Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 4 (10.5.2024)

Aufgabe 16: Bestimme das n-te Glied der (arithmetischen) Folge

$$4, \quad 8, \quad 10, \quad 13, \quad 20, \quad 34, \quad 58, \quad \ldots$$

und die Summe der ersten n Glieder.

Aufgabe 17: Sei $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ und dazu $G = \mathrm{ggT}(\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\})$.

(1) Zeige, dass gilt

$$G = \mathrm{ggT}(6a, 2b, a+b+c, d).$$

(2) Zeige, dass unter der Voraussetzung $\mathrm{ggT}(a,b,c,d) = 1$ gilt

$$G \in \{1,2,3,6\} \quad \text{und} \quad G = \mathrm{ggT}(6, 2b, a+b+c, d).$$

(3) Zeige, dass für jede Zahl $g \in \{1,2,3,6\}$ ein Polynom $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ existiert mit

$$a \neq 0, \quad \mathrm{ggT}(a,b,c,d) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}) = g.$$

Aufgabe 18: Eine arithmetische Progression der Länge n ist eine Zahlenfolge der Gestalt

$$(a+kd)_{0 \le k \le n-1}, \quad \text{also} \quad a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad \ldots \quad a+(n-1)d$$

mit $a, d \in \mathbb{N}$.
Im Jahr 2008 erschien die Arbeit „The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions“ von Ben Green und Terence Tao (Annals of Mathematics **167** (2008), 481-547), d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$, sodass alle n Zahlen der arithmetischen Progression $(a+kd)_{0 \le k \le n-1}$ Primzahlen sind.

(1) Seien $a, d \in \mathbb{N}$. Zeige: Für jede Primzahl p mit $p \nmid d$ sind unendlich viele Zahlen der arithmetischen Progression $(a+kd)_{k \ge 0}$ durch p teilbar.
(2) Warum gibt es keine unendlich lange arithmetische Progression aus Primzahlen, d.h. keine Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$, sodass alle Zahlen der arithmetischen Progression $(a+kd)_{k \ge 0}$ Primzahlen sind?
(3) Folgere das Ergebnis von Green und Tao aus der (unbewiesenen) Primzahl-k-Tupel-Vermutung.

(Der Dirichletsche Primzahlsatz besagt, dass die arithmetische Progression $(a+kd)_{k \ge 0}$ unendlich viele Primzahlen enthält, wenn $\mathrm{ggT}(a,d) = 1$ gilt.)

Aufgabe 19: In dieser Aufgabe sollen Primzahlfolgen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ betrachtet werden, für die

$$p_{i+1} = 2p_i \pm 1, \text{ d.h. } |p_{i+1} - 2p_i| = 1, \text{ für } 1 \le i \le n-1$$

gilt, beispielsweise $2, 3, 5, 11, 23, 47$.

(1) Zeige: Gilt $p_1 \equiv 1 \bmod 6$, so ist $p_i \equiv 1 \bmod 6$ für $1 \le i \le n$, $p_{i+1} = 2p_i - 1$ für $1 \le i \le n-1$ und

$$p_i = 2^{i-1}p_1 - (2^{i-1} - 1) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

(2) Zeige: Gilt $p_1 \equiv 5 \bmod 6$, so ist $p_i \equiv 5 \bmod 6$ für $1 \le i \le n$, $p_{i+1} = 2p_i + 1$ für $1 \le i \le n-1$ und

$$p_i = 2^{i-1}p_1 + (2^{i-1} - 1) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Datei: anazt_u4.tex. Version vom 9.5.2024

(3) Zeige: Ist $p_1 \equiv \pm 1 \bmod 6$, so gilt $n \leq p_1 - 1$ für die Länge einer solchen Primzahlfolge $p_1, \ldots, p_n$.
(4) Konstruiere Beispiele solcher Primzahlfolgen $p_1, \ldots, p_n$ mit möglichst großer Länge n.

Aufgabe 20: (In dieser Aufgabe darf der Primzahlsatz ($\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$) benutzt werden.)
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mit $a_1 \neq 0$ und

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)_{10}.$$

a ist also die Zahl mit der Dezimaldarstellung $a_1 a_2 \ldots a_k$.

(1) Sei $\ell \geq k$. Zeige, dass die ℓ-stelligen Dezimalzahlen, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beginnt, genau die Zahlen n sind, die folgende Bedingung erfüllen:
$$a \cdot 10^{\ell-k} \leq n \leq a \cdot 10^{\ell-k} + (10^{\ell-k} - 1).$$
(2) Sei $\ell > k$. Zeige, dass es genau dann (mindestens) eine ℓ-stellige Primzahl p gibt, deren Dezimaldarstellung mit den Zifferen $a_1, \ldots, a_k$ beginnt, wenn gilt
$$\pi((a+1) \cdot 10^{\ell-k}) > \pi(a \cdot 10^{\ell-k}).$$
(3) Zeige, dass folgender Grenzwert existiert, und bestimme ihn:
$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{\pi((a+1) \cdot 10^{\ell-k})}{\pi(a \cdot 10^{\ell-k})}.$$
(4) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, deren Dezimaldarstellung mit $a_1 a_2 \ldots a_k$ beginnt.
(5) Bestimme alle 10-stelligen Primzahlen der Gestalt $10052024 * *$ oder $17102024 * *$.