}(K) \neq 2$) Wir betrachten die (nichtsinguläre) Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^2$, die affin durch die Gleichung $y^2 = x^3 - x$ definiert wird, also $C = \{x_0x_2^2 = x_1^3 - x_0^2x_1\}$. Wir wollen den Divisor des Differentials $\omega = dx$ berechnen.
Im Endlichen: Sei $P_1 = (-1, 0), P_2 = (0, 0), P_3 = (1, 0)$. Sei $P = (a, b) \in C$. Ist $P \neq P_i$, so ist $x - a$ uniformisierend, wegen $dx = d(x - a)$ also $\mathrm{ord}_P(\omega) = 0$. In P_i ist y uniformisierend. Wir differenzieren $y^2 = x^3 - x$ und erhalten

$$2ydy = (3x^2 - 1)dx \quad \text{und} \quad \omega = dx = \frac{2y}{3x^2 - 1}dy.$$

In P_i ist $3x^2 - 1$ Einheit, also gilt $v_{P_i}(\omega) = 1$.
Im Unendlichen: Es gibt nur den einen Punkt $P_\infty = (0 : 0 : 1)$. Wir wählen affine Koordinaten r, s mit $(r : s : 1) = (x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y)$ und haben dann die Gleichung $r = s^3 - r^2s$. In P_∞ ist s uniformisierend und $\mathrm{ord}_{P_\infty}(r) = 3$. Zunächst gilt nun $\omega = dx = d(\frac{s}{r}) = \frac{1}{r}ds - \frac{s}{r^2}dr$. Durch Differenzieren der Gleichung $r = s^3 - r^2s$ erhält man $(1 + 2rs)dr = (3s^2 - r^2)ds$ und damit

$$\omega = dx = \frac{-2 - 4rs}{r(1 + 2rs)}ds,$$

woraus man sofort $\mathrm{ord}_{P_\infty}(\omega) = -3$ ablesen kann. Also gilt

$$\mathrm{div}(\omega) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[P_\infty].$$

Den gleichen Divisor hat die Funktion y: $\mathrm{div}(dx) = \mathrm{div}(y)$ und damit

$$\mathrm{div}(\frac{1}{y}dx) = 0.$$

Die kanonische Klasse ist also trivial: $k_C = 0$.

Zur Übung rechne man in gleicher Weise folgendes Beispiel:

Beispiel: ($\mathrm{char}(K) \neq 2$) Seien $e_1, e_2, e_3 \in \overline{K}$ paarweise verschieden und $C \subseteq \mathbb{P}^2$ gegeben durch die affine Gleichung $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$. Man zeigt, dass C nichtsingulär und absolut irreduzibel ist. Mit $A = e_1 + e_2 + e_3$, $B = e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3$ und $C = e_1e_2e_3$ können wir auch $y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$ schreiben bzw. projektiv $x_0x_2^2 = x_1^3 - Ax_0x_1^2 + Bx_0^2x_1 - Cx_0^3$. Wir wollen den kanonischen Divisor $\mathrm{div}(dx)$ berechnen. Sei $P_i = (e_i, 0)$ und $P_\infty = (0 : 0 : 1)$.

Im Endlichen: Ist $P = (a, b) \neq P_i$, so ist $x - a$ uniformisierend, wegen $dx = d(x - a)$ also $\operatorname{ord}_P(dx) = 0$. In P_i ist y uniformisierend. Wir differenzieren die Definitionsgleichung $y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$:

$$2ydy = (3x^2 - 2Ax + B)dx.$$

In P_i ist $(3x^2 - 2Ax + B)(P_i) = (e_i - e_j)(e_i - e_k) \neq 0$ (i, j, k paarweise verschieden), $3x^2 - 2Ax + B$ also Einheit und damit $\operatorname{ord}_{P_i}(dx) = 1$.
Im Unendlichen: Wir verwenden affine Koordinaten r, s mit $(r : s : 1) = (1 : x : y)$, also $x = \frac{s}{r}, y = \frac{1}{r}$. Die Gleichung lautet $r = s^3 - Ars^2 + Br^2s - Cr^3$. Die Tangente in P_∞ ist also $r = 0$, mithin s uniformisierend. Aus der Gleichung sieht man dann sofort $\operatorname{ord}_\infty(r) = 3$. Durch Differenzieren der Gleichung erhält man

$$(1 + 3Cr^2 - 2Brs + As^2)dr = (Br^2 - 2Ars + 3s^2)ds,$$

und daher mit $dx = d(\frac{s}{r}) = \frac{1}{r}ds - \frac{s}{r^2}dr$

$$dx = \frac{3Ars^2 - 3Br^2s + 3Cr^3 + r - 3s^3}{r^2(As^2 - 2Brs + 3Cr^2 + 1)}ds.$$

Nun gilt $\operatorname{ord}_\infty(r - 3s^3) = 3$, so dass sich $\operatorname{ord}_\infty(dx) = -3$ ergibt.
Insgesamt haben wir also

$$\operatorname{div}(dx) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[P_\infty].$$

Diesen Divisor kennen wir bereits: $\operatorname{div}(dx) = \operatorname{div}(y)$ und damit $\operatorname{div}(\frac{dx}{y}) = 0$. Die Differentialform $\frac{dx}{y}$ hat also weder Pol- noch Nullstellen. Außerdem gilt $k_C = 0$.

Die folgende Definition führt eine zentrale Invariante ein:

Definition. *Das* **Geschlecht** g *(oder* $g(C)$ *oder* g_C*) einer Kurve* C *wird definiert durch die Formel*

$$2g - 2 = \operatorname{grad}(k_C),$$

wo k_C *die kanonische Klasse bezeichnet.*

Bemerkung: Da wir noch keine Aussagen über die Grade von kanonischen Divisoren haben, wissen wir bisher nur, dass für das Geschlecht einer Kurve

$$g(C) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

gilt.

Beispiele:

(1) Wegen $\operatorname{grad}(k_{\mathbb{P}^1}) = -2$ hat $\mathbb{P}^1$ Geschlecht 0.
(2) Die vorhin betrachteten Kurven $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$ (alle e_i's verschieden) haben $k_C = 0$, also Geschlecht 1.

Adjunktionsformel für glatte ebene Kurven:

- Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ eine nichtsinguläre Kurve vom Grad d, d.h. gegeben durch ein Polynom $f(x, y) = 0$ bzw. homogen $x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = 0$.
- Im Funktionenkörper gilt $f(x, y) = 0$, woraus folgt $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ und daher

$$\omega = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

- Wir betrachten ω im Endlichen, in einem Punkt $P = (a, b)$.
  Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, so ist $x - a$ uniformisierend und mit $d(x - a) = dx$ folgt $\operatorname{ord}_P(\omega) = 0$.
  Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$, so ist $y - b$ uniformisierend und mit $d(y - b) = dy$ ergibt sich $\operatorname{ord}_P(\omega) = 0$.

- Im Unendlichen: Wir nehmen an, $(0:1:0)$ liegt nicht auf der Kurve, dann liegen alle unendlich fernen Punkte von C im affinen Teil $\{(r:s:1)\}$ und zwar auf $r=0$. Wegen $(1:x:y)=(r:s:1)=(1:\frac{s}{r}:\frac{1}{r})$ gilt im Funktionenkörper $x=\frac{s}{r}$ und $y=\frac{1}{r}$. Die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ hat Grad $d-1$, also ist $g(r,s)=r^{d-1}\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{s}{r},\frac{1}{r})$ ein Polynom in r und s. Mit $dy=d(\frac{1}{r})=-\frac{1}{r^2}dr$ erhalten wir
$$\omega=-\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{r^{d-3}dr}{g(r,s)}.$$
- Nun kann man erreichen, dass der Geradenschnitt (x_0) aus d verschiedenen Punkten besteht:
$$\mathrm{div}(x_0)=[P_1]+\cdots+[P_d].$$
Dann ist r uniformisierend in P_i und $\mathrm{ord}_{P_i}(\omega)=d-3$.
- Man erhält also
$$\mathrm{div}(\omega)=(d-3)[P_1]+\cdots+(d-3)[P_d]=(d-3)\mathrm{div}(x_0).$$
Insbesondere ist $\mathrm{grad}(k_C)=d(d-3)$.
- Aufgabe: Verifiziere die fürs Unendliche gemachten Aussagen durch explizites Ausrechnen.

Damit erhalten wir folgenden Satz:

Satz. *Sei $C\subseteq\mathbb{P}^2$ eine nichtsinguläre Kurve vom Grad d. Ist h die Klasse eines Hyperebenenschnitts, so gilt für die kanonische Klasse*
$$k_C=(d-3)h,$$
also $\mathrm{grad}(k_C)=d(d-3)$ *und damit* $g(C)=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Beispiele: Ist C eine nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive, ebene Kurve vom Grad d, so gibt folgende Tabelle (im Fall $d\le 6$) an, welches Geschlecht g die Kurve hat:

d	1	2	3	4	5	6
g	0	0	1	3	6	10

Was passiert, wenn eine ebene Kurve C Singularitäten hat? Durch Aufblasen erhalten wir eine nichtsinguläre birational äquivalente Kurve $\widetilde{C}$. Welches Geschlecht hat $\widetilde{C}$? Natürlich kann man dies bei einer konkret gegebenen Kurve ausrechnen, indem man den Divisor eines Differentials bestimmt. In vielen Fällen kann man aber auch obige Betrachtung modifizieren und erhält eine Aussage über das Geschlecht.

Definition. *Ein Punkt $P=(x_0,y_0)$ einer ebenen Kurve $f(x,y)=0$ heißt einfacher Knoten oder gewöhnlicher Doppelpunkt, falls die Taylorreihenentwicklung in P folgende Gestalt hat:*
$$f=a(x-x_0)^2+b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2+\ldots \qquad \textit{mit } b^2-4ac\neq 0.$$

Nach Koordinatenwechsel sieht also die Taylorreihenentwicklung in einem einfachen Knoten wie folgt aus:
$$f=xy+\ldots$$
Damit gilt jetzt folgender Satz:

Satz. *Sei $C\subseteq\mathbb{P}^2$ eine irreduzible projektive Kurve vom Grad d mit nur einfachen Knoten als Singularitäten, und zwar δ Stück. Ist $\widetilde{C}$ eine glattes Modell von C, so gilt*
$$g(\widetilde{C})=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-\delta.$$

Beweisskizze: Wir können annehmen, dass alle Singularitäten im Endlichen liegen. $\widetilde{C}$ werde durch Aufblasung in den Singularitäten erhalten. Wir betrachten wieder das Differential

$$\omega = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Wir müssen nur sehen, was in den singulären Punkten passiert. O.E. sei $P = (0,0)$ ein einfacher Knoten von C.

- Sei $f = xy + \sum_{i\geq 3} g_i(x,y)$, wo $g_i(x,y)$ homogen vom Grad i ist.
- Wir blasen $\mathbb{A}^2$ auf in $(0,0)$ und erhalten $X = \{((x,y),(z_0 : z_1)) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : xz_1 = yz_0\}$. Die exzeptionelle Faser sei E, das eigentliche Urbild von C sei $\widetilde{C}$. Uns interessiert also, was in den Punkten $E \cap \widetilde{C}$ von $\widetilde{C}$ passiert. Dazu betrachten wir zwei affine Teile von X:
- $z_0 \neq 0$: Mit $z = \frac{z_1}{z_0}$ wird $y = xz$, als affine Koordinaten verwenden wir x, z. Einsetzen liefert
$$f = x^2 z + \sum_{i\geq 3} g_i(x, xz) = x^2 z + \sum_{i\geq 3} x^i g_i(1,z),$$
so dass hier das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ gegeben wird durch
$$z + \sum_{i\geq 3} x^{i-2} g_i(1,z) = 0.$$
$E \cap \widetilde{C} \cap \{z_0 \neq 0\}$ besteht nur aus dem Punkt $P_1 = ((0,0),(1:0))$.
- Der Punkt P_1 ist nichtsingulär auf $\widetilde{C}$ und x ist uniformisierend. Was passiert mit $\omega = dx/\frac{\partial f}{\partial y}$? Wir haben
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \sum_{i\geq 3} \frac{\partial g_i}{\partial y}(x,y) = x + \sum_{i\geq 3} \frac{\partial g_i}{\partial y}(x, xz),$$
woraus sofort $\operatorname{ord}_{P_1}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 1$ folgt, also
$$\operatorname{ord}_{P_1}(\omega) = -1.$$
- Im affinen Teil $z_1 \neq 0$ findet man den Punkt $P_2 = ((0,0),(0:1))$ und analog $\operatorname{ord}_{P_2}(\omega) = -1$.
- Die Singularität erniedrigt also den Grad des kanonischen Divisors um 2, das Geschlecht erniedrigt sich also um 1, was wir zeigen wollten. ■

Definition. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven. Dann definieren wir*

$$\phi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1} \text{ durch } \phi^*\left(\sum f_i dg_i\right) = \sum (\phi^* f_i) d(\phi^* g_i).$$

Da Ω_C ein 1-dimensionaler $\overline{K}(C)$-Vektorraum ist, ist $\phi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1}$ entweder injektiv oder identisch 0. Der folgende Satz gibt die wesentliche Charakterisierung.

Satz. *$\phi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1}$ ist genau dann injektiv, wenn $\phi : C_1 \to C_2$ separabel ist.*

Wir werden diesen Satz nicht beweisen, geben aber ein Beispiel für das wesentliche Phänomen:

Beispiel: Hat K Charakteristik p und ist $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gegeben durch $x \mapsto x^p$ oder $\phi = (1 : x^p)$, so gilt für das Differential $\omega = f(x)dx$:

$$\phi^*\omega = f(x^p)d(x^p) = f(x^p)px^{p-1}dx = 0,$$

also ist $\phi^* : \Omega_{\mathbb{P}^1} \to \Omega_{\mathbb{P}^1}$ in diesem Fall die 0-Abbildung.

Riemann-Hurwitz-Formel: Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein separabler Morphismus und ω eine Differentialform auf C_2. Wir wollen die Divisoren

$$\operatorname{div}(\phi^*\omega) \text{ und } \phi^*(\operatorname{div}(\omega))$$

vergleichen.

- Sei $P \in C_1$ und $Q = \phi(P)$. Sei s uniformisierend in Q, also $\omega = us^m ds$ mit $m = \operatorname{ord}_Q(\omega)$ und einer Einheit u.
- Sei t uniformisierend in P, $e = e_\phi(P)$ der Verzweigungsindex, also $\phi^*(s) = vt^e$ mit einer Einheit v. Dann gibt es auch eine in P definierte Funktion g mit $dv = gdt$.
- Wir betrachten $\phi^*\omega$ in P:
$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \phi^*(us^m)d(\phi^*s) = \phi^*u \cdot v^m \cdot t^{em} \cdot d(vt^e) = \\ &= \phi^*u \cdot v^m \cdot t^{em} \cdot (t^e dv + vd(t^e)) = \phi^*u \cdot v^m \cdot t^{em} \cdot (t^e gdt + evt^{e-1}dt) = \\ &= \phi^*u \cdot v^m \cdot t^{em} \cdot (t^e g + evt^{e-1})dt\end{aligned}$$
Wir haben jetzt zwei Fälle:
1. Fall: $e \neq 0$ in K: Dann gilt
$$\operatorname{ord}_P(\phi^*\omega) = me + e - 1 = e_\phi(P)\operatorname{ord}_Q(\omega) + (e_\phi(P) - 1).$$
2. Fall: $e = 0$ in K: Dann ist
$$\operatorname{ord}_P(\phi^*\omega) > e_\phi(P)\operatorname{ord}_Q(\omega) + (e_\phi(P) - 1).$$
- Seien jetzt alle Verzweigungsindizes $e_\phi(P) \neq 0$ in K. Dann gilt also
$$\operatorname{ord}_P(\phi^*\omega) = e_\phi(P)\operatorname{ord}_{\phi(P)}(\omega) + (e_\phi(P) - 1),$$
und damit
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\phi^*\omega) &= \sum_{P\in C_1} \operatorname{ord}_P(\phi^*\omega)[P] = \\ &= \sum_{P\in C_1} \big(e_\phi(P)\operatorname{ord}_{\phi(P)}(\omega)[P] + (e_\phi(P)-1)[P]\big) = \\ &= \sum_{Q\in C_2}\sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} e_\phi(P)\operatorname{ord}_Q(\omega)[P] + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P] = \\ &= \sum_{Q\in C_2} \operatorname{ord}_Q(\omega)\left(\sum_{P\in\phi^{-1}(Q)} e_\phi(P)[P]\right) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P] = \\ &= \sum_{Q\in C_2}\operatorname{ord}_Q(\omega)\phi^*[Q] + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P] = \\ &= \phi^*(\sum_{Q\in C_2}\operatorname{ord}_Q(\omega)[Q]) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P] = \\ &= \phi^*(\operatorname{div}(\omega)) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P].\end{aligned}$$
- In der letzten Formel berechnen wir noch die Grade und erhalten
$$2g(C_1) - 2 = \operatorname{grad}(\phi)\cdot(2g(C_2)-2) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1).$$

Damit erhalten wir folgenden Satz, der auch als **Riemann-Hurwitz-Formel** bezeichnet wird:

Satz (Riemann-Hurwitz). *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ separabler Morphismus und alle Verzweigungsindizes $e_\phi(P) \neq 0$ in K. Ist ω ein von 0 verschiedenes Differential in C_2, so gilt*
$$\operatorname{div}(\phi^*\omega) = \phi^*(\operatorname{div}(\omega)) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1)[P],$$
woraus sich für die Geschlechter der Kurven ergibt:
$$2g(C_1) - 2 = \operatorname{grad}(\phi)(2g(C_2)-2) + \sum_{P\in C_1}(e_\phi(P)-1).$$
Der Divisor $\sum_{P\in C_1}(e(_\phi(P)-1)[P]$ heißt auch der **Verzweigungsdivisor von** ϕ.