Vorlesung SS22 und WS22: Funktionalanalysis I und II

Hermann Schulz-Baldes[*†]

18. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

[*]Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, D–91058 Erlangen, Germany
[†]e-mail: schuba@mi.uni-erlangen.de, web: www.mi.uni-erlangen.de/∼schuba

Voraussetzungen für das Verständnis dieses Skriptes: Grundwissen in der Analysis und linearen Algebra. Dies beinhaltet insbesondere auch elementare mengentheoretische Topologie und die Lebesgue'sche Integrationstheorie. Jedes Analysisskript enthält all diese Informationen. An wenigen Stellen werden auch etwas tieferliegende Ergebnisse der Topologie und Maßtheorie ohne Beweis erläutert und verwandt.

1 Banachräume

1.1 Definitionen, Beispiele und elementare Eigenschaften

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ immer den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Gegeben sei eine Abbildung $\|.\| : X \to [0,\infty)$. Diese heißt Halbnorm, wenn Sie homogen ist und die Dreiecksungleichung erfüllt, d.h.*

$$\|\lambda x\| \ = \ |\lambda|\|x\| \ , \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ , \qquad \forall x, y \in X \ , \ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{K} \ .$$

Gilt zudem ($\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$) so heißt $\|.\|$ Norm.
Falls letzteres gilt, heißt $(X, \|.\|)$ normierter Vektorraum mit Norm $\|.\|$.

Bemerkung 1.2 Es gibt eine durch die Norm $\|.\|$ induzierte Metrik auf X:

$$d : X \times X \to [0,\infty) \ , \qquad d(x,y) = \|x - y\| \ .$$

Begründung: Tatsächlich gilt Folgendes:

$$\begin{array}{rcll} d(x,y) & = & d(y,x) \qquad \text{(Symmetrie)} & \\ d(x,z) & \leq & d(x,y) + d(y,z) \ , \qquad \forall\ x,y,z \in X & \text{(Dreiecksungleichung)} \\ d(x,x) = 0 & \iff & x = \vec{0} \qquad \text{(nicht entartet)} & \end{array}$$

Also ist $(X, \|.\|)$ auch ein metrischer Raum. □

Somit sind topologische Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit, Cauchyfolgen etc. vorhanden. Insbesondere sei daran erinnert, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in dem normiertem Raum $(X, \|.\|)$ ist, genau dann wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon)$ mit $\|x_n - x_m\| < \epsilon \ \ \forall\ n, m \geq N$. In $\mathbb{K}^n$ gilt: Cauchy-Eigenschaft $\iff$ Konvergenz, im Allgemeinen nicht! Natürlich gilt immer: Konvergenz $\Longrightarrow$ Cauchy-Eigenschaft.

Definition 1.3 (i) *Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig.*
(ii) *Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum.*

In den klassischen Anwendungen der Funktionalanalysis sind die Banachräume oft Funktionenräume. Dabei gibt es zu einem vorgegeben Problem oft sogar mehrere adäquate Funktionsräume, die manchmal sogar genau auf dieses Problem zugeschnitten werden. Die Vollständigkeit ist dann wesentlich, um die Existenz von Lösungen innerhalb dieser Banachräume zu garantieren, meist mit Hilfe eines Fixpunktargumentes. Aus diesen Gründen ist es wichtig ein reichhaltiges Arsenal an Beispielen von Banachräumen vorliegen zu haben. Auch die Handfertigkeit, Banachraumeigenschaften nachzuweisen ist wichtig. Wir untersuchen jetzt detailliert nacheinander vier Standardklassen von Beispielen: Folgenräume, L^p-Räume, die Räume stetiger Funktionen und stetig differenzierbarer Funktionen.

Folgenräume: Für eine Folge $t = (t(\ell))_{\ell\geq 1}$ mit $t(\ell) \in \mathbb{K}$ setze

$$\|t\|_\infty = \sup_{\ell\geq 1} |t(\ell)| \ , \qquad \|t\|_p = (\Sigma_\ell |t(\ell)|^p)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Hierbei $p > 0$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
\ell^\infty &= \{t \,:\, \|t\|_\infty < \infty\} \\
c &= \left\{t \,:\, \lim_\ell t(\ell) \text{ existiert}\right\} \\
c_0 &= \left\{t \,:\, \lim_\ell t(\ell) = 0\right\} \\
\ell^p &= \{t \,:\, \|t\|_p < \infty\} \\
s &= \{t \,:\, \lim_\ell \ell^p |t(\ell)| = 0 \ \ \forall\, p \in \mathbb{N}\} \qquad \text{(Schwartz-Folgen)} \\
d &= \{t \,:\, t(\ell) = 0 \text{ bis auf für endlich viele } \ell\}
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt: $d \subset s \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.
Wir werden zeigen, dass $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$, $(c, \|.\|_\infty)$ und $(c_0, \|.\|_\infty)$ Banachräume sind.
Ebenso ist $(\ell^p, \|.\|_p)$ ein Banachraum für $p \geq 1$ (aber nicht $p < 1$).
Hingegen sind s und d keine Banachräume (s ist noch ein Frechet-Raum).

Nachweis der Banachraum-Eigenschaften für $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$:
Zunächst zur Vektorraumeigenschaft und zur Norm: seien $s, t \in \ell^\infty$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist die Linearkombinantion $s + \lambda t$ komponentenweise definiert, und

$$|(s+\lambda t)(\ell)| = |s(\ell)+\lambda t(\ell)| \leq |s(\ell)|+|\lambda||t(\ell)| \leq \|s\|_\infty+|\lambda|\|t\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad \|s+\lambda t\|_\infty \leq \|s\|_\infty+|\lambda|\|t\|_\infty$$

Somit gilt die Dreiecksungleichung und die Linearkombination ist wieder in ℓ^∞.

Nun zur Vollständigkeit: Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$. Zu zeigen ist: $\exists\, t \in \ell^\infty$ mit $\lim_n \|t_n - t\|_\infty = 0$. Für festes $\ell \in \mathbb{N}$ ist $(t_n(\ell))_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, weil

$$|t_n(\ell) - t_m(\ell)| \leq \|t_n - t_m\|_\infty < \epsilon \qquad \forall\, n, m \geq N(\epsilon)$$

Wegen Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ kann man also setzen:

$$t(\ell) = \lim_n t_n(\ell)$$

Zu zeigen ist: $\|t\|_\infty < \infty$ und $\lim_n \|t - t_n\|_\infty = 0$. Zu $\epsilon > 0$, $N(\epsilon)$ wie oben und ℓ, wähle $M = M(\epsilon, \ell) \geq N(\epsilon)$, sodass

$$|t_n(\ell) - t(\ell)| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq M \geq N.$$

Dann

$$\begin{aligned}
|t_n(\ell) - t(\ell)| &\leq |t_n(\ell) - t_M(\ell)| + |t_M(\ell) - t(\ell)| \\
&\leq \|t_n - t_M\|_\infty + \epsilon \\
&\overset{M\geq N}{\leq} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \qquad \forall\, n \geq N \qquad \text{(unabhängig von } M!).
\end{aligned}$$

Also

$$|t(\ell)| \leq |t(\ell) - t_N(\ell)| + |t_N(\ell)| \leq 2\epsilon + \|t_N\|_\infty < \infty \qquad \forall\, \ell\,.$$

Deswegen $\|t\|_\infty < \infty$ und

$$\|t_n - t\|_\infty \leq 2\epsilon \qquad \forall\, n \geq N = N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_n \|t_n - t\|_\infty = 0.$$

Somit sind alle Eigenschaften eines Banachraumes nachgewiesen. □

Um die Banachraumeigenschaft von c zu zeigen, verwenden wir folgendes allgemeines Prinzip:

Satz 1.4 *Sei U ein abgeschlossener Unterraum vom Banachraum $X \Longrightarrow U$ Banachraum.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in U. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_n x_n \in X$. Da U abgeschlossen ist, folgt $x \in U$. □

Somit braucht man in dieser Situation die Existenz des Grenzwerts nicht mehr (wie oben) nachweisen.

Nachweis Banachraum-Eigenschaften für $(c, \|.\|_\infty)$:
c ist ein Unterraum von ℓ^∞, denn Linearkombinationen konvergenter Folgen sind konvergent. Um die Abgeschlossenheit nachzuweisen, sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in c, d.h. eine Folge konvergenter Folgen. Es gilt: $t_n \to t$ in $(\ell^\infty, \|.\|)$, d.h. $t \in \ell^\infty$.
Zu zeigen: $t \in c$, d.h. t ist konvergent.
Strategie: 3ϵ-Argument. Setze:

$$t_n(\infty) = \lim_\ell t_n(\ell) \quad \text{(existiert, weil } t_n \text{ nach Voraussetzung konvergent)}$$

Es gilt

$$|t_n(\infty) - t_m(\infty)| = |\lim_\ell (t_n - t_m)(\ell)| \leq \|t_n - t_m\|_\infty < \epsilon \quad \text{für} \quad n, m \geq N = N(\epsilon),$$

weil $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Longrightarrow (t_n(\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Also existiert:

$$t(\infty) = \lim_n t_n(\infty)$$

Zu zeigen:

$$\lim_\ell t(\ell) = t(\infty)$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle N so, dass

$$\|t - t_N\|_\infty < \epsilon \quad \text{und} \quad |t(\infty) - t_N(\infty)| < \epsilon.$$

Dann wähle $L = L(\epsilon, N)(\geq N)$ so, dass

$$|t_N(\ell) - t_N(\infty)| < \epsilon \qquad \forall\, \ell \geq L.$$

Also

$$\begin{aligned} |t(\ell) - t(\infty)| &\leq \underbrace{|t(\ell) - t_N(\ell)|}_{\leq \|t - t_N\|_\infty} + |t_N(\ell) - t_N(\infty)| + |t_N(\infty) - t(\infty)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon \qquad \forall\, \ell \geq L(\epsilon). \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig, folgt die Behauptung. □

Nachweis von Banachraum-Eigenschaften von $(c_0, \|.\|_\infty)$**:**
Genauso, nur dass jetzt $t(\infty) = \lim_n t_n(\infty) = \lim_n 0 = 0$ $\square$

Nachweis, dass $(d, \|.\|_\infty)$ und $(s, \|.\|_\infty)$ **keine** Banachräume sind:

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $d \subset s$ definiert durch $t_n(\ell) = \begin{cases} 0 & \ell \geq n \\ \frac{1}{\ell+1} & \ell < n \end{cases}$.

Dann ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$, die gegen $t \in \ell^\infty,\ t(\ell) = \frac{1}{\ell+1}$, konvergiert. Aber nun $t \notin s$ und $t \notin d$. $\square$

Andererseits gilt folgende wichtige Eigenschaft: d und s sind dicht in c_0 (aber nicht in c!).

Begründung: Sei $t \in c_0$. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert N, sodass $|t(n)| < \epsilon \ \ \forall n \geq N$. Setze

$$t_N(\ell) = \begin{cases} t(\ell) & \ell \leq N \\ 0 & \ell > N \end{cases}.$$

Dann ist $t_N \in d$ und $\|t_N - t\|_\infty < \epsilon$. $\square$

Nun zu den ℓ^p-Räumen: Folgende Konvexitätsungleichungen seien bekannt (aus der Analysis, aber der Beweis wird im Prinzip unten beim Studium der L^p-Räume erbracht).

Satz 1.5 *Für Folgen s, t, setze $(st)(\ell) = s(\ell) \cdot t(\ell)$. Sei $1 \leq p, q \leq \infty$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) Hölder-Ungleichung für Folgen:
$$\|st\|_1 \leq \|s\|_p \|t\|_q$$

(ii) Minkowski-Ungleichung für Folgen:
$$\|s + t\|_p \leq \|s\|_p + \|t\|_p$$

Beachte: Im Fall $p = q = 2$ ist dies $\|st\|_1 \leq \|s\|_2 \|t\|_2$, also die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Nachweis der Banachraum-Eigenschaften von $(\ell^p, \|.\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$.

Die Dreieckungleichung entspricht der Minkowski-Ungleichung, die Homogenität $\|\lambda t\|_p = |\lambda| \|t\|_p$ ist auch klar. Wenn $s, t \in \ell^p$, dann folgt mit Letzteren $s + \lambda t \in \ell^p$, also ist ℓ^p ein Vektorraum. Außerdem gilt offensichtlich $\|t\|_p = 0 \Longleftrightarrow t = 0$. Nun zur Vollständigkeit: Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\ell^p, \|.\|_p)$. Für festes ℓ gilt:
$$|t_n(\ell) - t_m(\ell)| \ \leq \ \|t_n - t_m\|_p$$
Also ist $(t_n(\ell))_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Setze

$$t(\ell) = \lim_n t_n(\ell).$$

Zu zeigen: $t \in \ell^p$ und $t_n \to t$ in $(\ell^p, \|.\|_p)$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N = N(\epsilon)$, sodass

$$\|t_n - t_m\|_p \ < \ \epsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

Also auch für endliches L:

$$\left(\sum_{\ell=1}^{L} |t_n(\ell) - t_m(\ell)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ \leq \ \|t_n - t_m\|_p < \epsilon$$

Nun betrachten wir den Limes $m \to \infty$. Da die Summe endlich und alle auftretenden Verknüpfungen stetig sind, folgt:

$$\left(\sum_{\ell=1}^{L} |t_n(\ell) - t(\ell)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

Da dies für alle L gilt, folgt (nach $L \to \infty$)

$$\|t_n - t\|_p \ \leq \ \epsilon \qquad \forall\, n \geq N(\epsilon),$$

also

$$t_n \to t \quad \text{in} \quad (\ell^p, \|.\|_p).$$

Außerdem (wie oben)

$$\|t\|_p \ \leq \ \underbrace{\|t - t_N\|_p}_{<\epsilon} + \underbrace{\|t_N\|_p}_{<\infty} \ < \ \infty \ ,$$

und somit $t \in \ell^p$. □

Nun kommen wir zu der nächsten Klasse von Beispielen, nämlich den L^p-**Räumen** $L^p(\Omega, \mu)$. Wir schränken uns dabei auf den Fall einer meßbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ versehen mit dem Lebesgue Maß ein, obwohl alles *verbatim* auch für einen allgemeinen Maßraum (Ω, μ) gilt. Zunächst eine Reihe von Definitionen. Für messbares $f : \Omega \to \mathbb{K}$, setze

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \mu(d\omega) |f(\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$

$$\|f\|_\infty = \mu\text{-}\mathrm{esssup}\, |f(\omega)| = \inf_{N \subset \Omega, \mu(N)=0} \ \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)| \ .$$

Dann wird eine Äquivalenzrelation eingeführt durch (überprüfe deren Eigenschaften!):

$$\begin{aligned} f \sim g \iff & f = g \qquad \mu\text{-fast sicher} \\ \iff & \exists\, N \subset \Omega,\ \mu(N) = 0 \quad \text{und} \quad f(\omega) = g(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega \backslash N \end{aligned}$$

Letztendlich definiere

$$L^p(\Omega, \mu) = \{[f]_\sim \ : \ \|f\|_p < \infty\} \ , \qquad 1 \leq p \leq \infty \ .$$

Satz 1.6 *Seien $p, q, r \geq 1$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.*
(i) *(Hölder Ungleichung)* $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$
(ii) *(Minkowski Ungleichung)* $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
(iii) *(Riesz-Fischer)* $(L^p(\Omega, \mu), \|.\|_p)$ *Banachraum, d.h. vollständig.*

Beweis: (i) Wir betrachten nur den Fall $r = 1$ (Verallgemeinerung ist dann eine Übung). Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ folgt $f = 0$ bzw. $g = 0$ μ-fast sicher. Dann ist auch $f \cdot g = 0$ μ-fast sicher (wobei "$0 \cdot \infty := 0$") und somit $\mu(|fg|) = 0$ (hier und weiter unten schreiben wir $\mu(f)$ für das Integral von f bez. μ, eine Schreibweise, die betont, dass das Integrieren ein lineares Funktional ist).

Sei also nun $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ mit $p,\, q > 1$. Wegen der Konvexität von $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$ gilt für $a,\, b > 0$ und wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \ = \ \exp\left(\frac{1}{p} p \log(a) + \frac{1}{q} q \log(b) \right) \ \leq \ \frac{1}{p} \exp\left(p \log(a)\right) + \frac{1}{q} \exp\left(q \log(b)\right) \ = \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Die Ungleichung gilt auch für $a=0$ oder $b=0$. Also mit $a=\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}$ und $b=\frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q}$ gilt

$$\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}\frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q} \;\leq\; \frac{1}{p}\frac{|f(\omega)|^p}{\left(\|f\|_p\right)^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(\omega)|^q}{\left(\|g\|_q\right)^q}$$

Nach der Integration bezüglich μ erhält man

$$\frac{\mu(|fg|)}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \;\leq\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \;=\; 1.$$

Für $p=\infty$ und $q=1$ gilt die Ungleichung trivialerweise.

(ii) Zunächst ist $f+g\in L^p$:

$$|f+g|^p \;\leq\; (|f|+|g|)^p \;\leq\; 2^p\max\{|f|^p,\,|g|^p\} \;\leq\; 2^p\left(|f|^p+|g|^p\right),$$

somit

$$\mu\left(|f+g|^p\right)\leq 2^p\mu\left(|f|^p+|g|^p\right)=2^p\left(\mu(|f|^p)+\mu(|g|^p)\right)<\infty\,.$$

Weiter für $p>1$ (für $p=1$ trivial):

$$\begin{aligned}\mu\left(|f+g|^p\right) \;&\leq\; \mu\left(|f|\cdot|f+g|^{p-1}\right)+\mu\left(|g|\cdot|f+g|^{p-1}\right) \qquad \text{mit } q=\frac{p}{p-1}\\ &\leq\; \|f\|_p\,\mu\left(|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\|g\|_p\,\mu\left(|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &=\; \left(\|f\|_p+\|q\|_p\right)\mu\left(|f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Hölder Ungleichung verwandt wurde. Daraus folgt die Bahauptung.

(iii) Für $f,\,g\in L^p$ ist auch $f+\lambda g\in L^p$, da

$$\|f+\lambda g\|_p \;\leq\; \|f\|_p+|\lambda|\,\|g\|_p\,.$$

Außerdem ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm, denn $\|\lambda f\|_p=|\lambda|\,\|f\|_p$, die Dreiecksungleichung ist genau die Minkowski-Ungleichung, und zudem gilt

$$\|f\|_p=0 \quad\Longleftrightarrow\quad f=0 \quad \mu\text{-fast sicher} \quad\Longleftrightarrow\quad [f]_\sim=[0]_\sim=\vec{0}.$$

Nun zur Vollständigkeit: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^p, d.h. $\forall\epsilon>0\;\exists\,N=N(\epsilon)$, sodass

$$\|f_n-f_k\|_p<\epsilon\,,\qquad \forall\,n,k\geq N\,.$$

Wähle eine Teilfolge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\sum_{l\geq 1}\left\|f_{n_{l+1}}-f_{n_l}\right\|_p<\infty$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l\geq 1}|f_{n_{l+1}}-f_{n_l}|\right\|_p \;&=\; \mu\left(\lim_{L\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{L}|f_{n_{l+1}}-f_{n_l}|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x\mapsto x^p \text{ stetig})\\ &=\; \lim_{L\to\infty}\mu\left(\left(\sum_{l=1}^{L}|f_{n_{l+1}}-f_{n_l}|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{monotone Konvergenz})\\ &\leq\; \lim_{L\to\infty}\sum_{l=1}^{L}\left\|f_{n_{l+1}}-f_{n_l}\right\|_p<\infty \qquad (\text{Minkowski}).\end{aligned}$$

Somit ist $F(\omega) = \sum_{l\geq 1} |f_{n_{l+1}}(\omega) - f_{n_l}(\omega)| < \infty$ μ-fast sicher in ω. Also existiert

$$f \;=\; f_{n_1} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\right)$$

μ-fast sicher. Es gilt

$$\|f\|_p \leq \||f_{n_1}| + F\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|F\|_p < \infty \;,$$

also $f \in L^p$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \mu\left(|f_n - f|^p\right) = \mu\left(\liminf_l |f_n - f_{n_l}|^p\right) \\
&\leq \liminf_l \mu\left(|f_n - f_{n_l}|^p\right) \qquad \text{(Fatou)} \\
&\leq \sup_{m\geq n} \|f_n - f_m\|_p^p \longrightarrow 0 \;, \qquad \text{für } n \to \infty \;,
\end{aligned}$$

Letzteres weil eine Cauchy-Folge vorliegt. □

Nun betrachten wir ein weitere Klasse von Banachräumen, nämlich Räumen von **stetigen Funktionen**. Hierzu sei (Ω, d) ein lokalkompakter metrischer Raum (für den unten betrachteten Fall $C_b(\Omega)$ ist es ausreichend einen topologischer Raum vorliegen zu haben). Ein konkretes Beispiel ist wieder eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ versehen mit der Unterraumtopologie. Definiere:

$$\begin{aligned}
C_b(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ stetig und beschränkt}\} \\
C_0(\Omega) &= \left\{f \text{ stetig und } \lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0\right\} \\
C_K(\Omega) &= \{f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}
\end{aligned}$$

Hierbei ist ∞ der Punkt der Alexandroff'schen Einpunktkompaktifizierung. Dann definiere

$$\|f\| \;=\; \sup_{\omega} |f(\omega)| \;.$$

Dann sind $(C_b(\Omega), \|.\|)$ und $(C_0(\Omega), \|.\|)$ Banachräume. Hingegen ist $C_K(\Omega)$ nicht abgeschlossen.

Bemerkung 1.7 Falls μ ein Maß auf Ω ist, dann sind $C_b(\Omega)$ und $C_0(\Omega)$ abgeschlossene Unterräume von $L^\infty(\Omega, \mu)$. Auf $C_b(\Omega)$ gilt μ - esssup = sup und auf $C_0(\Omega)$ gilt μ - esssup = max.

Nachweis der Banachraumeigenschaft von $(C_b(\Omega), \|.\|_\infty)$: Zunächst ist

$$(\mathcal{L}^\infty(\Omega), \|.\|_\infty) \;=\; \left(\{f : \Omega \to \mathbb{K} \;:\; \|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| < \infty\}, \|.\|_\infty\right)$$

ein Banachraum. Der Beweis ist genau wie bei ℓ^∞, d.h. die Dreiecksungleichung und Nichtentartung gelten und Limesfunktionen können durch punktweise Limites definiert werden. (Alternative, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: $L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, der im Fogenden genauso genutzt werden kann.) Offensichtlich ist $C_b(\Omega)$ Unterraum von $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Wir zeigen, dass $C_b(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum ist und schließen dann mit Satz 1.4. Hierzu müssen wir zeigen, dass uniforme Limiten stetiger Funktionen wieder stetig sind (dies wurde meist schon in der Analysis überprüft, wird aber hier wiederholt). Wiederum verwendet man ein 3ϵ Argument. Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge. Setze dann $f(\omega) = \lim_n f_n(\omega)$. Ist f tatsächlich stetig? Zu $\epsilon > 0$ sei $N = N(\epsilon)$, sodass

$$\|f_n - f\|_\infty < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

Sei $\omega \in \Omega$. Da f_N stetig bei ω, existiert $\delta > 0$ mit

$$d(\omega, \omega') < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f_N(\omega') - f_N(\omega)| < \epsilon$$

Also:

$$\begin{aligned} |f(\omega) - f(\omega')| &\leq |f(\omega) - f_N(\omega)| + |f_N(\omega) - f_N(\omega')| + |f_N(\omega') - f(\omega')| \\ &\leq \|f - f_N\|_\infty + \epsilon + \|f - f_N\|_\infty \;\leq\; 3\epsilon, \end{aligned}$$

d.h. f ist stetig bei ω. $\square$

Jetzt zur Banachraumeigenschaft von $C_0(\Omega)$: Hierzu sei an folgende Äquivalenz erinnert (dies ist eigentlich die Definition): $\lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\; \exists$ kompaktes K mit $|f(\omega)| < \epsilon \quad \forall\, \omega \in \Omega \backslash K$. Dann folgt die Abgeschlossenheit z.B. durch ein weiteres 3ϵ-Argument (Übung). $\square$

Nun skizzieren wir kurz den Zusammenhang zwischen den Räumen stetigen Funktionen und den L^p-Räumen. Wir wählen eine allgemeine Formulierung, um aufzuzeigen, was der natürliche Rahmen ist und auch um einige Vokabeln vorzustellen.

Satz 1.8 *Sei Ω ein polnischer Raum und μ ein Borel-Maß darauf. Für $p \in [1, \infty)$ ist $C_K(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega, \mu)$. Falls Ω kompakt ist, gilt dies auch für $p = \infty$.*

Skizze der Begründung: Zunächst sei erläutert, dass ein topologischer Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ polnisch heißt, genau dann wenn er vollständig metrisierbar ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt. Dies impliziert, dass Ω ein normaler Raum ist (mit Trennungsaxiomen T_1 und T_4) und somit, dass es sehr viele stetige Funktionen gibt, sogenannte Urysohn-Funktion (gleich mehr dazu). Sei nun μ ein Borel-Maß, d.h. per Definition, dass es auf der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$ definiert ist und zudem, dass μ-lokal-endlich ist ($\exists$ immer Umgebungen endlichen Maßes). Wesentlich ist nun der folgende Sachverhalt aus der Maßtheorie: Borel-Maße auf polnischen Räumen sind regulär, d.h. $\forall A \in \mathcal{B}$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) \,:\, K \subset A \text{ kompakt}\} \quad \text{von innen regulär} \quad , \\ &= \inf\{\mu(U) \,:\, U \supset A \text{ offen}\} \quad \text{von außen regulär} \quad . \end{aligned}$$

Des Weiteren sei daran erinnert, dass die Elementarfunktionen dicht in den integrierbaren Funktionen liegen und ebenso in $L^p(\Omega, \mu), p < \infty$. Hierbei sind Elementarfunktionen endliche Linearkombinantionen aus charakteristischen Funktionen χ_A auf Borel-Mengen $A \in \mathcal{B}$ endlichen Maßes. Es reicht also zu überprüfen, dass jedes solche χ_A durch stetige Funktionen in der L^p-Norm beliebig gut approximiert werden kann.

Hierfür verwendet man jetzt Urysohn-Funktionen. Zu $\epsilon > 0$, wähle zunächst $K \subset A \subset U$ mit

$$\mu(U \backslash K) < \epsilon.$$

Dann existiert eine **stetige** Urysohn-Funktion f mit $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ (da $K \cap U^c = \emptyset$ und somit K und U^c abgeschlossene disjunkte Mengen sind, die durch eine Urysohn-Funktion getrennt werden können). Mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung gilt jetzt

$$\begin{aligned} \|f - \chi_A\|_p &\leq \|f - \chi_K\|_p + \|\chi_K - \chi_A\|_p \\ &\leq \|\chi_U - \chi_K\|_p + \|\chi_U - \chi_K\|_p \;\leq\; 2\,\mu(U\backslash K)^{\frac{1}{p}} \;<\; 2\,\epsilon^{\frac{1}{p}} \;, \end{aligned}$$

was schon das Argument vollendet. $\square$

Achtung! $C_0(\mathbb{R}^d) \not\subset L^p(\mathbb{R}^d)$, und $C_K(\Omega)$ ist nicht dicht in $L^\infty(\Omega,\mu)$ (es sei denn, Ω ist kompakt).

Die letzte Klasse von hier vorgestellten Banachräumen enthalten die **differenzierbaren Funktionen**. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, und sei $r \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet $C^r(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$, die r-mal stetig differenzierbar sind und deren Ableitungen stetig auf den Abschluß $\overline{\Omega}$ fortsetztbar sind. Dann definiere

$$\|f\|_r \;=\; \max_{|\alpha|\le r}\{\|\partial^\alpha f\|_\infty\} \;.$$

Hier tritt ein leider nur schwer vermeidbarer Notationskonflikt mit den L^p-Normen auf, aber aus dem Zusammenhang sollte immer klar sein, welche Norm gerade verwandt wird.

Nachweis der Banachraumeigenschaften von $(C^r(\overline{\Omega}), \|.\|_r)$**:** Sei $(f_n)_{n\ge1}$ eine Cauchy-Folge bez. $\|.\|_r$, dann ist $(\partial^\alpha f_n)_n$ Cauchy-Folge bez. $\|.\|_\infty \forall\ \alpha$. Wegen der Vollständigkeit von $(C(\overline{\Omega}), \|.\|_\infty)$ existieren für alle α Limiten $g^{(\alpha)}$. Zudem gilt $g^{(\alpha)} = \partial^\alpha f$ wobei $f = \lim_n f_n$. Um Letzteres zu zeigen, schränken wir uns auf den **Spezialfall** $d = 1,\ \alpha = 1$ ein, denn alles weitere ist dann analog zu erledigen. Zu zeigen ist also, dass $f_n \to f$ und $f_n' \to g$ impliziert $f' = g$. Für festes $y \in \Omega$ setze: $F_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}$, was für jedes feste n eine stetige Funktion ist. Nach dem Mittelwertsatz für $f_n - f_m$ gilt:

$$|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \le \|f_n' - f_m'\|_\infty |x-y| \;,$$

und somit

$$|F_n(x) - F_m(x)| \le \|f_n' - f_m'\|_\infty \;.$$

Da $(f_n')_{n\ge1}$ eine Cauchy-Folge bez. $\|.\|_\infty$ ist, folgt, dass $(F_n)_{n\ge1}$ also auch eine Cauchy-Folge bez. $\|.\|_\infty$ ist. Nun sind ja uniforme Limiten von stetigen Funktionen wieder stetig, also

$$\lim_n \lim_{y\to x} F_n(x) = \lim_{y\to x} \lim_n F_n(x),$$

d.h. $g(y) = \lim_n f_n'(y) = \lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y)$. Zusammenfassend gilt also $f_n \to f$ in $\|.\|_r$ mit einem $f \in C_r(\overline{\Omega})$. □

Bemerkung 1.9 Es gibt auf $C_r(\overline{\Omega})$ auch noch eine zweite natürliche Norm, nämlich

$$|||f|||_r = \sum_{|\alpha|\le r} \|\partial^\alpha f\|_\infty \;.$$

Es gilt:

$$\|f\|_r \le |||f|||_r \le \left(\sum_{s=0}^r C_s\right) \|f\|_r$$

(C_s = Schranke an die Anzahl der partiellen Ableitungen vom Grad s). Dies besagt, dass für die Normen $\|.\|_r$ und $|||.|||_r$ Folgendes gilt.

Definition 1.10 *Zwei Normen $\|.\|$ und $|||.|||$ auf Vektorraum X heißen äquivalent* $\Longleftrightarrow\ \exists\ M \ge m > 0$ *mit*

$$m\|x\| \le |||x||| \le M\|x\| \;, \qquad \forall\ x \in X \;.$$

Satz 1.11 *$\|.\|$ und $|||.|||$ äquivalent $\Longleftrightarrow$ $\|.\|$-Nullfolgen sind $|||.|||$-Nullfolgen und umgekehrt.*

Beweis: "$\Longrightarrow$" offensichtlich.

"$\Longleftarrow$" Gegenannahme: es existiert kein M, d.h. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n$ mit $|\!|\!| x_n |\!|\!| > n\|x_n\|$. Setze:

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}\ .$$

Dann $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, d.h. y_n Nullfolge bez. $\|.\|$. Aber $|\!|\!| y_n |\!|\!| > 1$, also keine Nullfolge bez. $|\!|\!| . |\!|\!|$. □

Korollar 1.12 *Seien* $\|.\|$ *und* $|\!|\!| . |\!|\!|$ *äquivalente Normen auf* X*.*
$\Longrightarrow (X, \|.\|)$ *und* $(X, |\!|\!| . |\!|\!|)$ *entweder beide vollständig oder beide nicht vollständig.*

Begründung: Begriffe von Cauchy-Folgen und konvergenten Folgen fallen jeweils zusammen. □

Also: $(C^r(\overline{\Omega}), |\!|\!| . |\!|\!|_r)$ ist ein Banachraum. (Das hätten wir hier auch direkt zeigen können.)

Bemerkung 1.13 Der Wechsel zu einer äquivalenten Norm kann bei der Anwendung von Fixpunktsätzen sehr hilfreich sein! Es sei auch daran erinnert, dass in allen endlich dimensionalen Banachräumen (also im $\mathbb{K}^d$) alle Normen äquivalent sind.

Wenn ein Vektorraum kein Banachraum ist, aber Unterraum eines anderen Banachraumes ist, so kann man einen Banachraum durch Abschluß erhalten.

Satz 1.14 $(X, \|.\|)$ *Banachraum,* U *Unterraum von* X*.*
$\Longrightarrow \overline{U} = \overline{U}^{\|.\|} = \{x = \lim_n x_n\ :\ (x_n)$ *konvergent bez.* $\|.\|, x_n \in U\}$ *Banachraum*

Begründung: Wegen Satz 1.4 ist nur zu zeigen, dass $\overline{U}$ ein Unterraum ist. Seien $x, y \in \overline{U}$, dann existieren $x_n \to x,\ y_n \to y,\ x_n, y_n \in U$. Weil

$$\|x_n + \lambda y_n - (x + \lambda y)\| \ \leq\ \|x_n - x\| + |\lambda|\|y_n - y\| \ \to\ 0\ ,$$

gilt dann $x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y$, also $x + \lambda y \in \overline{U}$. □

Wir haben schon viele Beispiele angetroffen, die zeigen, dass der Abschluss sehr groß sein kann (evtl. zu groß in einer gegebenen Anwendung, sodass man dann nach anderen Normen suchen muß).

Beispiele 1.15

1. Bei Folgenräumen gilt: $\overline{d}^{\|.\|_\infty} = \overline{s}^{\|.\|_\infty} = c_0$
2. Bei stetigen Funktion auf einem lokalkompakten Ω gilt: $\overline{C_K(\Omega)}^{\|.\|_\infty} = C_0(\Omega)$
3. Wenn Ω polnisch ist und μ ein Borelmaß darauf, dann $\overline{C_K(\Omega)}^{\|.\|_p} = L^p(\Omega, \mu),\ 1 \leq p < \infty$.
4. Es gilt sogar: $\overline{C_K^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|.\|_p} = L^p(\Omega, \mu),\ 1 \leq p < \infty$.
5. Nach dem Satz von Weierstraß sind die Polynome auf einem endlichen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ dicht in den stetigen Funktionen $C(I)$, also auch in $L^p(I)$ (jeweils versehen mit ihren Normen).

Falls ein nicht vollständiger Vektorraum nicht Unteraum eines geeigneten Banachraumes ist (z.B. weil der Abschluß darin zu groß ist), so gibt es immer die Möglichkeit der **Vervollständigung** von $(X, \|.\|)$ zu $(\hat{X}, |\!|\!| . |\!|\!|)$. Diese Konstruktion kann in der Tat für jeden metrischen Raum durchgeführt werden, d.h. die Vektorraumstruktur ist hierfür irrelevant. Ein vielleicht schon bekanntes Beispiel ist der Übergang von $(\mathbb{Q}, |.|)$ zu $(\mathbb{R}, |.|)$, wobei Letzteres dann als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen definiert wird. Im Prinzip wird jetzt genau das gleiche Rezept verwandt.

Also sei ein normierter Raum $(X, \|.\|)$ gegeben. Seien $(x_n) = (x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n) = (y_n)_{n\geq 1}$ Cauchy-Folgen bez. $\|.\|$. Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchy-Folgen (überprüfe die Axiome!)

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_n \|x_n - y_n\| = 0.$$

Setze

$$\hat{X} \;=\; \{[(x_n)]_\sim \,:\, (x_n) \text{ Cauchy-Folge}\}.$$

Eine Einbettung von X in $\hat{X}$ ist gegeben durch die Klassen konstanter Folgen.

Nun ist $\hat{X}$ ein Vektorraum wenn Summen und Skalarmultiplikation Term für Term definiert werden. In der Tat, Summen von Cauchy-Folgen sind wieder Cauchy-Folgen sodass die Addition $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$ in $\hat{X}$ Sinn macht und Summen äquivalenter Cauchy-Folgen sind wieder äquivalent:

$$(x_n) \sim (x'_n) \quad , \quad (y_n) \sim (y'_n) \qquad \Longrightarrow \qquad (x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)\ .$$

Auch die Skalarmultiplikation ist unabhängig von Wahl der Repräsentanten. Nun definere eine Norm $|\!|\!|.|\!|\!|$ auf $\hat{X}$ durch

$$|\!|\!|[(x_n)]|\!|\!| := \lim_n \|x_n\|.$$

Diese Definition ist möglich, denn $\|x_n\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m\|$ impliziert $|\,\|x_n\| - \|x_m\|\,| \leq \|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N(\epsilon)$, sodass $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ konvergent ist. (Übung: Unabhängigkeit von $|\!|\!|.|\!|\!|$ von der Wahl des Repräsentanten und Normeigenschaften).

Behauptung: X dicht in $(\hat{X}, |\!|\!|.|\!|\!|)$

Begründung: $(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchyfolge in X, d.h. $[(x_n)] \in \hat{X}$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $N(\epsilon)$ mit $\|x_n - x_m\| < \epsilon \;\; \forall\, n, m \geq N(\epsilon)$. Dann erfüllt die konstante Folge $(x_{N(\epsilon)}) \hat{=} x_{N(\epsilon)} \in X$ Folgendes

$$|\!|\!|[(x_{N(\epsilon)})] - [(x_n)]|\!|\!| = \lim_n \|x_{N(\epsilon)} - x_n\| < \epsilon\ ,$$

was die Dichtheit zeigt.

Behauptung: $(\hat{X}, |\!|\!|.|\!|\!|)$ vollständig

Begründung (konstruktiv): Sei $(\hat{x}_k)_{k\geq 1}$ Cauchyfolge in $\hat{X}$ bez. $|\!|\!|.|\!|\!|$. Da X dicht in $\hat{X}$ ist, wähle für jedes k ein $y_k \in X$ mit

$$|\!|\!|[(y_k)] - \hat{x}_k|\!|\!| < \frac{1}{k}.$$

Dann ist $(y_k)_{k\geq 1}$ Cauchy-Folge in X, da

$$\begin{aligned}
\|y_k - y_\ell\| &= |\!|\!|[(y_k)] - [(y_\ell)]|\!|\!| \\
&\leq |\!|\!|[(y_k)] - \hat{x}_k|\!|\!| + |\!|\!|\hat{x}_k - \hat{x}_\ell|\!|\!| + |\!|\!|\hat{x}_\ell - [(y_\ell)]|\!|\!| \\
&\leq \frac{1}{k} + \epsilon + \frac{1}{\ell} \quad \text{für} \quad k, \ell \geq N = N(\epsilon).
\end{aligned}$$

Setze $\hat{x} = [(y_k)_{k\in\mathbb{N}}] \in \hat{X}$. Dann ist $\hat{x} \neq [(y_k)_{n\geq 1}] \in \hat{X}$. Es gilt $\hat{x}_k \to \hat{x}$ in $(\hat{X}, |\!|\!|.|\!|\!|)$, weil

$$\begin{aligned}
|\!|\!|\hat{x} - \hat{x}_k|\!|\!| &\leq |\!|\!|\hat{x} - [(y_k)_{n\geq 1}]|\!|\!| + |\!|\!|[(y_k)_{n\geq 1}] - \hat{x}_k|\!|\!| \\
&\leq \sup_{l\geq k} \|y_l - y_k\| + \frac{1}{k} \quad \to \quad 0\ .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir aus einem normierten Raum $(X, \|.\|)$ einen Banachraum $(\hat{X}, |\!|\!|.|\!|\!|)$ konstruiert und der nächste Satz zeigt, dass diese Konstruktion minimal und eindeutig ist.

Satz 1.16 *Die Vervollständigung* $(\hat{X}, |||.|||)$ *von einem normierten Vektorraum* $(X, \|.\|)$ *ist bis auf eine isometrische Isomorphie (lineare Bijektion) eindeutig. Insbesondere, wenn* U *Unterraum eines Banachraumes* $(X, \|.\|)$ *ist, gilt:*

$$(\hat{U}\,, |||.|||) \cong (\overline{U}^{\|.\|}, \|.\|)$$

Begründung: $\hat{X}$ ist minimal, d.h. wenn $(Y, \|.\|_Y)$ vollständig ist und $X \subset Y$ sowie $\|x\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$, dann gilt $\hat{X} \subset Y$ mit isometrischer Einbettung, weil jede (Äquivalenzklasse von) Cauchyfolge(n) in Y ja gegen einen Punkt konvergiert, erhält man eine isometrische Einbettung $\hat{X} \ni [(x_n)] \hookrightarrow y = \lim x_n \in Y$, wobei die Isometrie aus

$$|||[x_n]||| = \lim_n \|x_n\| = \|y\|_Y$$

folgt. Hätte man also zwei minimale Vervollständigungen $\hat{X}$ und $\hat{X}'$, würde gelten $\hat{X} \subset \hat{X}'$ und $\hat{X}' \subset \hat{X}$, d.h. $\hat{X} \cong \hat{X}'$. Mehr Details finden Sie in [Gro]. □

Eine **Problematik der Vervollständigung** ist, dass man oft nicht viel Explizites über $\hat{X}$ weiß. Insbesondere, wenn $(X, \|.\|)$ ein Funktionenraum ist, dann weiß man dies a priori **nicht** für $(\hat{X}, |||.|||)$. Wenn verwandt in einem Fixpunktsatz, weiß man also nicht, "was für Lösungen" konstruiert wurden.

Beispiele 1.17

1. Auf $C_K(\mathbb{R})$ definiere $\|.\|_p$ durch das Riemann-Integral. Dann ist Vervollständigung von $C_K(\mathbb{R})$ bez. $\|.\|_p$ der Raum $(L^p(\mathbb{R}, \mu), \|.\|_p)$, ohne dass man je über Maßtheorie geredet hat! Aber man weiß *a priori* wenig über dieses $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ und natürlich ist die explizite Konstruktion besser.

2. Dennoch ist es in manchen Situationen gut, den Abschluß bez. einer dem Problem angemessenen Norm zu betrachten, und dann in einem zweiten Schritt mehr über diesen Abschluß auszusagen. Hier ein prominentes und später im Detail studiertes Beispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Für $f \in C^k(\Omega)$ definiere

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der Abschuß von $C^k(\Omega)$ bez. $\|.\|_{k,p}$ ist der sogenannte Sobolev-Raum $W^{k,p}$. Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$, weil dann Hilberträume vorliegen. Oft wird dann die spezielle Notation $W^{k,2} = H^k$ verwandt (allerdings werden mit H^k auch die Hardy-Räume bezeichnet). Dann gilt das Sobolev Lemma: Sobolev Räume ausreichend hohen Grades haben wieder stetig differenzierbare Repräsentanten.

Nun sollen weitere Grundbegriffe eingeführt werden, zunächst rein topologischer Natur.

Definition 1.18 $(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum*

(i) X *separabel* $\Longleftrightarrow \exists$ *abzählbare dichte Teilmenge* ($D \subset X$ *mit* $\overline{D} = X$)

(ii) X *erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom* $\Longleftrightarrow$ *jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis (nach Definition enthält jede Umgebung ein Element der Umgebungsbasis)*

(iii) X *erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom* $\Longleftrightarrow$ *Topologie hat abzählbare Basis (nach Definition ist jede offene Menge Vereinigung von Basiselementen)*

Bemerkungen 1.19 1. Wenn (X,d) metrisch ist, dann bildet $\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)_{n\geq 1}$ eine Umgebungsbasis von x, wobei $B_\delta(x) = \{y : d(x,y) < \delta\}$ die Kugel mit Radius δ um x ist. Somit erfüllt (X,d) das erste Abzählbarkeitsaxiom.

2. $(X,\mathcal{O})$ erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom $\Longrightarrow$ X separabel (Umkehrung falsch!)
   Begründung: Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Basis der Topologie. Wähle jeweils ein $a_n \in A_n$ aus. Dies liefert eine dichte Teilmenge $D = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, denn wenn U_x eine beliebige Umgebung eines beliebigen Punktes x ist, so existiert ein $A_n \subset U_x$ und somit ein $a_n \in U_x$.

Satz 1.20 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt folgende Äquivalenz:*
X separabel $\Longleftrightarrow$ zweites Abzählbarkeitsaxiom

Begründung: "$\Longrightarrow$" Basis $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in D, n \in \mathbb{N}\}$ wobei $D \subset X$ dicht und abzählbar ist.
"$\Longleftarrow$" obige Bemerkung. □

Satz 1.21 *Sei $(X,\|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann gilt folgende Äquivalenz:*
X separabel $\Longleftrightarrow$ $\exists$ abzählbare Menge $B \subset X$ mit $\overline{\operatorname{span}(B)}^{\|.\|} = X$
Hier besteht $\operatorname{span}(B)$ *aus endlichen Linearkombinationen von Elementen aus B.*

Beweis: "$\Longrightarrow$" klar, denn D ist abzählbar und dicht $\Longrightarrow D \subset \operatorname{span}(D) \Longrightarrow \overline{\operatorname{span}(D)} = X$.

"$\Longleftarrow$" Setze, im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; : \; n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, x_i \in B \right\} ,$$

und falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nur $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Offensichtlich ist D abzählbar.
Behauptung: D ist dicht.
In der Tat, sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Zu zeigen ist: $\exists\, y \in D$ mit $\|x-y\| < \epsilon$. Nach Voraussetzung, wählen wir $(\xi_i)_{i=1,\dots,n}$ mit $\xi_i \in \mathbb{K}$ und $x_i \in B$ sodass $\|x - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i\| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann wähle $\lambda_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ mit

$$|\lambda_i - \xi_i| \; < \; \frac{\epsilon}{2\sum_{i=1}^n \|x_i\|} \; .$$

Dann gilt für $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in D$

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \; &\leq \; \left\| x - \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\xi_i - \lambda_i) x_i \right\| \\ &< \; \frac{\epsilon}{2} + \max |\xi_i - \lambda_i| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \; < \; \epsilon \; , \end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

Bemerkung 1.22 Man darf sich B als Basis vorstellen, muss *aber* beachten, dass $\operatorname{span}(B)$ nur endliche Linearkombinationen enthält und somit immer noch der Abschluss notwendig ist (es sei denn, X ist endlichdimensional).

Definition 1.23 *$(b_n)_{n\geq 1}$ heißt Schauder-Basis von $(X, \|.\|)$*
$\iff$ jedes $x \in X$ lässt sich **eindeutig** *als* **konvergente** *Reihe $x = \sum_{n\geq 1} \lambda_n b_n$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$ darstellen, d.h.*

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n b_n\| \;=\; 0\;.$$

Bemerkung 1.24 Dann ist X offensichtlich separabel (wegen der Konvergenz). Umkehrung falsch! Viele separable Räume haben keine abzählbare Basis (Beispiel siehe unten).

Beispiele 1.25

1. $(\ell^p, \|.\|_p)$ ist separabel, wenn $1 \leq p < \infty$. Weiter sei $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ der Vektor mit Eintrag 1 an der $n$ten Stelle und sonst 0. Dann ist $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Schauder-Basis, weil
$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \xrightarrow{\ell^p} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\;, \qquad \text{d.h. konvergente Reihe}\;,$$
da
$$\lim_N \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n e_n \right\|_p \;=\; 0\;.$$

2. Ähnlich: c_0 und c sind separabel bez. $\|.\|_\infty$ (Beim Nachweis im Falle von c, addiere das Element $f = (1, 1, 1, \ldots) \in c$ zu der Menge B.)

3. $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ ist **nicht** separabel.

   In der Tat, obiges Argument klappt nicht, weil die Reihe nicht in $\|.\|_\infty$ konvergiert, also $(e_n)_{n\geq 1}$ keine Schauder-Basis von $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ ist. Sei $\chi_M \in \ell^\infty$ Indikatorfunktion auf $M \subset \mathbb{N}$. Dann ist $\Delta = \{\chi_M \,:\, M \subset \mathbb{N}\}$ überabzählbar (Cantor's Theorem, siehe unten), und $\|\chi_M - \chi_{M'}\|_\infty = 1$ für $M \neq M'$. Sei nun $D \subset \ell^\infty$ abzählbar $\Longrightarrow$ für jedes $x \in D$ enthält $\{y \,:\, \|x - y\| < \frac{1}{2}\}$ höchstens ein χ_M. Also ist D nicht dicht in ℓ^∞.

   Cantor's Theorem: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

   Beweis: Nehme das Gegenteil an, d.h. es existiert surjektives $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachte Cantor's Diagonalmenge $D = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \notin f(n)\}$. Da f surjektiv ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = D$. Aber dann gilt $m \in D \iff m \notin f(m) = D$, was ein Widerspruch ist.

4. Genauso ist $L^\infty(\Omega, \mu)$ nicht separabel, wenn $\#\Omega = \infty$.

5. $a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow C([a, b])$ separabel

   Begründung: Der Weierstraß'scher Approximationssatz besagt, dass die Menge der Polynome dicht in $(C([a, b]), \|.\|_\infty)$ liegen. Setze dann $B = \{b_n(x) = x^n \,:\, n \geq 0\}$. Eine alternative Wahl ist (dies basiert auf der diskreten Fourier-Transformation bzw. den Eigenschaften der Tchebychev Polynomen): $B = \left\{e_n(x) = \exp\left(2\pi i n \frac{x}{b-a}\right) \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

   Aber: $(e_n)_{n\geq 0}$ ist keine Schauder-Basis (Oszillationen am Rand: Gibbs-Phänomen!)

   Selbst wenn man $C(\mathbb{S}^1)$ wählt, sodass keine Ränder vorliegen, bildet $(e_n)_{n\geq 1}$ keine Schauder-Basis (siehe Katznelson, *Harmonic Analysis*, S. 48).

6. Verallgemeinerung obigen Beispiels: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, dann ist $C_0(\Omega)$ separabel

   Begründung: Wie oben mit Stone-Weierstraß für kompakte Teilmengen, denn $B = \{x^n \,:\, n \in \mathbb{N}^d\}$ trennt Punkte.

7. Noch eine andere Verallgemeinerung für einen kompakten topologischer Raum Ω:
   $C(\Omega)$ separabel $\Longleftrightarrow$ Ω metrisierbar
   Dies ist im Sinne der nicht-kommutativen Topologie bei der topologische Eigenschaften des Raumes Ω durch Eigenschaften der stetigen Funktionen darauf charakterisiert werden.

8. $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ \mu$ Borel-Maß $\Longrightarrow L^p(\Omega, \mu)$ separabel $1 \leq p < \infty$
   Begründung: $C_K(\Omega)$ ist dicht und separabel.

Nun zu einem Satz, der etliche weitere Definitionen motiviert (kompakte Operatoren und schwache Konvergenz insbesondere).

Satz 1.26 $(X, \|.\|)$ *normierter Raum. Äquivalent sind:*

(i) $\dim(X) < \infty$ *(d.h. es gibt endliche Basis)*

(ii) Einheitskugel $B_X = \{x \in X\ :\ \|x\| \leq 1\}$ *ist kompakt.*

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Alle Normen sind äquivalent, dann schließe mit Heine-Borel.

Für die (interessantere) Umkehrung benötigt man die Existenz von "fast orthogonalen Vektoren" in Banachräumen (natürlich hat man ohne Skalarprodukt strikt gesprochen den Begriff der Orthogonalität nicht zur Verfügung), gemäß folgendem Lemma:

Lemma 1.27 *(F. Riesz 1918, für stetige Funktionen)*
$(X, \|.\|)$ *normiert,* $0 < \delta < 1$, $U \neq X$ *abgeschlossener Unterraum*
$\Longrightarrow\ \exists\ x_\delta \in X, \|x_\delta\| = 1$ *und* $\|x_\delta - u\| > 1 - \delta\ \forall\ u \in U$

Beweis: Sei $x \in X \backslash U$. Setze $d = \inf\{\|x - u\|\ :\ u \in U\}$. Dann ist $d > 0$ (sonst existiert Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ in U mit $\|x - u_n\| \to 0$ und somit $x \in U$, weil U abgeschlossen. Somit $\exists\ u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$ (beachte $\frac{d}{1-\delta} > d$). Nun setzte $x_\delta = \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}$. Dann $\|x_\delta\| = 1$ und

$$
\begin{aligned}
\|x_\delta - u\| &= \left\| \frac{x}{\|x - u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x - u_\delta\|} - u \right\| \\
&= \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \underbrace{\|x - \underbrace{(u_\delta + u\|x - u_\delta\|)}_{\in U}\|}_{\geq d} \\
&\geq \frac{d}{\|x - u_\delta\|} > 1 - \delta\ ,
\end{aligned}
$$

was das Lemma beweist. □

Beweis von Satz 1.26 (ii) $\Longrightarrow$ (i): Es gilt die Überdeckung $B_X \subset \bigcup_{x \in B_X} B_{\frac{1}{2}}(x)$. Nach Kompaktheit gibt es dann eine endliche Teilüberdeckung $\Longrightarrow B_X \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{1}{2}}(x_i)$. Somit $X = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, weil sonst wäre $U = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein abgeschlossener Unterraum mit $U \neq X$ und nach Lemma 1.27 würde ein $x \in B_X$ existieren mit $\|x - x_i\| > 1 - \delta > \frac{1}{2}$. Also gilt $\dim(X) \leq n < \infty$. □

Der nächste Themenbereich betrifft die **Konstruktion neuer Banachräume** aus vorgegebenen. Wir werden dabei nacheinander auf Quotienten, Summen und Tensorprodukte eingehen. Sei also $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Für eine Teilmenge $A \subset X$ setze

$$
d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|\ , \qquad x \in X\ .
$$

Es gilt: $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$

Satz 1.28 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum und U Unterraum von X. Definiere*

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in U$$

und

$$[x] \ = \ [x]_\sim = x + U \ ,$$

sowie

$$X/U \ = \ \{[x] \ : \ x \in X\}$$

Dies wird zu einem Vektorraum mit $[x] + \lambda[y] = [x + \lambda y]$. Zuletzt setze

$$\|[x]\|_\sim = d(x, U)$$

Dann gilt:

(i) $\|.\|_\sim$ *Halbnorm auf X/U.*

(ii) $U = \overline{U}$ *abgeschlossen* $\Longrightarrow \|.\|_\sim$ *Norm auf X/U*

(iii) X *vollständig,* $U = \overline{U} \Longrightarrow (X/U, \|.\|_\sim)$ *Banachraum*

(iv) Mit der Einbettung i und der Projektion π liegt eine kurze exakte Sequenz vor:

$$0 \ \to \ U \ \overset{i}{\hookrightarrow} \ X \ \overset{\pi}{\to} \ X/U \ \to \ 0 \ ,$$

d.h. $\mathrm{Ran}(i) = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Beweis: (i) $\|.\|_\sim$ ist wohldefiniert, denn $d(x,U) = d(x+u, U)$. Zur Homogenität:

$$\begin{aligned} \|[\lambda x]\|_\sim &= d(\lambda x, U) = \inf_{u \in U} \|\lambda x - u\| \\ &= |\lambda| \inf_{u \in U} \|x - u\| = |\lambda| \|x\|_\sim \ , \end{aligned}$$

und zur Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|[x_1] + [x_2]\|_\sim = \|[x_1 + x_2]\|_\sim &= \inf_{u \in U} \|x_1 + x_2 - u\| \\ &= \inf_{u_1 \in U} \inf_{u_2 \in U} \|x_1 + x_2 - (u_1 + u_2)\| \\ &\leq \inf_{u_1 \in U} \inf_{u_2 \in U} \|x_1 - u_1\| + \|x_2 - u_2\| \\ &= \|[x_1]\|_\sim + \|[x_2]\|_\sim \ . \end{aligned}$$

(ii) $\|[x]\|_\sim = 0 \Longleftrightarrow d(x,U) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{U} \Longleftrightarrow [x] = \vec{0} = [0]$.

Für (iii) verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 1.29 *Es gilt folgende Äquivalenz:*

$$(X, \|.\|) \ \text{vollständig} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty \Longrightarrow \sum_{n \geq 1} x_n \ \textit{konvergent} \right)$$

wobei daran erinnert sei, dass letztere Konvergenz bedeutet, dass y existiert mit $\left\| y - \sum_{n=1}^N x_n \right\| \to 0$.

Beweis: "$\Longrightarrow$" $y_N = \sum_{n=1}^N x_n$ ist eine Cauchy-Folge, da nach Voraussetzung

$$\|y_N - y_M\| \leq \sum_{n \geq \min\{N,M\}} \|x_n\| \to 0 \qquad \text{für } N, M \to \infty \ .$$

Also $\exists\ y$ mit $y_N \to y$, d.h. $\sum_{y=1}^N x_n \to y$.
"$\Longleftarrow$" Wir verwenden folgenden

Fakt: Eine Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge ist konvergent.

Begründung: Sei $x_{n_k} \to y$. Zu $\epsilon > 0$, wähle $K = K(\epsilon)$ mit $\|x_{n_k} - y\| < \epsilon\ \forall\ k \geq K$. Wähle $N = N(\epsilon)$, sodass $\|x_n - x_m\| < \epsilon\ \forall\ n, m \geq N$. Dann

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_K}\| + \|x_{n_K} - y\| \leq 2\epsilon \qquad \forall\ n \geq \max\{N, n_K\} \ ,$$

was den Fakt verifiziert. $\diamond$

Sei also $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $(X, \|.\|)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge (genau wie im Beweis von Riesz-Fischer) gilt:

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall\ k \geq K$$

Dann setze $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, welches $\sum_k \|y_k\| < \infty$ erfüllt. Nach Voraussetzung existiert also $y = \sum_k y_k$ mit $y \in X$, d.h.

$$\lim_K \left\| \sum_{k=1}^K y_k - y \right\| \ = \ 0 \ ,$$

also

$$\lim_K \|x_{n_K} - x_0 - y\| \ = \ 0 \ .$$

Dies bedeutet aber $x_{n_K} \to x_0 + y$ und wir haben eine konvergente Teilfolge gefunden und somit wegen des obigen Faktes das Lemma bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 1.28(iii): Sei $\sum_{n\geq 1} \|[x_n]\|_\sim < \infty$. Zu zeigen ist wegen Lemma 1.29: $\exists\ [y]$ mit $\sum_{n\geq 1}[x_n] = [y]$. Wähle hierzu x_n in $[x_n]$, sodass gilt

$$\|x_n\| \leq \|[x_n]\|_\sim + \frac{1}{2^n}.$$

Gemäß der Voraussetzung folgt also

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty.$$

Da X vollständig ist, besagt Lemma 1.29, dass $y = \sum_{n\geq 1} x_n$ existiert. Nun, wegen $\|[x]\|_\sim \leq \|x\|$ für alle x,

$$\begin{aligned} \left\| [y] - \sum_{n=1}^N [x_n] \right\|_\sim &= \left\| \left[y - \sum_{n=1}^N x_n \right] \right\|_\sim \\ &\leq \left\| y - \sum_{n=1}^N x_n \right\| \ \to \ 0 \qquad \text{für } N \to \infty \ . \end{aligned}$$

Somit folgt die Konvergenz der Reihe.

(iv) ist offensichtlich. $\square$

Beispiel 1.30 $X = C([0,1])$, $U = \{f \in X : f(0) = f(1) = 0\} \cong C_0((0,1))$, $X/U \cong \mathbb{K}^2$, was z.B. mit den lineren Funktionen mit vorgegebenen Randwerten identifiziert werden kann. Somit erhalten wir exakte Sequenz von Banachräumen:

$$0 \;\to\; C_0((0,1)) \;\overset{i}{\hookrightarrow}\; C([0,1]) \;\overset{\pi}{\to}\; \mathbb{K}^2 \;\to\; 0\;.$$

Analog erhält man einen sogenannten "mapping cone":

$$0 \;\to\; C_0([0,1)) \;\overset{i}{\hookrightarrow}\; C([0,1]) \;\overset{\pi}{\to}\; \mathbb{K} \;\to\; 0\;.$$

Bemerkung 1.31 Sei $(X, \|.\|)$ halbnormiert. Setze

$$U = \{x : \|x\| = 0\}$$

Dann gilt Satz 1.28(i) für $(X/U, \|.\|_\sim)$ und $\|.\|_\sim$ ist eine Norm (!). Außerdem überträgt sich (iii) mit folgender Definition im halbnormierten Raum: X vollständig $\Longleftrightarrow$ Cauchy-Folge konvergent (aber Limes nicht eindeutig).

Beispiel 1.32 für letztere Bemerkung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) &= \{f \text{ messbar } : \|f\|_p < \infty\}\\
U &= \{f \text{ messbar } : f = 0 \;\mu\text{-fast sicher}\}\\
L^p(\Omega,\mu) &= \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/U
\end{aligned}$$

Eine Definition, die direkt mit Satz 1.28 zusammenhängt ist die folgende.

Definition 1.33 *Für einen Unterraum U von X ist die Kodimension von U definiert als die Dimension* $\dim(X/U)$ *des Quotientenraumes.*

Nun kommen wir zur zweiten Konstruktion, der Summe von Banachräumen.

Satz 1.34 *Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume. Definiere auf dem mengentheoretisches Produkt*

$$X \oplus Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\} = X \times Y$$

eine Vektorraumstruktur durch

$$(x,y) + \lambda(x',y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')\;.$$

Zudem setze, für $1 \le p < \infty$,

$$\|(x,y)\|_p \;=\; (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}\;, \qquad \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}\;.$$

Dann gilt:

(i) $(X \oplus Y, \|.\|_p)$ *ist ein normierter Raum.*

(ii) Alle Normen $\|.\|_p$ sind äquivalent und erzeugen die Produkttopologie, d.h.

$$(x_n, y_n) \to (x,y) \text{ in } \|.\|_p \quad\Longleftrightarrow\quad x_n \to x \;\text{ und }\; y_n \to y\;.$$

(iii) X, Y *vollständig* $\Longrightarrow (X \oplus Y, \|.\|_p)$ *vollständig (kein Abschluss nötig!).*

Beweis: Übung. □

Bemerkung 1.35 Beachte $\dim(X \oplus Y) = \dim(X) + \dim(Y)$. Man kann auch $(\oplus_{i \in I} X_i, \|.\|_p)$ bilden für eine beliebige Indexmenge I, aber (ii) gilt dann **nicht**!

Nun noch einige abschließende Bemerkungen zu Tensorprodukten von Banachräumen. Diese sind wesentlich schwieriger zu bilden. Zunächst betrachtet man das algebraische Tensorprodukt:

$$X \otimes_{\text{alg}} Y \;=\; \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \;:\; n < \infty,\; x_i \in X,\; y_i \in Y \right\}.$$

Dies ist jedoch *nicht* abgeschlossen! Außerdem stellt sich heraus, dass es sehr viele natürliche Normen auf dem algebraischen Tensorprodukt gibt, sogar noch sehr viele sogenannte Cross-Normen, die $\|x \otimes y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ erfüllen. Deswegen gibt es auch sehr viele Abschlüsse und somit mögliche Definitionen von Banachraumtensorprodukten. All diese wurden systematisch von Grothendieck in 1955 untersucht. Bei Hilbert-Räumen ist die Situation wesentlich einfacher, denn es gibt nur ein einziges möglichen Hilbertraumtensorprodukt. Dies stellen wir später vor.

1.2 Beschränkte und kompakte Operatoren

Satz 1.36 *(und Definition) Seien X, Y normierte Vektorräume mit Normen $\|.\|_X$ und $\|.\|_Y$. Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung, auch genannt ein linearer Operator. Äquivalent sind:*

(i) T ist beschränkt, d.h. $\exists\; M \geq 0$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \qquad \forall\; x \in X.$$

(ii) T ist stetig, d.h.

entweder: $x_n \to x$ in $X \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ in Y

oder: $\forall\; x \in X,\; \forall\; \epsilon > 0,\; \exists\; \delta > 0$ mit

$$\|x' - x\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|Tx' - Tx\| < \epsilon.$$

oder: $T^{-1}(A)$ offen in X für alle offenen $A \subset Y$.

(iii) T ist stetig bei $0 = \vec{0}$.

Falls einer dieser Punkte erfüllt ist, heißt der Operator beschränkt (oder stetig) und seine Operator-Norm ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall\; x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

Ist $Y = \mathbb{K}$, so heißt T auch stetiges Funktional.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Zunächst ist $x_n \to x$ in X äquivalent zu $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. Wegen der Linearität von T folgt also

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) (genauso wie in Satz 1.11 zu äquivalenten Normen)

Gegenannahme: Es existiert kein M mit den in (i) angegebenen Eigenschaften. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. Setze $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Dann gilt $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, d.h. y_n Nullfolge. Aber dann

$$\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > 1,$$

d.h. Ty_n konvergiert nicht gegen $0 = T(0)$, sodass T unstetig bei 0 wäre.

Somit ist die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) gezeigt. Nun zur behaupteten Gleichheit. Setze $N = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$. Da nach Definition $\|Tx\| \leq N\|x\|$, folgt $\|T\| \leq N$. Andererseits existiert $\forall\, \epsilon > 0$ ein x_ϵ mit $\|Tx_\epsilon\| \geq N(1-\epsilon)\|x_\epsilon\|$. Somit ist $\|T\| \geq N$, also $\|T\| = N$. $\square$

Beispiele 1.37

1. $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\|.\|_{2\to 2} = \langle . \mid . \rangle^{\frac{1}{2}}$ euklidische Norm. Falls $T = T^*$, gilt $\|T\|_{2\to 2} = \max\{\text{Eigenwerte}\}$, im Allgemeinenen ist $\|T\|_{2\to 2}$ gleich dem Maximum der Singulärwerte.

   Da alle Normen äquivalent sind, ist T immer beschränkt, aber die Norm variiert. Z.B.

$$\|T\|_{\infty\to\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |T_{i,j}|, \qquad T = (T_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}.$$

2. Sei $T : C([0,1]) \to \mathbb{K}$ definiert durch $Tf = f(1)$. Dies ist also ein stetiges Funktional. Seine Norm ist $\|T\| = 1$, wobei auf $C([0,1])$ die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ verwandt wird.

   Begründung: $|Tf| = |f(1)| \leq \|f\|$ für alle f. Somit $\|T\| \leq 1$. Zudem gilt für die Einsfunktion $\mathbb{1}$, dass $|T\mathbb{1}| = 1 = \|\mathbb{1}\|$. Somit folgt $\|T\| = 1$.

   Anwendung: $\{f \in C([0,1]) : f(1) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $C([0,1])$.

3. (Multiplikations-Operator) Sei $f \in C(\Omega)$, wobei Ω eine kompakte Menge versehen mit einem Borel–Maß μ ist. Definiere

$$T_f : L^p(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu) \qquad (T_f g)(\omega) = f(\omega)\cdot g(\omega).$$

   Es gilt: $\|T_f\|_{L^p} \leq \|f\|_\infty = \max_{\omega\in\Omega} \|f\|$, weil

$$\|T_f g\|_{L^p} = \left(\int \mu(d\omega) |f(\omega) g(\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^p}.$$

   Gleichheit (Übung): Approximiere mit Funktionen, die Träger auf den großen Werten von f hat.

   Ähnlich kann der Fall behandelt werden, bei dem $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ und dann

$$\|T_f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty} = \mu\text{-}\operatorname*{esssup}_{\omega} |f(\omega)|\ .$$

4. (Integralfunktional) Sei $(X, \|.\|) = (\{f \in C([0,1]) \,:\, f(1) = 0\},\ \|.\|_\infty)$ und definiere

$$T : X \to \mathbb{K}, \qquad Tf = \int_0^1 dx f(x).$$

Behauptung: $\|T\| = 1$

Begründung: Es gilt $|Tf| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 dx = \|f\|_\infty$, sodass $\|T\| \leq 1$. Andererseits zeigt die Folge

$$f_n(x) = 1 - x^n, \qquad f_n \in X,$$

mit $\|f_n\| = 1$, dass $Tf_n = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$.

Aber: Es existiert **kein** $f \in X$ mit $\|f\| = 1$ und $\|Tf\| = 1$, d.h. das Supremum in der Norm wird nicht angenommen.

5. Auf X seien zwei Normen $\|.\|$ und $|\!|\!|.|\!|\!|$ gegeben. Nach Satz 1.11 gilt dann

$$\mathrm{Id} : (X, \|.\|) \to (X, |\!|\!|.|\!|\!|) \quad \text{stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad |\!|\!|x|\!|\!| \leq M\|x\|$$

und

$$\mathrm{Id} \quad \text{bistetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \|.\| \text{ und } |\!|\!|.|\!|\!| \quad \text{äquivalent}$$

6. Sei $X = \ell^p(\mathbb{Z}),\ 1 \leq p \leq \infty$. Wir verweden die Dirac-Notation $|n\rangle = e_n$. Definiere den Shift $S\,|n\rangle = |n-1\rangle$. Dann gilt $\|S\| = 1$.

7. Sei $X = C^1([0,1])$ und $Y = C([0,1])$. Auf X ist die Norm $\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|$ gegeben, die X zu einem Banachraum macht. Definiere $T = \frac{d}{dx} : X \to Y$. Dieses T ist stetig, denn

$$\|Tf\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq \|f\|_{C^1}.$$

Satz 1.38 *(i) Für zwei normierte Vektorräume X, Y über $\mathbb{K}$ setze*

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y \,:\, T \textit{ linear und beschränkt}\}$$

$\mathcal{B}(X,Y)$ ist ein Vektorraum vermöge

$$(S + \lambda T)(x) = S(x) + \lambda T(x) \quad , \quad S, T \in \mathcal{B}(X,Y) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad , \quad x \in X,$$

und die Operatornorm macht es zu einem normierten Raum.

(ii) $(Y, \|\ \|)$ vollständig $\Longrightarrow$ $(\mathcal{B}(X,Y), \|.\|)$ ist vollständig, d.h. es ist ein Banachraum.

(iii) Sei Z ein weiterer normierter Vektorraum und $S : Y \to Z$ ein beschränkter Operator. Dann gilt für $S \circ T = ST$ die Ungleichung

$$\|S \circ T\| \ \leq\ \|S\|\|T\|$$

Definition 1.39 *Eine Banachalgebra $(\mathcal{B}, +, \circ, \|.\|)$ über $\mathbb{K}$ ist ein Banachraum $(\mathcal{B}, +, \|.\|)$ versehen mit einer Multiplikation $T \circ S = TS$ von $T, S \in \mathcal{B}$, für welche gilt*

$$\|TS\| \ \leq\ \|T\|\|S\|.$$

Korollar 1.40 *Sei X ein Banachraum und $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$. Dann ist $(\mathcal{B}(X), +, \circ, \|.\|)$ eine Banachalgebra.*

Beweis: (i) Vektorraumeigenschaft ist klar. Zur Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|S+T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(S+T)(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|S(x)+T(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\ &= \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

Die Homogenität zeigt man genauso. Zudem gilt $\|T\| = 0 \iff T = 0$ ist 0–Operator.

(ii) $(T_n)_{n\geq 1}$ sei eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X,Y)$. Sei $x \in X$, dann ist $(T_n(x))_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in Y, weil $\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X < \epsilon \ \forall\, n, m \geq N(\epsilon)$. Setze

$$T(x) = \lim_n T_n(x) \quad \text{(existiert nach der Vollständigkeit von } Y)$$

Außerdem ist $x \mapsto T(x)$ eine lineare Abbildung, weil nämlich

$$\begin{aligned}T(x+\lambda x') &= \lim_n T_n(x+\lambda x') = \lim_n (T_n(x) + \lambda T_n(x')) \\ &= \lim_n T_n(x) + \lambda \lim_n T_n(x') = T(x) + \lambda T(x').\end{aligned}$$

Noch zu zeigen: T beschränkt und $\|T - T_n\| \to 0$

Sei $\epsilon > 0$ und $N = N(\epsilon)$, sodass

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon, \qquad \forall\, n, m \geq N.$$

Für $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ wähle $M = M(\epsilon, x) \geq N$, sodass

$$\|T_M(x) - T(x)\| \leq \epsilon \quad \text{(Konvergenz für festes } x)$$

Somit

$$\begin{aligned}\|T_n(x) - T(x)\| &\leq \|T_n(x) - T_M(x)\| + \|T_M(x) - T(x)\| \\ &\leq \|T_n - T_m\| + \epsilon \leq 2\epsilon, \qquad \forall\, n \geq N(\epsilon).\end{aligned}$$

Da dies unabhängig von x ist, folgt $\|T_n - T\| \leq 2\epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$ und außerdem

$$\|T\| \leq \|T_n\| + \|T_n - T\| < \infty.$$

(iii) Es ist klar, dass $S \circ T$ beschränkt (als Hintereinanderausführung von stetiger Abbildung ist dies stetig) und linear ist. Zudem

$$\|(ST)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|,$$

was die Ungleichung zeigt. □

Satz 1.41 *Seien X, Y normierte Vektorräume mit Normen $\|.\|_X$ und $\|.\|_Y$, Y vollständig. Ferner sei $D \subset X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widehat{T} : X \to Y$ mit $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Beweisskizze: Für $x \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit $\lim_n \|x - x_n\|_X = 0$. Man überprüft zunächst, dass $(Tx_n)_{n\geq 1}$ ein Cauchy-Folge in Y ist und setzt dann $\widehat{T}x = \lim_n Tx_n$. Dann wird gezeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist, sowie eindeutig und isometrisch ist. $\square$

Nun werden weitere Begriffe eingeführt.

Definition 1.42 *(i) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ injektiv $\Longleftrightarrow T$ ist bijektiv auf das Bild $T(X) \subset Y$.*
Dann ist das Links-Inverse $T^{-1} : T(X) \to X$ wohldefiniert durch $T^{-1}T = \mathrm{id}_X$.
(Aber T^{-1} ist nicht notwendigerweise stetig!)

(ii) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ Isomorphismus $\Longleftrightarrow T$ bijektiv und T^{-1} stetig.

(iii) X isomorph zu Y (in Kurzschreibweise $X \cong Y$) $\Longleftrightarrow \exists$ Isomorphismus $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

(iv) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ isometrisch $\Longleftrightarrow \|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Zudem ist eine Isometrie ein isometrischer Isomorphismus.

Beispiele 1.43 1. Der oben definierte Shift $S : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

2. Seien $S_L, S_R : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ Links- und Rechts-Shifts, definiert durch

$$S_L\,|n\rangle = \begin{cases} 0\,, & n = 1\,, \\ |n-1\rangle\,, & n \geq 2\,, \end{cases} \qquad\qquad S_R\,|n\rangle = |n+1\rangle\,.$$

Dann ist S_R isometrisch und invertierbar und es gilt $S_R^{-1} = S_L$, d.h. $S_L \circ S_R = \mathbb{1}$. Andererseits ist S_R keine Isometrie. Zudem ist S_L nicht invertierbar. Beides sind nur so genannte partielle Isomietrien. Es gilt nämlich $S_R S_L = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$.

3. Sei $\mathbb{1} = \mathrm{id} : (C([0,1]), \|.\|_\infty) \to (C([0,1]), \|.\|_{L^1})$. Dann ist id stetig, da $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_\infty$ und offensichtlich bijektiv, also invertierbar ist. Aber es ist kein Isomorphismus, da es kein M gibt mit
$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_{L^1}.$$
Begründung: Betrachte $f_n(x) = x^n$. Dann gilt $\|x^n\|_\infty = 1$ und $\|x^n\|_{L^1} = \frac{1}{n+1}$.

4. Es gilt $c \cong c_0$.
Begründung: Wir definieren $T : c \to c_0$ wie folgt. Sei $x = (t_n)_{n\geq 1} \in c$ und setze $t(x) = \lim_n t_n$. Dann definiere $T((t_n)_{n\geq 1})_m = t_{m-1} - t(x)$ für $m \geq 2$ und $T((t_n)_{n\geq 1})_1 = t(x)$. Dies ist offensichtlich eine lineare Abbildung mit Werten in c_0. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_\infty &= \sup\{|t(x)|, |t_{n-1} - t(x)|\} \\ &\leq \max\{|t(x)|, \|x\|_\infty + |t(x)|\} \leq 2\|x\|_\infty, \end{aligned}$$

und somit $\|T\| \leq 2$. Also ist T beschränkt. Um die Umkehrung zu definieren, setzen wir

$$Sx = S(t_n)_{n\geq 1} = (t_{n+1} + t_0)_{n\geq 1}, \qquad x \in c_0.$$

Dann ist $Sx \in c$ und $\|S\| \leq 2$. Außerdem gilt $TS = \mathrm{id}_{c_0}$ und $ST = \mathrm{id}_c$.

Es ist immer möglich, eine lineare Abbildung injektiv zu machen, indem man zu einer Quotientenabbildung übergeht. Dies ist eine typische Anwendung von Satz 1.28.

Satz 1.44 *Sei $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen X und Y. Dann ist $\mathrm{Ker}(T) \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und nach Satz 1.28 ist $X/\mathrm{Ker}(T)$ wieder ein Banachraum. Zudem ist*

$$\widetilde{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to Y \ , \qquad \widetilde{T}[x]_{\sim} \ = \ Tx \ ,$$

wohldefiniert, injektiv und stetig. Wenn zudem das Bild $\mathrm{Ran}(T)$ abgeschlossen ist, dann ist $\widetilde{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Ran}(T)$ eine stetige Bijektion zwischen zwei Banach-Räumen.

Beweis: Übung. □

Falls das Bild eines gegebenen Operators T abgeschlossen ist, dann impliziert der Satz der Inversen Abbildung (Satz 4.2 weiter unten), dass $\widetilde{T} : X/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Ran}(T)$ ein stetiges Inverses hat und somit ein Isomorphismus ist. Als weitere Vorschau sei bemerkt, dass in einem Hilbert-Raum der Quotient mit Theorem 2.12 weit konkreter als orthogonales Komplement bestimmt werden kann.

Bemerkung 1.45 Es ist zu beachten, dass das Bild eines linearen Operators nicht notwendigerweise abgeschlossen ist! Zum Beispiel, sei $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch

$$T \ = \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \, |n\rangle\langle n| \ .$$

Dann ist

$$\mathrm{Ran}(T) \ = \ \{\psi = (\psi_n)_{n\geq 1} \ : \ \sum_{n\geq 1} n^2 |\psi_n|^2 < \infty\}$$

zwar dicht (weil kompakt getragenen ψ's enthalten sind), aber nicht ganz $\ell^2(\mathbb{N})$. Somit ist das Bild nicht abgeschlossen.

Satz 1.46 *(Neumann Reihe) Sei X ein Banachraum. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $(\mathbb{1} - T)$ ein (invertierbarer) Isomorphismus, und es gilt (wobei $T^n = T \circ \ldots \circ T$ und $T^0 = \mathbb{1}$)*

$$(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n, \qquad \|(\mathbb{1} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Beweis: Nach Lemma 1.29 ist die Reihe konvergent in $\mathcal{B}(X)$, weil sie absolut konvergent ist:

$$\sum_{n\geq 0} \|T^n\| \ \leq \ \sum_{n\geq 0} \|T\|^n \ = \ \frac{1}{1 - \|T\|} \ ,$$

und $\mathcal{B}(X)$ Banachraum, also vollständig ist. Zudem setze $S_N = \sum_{n=0}^{N} T^n$ und $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} T^n$. Dann

$$\begin{aligned}
\left\| (\mathbb{1} - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \mathbb{1} \right\| \ &= \ \|(\mathbb{1} - T)(S_N + R_N) - \mathbb{1}\| \\
&= \ \| - T^{N+1} + (\mathbb{1} - T) R_N\| \\
&\leq \ \|T^{N+1}\| + \|(\mathbb{1} - T) R_N\| \\
&\leq \ \|T\|^{N+1} + \|\mathbb{1} - T\| \|T^{N+1}\| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \\
&\leq \ \|T\|^{N+1} \left(1 + (1 + \|T\|) \frac{1}{1 - \|T\|} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty.
\end{aligned}$$

Somit $\|(\mathbb{1}-T)\sum_{n=0}^{\infty}T^n - \mathbb{1}\| = 0$, was impliziert, dass $(\mathbb{1}-T)\sum_{n=0}^{\infty}T^n = \mathbb{1}$. Anders ausgedrückt $\left(\sum_{i=0}^{\infty}T^n\right)^{-1} = \mathbb{1}-T$. Ähnlich zeigt man $\left(\sum_{n=0}^{\infty}T^n\right)(\mathbb{1}-T) = \mathbb{1}$. □

Wir hatten in Satz 1.26 gesehen, dass

$$B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\} \quad \text{nicht kompakt} \quad \Longleftrightarrow \qquad \dim X = \infty.$$

Eine gutartige Klasse von Operatoren bilden B_X in eine kompakte Menge ab.

Definition 1.47 *Seien X, Y Banachräume und $K : X \to Y$ linear. Das Bild der Einheitskugel ist dann $K(B_X) = \{K(x) \,:\, x \in B_X\}$. Nun definieren wir*

$$\begin{aligned} K \quad \textit{kompakter Operator} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{K(B_X)}^{\|\cdot\|_Y} \quad \textit{kompakt in } Y \\ &\Longleftrightarrow \quad K(B_X) \quad \textit{präkompakt in } Y \end{aligned}$$

Die Menge der kompakten Operatoren wird mit $\mathcal{K}(X,Y)$ bzw. $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.48 Da in einem metrischen Raum Kompaktheit und Folgenkompaktheit (jede Folge hat eine konvergente Teilfolge) gleichbedeutend sind (vgl. Analysisvorlesungen), ist die Kompaktheit von K äquivalent dazu, dass für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in X die Folge $(Kx_n)_{n\geq 1}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 1.49 $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, da kompakte Mengen stets beschränkt sind.

Begründung: Überdecke $\overline{K(B_X)} \subset \bigcup_{x \in K(B_X)} B_{\frac{1}{2}}(x)$. Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\overline{K(B_X)} \subset \bigcup_{i=1,\dots,n} B_{\frac{1}{2}}(x_i)$. Somit gilt $\sup_{y \in K(B_X)} \|y\| \leq \max_{i=1,\dots,n}\left(\|x_i\| + \frac{1}{2}\right)$, d.h. $\|K\| < \infty$.

Satz 1.50 *(i) $\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h.*

- $K, K' \in \mathcal{K}(X,Y),\ \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow K + \lambda K' \in \mathcal{K}(X,Y)$
- $K_N \in \mathcal{K}(X,Y),\ \lim_N K_N = T$ *in* $\mathcal{B}(X,Y)$, *dann* $T \in \mathcal{K}(X,Y)$

(ii) $T \in \mathcal{B}(Y,Z),\ K \in \mathcal{K}(X,Y) \Longrightarrow TK \in \mathcal{K}(X,Z)$

(iii) $T \in \mathcal{B}(Z,X),\ K \in \mathcal{K}(X,Y) \Longrightarrow KT \in \mathcal{K}(Z,Y)$

(iv) $\mathcal{K}(X)$ ist ein abgeschlossenes beidseitiges Ideal in $\mathcal{B}(X)$.

Beweis: (i) Es gilt

$$(K + \lambda K')(B_X) \subset \underbrace{K(B_X)}_{\text{präkompakt}} + \underbrace{\lambda \cdot K'(B_X)}_{\text{präkompakt}} \quad \text{präkompakt}$$

Begründung: Allgemein gilt: $A, B \subset X$ kompakt im Banachraum X, dann ist auch $A+B$ kompakt, weil $(x_n)_{n\geq 1}$ Folge in $A+B$, dann ist $x_n = a_n + b_n$ mit $a_n \in A,\ b_n \in B$. Nach sukzessivem Übergang zu Teilfolgen konvergieren $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ und $(b_{n_j})_{j\geq 1}$ und man schließt, dass $(x_{n_j})_{j\geq 1}$ konvergiert. Somit ist $A+B$ folgenkompakt und also auch kompakt. ◇

Nun zur Abgeschlossenheit. Wir verwenden, dass die Präkompaktheit einer Teilmenge $M \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes äquivalent dazu ist, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung

von M mit ϵ-Kugeln existiert.
Begründung: Die Kompaktheit von $\overline{M}$ offensichtlich impliziert die angegebene ϵ-Überdeckungseigenschaft. Umgekehrt zeigen wir, dass die ϵ-Überdeckungseigenschaft Folgenkompaktheit impliziert. Sei also $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\overline{M}$. Für eine monotone Nullfolge von $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ wähle sukzessive Teilfolgen $(x_n^{(k)})_{n\geq 1}$ aus, die nur in einer der ϵ_k-Kugeln liegen. Die Diagonalfolge $(x_k^{(k)})_{k\geq 1}$ konvergiert dann. $\diamond$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wähle N, sodass

$$\|K_N - T\| < \epsilon.$$

Da K_N kompakt ist, gilt

$$K_N(B_X) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} B_\epsilon(y_i), \qquad y_i \in K_N(B_X).$$

Somit

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} B_{2\epsilon}(y_i),$$

d.h. $T(B_X)$ ist präkompakt und somit ist T kompakt (alternativer Beweis: Diagonalfolgenargument).

(ii) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in B_X. Wegen der Kompaktheit von K hat $(Kx_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(Kx_{n_j})_{j\geq 1}$ in Y. Da T stetig ist, konvergiert dann aber $(TKx_{n_j})_{j\geq 1}$ in Z, d.h. $(TKx_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente Teilfolge, sodass $TK \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(iii) Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in B_Z. Dann ist $\left(\frac{1}{\|T\|}(Tz_n)\right)_{n\geq 1}$ eine Folge in B_X. Also hat $(KTz_n)_{n\geq 1}$ konvergente Teilfolgen, d.h. KT ist kompakt.

(iv) Dies ist lediglich eine Zusammenfassung von (ii) und (iii). $\square$

Bemerkung 1.51 Gemäß Satz 1.28 erhält man eine exakte Sequenz von Banach-Räumen (tatsächlich sogar Banach–Algebren)

$$0 \;\to\; \mathcal{K}(X) \;\overset{i}{\hookrightarrow}\; \mathcal{B}(X) \;\to\; \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X) \;\to\; 0.$$

Die Algebra $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ heißt die Calkin-Algebra und die invertierbaren Operatoren darin sind genau die Klassen zugehörig zu Fredholm-Operatoren. Mehr dazu später.

Satz 1.52 *Sei* $K \in \mathcal{K}(X),\; \lambda \in \mathbb{C},\; \lambda \neq 0 \implies \dim(\mathrm{Ker}(\lambda 1\!\!1 - K)) < \infty$

Bemerkung 1.53 Das heißt, dass "Eigenwerte" von K nur endlich entartet sind, bis auf $\lambda = 0$! Dies ist eines der wichtigsten Elemente der Spektraltheorie kompakter Operatoren.

Beweis: $x \in \mathrm{Ker}(\lambda 1\!\!1 - K)$ ist gleichbedeutend mit $\lambda x = Kx$. Also gilt

$$B_{\mathrm{Ker}} \;=\; \{x \in \ker(\lambda 1\!\!1 - \mathrm{K}) \,:\, \|x\| \leq 1\} \;=\; (\lambda 1\!\!1 - K)^{-1}(\{0\}) \cap B_X \;\subset\; \frac{1}{\lambda} K(B_X)\,.$$

Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abblidung ist B_{Ker} abgeschlossen. Da

$$B_{\mathrm{Ker}} \;\subset\; \frac{1}{\lambda}\overline{K(B_X)} \quad \text{kompakt}\,,$$

ist B_{Ker} kompakt (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten). Nach Satz 1.26 ist dann aber $\dim(\ker(\lambda 1\!\!1 - \mathrm{K})) < \infty$. $\square$

Satz 1.54 *X, Y Banachräume. Seien*

$$\mathcal{F}(X,Y) = \{K \in \mathcal{K}(X,Y) \,:\, \dim(K(X)) < \infty\}$$

die Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild. Wir nehmen an, dass es eine beschränkte Folge $S_n \in \mathcal{F}(Y,Y) = \mathcal{F}(Y)$ gibt, sodass

$$\lim_n S_n(y) = y, \qquad \forall\, y \in Y \quad (\textit{Konvergenz in } Y). \tag{1.1}$$

Dann gilt

$$\overline{\mathcal{F}(X,Y)}^{\|.\|} = \mathcal{K}(X,Y),$$

d.h. die kompakten Operatoren sind der Abschluss der endlich-dimensionalen Operatoren.

Beweis: Nach Satz 1.50 gilt offensichtlich (da $\mathcal{K}(X,Y)$ abgeschlossen)

$$\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y).$$

Sei nun $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ beliebig. Dann ist $S_nK \in \mathcal{F}(X,Y)$. Zu zeigen ist, dass

$$\lim_n \|S_nK - K\| \; = 0.$$

Gemäß Annahme ist

$$M = \sup_n \|S_n\| < \infty.$$

(Nach Banach-Steinhaus folgt dies automatisch aus (1.1), d.h. dieser Teil der Annahme ist nicht nötig.) Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Kompaktheit von K folgt

$$\overline{K(B_X)} \subset \bigcup_{i=1,\ldots,I} B_\epsilon(y_i) \quad , \quad I < \infty.$$

Nach (1.1) existiert ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$\|S_n(y_i) - y_i\| < \epsilon, \qquad \forall\, n \geq N, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, I.$$

Zu $x \in B_X$ wähle jetzt $j \in \{1, \ldots, I\}$ mit

$$\|Kx - y_j\| < \epsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|S_nK(x) - K(x)\| &\leq \|S_n(Kx - y_j)\| + \|S_ny_j - y_j\| + \|y_j - K(x)\| \\ &\leq \|S_n\|\|K(x) - y_j\| + \epsilon + \epsilon \\ &\leq (M+2)\epsilon, \end{aligned}$$

d.h. $\|S_nK - K\| \leq (M+2)\epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. □

Bemerkung 1.55 Aus der Annahme von Satz 1.54 folgt, dass Y separabel ist. (Übung!)

Beispiele 1.56 1. Satz 1.54 kann für $Y = \ell^p$ mit $1 \leq p < \infty$ angewandt werden.

Begründung: Wähle

$$S_n((t_k)_{k\geq 0}) = ((t_k)_{k\leq n}, (0, \ldots)).$$

Insbesondere gilt er also für jeden separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, weil $\mathcal{H} \cong \ell^2$.

Genauso kann im Fall $Y = c_0$ mit $\|.\|_\infty$ argumentiert werden.

2. Satz 1.54 gilt für $L^p([0,1]),\ 1 \le p < \infty$.

   Begründung: Wähle S_n als folgenden Erwartungsoperator:

$$S_n f = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^{-n}} \int_{I_i^n} dx f(x) \right) \chi_{I_i^n},$$

   wobei $\chi_{I_i^n}$ die charakteristische Funktion auf

$$I_i^n = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right)$$

$$\mathrm{Bild}(S_n) = \mathrm{span}\{\chi_{I_i^n} : i = 0, \dots, 2^n - 1\}$$

   Nun verwende, dass die Elementarfunktionen dicht in L^p sind (Vorwissen Maßtheorie oder Übung).

Bemerkung 1.57 Es gilt $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$ auch für einige nicht separable Räume wie $Y = \ell^\infty, L^\infty([0,1])$, aber nach anderem Beweis.

1.3 Integraloperatoren

Seien Ω und Ξ metrische Räume (z.B. $\Omega = \Xi = [0,1]$) und μ bez. ν Borel-Maße auf Ω bez. Ξ (z.B. $\mu = \nu = dx =$ Lebesgue-Maß). Des Weiteren sei gegeben eine Funktion $k : \Omega \times \Xi \to \mathbb{K}$, die als Integralkern bezeichnet wird. Dann definieren wir den (Fredholm'schen) Integraloperator T_k mit Kern k durch:

$$(T_k f)(\omega) = \int_\Xi \nu(d\theta)\, k(\omega,\theta) f(\theta), \qquad f : \Xi \to \mathbb{K}.$$

Es ist sinnvoll, sich dies als Matrixmultiplikation mit kontinuierlichem Index θ vorzustellen. Die zentrale Frage in diesem Kapitel wird sein: Unter welchen Bedingungen an k definiert T_k einen beschränkten bzw. kompakten Operator zwischen Funktionsräumen wie den Räumen stetiger Funktionen oder den L^p-Räumen?

Satz 1.58 *Seien Ω und Ξ kompakt, ν ein Wahrscheinlichkeits-Maß auf Ξ und sei k stetig. Dann ist*

$$T_k : C(\Xi) \to C(\Omega) \quad \textit{stetig,}$$

und seine Norm erfüllt

$$\|T_k\| = \sup_\omega \int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta)| \le \|k\|_\infty.$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass $T_k(f)$ tatsächlich stetig ist. Da $\Omega \times \Xi$ kompakt ist, ist k gleichmäßig stetig, also existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$d((\omega,\theta),(\omega',\theta')) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |k(\omega,\theta) - k(\omega',\theta')| < \epsilon.$$

Also gilt für $d(\omega,\omega') < \delta$

$$\begin{aligned} |(T_k f)(\omega) - (T_k f)(\omega')| &\le \int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta) - k(\omega',\theta)|\ |f(\theta)| \qquad (1.2) \\ &\le \epsilon \int \nu(d\theta) |f(\theta)| \ < \ \epsilon \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

Letzteres, weil ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Nun zur Berechnung der Norm:

$$\begin{aligned}
\|T_k\| &= \sup_{\|f\|_\infty=1} \|T_k f\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty=1} \sup_\omega |T_k f(\omega)| \\
&= \sup_\omega \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \left| \int \nu(d\theta) k(\omega,\theta) f(\theta) \right| \\
&\le \sup_\omega \int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta)|
\end{aligned}$$

Für die andere Ungleichung zeigen wir

$$\sup_{\|f\|_\infty \le 1} \left| \int \nu(d\theta) k(\omega,\theta) f(\theta) \right| = \int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta)|.$$

In der Tat, betrachte für festes ω die Funktion

$$f(\theta) = \frac{\overline{k(\omega,\theta)}}{|k(\omega,\theta)| + \epsilon}.$$

Dann ist $\|f\|_\infty \le 1$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{\|f\| \le 1} \left| \int \nu(d\theta) k(\omega,\theta) f(\theta) \right| &\ge \int \nu(d\theta) \frac{|k(\omega,\theta)|^2}{|k(\omega,\theta)| + \epsilon} \\
&\ge \int \nu(d\theta) \frac{|k(\omega,\theta)|^2 - \epsilon^2}{|k(\omega,\theta)| + \epsilon} \\
&= \int \nu(d\theta)(|k(\omega,\theta)| - \epsilon) \\
&= \left(\int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta)| \right) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Da dies für alle ϵ gilt, ist der Beweis beendet. □

Anwendungsbeispiel: Sei $\Omega = \Xi = \mathbb{S}^1$ und $\nu(d\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$. Wir betrachten die Integralgleichung

$$f(\omega) - \int \frac{d\theta}{2\pi}\, k(\omega,\theta) f(\theta) \;=\; g(\omega).$$

Gegeben seien $g \in C(\mathbb{S}^1)$ und $k \in C(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$, und gesucht ist dann eine Lösung $f \in C(\mathbb{S}^1)$ der Integralgleichung. Dieses Problem ist äquivalent zur Sturm-Liouville Differentialgleichung auf $\mathbb{S}^1$, vgl. das Buch von Walter über Differentialgleichungen. Wir nehmen an, dass der Integraloperator

$$(T_k f)(\omega) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, k(\omega,\theta) f(\theta)$$

eine Kontraktion auf $(C(\mathbb{S}^1), \|.\|_\infty)$ ist, d.h. dass er folgendes erfüllt:

$$\|T_k\|_{C(S^1)\to C(S^1)} \;=\; \sup_\omega \int \frac{d\theta}{2\pi}\, |k(\omega,\theta)| \;<\; 1.$$

Dann ist es möglich, die Lösung zu konstruieren. In der Tat, die Integralgleichung ist

$$(\mathbb{1} - T_k)(f) \;=\; g.$$

Nach Kap. 1.2, Satz 1.46, gilt also

$$f \;=\; (\mathbb{1} - T_k)^{-1} g \;=\; \sum_{n\geq 0} (T_k)^n g.$$

Nun definieren wir iterativ:

$$k_1(\omega,\theta) \;=\; k(\omega,\theta)\;, \qquad k_n(\omega,\theta) \;=\; \int \frac{d\gamma}{2\pi}\; k(\omega,\gamma)\; k_{n-1}(\gamma,\theta)$$

Wie oben zeigt man, dass k_n stetig ist (da k gleichmäßig stetig ist). Außerdem gilt nach dem Satz von Fubini, dass $(T_k)^n = T_{k_n}$. Zudem:

$$|k_n(\omega,\theta)| \leq \int \frac{d\gamma}{2\pi}\; |k(\omega,\gamma)|\, \|k_{n-1}\|_\infty$$

Deswegen folgt nach Satz 1.58

$$\|k_n\|_\infty \;\leq\; \|T_k\| \|k_{n-1}\|_\infty \;\leq\; \|T_k\|^{n-1} \|k\|_\infty\;.$$

Somit konvergiert die Reihe

$$h(\omega,\theta) \;=\; \sum_{n\geq 1} k_n(\omega,\theta)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, d.h. $h \in C(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$. Es folgt, dass der zu h gehörige Integraloperator T_h

$$T_h \;=\; \sum_{n\geq 1} (T_k)^n$$

erfüllt und dass man die Lösung durch

$$f = (\mathbb{1} + T_h) g \in C(\mathbb{S}^1)$$

erhält. Die Funktion h heißt auflösender Kern der Integralgleichung. $\diamond$

Satz 1.59 *Gleiche Voraussetzungen wie Satz 1.58, d.h. Ω und Ξ sind kompakte metrische Räume, $k \in C(\Omega \times \Xi)$ und ν ein Wahrscheinlichkeits-Maß auf Ξ. Dann ist $T_k : C(\Xi) \to C(\Omega)$ kompakt.*

Dies folgt direkt aus einem topologischen Sachverhalt, dem Standardkriterium zum Nachweis von Kompaktheit in Räumen stetiger Funktionen.

Satz 1.60 *(Arzela-Ascoli) Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und es erfülle eine Menge $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ bez. $\|.\|_\infty$ folgendes:*

(i) $\mathcal{F}$ beschränkt und abgeschlossen.

(ii) $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig, d.h. $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ mit
$$d(\omega,\omega') < \delta \;\Longrightarrow\; |f(\omega) - f(\omega')| < \epsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ kompakt.

Anders ausgedrückt: $\mathcal{F}$ beschränkt und gleichgradig stetig $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ präkompakt (oder relativ kompakt).

Beweis: Sei $D = \{x_n \in \Omega : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, dichte Menge in Ω (Übung: Konstruiere diese Menge). Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Dann ist $(f_m(x_1))_{m\geq 1}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Somit existiert eine konvergente Teilfolge $(f_m^{(1)}(x_1))_{m\geq 1}$. Nun betrachte $\left(f_m^{(1)}(x_2)\right)_{m\geq 1}$. Wiederum existiert eine konvergente Teilfolge $\left(f_m^{(2)}(x_2)\right)_{m\geq 1}$. Nun iterieren wir diese Prozedur und erhalten eine Folge von Teilfolgen von Funktionen $\left(\left(f_m^{(n)}\right)_{m\geq 1}\right)_{n\geq 1}$. Dann wählen wir die Diagonalfolge $g_m = f_m^{(m)}$ aus. Nach Konstruktion konvergiert $(g_m(x_n))_{m\geq 1}$ für alle $x_n \in D$. Zuletzt wird überprüft, dass $(g_m)_{m\geq 1}$ auf ganz Ω sogar uniform konvergiert, d.h. bez. $\|.\|_\infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in der Annahme (ii). Wähle N, sodass $D_N = \{x_n \in D : n \leq N\}$ zu jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Abstand kleiner als δ hat. Dann wähle M, sodass $|g_m(x_n) - g_{m'}(x_n)| < \epsilon \quad \forall\, m, m' \geq M$ und alle $n \leq N$. Dann gilt für alle $m, m' \geq M$ und alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_{m'}(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(x_n)| + |g_m(x_n) - g_{m'}(x_n)| + |g_{m'}(x_n) - g_{m'}(x)| \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon, \end{aligned}$$

was nach dem Cauchy-Kriterium genau die uniforme Konvergenz impliziert. □

Beweis von Satz 1.59: Wähle $\mathcal{F} = T_k(B_{C(\Xi)}) \subset C(\Omega)$, wobei $B_{C(\Xi)} = \{f \in C(\Xi) : \|f\|_\infty \leq 1\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ beschränkt wegen Satz 1.58, da ja T_k beschränkt ist und $B_{C(\Xi)}$ auch beschränkt ist. Die gleichgradige Stetigkeit von $\mathcal{F}$ ist genau die Aussage (1.2): $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit

$$d(\omega, \omega') < \delta \quad \Longrightarrow \quad |(T_k f)(\omega) - (T_k f)(\omega')| < \epsilon \|f\|_\infty \leq \epsilon, \qquad \forall\, f \in B_{C(\Xi)}.$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli schließen wir, dass $T_k(B_{C(\Xi)})$ relativ kompakt ist. Nach Definition ist dies gerade die Kompaktheit von T_k. □

Oft ist es interessant oder besser, T_k als Operator auf L^p-Räumen aufzufassen. Der folgende Satz klärt zunächst die Situation zwischen L^1 und L^∞-Räumen. Wir verwenden folgende kompakte Notation

$$L^p_\mu = L^p(\Omega, \mu), \qquad L^q_\nu = L^q(\Xi, \nu).$$

Satz 1.61 *Sei $(\omega, \theta) \in (\Omega, \Xi) \mapsto k(\omega, \theta) \in \mathbb{K}$ Borel-messbar.*

(i) $T_k : L^1_\nu \to L^\infty_\mu$ ist beschränkt und

$$\|T_k\| \leq \mu\text{-}\underset{\omega}{\text{esssup}}\ \ \nu\text{-}\underset{\theta}{\text{esssup}}\ |k(\omega, \theta)|,$$

falls die rechte Seite endlich ist.

(ii) $T_k : L^\infty_\nu \to L^1_\mu$ ist beschränkt und

$$\|T_k\| \leq \int \nu(d\theta) \int \mu(d\omega)\ |k(\omega, \theta)|,$$

falls die rechte Seite endlich ist.

(iii) $T_k : L^\infty_\nu \to L^\infty_\mu$ ist beschränkt und

$$\|T_k\| \leq \mu\text{-}\underset{\omega}{\text{esssup}} \int \nu(d\theta)\ |k(\omega, \theta)|,$$

falls die rechte Seite endlich ist. Ist $k \geq 0$ fast sicher, gilt Gleichheit.

(iv) $T_k : L^1_\nu \to L^1_\mu$ ist beschränkt und

$$\|T_k\| \leq \nu\text{-}\operatorname*{esssup}_\theta \int \mu(d\omega)\ |k(\omega,\theta)|,$$

falls die rechte Seite endlich ist. Ist $k \geq 0$ fast sicher, gilt Gleichheit.

Beweis: Es gilt immer

$$|(T_k f)(\omega)| \leq \int \nu(d\theta)\ |k(\omega,\theta)|\ |f(\theta)| \tag{1.3}$$

mit Gleichheit, falls $k \geq 0$ und $f \geq 0$. Für (i) verwenden wir nun

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_{L^\infty_\mu} &\overset{(1.3)}{=} \mu\text{-}\operatorname*{esssup}_\omega \int \nu(d\theta)\ |k(\omega,\theta)|\ |f(\theta)| \\
&\leq \left(\mu\text{-}\operatorname*{esssup}_\omega \nu\text{-}\operatorname*{esssup}_\theta |k(\omega,\theta)|\right)\ \|f\|_{L^1_\nu}.
\end{aligned}$$

Für (ii) schließen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_{L^1_\mu} &\overset{(1.3)}{\leq} \int \mu(d\omega) \int \nu(d\theta)\ |k(\omega,\theta)|\ |f(\theta)| \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \nu(d\theta)|f(\theta)| \int \mu(d\omega)\ |k(\omega,\theta)| \qquad (1.4) \\
&\leq \left(\nu\text{-}\operatorname*{esssup}_\theta |f(\theta)|\right) \int \nu(d\theta) \int \mu(d\omega)\ |k(\omega,\theta)| \\
&= \|f\|_{L^\infty_\nu} \int \nu(d\theta) \int \mu(d\omega)\ |k(\omega,\theta)|. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Nun zu (iii):

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_{L^\infty_\mu} &\overset{(1.3)}{\leq} \mu\text{-}\operatorname{esssup} \int \nu(d\theta)\ |k(\omega,\theta)|\ |f(\theta)| \\
&\leq \|f\|_{L^\infty_\nu}\ \mu\text{-}\operatorname*{esssup}_\omega \int \nu(d\theta)\ |k(\omega,\theta)|.
\end{aligned}$$

Falls $k \geq 0$ und $f = 1$, gilt Gleichheit. Zuletzt zu (iv). Nach (1.4) gilt:

$$\|T_k f\|_{L^1_\mu} \leq \left(\nu\text{-}\operatorname*{esssup}_\theta \int \mu(d\omega)\ |k(\omega,\theta)|\right) \|f\|_{L^1_\nu}\ .$$

Um die Gleichheit zu zeigen, wähle eine L^1-Funktionenfolge mit Träger dort, wo $\theta \mapsto \int \mu(d\omega)\ k(\omega,\theta)$ am größten ist. □

Besonders wichtig sind L^2-Abschätzungen. Anwendungsbeispiele des folgenden Kriteriums können in [HS] gefunden werden.

Satz 1.62 *(Schur Test) Der Integralkern k sei nicht-negativ. Außerdem seien zwei positive messbare Funktionen $q : \Theta \to \mathbb{R}_>$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}_>$ gegeben so dass*

$$\int \nu(d\theta)\ k(\omega,\theta)\, q(\theta)\ \leq\ \alpha\, p(\omega)\ ,$$

und

$$\int \mu(d\omega)\, p(\omega)\, k(\omega,\theta) \;\leq\; \beta\, q(\theta)\;,$$

für zwei Konstanten α und β. Dann ist $T_k : L^2_\nu \to L^2_\mu$ beschränkt und

$$\|T_k\| \;\leq\; \sqrt{\alpha\beta}\;.$$

Beweis: Zunächst gilt nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der ersten Annahme

$$\begin{aligned}
|(T_k f)(\omega)|^2 \;&\leq\; \int \nu(d\theta)\; k(\omega,\theta)\, |f(\theta)| \int \nu(d\theta')\; k(\omega,\theta')\, |f(\theta')| \\
&= \int \nu(d\theta) \int \nu(d\theta') \Big(k(\omega,\theta)\, k(\omega,\theta')\, |f(\theta)|^2\, \frac{q(\theta')}{q(\theta)}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(k(\omega,\theta)\, k(\omega,\theta')\, |f(\theta')|^2\, \frac{q(\theta)}{q(\theta')}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int \nu(d\theta')\; k(\omega,\theta')\, q(\theta') \int \nu(d\theta)\; \frac{k(\omega,\theta)\, |f(\theta)|^2}{q(\theta)} \\
&\leq \alpha\, p(\omega) \int \nu(d\theta)\; \frac{k(\omega,\theta)\, |f(\theta)|^2}{q(\theta)}\;.
\end{aligned}$$

Nun werden dies, der Satz von Fubini und die zweite Annahme verwandt um wie folgt zu schließen:

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|^2_{L^2_\mu} \;&\leq\; \int \mu(d\omega)\; \alpha\, p(\omega) \int \nu(d\theta)\; \frac{k(\omega,\theta)\, |f(\theta)|^2}{q(\theta)} \\
&=\; \alpha \int \nu(d\theta)\; \frac{|f(\theta)|^2}{q(\theta)} \int \mu(d\omega)\; p(\omega)\, k(\omega,\theta) \\
&\leq\; \alpha\,\beta \int \nu(d\theta)\; |f(\theta)|^2\;.
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

Satz 1.63 *(Hilbert-Schmidt) $T_k : L^2_\nu \to L^2_\mu$ ist beschränkt und*

$$\|T_k\| \;\leq\; \left(\int \nu(d\theta) \int \mu(d\omega) |k(\omega,\theta)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \|k\|_{L^2_{\mu\times\nu}},$$

falls die rechte Seite endlich ist. Dann ist T_k auch kompakt.

Beweis: Wir wenden auf

$$(T_k f)(\omega) = \int \nu(d\theta)\; k(\omega,\theta)\; f(\theta)$$

die Cauchy-Schwarz Ungleichung in L^2_ν an:

$$|(T_k f)(\omega)|^2 \;\leq\; \left(\int \nu(d\theta) |k(\omega,\theta)|^2\right) \left(\int \nu(d\theta) |f(\theta)|^2\right).$$

Integration bez. $\mu(d\omega)$ ergibt:

$$\|T_k f\|^2_{L^2_\mu} \;\leq\; \|k\|^2_{L^2_{\mu\times\nu}} \|f\|^2_{L^2_\nu}\;.$$

Nun zur Kompaktheit. Aus der Maßtheorie sei bekannt, dass $k \in L^2_{\mu\times\nu}$ durch Elementarfunktion approximiert werden kann, d.h. es gibt eine Folge messbarer Mengen $E_i^n \subset \Omega$ und $F_j^n \subset \Xi$, sowie $c_{i,j} \in \mathbb{K}$, sodass

$$k_n(\omega,\theta) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}\ \chi_{E_i^n}(\omega)\ \chi_{F_j^n}(\theta),$$

gegeben durch eine Linearkombination charakteristischer Funktionen erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty}\ \|k_n - k\|_{L^2_{\mu\times\nu}} = 0.$$

Wegen der Linearität in k folgt dann nach Obigem

$$\|T_{k_n} - T_k\| \ =\ \|T_{k_n-k}\| \ \leq\ \|k_n - k\|_{L^2_{\mu\times\nu}} \longrightarrow\ 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Zudem gilt

$$(T_{k_n}f)(\omega) \ =\ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \int_{F_j^n} \nu(d\theta) f(\theta) \right) \chi_{E_i^n}\ ,$$

d.h. für alle $f \in L^2_\nu$ gilt

$$T_{k_n}f \in \operatorname{span}\{\chi_{E_1^n},\ldots,\chi_{E_N^n}\}.$$

Somit hat T_{k_n} ein endlich dimensionales Bild, d.h. $T_{k_n} \in \mathcal{F}(L^2_\nu, L^2_\mu)$. Nach Satz 1.54, Kap.1.2, folgt, dass T_k als Norm-Limes von Elementen aus $\mathcal{F}(L^2_\nu, L^2_\mu)$ kompakt ist. □

Das Hilbert-Schmidt Kriterium ist zwar einfach zu überprüfen, aber es gibt sehr viele stetige Operatoren $T_k : L^2_\nu \to L^2_\mu$, für welche es nicht angewendet werden kann. Auch die Kriterien in Satz 1.61 sind leicht zu überprüfen. Um Aussagen über die Stetigkeit von $T_k : L^p_\nu \to L^q_\mu$ herzuleiten, verwenden wir nun eine allgemeine Methode, nämlich die Interpolation auf L^p-Räumen. Hierfür sei $T = T_k$ ein beliebiger Operator, also nicht notwendigerweise ein Integraloperator. Genauer, seien $T_0 : L^{p_0}_\nu \to L^{q_0}_\mu$ und $T_1 : L^{p_1}_\nu \to L^{q_1}_\mu$ beide stetig und gelte $T_0 = T_1 = T$ auf $L^{p_0}_\nu \cap L^{p_1}_\nu$. Nun möchte man T auch auf L^p_ν definieren, was "zwischen $L^{p_0}_\nu$ und $L^{p_1}_\nu$" liegt, im Sinne von folgendem Satz.

Satz 1.64 *(Lyapunov Ungleichung) Sei $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Für $0 \leq \gamma \leq 1$ setzen wir*

$$\frac{1}{p} \ =\ \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}\ .$$

Dann gilt:

$$\|f\|_{L^p_\nu} \ \leq\ \|f\|^{1-\gamma}_{L^{p_0}_\nu}\ \|f\|^{\gamma}_{L^{p_1}_\nu}, \qquad \forall\ f \in L^{p_0}_\nu \cap L^{p_1}_\nu.$$

Falls $p < \infty$, ist zudem $L^{p_0}_\nu \cap L^{p_1}_\nu$ dicht in L^p_ν.

Beweis: Dies folgt direkt aus der Hölder-Ungleichung $\left(\text{in der Version } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$:

$$\|f\|_p \ =\ \|\,|f|^{1-\gamma}|f|^\gamma\|_p \ \leq\ \|\,|f|^{1-\gamma}\|_{\frac{p_0}{1-\gamma}}\ \|\,|f|^\gamma\|_{\frac{p_1}{\gamma}} \ =\ \|f\|^{1-\gamma}_{p_0}\ \|f\|^\gamma_{p_1}.$$

Die Dichteaussage folgt wegen der Dichte der Elementarfunktionen. □

Bemerkung 1.65 In unendlichen Maßräumen, wie z.B. $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$, gilt **nicht** $L^p_\nu \subset L^q_\nu$ für $q \leq p$ (aber in endlichen Maßräumen ist dies richtig).

Satz 1.66 *(M. Riesz 1926, Beweis von Thorin 1939, jetzt genannt Satz von Riesz-Thorin)* *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 \leq \gamma \leq 1$, *und definiere*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\gamma}{q_0} + \frac{\gamma}{q_1}.$$

Die Operatoren

$$T_0 : L_\nu^{p_0} \to L_\mu^{q_0}, \qquad T_1 : L_\nu^{p_1} \to L_\mu^{q_1},$$

seien stetig mit Normen $N(p_0, q_0)$ *und* $N(p_1, q_1)$. *Zudem sei* $T_0 = T_1 = T$ *auf* $L_\nu^{p_0} \cap L_\nu^{p_1}$. *Dann gilt*

$$\|Tf\|_{L_\mu^q} \leq N(p_0, q_0)^{1-\gamma} N(p_1, q_1)^\gamma \|f\|_{L_\nu^p}, \qquad f \in L_\nu^{p_0} \cap L_\nu^{p_1}.$$

Also kann T *stetig fortgesetzt werden zu einem Operator* $T : L_\nu^p \to L_\mu^q$, *dessen Norm* $N(p,q)$ *erfüllt*

$$N(p,q) \leq N(p_0, q_0)^{1-\gamma} N(p_1, q_1)^\gamma.$$

Bemerkungen 1.67

1. Grob zusammengefasst besagt der Satz, dass

$$(x,y) \mapsto \log\left(N\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\right) \quad \text{konvex ist.}$$

2. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, gilt

$$N(p,q) \leq 2\ N(p_0, q_0)^{1-\gamma} N(p_1, q_1)^\gamma.$$

3. Es gibt einen Interpolationssatz von Marcinkiewicz, der mit Maximalungleichungen an den Rändern als Voraussetzung auskommt (siehe z.B. Zhu "Operator Theory in Function Spaces").

Wir benötigen folgendes funktionentheoretisches Hilfsmittel für den Beweis.

Satz 1.68 *(Hadamard'scher Drei-Geraden-Satz) Betrachte den Streifen*

$$S = \{z = \gamma + iy : 0 \leq \gamma \leq 1,\ y \in \mathbb{R}\}$$

und eine beschränkte stetige Funktion $F : S \to \mathbb{C}$, *die auf dem Inneren von* S *analytisch ist. Setze*

$$N(\gamma) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(\gamma + iy)|.$$

Dann gilt

$$N(\gamma) \leq N(0)^{1-\gamma} N(1)^\gamma.$$

Bemerkung 1.69 Es gibt eine Umformulierung, genannt Hadamards Drei-Kreis-Satz. Ein weiteres nahe verwandtes Ergebnis ist der Satz von Phragmen-Lindelöf. Hierbei ersetzt man die Beschränktheit auf einem Halbstreifen durch höchstens exponentielles Wachstum auf einem Kegel.

Beweis: Wir werden das Maximumsprinzip verwenden und als bekannt voraussetzen: Jede analytische Funktion auf einem beschränkten Gebiet nimmt Maximum auf dem Rand an. Falls $N(0) = 0$ oder $N(1) = 0$, ist $F = 0$ und das Resultat ist trivial. Setze $C = \ln \frac{N(0)}{N(1)} \in \mathbb{R}$. Dann betrachte $G(z) = F(z)e^{Cz}$. Es gilt $|G(iy)| \leq N(0)$ und $|G(1+iy)| \leq N(0)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Nach dem Maximumsprinzip gilt also $|G(z)| \leq N(0)$ für alle $z \in S$, was aber direkt den Satz beweist. □

Lemma 1.70 *Sei $T : L^p_\nu \to L^q_\mu$ stetig und q' definiert durch $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Dann gilt*

$$N(p,q) \;=\; \|T\|_{L^p_\nu \to L^q_\mu} \;=\; \sup_{\|f\|_{L^p_\nu}\le 1} \sup_{\|g\|_{L^{q'}_\mu}\le 1} \left| \int \mu(d\omega)\; g(\omega)(Tf)(\omega) \right| .$$

Beweis: Wegen der Hölderungleichung gilt

$$\int \mu(d\omega)\; g(\omega)(Tf)(\omega) \;\le\; \|g\|_{q'}\|Tf\|_q \;\le\; \|g\|_{q'} N(p,q)\|f\|_p.$$

Andererseits gilt für $F = Tf \in L^q_\mu$

$$\|F\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\le 1} \left| \int \mu(d\omega) g(\omega) F(\omega) \right| .$$

Dies ist genau die Dualität von L^q_μ und $L^{q'}_\mu$, die wie folgt nachgewiesen werden kann. Zunächst kann die Hölderungleichung wie oben verwandt werden und zudem führt die Wahl

$$g(\omega) \;=\; \frac{\overline{F(\omega)}|F(\omega)|^{\frac{q}{q'}-1}}{\|F\|_q^{\frac{q}{q'}}} \;=\; \frac{\overline{F(\omega)}|F(\omega)|^{q-2}}{\|F\|_q^{q-1}}$$

zu

$$\left| \int \mu(d\omega) g(\omega) F(\omega) \right| \;=\; \int \mu(d\omega) \frac{|F(\omega)|^q}{\|F\|_q^{q-1}} \;=\; \|F\|_q,$$

und außerdem

$$\|g\|_{q'} = \left(\int \mu(d\omega)\; \frac{|F(\omega)|^q}{\|F\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q'}} = 1,$$

wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \iff 1 + \frac{q}{q'} = q \iff \frac{q}{q'} - 1 = q - 2$ und $\frac{q}{q'} = q - 1$. Somit

$$\sup_{\|f\|_p\le 1} \sup_{\|g\|_{q'}\le 1} \left| \int \mu(d\omega)\; (Tf)(\omega) g(\omega) \right| \;=\; \sup_{\|f\|_p = 1} \|Tf\|_q \;=\; N(p,q),$$

was das Lemma beweist. □

Beweis von Satz 1.66: Zunächst sind die Fälle $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ trivial. Also sei $\gamma \in (0,1)$ und somit $p < \infty$ und $q < \infty$. Zu $p \in [1,\infty]$ bezeichnet p' immer den konjugierten Exponent, d.h. $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Nach Lemma 1.70 und wegen der Dichte von Elementarfunktionen in L^p-Räumen (hier $p < \infty$), reicht es zu zeigen:

$$\left| \int \mu(d\omega)\; g(\omega)(Tf)(\omega) \right| \;\le\; N(p_0,q_0)^{1-\gamma} N(p_1,q_1)^\gamma,$$

für

$$f \;=\; \sum_{j=1}^J f_j \chi_{F_j}\;, \qquad f_j \in \mathbb{C},\; F_j \in \mathcal{B}(\Xi),\; \|f\|_{L^p_\nu} = 1,$$

$$g \;=\; \sum_{i=1}^I g_i \chi_{G_i}\;, \qquad g_i \in \mathbb{C},\; G_i \in \mathcal{B}(\Omega),\; \|g\|_{L^{q'}_\mu} = 1.$$

Für $z = \gamma + iy$ setze

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\,, \qquad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}\,.$$

Dann $p = p(\gamma)$, $p_0 = p(0)$, und $q = q(\gamma)$ etc. Außerdem gilt

$$\frac{1}{q'(z)} = 1 - \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}\,.$$

Setze

$$f_z = |f|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f}{|f|}\,, \qquad g_z = |g|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g}{|g|}\,,$$

wobei hier $\frac{0}{0} = 0$. Also gilt $f_\gamma = f$ und $g_\gamma = g$. Letztendlich definieren wir $F : S \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) = \int \mu(d\omega)\; g_z(\omega)(Tf_z)(\omega), \qquad z = \gamma + iy \in S.$$

Die Aussage des Satzes ist nun äquivalent zu

$$|F(\gamma)| \;\le\; N(p_0, q_0)^{1-\gamma} N(p_1, q_1)^{\gamma}.$$

Dies folgt aus dem Hadamard'schen Drei-Geraden Satz, wenn wir nachgewiesen haben, dass:

(i) F analytisch auf dem Inneren von S und beschränkt auf S ist,

(ii) $\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(iy)| \le N(p_0, q_0)$,

(iii) $\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(1+iy)| \le N(p_1, q_1)$.

Zu (i): Explizit ausgeschrieben ist F gegeben durch

$$F(z) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} |f_j|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f_j}{|f_j|} |g_i|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g_i}{|g_i|} \int_{G_i} \mu(d\omega)(T\chi_{F_j})(\omega),$$

Nun ist $|f_j|^{\frac{p}{p(z)}} = |f_j|^{p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)}$ analytisch (weil durch die Exponentialfunktion gegeben) und zudem ist

$$\left| |f_j|^{p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} \right| = |f_j|^{p\left(\frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}\right)}.$$

Dies besagt, dass dieser Faktor beschränkt auf S ist. Ähnlich zeigt man, dass $|g|^{\frac{q'}{q'(z)}}$ analytisch und beschränkt ist. Somit ist auch F als endliches Produkt und endliche Linearkombination analytisch auf dem Inneren von S und beschränkt auf S.

Zu (ii): Nach der Hölder-Ungleichung und der Voraussetzung gilt

$$|F(iy)| \;\le\; \|g_{iy}\|_{L_\mu^{q'_0}} \|Tf_{iy}\|_{L_\mu^{q_0}} \;\le\; \|g_{iy}\|_{L_\mu^{q'_0}}\, N(p_0, q_0)\, \|f_{iy}\|_{L_\nu^{p_0}}$$

und

$$\begin{aligned} \|f_{iy}\|_{L_\nu^{p_0}}^{p_0} &= \sum_{j=1}^{J} \left| |f_j|^{\frac{p}{p(iy)}} \right|^{p_0} \nu(F_j)\,, \quad \text{da} \quad \frac{p}{p(iy)} = \frac{p}{p_0} + iy\left(\frac{p}{p_0} + \frac{p}{p_1}\right)\,, \\ &= \sum_{j=1}^{J} |f_j|^p \nu(F_j) \;=\; \|f\|_{L_\nu^p}^p \;=\; 1\,, \quad \text{da} \quad |a^{\frac{p}{p(iy)}}| = |a|^{\frac{p}{p_0}}\,. \end{aligned}$$

Genauso verifiziert man $\|g_{iy}\|_{L^{q_0'}_\mu} = \|g\|_{L^{q'}_\mu} = 1$. Der Beweis von (iii) ist analog. $\square$

Wir kommen zu einer ersten Anwendung der Interpolation. Die Fourier-Transformation ist zunächst definiert durch

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}), \qquad (\mathcal{F}f)(p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-ixp} f(x).$$

Hierbei ist der Integralkern $k(p,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-ixp}$, sodass in der Tat nach Satz 1.61 (i), der auch gilt wenn Ω durch das nicht-kompakte $\mathbb{R}$ ersetzt wird:

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1\to L^\infty} \;\le\; \sup_{p\in\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}} |k(p,x)| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Außerdem sei das Parseval-Theorem bekannt, welches besagt, dass $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ eine Isometrie ist, somit gilt $\|\mathcal{F}\|_{L^2\to L^2} = 1$. Einen detaillierten Beweis werden wir etwas später im Kapitel über Hilberträume liefern. Als Begründung diene vorerst folgende formale Rechung:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}f\|^2_{L^2} &= \int dp \int dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{ix'p}\; \overline{f(x')} \int dx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-ixp} f(x) \\
&= \int dx \int dx' \underbrace{\left(\int dp\; \frac{1}{2\pi}\; e^{ip(x'-x)}\right)}_{\delta(x'-x)} \overline{f(x')} f(x) \\
&= \|f\|^2_{L^2}\;.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Unitarität zeigen wir nun folgenden Satz.

Satz 1.71 *(Hausdorff-Young Ungleichung) Für $1 \le p \le 2$ gilt*

$$\|\mathcal{F}\|_{L^p\to L^{\frac{p}{p-1}}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{2-p}{p}}.$$

Beweis: Wir wenden den Satz von Riesz-Thorin an auf $(p_0,q_0) = (2,2)$ und $(p_1,q_1) = (1,\infty)$. Dann bestimmen wir γ, sodass

$$\frac{1}{p} \;=\; \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1} \;=\; \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{1} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\;,$$

das heißt $\gamma = \frac{2}{p} - 1$. Dann ist

$$\frac{1}{q} \;=\; \frac{1-\gamma}{q_0} + \frac{\gamma}{q_1} \;=\; \frac{1-\gamma}{2} \;=\; \frac{1-\frac{2}{p}+1}{2} \;=\; \frac{p-1}{p}.$$

Also folgt wegen

$$\|\mathcal{F}\|_{L^p\to L^{\frac{p}{p-1}}} \;\le\; \|\mathcal{F}\|^{1-\gamma}_{L^2\to L^2}\|\mathcal{F}\|^{\gamma}_{L^1\to L^\infty} \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{2-p}{p}}$$

der Satz. $\square$

Die nächste Anwendung betrifft die Faltung auf $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \,:\, 0 \le \theta < 2\pi\}$. Für $f, g \in L^1 = L^1\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$ definiere

$$(f * g)(e^{i\omega}) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\; f(e^{i\theta})\; g(e^{i(\omega-\theta)}).$$

Es gilt $f * g \in L^1$, weil nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1} &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \left| \int \frac{d\theta}{2\pi} \; f(e^{i\theta}) g(e^{i(\omega-\theta)}) \right| \\
&\leq \int \frac{d\theta}{2\pi} \left(\int \frac{d\omega}{2\pi} \; |g(e^{i(\omega-\theta)})| \right) \; |f(e^{i\theta})| \\
&= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} .
\end{aligned}$$

Somit ist $(L^1, +, *, \|.\|_{L^1})$ eine Banachalgebra, welche zudem $f * g = g * f$ erfüllt, also kommutativ ist. Nun kann dies wieder zur Interpolation verwandt werden.

Satz 1.72 *(Young'sche Ungleichung) Sei* $1 \leq p, q \leq \infty$ *und* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ *erfülle* $r \geq 0$. *Dann gilt*

$$\|f * g\|_{L^r} \;\leq\; \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \; .$$

Beweis: Seien $f \in L^p$ und $g \in L^q$. Da $L^p, L^q \subset L^1$ (in einem endlichen Maßraum sind nur Singularitäten relevant), ist $f * g \in L^1$. Betrachte für festes $f \in L^1$ den Operator $Tg = f * g$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^1 \to L^1} &\leq \|f\|_{L^1} \quad \text{(nach Obigem)} \\
\|T\|_{L^\infty \to L^\infty} &\leq \|f\|_{L^1} \quad \text{(nach Satz 1.61)}
\end{aligned}$$

Interpolation zwischen $(1,1)$ und (∞,∞) gibt also für $1 \leq q \leq \infty$ nach dem Satz von Riesz-Thorin

$$\|T\|_{L^q \to L^q} \;\leq\; \|f\|_{L^1} \quad \text{(da gleiche Normen auf rechter Seite),}$$

d.h. ausgeschrieben

$$\|f * g\|_{L^q} \;\leq\; \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q} \; . \tag{1.6}$$

Nun betrachte für festes $g \in L^q$ den Operator $\widetilde{T} f = f * g$. Dann gilt:

$$\|\widetilde{T}\|_{L^1 \to L^q} \leq \|g\|_{L^q} \; , \quad \text{(Klar nach Obigem (1.6).)}$$

$$\|\widetilde{T}\|_{L^{q'} \to L^\infty} \leq \|g\|_{L^q} \; , \quad \text{wobei } \tfrac{1}{q'} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Letzteres folgt direkt aus der Hölder-Ungleichung

$$|(f * g)(e^{i\omega})| \;\leq\; \int \frac{d\theta}{2\pi} |f(e^{i\theta})||g(e^{i(\omega-\theta)})| \;\leq\; \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q} \; .$$

Jetzt können wir Interpolation zwischen $(1,q)$ und (q',∞) zu (p,r) durchführen. Hierzu bestimmen wir zunächst γ:

$$\frac{1}{p} \;=\; \frac{1-\gamma}{1} + \frac{\gamma}{q'} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \left(\frac{1}{q'} - 1 \right) \;=\; \frac{1}{p} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \frac{1}{q} \;=\; \frac{1}{p'} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \;=\; \frac{q}{p'} \; .$$

Es gilt in der Tat $\gamma \leq 1$, da $\frac{q}{p'} = q \left(1 - \frac{1}{p} \right) \;\leq\; 1$, was äquivalent zur Annahme $1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq 0$ ist. Also

$$\frac{1}{r} \;=\; \frac{1-\gamma}{q} + \frac{\gamma}{\infty} \;=\; \frac{1 - \frac{q}{p'}}{q} \;=\; \frac{1}{q} - \frac{1}{p'} \;=\; \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 \; ,$$

sodass

$$\|\widetilde{T}\|_{L^p \to L^r} \;\leq\; \|\widetilde{T}\|_{L^1 \to L^q}^{1-\gamma} \|\widetilde{T}\|_{L^{q'} \to L^\infty}^{\gamma} \;=\; \|g\|_{L^q},$$

was genau die Young'sche Ungleichung ist. $\square$

Liste weiterer Integraltransformationen (der Vollständigkeit halber bzw. zur Information)

A) Die Hilbert-Transformation $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist definiert mit dem Cauchy'schen Prinzipalwert:

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi}⨍ dy\ \frac{f(y)}{x-y} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}\setminus B_\epsilon(x)} dy\ \frac{f(y)}{x-y}$$

Das wichtigste Ergebnis ist

Satz H ist eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R})$ und $H^2 = -\mathbb{1}$. Außerdem ist H stetig auf $L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$.

Bemerkungen

1. Die Hilberttransformation ist das Standardbeispiel eines singulären Integraloperators. Diese sind Thema der harmonischen Analysis.
2. Connes' quantisierte Ableitung $đf = [H, f]$ einer Funktion f auf $\mathbb{S}^1$ ist ein Operator auf $L^2(\mathbb{R})$, welcher mit Hilfe der Hilberttransformation definiert wird.
3. Die Hilberttransformation verbindet Real- und Imaginärteil analytischer Funktion auf $\mathbb{C}_+$.

B) Die Laplace Transformation ist definiert durch

$$(Lf)(x) = \int_0^\infty dy\, e^{-xy} f(y)\ , \qquad x \in \mathbb{C},\ \Re e\,(x) > 0,\ f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Sie ist analytisch in x auf der rechten Halbebene. Wenn x hier auf $\mathbb{R}_+$ eingeschränkt wird, erhält man einen Operator $L : L^2(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ und es gilt dann:

Satz $\|L\|_{L^2 \to L^2} = \sqrt{\pi}$

C) Die Hilbert-Hankel Transformation $K : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ ist definiert durch

$$(Kf)(x) = \int_0^\infty dy\ \frac{f(y)}{x+y}$$

Satz $\|K\|_{L^2 \to L^2} = 1$ und K ist stetig auf L^p für $1 < p < \infty$.

D) Es gibt viele andere Integraltransformationen, z.B. die Mellin-Transformation und die Wigner-Transformation.

2 Hilberträume

2.1 Definition und wichtigste Eigenschaften

Definition 2.1 *Sei* $(X, +, \cdot, \mathbb{K})$ *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *(wieder ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*). Dann heißt eine Abbildung* $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ *Skalarprodukt genau dann, wenn Folgendes für alle* $x, x', y \in X$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $\langle y|x + \lambda x'\rangle = \langle y|x\rangle + \lambda \langle y|x'\rangle$ *(Linearität im zweiten Argument)*

(ii) $\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$ *(Symmetrie)*

(iii) $\langle x|x\rangle \geq 0$ *(Positivität)*

(iv) $\langle x|x\rangle = 0 \implies x = 0$ *(Nicht-Entartung)*

Man setzt dann $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ *(wir zeigen weiter unten, dass dies Norm ist).*

Definition 2.2 *Sei* $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt, auch genannt ein Prä-Hilbertraum. Dann definieren wir*

(i) $x, y \in X$ *orthogonal (Kurzschreibweise* $x \perp y$*)* $\iff \langle x|y\rangle = 0.$

(ii) $(x_i)_{i\in I}$ *orthogonale Familie* $\iff x_i \perp x_j \ \forall\ i, j \in I,\ i \neq j.$

(iii) $(x_i)_{i\in I}$ *orthonormierte Familie* $\iff (x_i)_{i\in I}$ *orthogonale Familie und* $\|x_i\| = 1\ \forall\ i \in I.$

Satz 2.3 *Sei* $(x_n)_{n=1,\dots,N}$ *orthonormiert in* $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$*. Dann gilt* $\forall\ x \in X$*:*

$$\|x\|^2 \ = \ \sum_{n=1}^{N} |\langle x|x_n\rangle|^2 + \|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x_n|x\rangle\, x_n\|^2 \quad \textit{(Pythagoras)}\ ,$$

und

$$\|x\|^2 \ \geq \ \sum_{n=1}^{N} |\langle x|x_n\rangle|^2 \quad \textit{(Bessel'sche Ungleichung).}$$

Beweis: Setze $y = \sum_{n=1}^{N} \langle x_n|x\rangle\, x_n$. Dann gilt $(x-y)\perp y$, da

$$\begin{aligned} \langle x - y|y\rangle \ &= \ \sum_{n=1}^{N} \langle x_n|x\rangle\, \langle x - y|x_n\rangle \\ &= \ \sum_{n=1}^{N} \langle x_n|x\rangle \left(\langle x|x_n\rangle - \sum_{m=1}^{N} \overline{\langle x_m|x\rangle}\, \underbrace{\langle x_m|x_n\rangle}_{\delta_{n,m}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Somit

$$\|x\|^2 \ = \ \langle x|x\rangle \ = \ \langle x - y + y|x - y + y\rangle \ = \ \langle x - y|x - y\rangle + \langle y|y\rangle \ ,$$

was den Beweis beendet. □

Korollar 2.4 *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Seien* $x, y \in (X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$*. Dann*

$$|\langle x|y\rangle| \ \leq \ \|x\|\|y\|.$$

Begründung: Der Fall mit $y = 0$ ist trivial. Sonst wende die Bessel-Ungleichung auf die einelementige orthonormale Menge $\frac{y}{\|y\|}$ an:

$$\|x\|^2 \ \geq \ |\langle x|\frac{y}{\|y\|}\rangle|^2 \ = \ \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\|y\|^2}\ ,$$

was schon die Ungleichung ist. □

Satz 2.5 *Sei* $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt und definiere* $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$*. Dann ist* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Vektorraum.*

Begründung: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ist klar, ebenso wie die Positivität und die Nicht-Entartung. Nun zur Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\,\Re e\,\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\ , \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwandt haben. □

Nun zu einer weiteren geometrischen Information.

Satz 2.6 *Sei $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt*

(i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(Parallelogrammregel)*

(ii) *Das Skalarprodukt kann durch die Norm $\|.\|$ berechnet werden mit der Polarisationsidentität:*

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right]\ , \quad \textit{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}\ ,$$

und

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\,[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]\ , \quad \textit{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\ .$$

Beweis: (i) ist eine rein algebraische Rechnung:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y|x+y\rangle + \langle x-y|x-y\rangle \\ &= \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle + \langle x|x\rangle - \langle x|y\rangle - \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle \\ &= 2\,\langle x|x\rangle + 2\,\langle y|y\rangle\ , \end{aligned}$$

und (ii) verifiziert man analog. □

Satz 2.7 *(von Neumann) Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann wird $\|.\|$ vom Skalarprodukt induziert genau dann, wenn $\|.\|$ die Parallelogrammregel erfüllt. Das Skalarprodukt ist dann durch Satz 2.6* (ii) *gegeben.*

Beweis: "$\Longrightarrow$" klar nach Satz 2.6

"$\Longleftarrow$" Wir verifizieren, dass die Formel die Axiome des Skalarprodukts erfüllt, unter Verwendung der Parallelogrammregel. Wir betrachten der Einfachheit halber lediglich den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Die Symmetrie folgt aus

$$\langle x|y\rangle = \tfrac{1}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \tfrac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \langle y|x\rangle\ .$$

Für die Linearität (hier im ersten Argument) verwenden wir

$$\langle x+x'|y\rangle = \tfrac{1}{4}(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2)\ .$$

Es gilt, nach der Parallelogramm-Regel,

$$\begin{aligned} \|x+x'+y\|^2 &= 2\,\|x+y\|^2 + 2\,\|x'\|^2 - \|x-x'+y\|^2 \\ &= 2\,\|x'+y\|^2 + 2\,\|x\|^2 - \|x'-x+y\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 + \|x'\|^2 + \|x'+y\|^2 + \|x\|^2 - \tfrac{1}{2}(\|x-x'+y\|^2 + \|x'-x+y\|^2)\ , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das Mittel der beiden ersten Terme genommen haben. Ebenso gilt

$$\|x+x'-y\|^2 \;=\; \|x-y\|^2+\|x'\|^2+\|x'-y\|^2+\|x\|^2-\tfrac{1}{2}\left(\|x-x'-y\|^2+\|x'-x-y\|^2\right) ,$$

Zusammen folgt also:

$$\langle x+x'|y\rangle \;=\; \tfrac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\|x'+y\|^2-\|x'-y\|^2\Big) \;=\; \langle x|y\rangle+\langle x'|y\rangle \ .$$

Zuletzt zeigen wir

$$\langle \lambda x|y\rangle \;=\; \lambda\,\langle x|y\rangle \ . \tag{2.1}$$

Dies gilt für $\lambda\in\mathbb{N}$ wegen des eben Gezeigten, und offensichtlich gilt es auch für $\lambda=0$. Außerdem zeigt

$$\langle -x|y\rangle \;=\; \tfrac{1}{4}\left(\|-x+y\|^2-\|-x-y\|^2\right) \;=\; -\langle x|y\rangle \ ,$$

dass (2.1) für $\lambda=-1$ und somit $\lambda\in\mathbb{Z}$ gilt. Weiter für $\lambda=\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$ erhält man (2.1) aus

$$m\,\langle\lambda x|y\rangle \;=\; \langle m\lambda x|y\rangle \;=\; \langle nx|y\rangle \;=\; n\,\langle x|y\rangle \ .$$

Außerdem sind beide Seiten von (2.1) stetig in λ $\big($wegen der Stetigkeit von $\|.\|\big)$, sodass letztendlich (2.1) für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ richtig ist. □

Definition 2.8 (i) *Ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein Hilbertraum.*

(ii) *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Hilberträume und $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}'$ linearer Operator. Dann heißt U unitär (bzw. orthogonal, falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) genau dann, wenn U bijektiv ist und $\langle Ux|Uy\rangle_{\mathcal{H}'}=\langle x\mid y\rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $x,y\in\mathcal{H}$.*

Beispiele 2.9 1. $(\mathbb{C}^n,\langle .|.\rangle_{\mathbb{C}^n})$ ist ein Hilbertraum, wobei $\langle .|.\rangle_{\mathbb{C}^n}$ das euklidische Skalarprodukt ist.

2. $\ell^2(\mathbb{N})$ bzw. allgemeiner $\ell^2(I)=\{(x_i)_{i\in I}\ :\ \text{abzählbar viele } x_i\neq 0 \text{ und } \sum_{i\in I}|x_i|^2<\infty\}$ versehen mit $\langle (x_i)_{i\in I}\mid (y_i)_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\overline{x_i}y_i$ ist ein Hilbertraum. Beachte, dass im Skalarprodukt lediglich abzählbar viele Summanden nicht verschwinden.

3. Sei (Ω,μ) ein Maßraum. Dann ist $L^2(\Omega,\mu)$ ein Hilbertraum, wenn man definiert

$$\langle f|g\rangle \;=\; \int \mu(d\omega)\ \overline{f(\omega)}g(\omega)\ .$$

Etwas allgemeiner kann man vektorwertige Funktionen $f:\Omega\to\mathbb{C}^n$ betrachten und dann $L^2(\Omega,\mu,\mathbb{C}^n)$ definieren, worauf ein Skalarprodukt gegeben ist durch

$$\langle f|g\rangle=\int \mu(d\omega)\,\langle f(\omega)|g(\omega)\rangle_{\mathbb{C}^n}\ .$$

Noch allgemeiner ist $L^2(\Omega,\mu,\mathcal{H})$ der Raum der schwach messbaren Funktionen auf Ω mit Werten in einem separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, wobei $f:\Omega\to\mathcal{H}$ schwach messbar ist genau dann, wenn $\Omega\mapsto\langle x|f(\omega)\rangle\in\mathbb{C}$ messbar ist für alle $x\in\mathcal{H}$.

4. Sei $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Hilberträumen. Setze

$$\mathcal{H} \;=\; \bigoplus_{n\geq 1}\mathcal{H}_n \;=\; \left\{(x_n)_{n\geq 1}\ \middle|\ x_n\in\mathcal{H}_n \text{ mit } \sum_{n\geq 1}\|x_n\|^2_{\mathcal{H}_n}<\infty\right\} ,$$

und

$$\langle (x_n)_{n\geq 1} | (y_n)_{n\geq 1}\rangle \;=\; \sum_{n\geq 1} \langle x_n|y_n\rangle_{\mathcal{H}_n} \;\; .$$

Dann ist die "Direkte Summe" $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbert-Raum.

Folgender Satz gilt auch in gleichmäßig konvexen Banachräumen (Beweis mit Hahn-Banach, siehe Lax Theorem 8, Kapitel 5).

Satz 2.10 *Sei $Y \subset \mathcal{H}$ eine abgeschlossene, nicht-leere konvexe Teilmenge eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ (z.B. ein abgeschlossener Unterraum). Für alle $x \in \mathcal{H}$ gibt es dann ein eindeutiges $y \in Y$ mit minimalem Abstand zu x.*

Beweis: Setze $d = \inf_{y\in Y} \|x - y\|$. Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in Y mit $\lim \|x - y_n\| = d$. Dann gilt wegen der Parallelogrammregel

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\;\|y_n - x\|^2 + 2\;\|y_m - x\|^2 - \| - 2x + y_n + y_m\|^2 \\
&= 2\;\|y_n - x\|^2 + 2\;\|y_m - x\|^2 - 4\;\|x - \frac{1}{2}\;(y_n + y_m)\|^2 \\
&\leq 2\;\|y_n - x\|^2 + 2\;\|y_m - x\|^2 - 4\;d^2\;,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\frac{1}{2}\;(y_n + y_m) \in Y$ nach der Konvexitätsannahme an Y. Da $(\|x - y_n\|)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, existiert ein $N(\epsilon)$, sodass für $n, m \geq N(\epsilon)$

$$\|y_n - y_m\|^2 \;\leq\; 2\;d^2 + \epsilon + 2\;d^2 + \epsilon - 4\;d^2 = 2\epsilon\;.$$

Somit ist also $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in Y. Da Y abgeschlossen ist, existiert $\lim_n y_n = y \in Y$. Außerdem impliziert die Stetigkeit der Norm

$$\|x - y\| \;=\; \lim_n \|x - y_n\|\;,$$

sodass y den Abstand minimisiert.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei y' ein weiterer den Abstand minimierender Vektor. Dann

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|y - y'\|^2 \\
&= \|(y - x) - (y' - x)\|^2 \\
&= 2\;\|y - x\|^2 + 2\;\|y' - x\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 \\
&= 4\;d^2 - 4\;\|x - \frac{1}{2}\;(y + y')\| \\
&\leq 4\;d^2 - 4\;d^2 \leq 0\;.
\end{aligned}$$

Somit ist $y = y'$. □

Satz 2.11 *Sei $Y \in \mathcal{H}$ ein Unterraum eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$. Definiere sein orthogonales Komplement als*

$$Y^\perp \;=\; \{z \in \mathcal{H}\;:\;\langle z|y\rangle \;=\; 0\;\forall\;y \in Y\}\;.$$

Es gilt

(i) *$Y^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum.*

(ii) *Sei Y abgeschlossen. Dann kann jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig zerlegt werden als $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Y^\perp$.*

In anderen Worten: $\mathcal{H} \cong Y \oplus Y^\perp$ mit Isomorphismus $(y, z) \mapsto y \oplus z$, wobei das Skalarprodukt auf der direkten Summe wie das euklidische Skalarprodukt definiert wird.

Die lineare Abbildung $P : \mathcal{H} \to Y \subset \mathcal{H}$ mit $P(x) = y$ heißt Projektion auf Y. Es gilt $P^2 = P$.

(iii) *Für jeden Unterraum Y ist der Abschluss gegeben durch $\overline{Y} = (Y^\perp)^\perp$.*

Beweis: (i) Zunächst zur Unterraumeigenschaft. Seien $z, z' \in Y^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $y \in Y$, dass

$$\langle z + \lambda z' | y \rangle \;=\; \langle z|y \rangle + \overline{\lambda}\, \langle z'|y \rangle \;=\; 0\ .$$

Somit $z+\lambda z' \in Y^\perp$. Nun zur Abgeschlossenheit. Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $Y^\perp$ und $z = \lim z_n \in \mathcal{H}$. Dann haben wir für alle $y \in Y$

$$\langle z|y \rangle \;=\; \langle z - z_n|y \rangle + \langle z_n|y \rangle \;=\; \langle z - z_n|y \rangle\ .$$

Also

$$|\langle z|y \rangle| \;\leq\; \|z - z_n\| \|y\| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\ .$$

Somit $\langle z|y \rangle = 0$ und also $z \in Y^\perp$.

(ii) Y ist abgeschlossen nach Voraussetzung und konvex, weil es ein Unterraum ist. Nach Satz 2.10 gibt es zu $x \in \mathcal{H}$ ein $y \in Y$ mit minimalem Abstand $d = \|x - y\|$. Wir setzen $z = x - y$, sodass $d = \|z\|$. Zu zeigen ist nun $z \in Y^\perp$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und beliebiges $y' \in Y$ gilt:

$$d^2 \;\leq\; \|x - \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in Y}\|^2 \;=\; \|z - \lambda y'\|^2 \;=\; \|z\|^2 - 2\lambda\, \Re e\, \langle z|y' \rangle + \lambda^2 \|y'\|^2\ .$$

Somit $\Re e\, \langle z|y' \rangle = 0$, weil ansonsten die Ungleichung verletzt ist für kleine λ mit adäquatem Vorzeichen. Das gleiche Argument mit $i\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, zeigt $\Im m\, \langle z|y' \rangle = 0$. Zusammen folgt also $\langle z|y' \rangle = 0$ für $y' \in Y$, d.h. $z \in Y^\perp$.

Zuletzt zur Eindeutigkeit: Sei $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y' \in Y$ und $z, z' \in Y^\perp$. Dann ist $\underbrace{y - y'}_{\in Y} = \underbrace{z' - z}_{\in Y^\perp}$ orthogonal zu sich selbst, was $y - y' = 0 = z' - z$ impliziert.

Nun zu (iii): Da $Y^\perp$ abgeschlossen ist, gilt nach (ii), dass $\mathcal{H} = Y^\perp \oplus (Y^\perp)^\perp$. Falls Y abgeschlossen ist, gilt zudem $\mathcal{H} = Y^\perp \oplus Y$ (jeweils mit eindeutigen Zerlegungen). Also ist $Y = (Y^\perp)^\perp$ für Y abgeschlossen. Weil für $y \in Y$ gilt $\langle y|z \rangle = 0$ für alle $z \in Y^\perp$, ist offensichtlich $y \in (Y^\perp)^\perp$, sodass $Y \subset (Y^\perp)^\perp$. Da aber $(Y^\perp)^\perp$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{Y} \subset (Y^\perp)^\perp$. Außerdem ist $Y \subset \overline{Y}$, sodass $Y^\perp \supset \overline{Y}^\perp$. Zusammen $(Y^\perp)^\perp \subset (\overline{Y}^\perp)^\perp = \overline{Y}$ und somit $\overline{Y} = (Y^\perp)^\perp$. □

Satz 2.12 *Wenn Y ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, so ist der Quotientenraum $\mathcal{H}/Y$ kanonisch isomorph zu $Y^\perp$:*

$$\mathcal{H}/Y \;\cong\; Y^\perp\ .$$

Der isometrische Isomorphismus ist durch $\pi|_{Y^\perp} : Y^\perp \to \mathcal{H}/Y$ gegeben, wobei π die kanonische Projektion ist (siehe Satz 1.28).

Beweis: Dies ist eine Anwendung von den Sätzen 2.10 und 2.11. Es ist eine gute Übung alle Details auszufüllen. □

Satz 2.13 *(Riesz-Frechet'scher Darstellungssatz, oft auch Riesz-Lemma genannt)*
Jedes stetige Funktional $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{K})$ ist von der Form

$$T(x) \;=\; \langle y_T | x \rangle \;, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Hierbei ist $y_T \in \mathcal{H}$ eindeutig und $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathbb{K})}$.

Beweis: Sei

$$N \;=\; \{x \in \mathcal{H} \,:\, Tx = 0\} \;=\; T^{-1}(\{0\}).$$

Nun ist N abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung T. Ist $N = \mathcal{H}$, so ist $T = 0$ und man kann $y_T = 0$ wählen. Sei also jetzt $N \neq \mathcal{H}$ und $x_0 \notin N$. Gemäß Satz 2.11 zerlegen wir $x_0 = y_0 + z_0$ mit $y_0 \in N^{\perp}$ und $z_0 \in N$. Dann setzen wir

$$y_T \;=\; \frac{\overline{Ty_0}}{\|y_0\|^2}\, y_0 \;,$$

und zeigen, dass dies die gewünschten Eigenschaften hat. Hierzu zerlegen wir ein beliebiges $x \in \mathcal{H}$ wie folgt:

$$x \;=\; \left(x - \frac{Tx}{Ty_0}\, y_0 \right) + \frac{Tx}{Ty_0}\; y_0 \;.$$

Da der erste Summand in N ist und $y_T \perp N$, gilt jetzt:

$$\begin{aligned} \langle y_T | x \rangle \;&=\; \langle y_T \mid \left(x - \frac{Tx}{Ty_0}\, y_0 \right) \rangle + \langle \frac{\overline{Ty_0}}{\|y_0\|^2} y_0 \mid \frac{Tx}{Ty_0}\, y_0 \rangle \\ &=\; 0 + \frac{Ty_0}{\|y_0\|^2}\, \frac{Tx}{Ty_0}\, \langle y_0 | y_0 \rangle \\ &=\; Tx \;. \end{aligned}$$

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $y' \in \mathcal{H}$ ein weiterer Vektor, sodass $Tx = \langle y' | x \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|y' - y_T\|^2 \;&=\; \langle y' - y_T | y' - y_T \rangle \\ &=\; \langle y' | y' - y_T \rangle - \langle y_T | y' - y_T \rangle \\ &=\; T(y' - y_T) - T(y' - y_T) \\ &=\; 0 \;, \end{aligned}$$

sodass $y' = y_T$. Somit ist $\mathcal{H} = N \oplus \operatorname{span}(y_0)$. Zuletzt zur Operatornorm. Es gilt

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\|\le 1} |Tx| \;=\; \sup_{\|x\|\le 1} |\, \langle y_T | x \rangle \,| \;\le\; \sup_{\|x\|\le 1} \|y_T\| \|x\| \;=\; \|y_T\| \;,$$

und

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\|\le 1} |Tx| \;\ge\; \left| T\, \frac{y_T}{\|y_T\|} \right| \;=\; \langle y_T \mid \frac{y_T}{\|y_T\|} \rangle \;=\; \|y_T\| \;,$$

und der Beweis ist vollständig. □

Folgende Verallgemeinerung des Riesz-Lemmas ist oft hilfreich, insbesondere für Existenzaussagen für Differentialgleichungen.

Satz 2.14 *(Lax-Milgram Lemma) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ sei eine beschränkte und positive Sesquilinearform, d.h. es gilt*

(i) *$y \in \mathcal{H} \mapsto B(y,x)$ ist antilinear für alle $x \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H} \mapsto B(y,x)$ ist linear für alle $y \in \mathcal{H}$.*

(ii) *B ist beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit*

$$B(x,y) \;\leq\; C\,\|x\|\,\|y\| \;.$$

(iii) *B ist positiv, d.h. es gibt ein $b > 0$ mit*

$$B(x,x) \;\geq\; b\,\|x\|^2 \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H} \;.$$

Dann existiert zu jedem Funktional $T \in B(\mathcal{H},\mathbb{K})$ genau ein $y_T \in \mathcal{H}$ mit

$$Tx \;=\; B(y_T, x) \;.$$

Beweis: Da $x \in \mathcal{H} \mapsto B(y,x)$ ein stetiges lineares Funktional ist, besagt das Lemma von Riesz, dass es genau ein $z = z(y) \in \mathcal{H}$ mit

$$B(y,x) \;=\; \langle z|x\rangle$$

gibt. Zudem ist z linear von y abhängig, sodass

$$Z \;=\; \{z = z(y) \;:\; y \in \mathcal{H}\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{H}$ ist.

Erste Behauptung: Z ist abgeschlossen. In der Tat, für die Wahl $x = y$ erhält man $B(y,y) = \langle z|y\rangle$. Somit folgt nach Voraussetzung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$b\|y\|^2 \;\leq\; B(y,y) \;\leq\; \|z\|\,\|y\| \;,$$

sodass

$$b\,\|y\| \;\leq\; \|z\| \;. \tag{2.2}$$

Sei nun $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in Z und $(y_n)_{n\geq 1}$ eine zugehörige Folge in $\mathcal{H}$, sodass

$$B(y_n, x) \;=\; \langle z_n|x\rangle \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H} \;.$$

Unter Verwendung der Anti-Linearität von B und $\langle .|.\rangle$ im ersten Argument erhält man

$$B(y_n - y_m, x) \;=\; \langle z_n - z_m|x\rangle \;.$$

Mit (2.2) folgt nun $b\,\|y_n - y_m\| \leq \|z_n - z_m\|$, sodass $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist, die also konvergiert.

Seien jetzt $y = \lim y_n$ und $z = \lim z_n$. Wegen der Stetigkeit von B (gemäß Voraussetzung (ii)) und von $\langle .|.\rangle$ gilt

$$B(y,x) \;=\; \lim_n B(y_n,x) \;=\; \lim_n \langle z_n|x\rangle = \langle z|x\rangle \;,$$

aber das heißt $z \in Z$ und somit folgt die erste Behauptung.

Zweite Behauptung: $Z = \mathcal{H}$. Dies werden wir durch einen Widerspruchsbeweis zeigen. Sei also $Z \neq \mathcal{H}$. Weil Z abgeschlossen ist, existiert nach Satz 2.11 ein $x \in Z^\perp$, $x \neq 0$. Somit $B(y,x) = \langle z|x\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{H}$, wobei $z = z(y)$. Insbesondere gilt also $B(x,x) = 0$, was wegen $x \neq 0$ ein Widerspruch zur Voraussetzung (iii) ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Existenz von $y_T \in \mathcal{H}$ nachweisen. Nach dem Satz von Riesz-Frechet existiert ein $z_T \in \mathcal{H}$ mit

$$Tx \;=\; \langle z_T | x \rangle \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H} \;.$$

Da $Z = \mathcal{H}$, wähle zugehöriges y_T, sodass

$$Tx \;=\; \langle z_T | x \rangle \;=\; B(y_T, x) \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H} \;.$$

Zuletzt noch zur Eindeutigkeit. Sei $y' \in \mathcal{H}$, sodass $Tx = B(y', x) = B(y_T, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Somit gilt $B(y' - y_T, x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere gilt also $0 = B(y' - y_T, y' - y_T) \geq b\|y' - y_T\|^2$, sodass $y' = y_T$. □

Definition 2.15 (i) *$\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ heißt Orthonormalbasis (ONB) eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$ orthonormale Familie und $\overline{\mathrm{span}(\mathcal{B})} = \mathcal{H}$.*

(ii) *$\mathcal{H}$ heißt separabel genau dann, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$ gibt.*

Bemerkung 2.16 Gemäß Satz 1.21 ist $\mathcal{H}$ separabel genau dann, wenn eine abzählbare Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ mit $\overline{\mathrm{span}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ existiert. Dann ergibt das Gram-Schmidt-Verfahren, angewandt auf $\mathcal{A} = (a_n)_{n \geq 1}$, eine ONB $\mathcal{B} = (b_n)_{n \geq 1}$. Genauer

$$\begin{array}{ll}
c_1 = a_1 \;, & b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} \;, \\
c_2 = a_2 - \langle b_1 | a_2 \rangle\, b_1 \;, & b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} \;, \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
c_n = a_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} \langle b_\ell | a_n \rangle\, b_\ell \;, & b_n = \frac{c_n}{\|c_n\|} \;, \\
\quad \vdots & \quad \vdots
\end{array}$$

jeweils wenn $c_n \neq 0$. Somit erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2.17 *$\mathcal{H}$ separabel $\iff$ $\mathcal{H}$ hat eine abzählbare ONB*

Bemerkung 2.18 Alle klassischen Systeme orthogonaler Polynome werden auf diese Art und Weise mit dem Gram-Schmidt-Verfahren zu geeignetem Skalarprodukt aus der Basis $(a_n)_{n \geq 0} = (x^n)_{n \geq 0}$ erhalten. Z.B. erhält man die Legendre Polynome in $(L^2([-1, 1]), dx)$.

Satz 2.19 *Jeder Hilbertraum hat eine ONB.*

Beweis: Sei $\mathcal{C} = \{$orthonormale Familien in $\mathcal{H}\}$. Wir führen auf $\mathcal{C}$ eine partielle Ordnung ein durch $S_1 < S_2 \iff S_1 \subset S_2$. Sei $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine vollständig geordnete Teilmenge in $\mathcal{C}$ (auch genannt eine Kette), d.h. entweder $S_\alpha < S_{\alpha'}$ oder $S_{\alpha'} < S_\alpha$ für alle $\alpha, \alpha' \in A$. Setze

$$S \;=\; \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \;.$$

Dann ist S eine orthogonale Familie, d.h. $S \in \mathcal{C}$. Zudem ist S eine obere Schranke an $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$, da $S_\alpha < S$ für alle $\alpha \in A$. Somit ist $(\mathcal{C}, <)$ induktiv geordnet (d.h. jede Kette hat eine obere Schranke). Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es ein maximales Element $B \in \mathcal{C}$. Wir zeigen nun, dass B eine Basis ist, d.h. $\overline{\text{span}(B)} = \mathcal{H}$. Ansonsten würde nämlich ein $x \notin \overline{\text{span}(B)}$ existieren. Dann sei $U = \overline{\text{span}(B)}$ der zum Spann von B gehörende abgeschlossene Unterraum und P_U die Projektion auf U. Es gilt

$$v \;=\; \frac{x - P_U x}{\|x - P_U x\|} \;\perp\; U \;,$$

und somit $v \perp \text{span}(B)$. Da $B \subset \text{span}\{B, v\}$ echt enthalten ist, liegt ein Widerspruch zur Maximalität von B vor. □

Der folgende Satz zeigt, dass man jeden Vektor als Linearkombination von Basiselementen ausdrücken kann (wie in $\mathbb{K}^n$).

Satz 2.20 *Sei $B = (b_i)_{i\in I}$ eine ONB in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und seien $x, y \in \mathcal{H}$. Dann gilt:*

(i) $\langle b_i | x\rangle \neq 0$ *für höchstens abzählbar viele i.*

(ii) $x = \sum_{i\in I} \langle b_i|x\rangle\, b_i$ *mit nur abzählbar vielen Summanden und die Konvergenz in $\mathcal{H}$ ist unabhängig von der Anordnung der Summanden.*

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle b_i|x\rangle|^2$ *(Parseval-Gleichung)*

(iv) $\langle x|y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x|b_i\rangle \langle b_i|y\rangle$*, d.h. formal geschrieben "*$\sum_{i\in I} |\, b_i\rangle \langle b_i\,| = \mathbb{1}$*"*

(v) *Umgekehrt, gegeben $c_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty$, so ist $\sum_{i\in I} c_i b_i \in \mathcal{H}$*

Beweis: (i) Nach der Bessel-Ungleichung für jedes $\mathcal{T} \subset I$, $\#\mathcal{T} < \infty$, gilt $\sum_{i\in\mathcal{T}} |\langle b_i|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Somit ist

$$\mathcal{T}_n = \left\{ i \in I \;:\; |\langle b_i|x\rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

endlich und $\mathcal{T}_x = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{T}_n = \{i \in I \;:\; \langle b_i|x\rangle \neq 0\}$ abzählbar.

(ii) Wir wählen eine beliebige Abzählung von $\mathcal{T}_x = \{i_n \;:\; n \geq 1\}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{N} |\langle b_{i_n}|x\rangle|^2$ monoton und durch $\|x\|^2$ beschränkt, somit konvergent. Setze:

$$x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle b_{i_n}|x\rangle\, b_{i_n} \;.$$

Dann gilt für $N > M$:

$$\|x_N - x_M\|^2 \;=\; \left\| \sum_{n=M+1}^{N} \langle b_{i_n}|x\rangle\, b_{i_n} \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |\,\langle b_{i_n}|x\rangle\,|^2 \;.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} |\,\langle b_{i_n}|x\rangle\,|^2$ ist also $(x_N)_{N\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$.
Sei $x' = \lim x_N$. Wir müssen noch zeigen, dass $x' = x$. Für $i_m \in \mathcal{T}_x$ gilt, unter Verwendung der Stetigkeit des Skalarprodukts, dass

$$\begin{aligned}
\langle x - x'|b_{i_m}\rangle \;&=\; \left\langle x - \lim_N \sum_{n=1}^{N} \langle b_{i_n}|x\rangle\, b_{i_n} \,\middle|\, b_{i_m} \right\rangle \\
&=\; \lim_N \left\langle x - \sum_{n=1}^{N} \langle b_{i_n}|x\rangle\, b_{i_n} \,\middle|\, b_{i_m} \right\rangle \\
&=\; \langle x|b_{i_m}\rangle - \overline{\langle b_{i_m}|x\rangle} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für $i \notin \mathcal{T}_x$:

$$\langle x - x'|b_i\rangle \;=\; \lim_N \langle x|b_i\rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle b_{i_n}|x\rangle}\,\langle b_{i_n}|b_i\rangle \;=\; \langle x|b_i\rangle \;=\; 0\;.$$

Somit ist $x - x' \perp \overline{\mathrm{span}(B)} = \mathcal{H}$, d.h. $x - x' = 0$ und $x = x'$.

(iii) Nach (ii) und der Stetigkeit der Norm folgt

$$0 \;=\; \lim_N \|x - x_N\|^2 \;=\; \lim_N \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle b_{i_n}|x\rangle\, b_{i_n} \right\|^2 \;=\; \lim_N \left(\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\,\langle b_{i_n}|x\rangle\,|^2 \right)\;.$$

(iv) folgt direkt durch Einsetzen und (v) ist eine Übung. □

Satz 2.21 *Sei $\mathcal{H}$ separabel und* $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. *Dann $\mathcal{H} \cong \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$.*

Beweis: Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine ONB. Definiere

$$U : \mathcal{H} \to \ell^2\;, \qquad Ux \;=\; (\langle b_n|x\rangle)_{n\geq 1}\;.$$

Dann ist $Ux \in \ell^2$ (nach (iii) in Satz 2.20), U ist surjektiv nach (v) und mit (iv) impliziert dies die Unitärität. □

Definition 2.22 *Wir definieren den adjungierten Operator T^* eines beschränkten $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wie folgt: Zu festem $x \in \mathcal{H}$, betrachtet man das stetige lineare Funktional $y \in \mathcal{H} \mapsto \langle x|Ty\rangle$. Dann existiert nach dem Lemma von Riesz ein $z_x \in \mathcal{H}$, sodass*

$$\langle x|Ty\rangle \;=\; \langle z_x|y\rangle\;.$$

Der stetige (!) und lineare (!) Operator $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist dann definiert durch

$$T^*x \;=\; z_x\;,$$

d.h.

$$\langle T^*x|y\rangle \;=\; \langle x|Ty\rangle\;, \qquad \forall\; x, y \in \mathcal{H}\;.$$

Zudem definieren wir:

(i) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *selbstadjungiert* $\Longleftrightarrow T = T^*$

(ii) $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *unitär* $\Longleftrightarrow U^* = U^{-1}$

Es kann leicht überprüft werden, dass diese Definition der Unitarität mit der in Definition 2.8 übereinstimmt. Die Linearität von T^* folgt aus $\langle T^*(\lambda x)|y\rangle = \langle \lambda x|Ty\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x|Ty\rangle = \overline{\lambda}\,\langle T^*x|y\rangle = \langle \lambda T^*x|y\rangle$ und eine analoge Rechnung für die Summe zweier Vektoren. Die Stetigkeit folgt nun aus folgendem Satz.

Satz 2.23 *Seien $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

(i) $\|T^*\| = \|T\|$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$

(iii) $(T^*)^* = T$

(iv) *Wenn T invertierbar und $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist, dann hat T^* ein beschränktes Inverses und*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \ .$$

(v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ *(C^*-Gleichung)*

(vi) $(\mathrm{Ran}(T))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$, *wobei* $\mathrm{Ran}(T)$ *das Bild von T bezeichnet.*

Beweis: (i) folgt aus folgender Rechnung

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ = \ \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y\|\le 1} |\langle y|Tx\rangle| \\ &= \sup_{\|y\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |\langle T^*y|x\rangle| \ = \ \sup_{\|y\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x|T^*y\rangle| \\ &= \sup_{\|y\|\le 1} \|T^*y\| \ = \ \|T^*\| \ . \end{aligned}$$

(ii) + (iii) sind einfache Übungen. Zu (iv): Es gilt $T^{-1}T = \mathbb{1} = TT^{-1}$, sodass nach (ii):

$$T^*(T^{-1})^* \ = \ (T^{-1}T)^* \ = \ \mathbb{1}^* \ = \ \mathbb{1} \ = \ (T^{-1})^*T^* \ .$$

Zu (v): Die Normungleichung und (i) ergibt $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Zudem gilt:

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|T^*Tx\| \ \ge \ \sup_{\|x\|\le 1} \langle x|T^*Tx\rangle \\ &= \sup_{\|x\|\le 1} \langle Tx|Tx\rangle \ = \ \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|^2 \ = \ \|T\|^2 \ . \end{aligned}$$

Zuletzt zu (vi):

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(T^*) &\iff \langle y|T^*x\rangle = 0 \qquad \forall\, y \in \mathcal{H} \\ &\iff \langle Ty|x\rangle = 0 \qquad \forall\, y \in \mathcal{H} \\ &\iff x \in (\mathrm{Ran}(T))^\perp \ , \end{aligned}$$

was die gewünschte Gleichheit zeigt. $\square$

2.2 Anwendungsbeispiele von Hilbert-Raummethoden

Es werden nacheinander drei Themenbereiche beschrieben, zunächst Fourier-Reihen, dann der Satz von Radon-Nikodym und zuletzt der Ergodensatz. Sei $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong [-\pi, \pi)$. Für eine Funktion $f \in L^1\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$ sind die Fourierkoeffizienten (Fourier 1811) definiert durch

$$f_n \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-in\theta} f(\theta) \ = \ \left\langle e^{in\theta}|f\right\rangle_{L^2} .$$

Die zentrale Frage ist nun, für welche Funktionen f die Fourier-Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, e^{in\theta}$$

gegen f konvergiert und in welchem Sinne die Konvergenz vorliegt. Ein klassisches hinreichendes Kriterium ist das folgende.

Satz 2.24 *(ähnlich wie Dirichlet 1828)*
Sei $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Dann konvergiert die Fourierreihe uniform, d.h. die Partialsummen $S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \, e^{in\theta}$ erfüllen $\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|_\infty = 0$.

Beweis: Wir berechnen zunächst die Partialsummen:

$$\begin{aligned}
S_N(\theta) &= \left(\sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, f(\varphi) \, e^{-in\varphi} \right) e^{in\theta} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, f(\varphi) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\varphi)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, f(\theta+\varphi) \sum_{n=-N}^{N} e^{-in\varphi} .
\end{aligned}$$

Also ist es sinnvoll, den Dirichletkern einzuführen für $\varphi \neq 0$:

$$\begin{aligned}
D_N(\varphi) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{-in\varphi} = e^{-iN\varphi} \sum_{n=0}^{2N+1} e^{in\varphi} \\
&= e^{-iN\varphi} \, \frac{e^{i(2N+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} .
\end{aligned}$$

Er besitzt eine stetige Fortsetzung bei $\varphi = 0$:

$$D_N(0) = 2N+1 \, .$$

Außerdem ist er gerade und erfüllt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, D_N(\varphi) = 1 \, .$$

Für $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ spalten wir nun wie folgt auf:

$$\begin{aligned}
|S_N(\theta) - f(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, (f(\theta+\varphi) - f(\theta)) \, D_N(\varphi) \right| \\
&\leq \left| \int_{-\pi}^{-\delta} d\varphi \, \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} d\varphi \, \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} d\varphi \, \Delta(\varphi) \right| ,
\end{aligned}$$

wobei $\Delta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(f(\theta+\varphi) - f(\theta)) D_N(\varphi)$. Für den mittleren Teil gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\delta}^{\delta} d\varphi \, \Delta(\varphi) \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \, \frac{|f(\theta+\varphi) - f(\theta)|}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|} \, \left|\sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\varphi\right| \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \, \frac{\|f'\|_\infty \cdot |\varphi|}{\sin\frac{|\varphi|}{2}} \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\|f'\|_\infty |\varphi|}{\frac{|\varphi|}{2} \cdot \frac{2}{\pi}} \\
&\leq \delta \, \|f'\|_\infty ,
\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung $\sin\frac{|\varphi|}{2} \geq \frac{|\varphi|}{2}\frac{2}{\pi}$ für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ verwandt wurde. Für den rechten Term führte eine partielle Integration zu

$$\begin{aligned}\int_\delta^\pi d\varphi\ \Delta(\varphi) &= \int_\delta^\pi d\varphi\ \underbrace{\frac{f(\theta+\varphi)-f(\theta)}{2\pi\sin\frac{\varphi}{2}}}_{F(\varphi)} \cdot \sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\varphi \\ &= \left[F(\varphi)\ \frac{-1}{N+\frac{1}{2}}\ \cos\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\varphi\right]_\delta^\pi + \int_\delta^\pi d\varphi\ F'(\varphi)\ \frac{1}{N+\frac{1}{2}}\ \cos\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\varphi\ .\end{aligned}$$

Nun gilt für eine δ-abhängige Konstante C_δ (welche unabhängig von N ist)

$$\sup_{\delta\leq\varphi\leq\pi} \max\{|F(\varphi)|,|F'(\varphi)|\} \ \leq\ C_\delta\ <\ \infty\ .$$

Also:

$$\left|\int_\delta^\pi d\varphi\ \Delta(\varphi)\right| \leq \frac{(2+\pi)C_\delta}{N+\frac{1}{2}}$$

Das Integral über $[-\pi,-\delta]$ kann analog abgeschätzt werden, sodass zusammen:

$$|S_N(\theta)-f(\theta)|\ \leq\ \|f'\|\ \delta\ +\ \frac{2(2+\pi)}{N+\frac{1}{2}}\ C_\delta\ \leq\ \epsilon\ ,$$

Letzteres für $\delta = \frac{\epsilon}{2\|f'\|}$ und $N = N(\epsilon)$ ausreichend groß. □

Bemerkung 2.25 (Fejer 1900) Wenn f nur stetig ist, dann konvergieren die Cesaro-Mittel $C_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N S_n$ uniform gegen f.

Beweisidee: Modifiziere Obiges unter Verwendung des Fejer-Kerns:

$$F_N(\varphi)\ =\ \frac{\sin^2(N+1)\frac{\varphi}{2}}{(N+1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\ .$$

□

Es ist noch nicht bekannt, was die Funktionen mit einer in $\|.\|_\infty$ konvergenten Fourier-Reihe charakterisiert (hinreichendes und notwendiges Kriterium). Aber wenn man den Konvergenzbegriff bez. $\|.\|_2$ verwendet, dann ist dies vergleichsweise einfach und vom Standpunkt der Hilbert-Raum-Theorie sehr natürlich. Offensichtlich ist $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine orthonormale Familie, d.h. $\left\langle e^{in\theta} \mid e^{im\theta}\right\rangle_{L^2} = \delta_{n,m}$. Falls bekannt ist, dass eine ONB vorliegt, dann gibt Satz 2.20 für jede Funktion $f \in L^2 = L^2\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$:

$$f(\theta)\ =\ \sum_n f_n\ e^{in\theta} \qquad\qquad \text{mit Konvergenz in } L^2.$$

Satz 2.26 *$(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine ONB von $L^2\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$*

Beweis: Wir verwenden, dass $C^1(\mathbb{S}^1)$ dicht in $\left(L^2\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right), \|.\|_2\right)$ liegt, weil nämlich die Elementarfunktionen dicht in L^2 sind und mit beliebig kleinem $\|.\|_2$-Fehler geglättet werden können. Jetzt sei $g \in (\mathrm{span}\{e^{in\theta}\ :\ n\in\mathbb{Z}\})^\perp$, d.h. $\left\langle g|e^{in\theta}\right\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen ist, dass $g = 0$. Für $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$

ist die Fourier-Reihe nach Satz 2.24 uniform konvergent, also auch konvergent bez. $\|.\|_2$. Also folgt aus der Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\langle f|g\rangle \;=\; \langle \lim_N \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\theta}|g\rangle \;=\; \lim_N \sum_{n=-N}^{N} f_n \left\langle e^{in\theta}|g\right\rangle \;=\; 0\;.$$

Für beliebiges $f \in L^2$, sei nun $\tilde{f} \in C^1$, sodass $\|f-\tilde{f}\|_{L^2} \le \epsilon$ (wegen der Dichteaussage). Dann gilt

$$\langle f|g\rangle \;=\; \langle f-\tilde{f}|g\rangle + \langle \tilde{f}|g\rangle \;\le\; \|f-\tilde{f}\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \;\le\; \epsilon\|g\|_{L^2}\;.$$

Somit gilt $\langle f|g\rangle = 0$ für alle $f \in L^2$. Also ist $g = 0$. □

Bemerkung 2.27 (Satz von Carleson 1966): Für jedes $f \in L^2$ konvergiert die Fourier-Reihe fast sicher (bez. $d\theta$). Dies ist ein tiefliegendes Resultat mit einem schwierigen Beweis (im kontinuierlichen Fall, siehe Satz 2.39 unten). Es sei darauf verwiesen, dass die Reihe nicht überall konvergieren kann. An Sprungstellen liegt z.B. keine Konvergenz vor.

Die nächste Anwendung ist von Neumann's Beweis des Satzes von Radon-Nikodym (der auch den Lebesgue'schen Zerlegungssatz impliziert).

Satz 2.28 *Seien μ und ν endliche Maße auf einem Maßraum (Ω, Σ). Zudem sei μ absolut stetig bez. ν, d.h. für jede messbare Menge B gilt*

$$\nu(B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) \;=\; 0\;.$$

Dann existiert ein $C \in \Sigma$ mit $\nu(\Omega\backslash C) = 0$ und eine nicht-negative Funktion $f \in L^1(\Omega, \nu)$ mit

$$\mu(B) \;=\; \int_B \nu(d\omega)\; f(\omega)\;, \qquad \forall\; B \subset C,\; B \in \Sigma\;.$$

Beweis: Zunächst definieren wir das endliche Maß $\lambda = \mu + \nu$ und das lineare Funktional:

$$T : L^2(\Omega,\lambda) \to \mathbb{K}\;, \qquad Tf \;=\; \int \mu(d\omega)\; f(\omega)\;.$$

Dann ist T beschränkt, weil nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |Tf| \;&\le\; \left(\int \mu(d\omega)\;|f(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \mu(d\omega)\;1\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le\; \left(\int \lambda(d\omega)\;|f(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} \;=\; \|f\|_{L^2(\Omega,\lambda)}\;\mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} \;<\; \infty\;. \end{aligned}$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert ein $F \in L^2(\Omega,\lambda)$ mit

$$\int \lambda(d\omega)\; F(\omega)f(\omega) = \int \mu(d\omega)f(\omega)\;, \qquad \forall\; f \in L^2(\Omega,\lambda)\;.$$

Insbesondere gilt für $f = \chi_A$:

$$\mu(A) = \int_A \lambda(d\omega)\; F(\omega)\;, \qquad A \in \Sigma\;. \tag{2.3}$$

Wegen $\mu = \lambda - \nu$ folgt also

$$\nu(A) \;=\; \int_A \lambda(d\omega)\;(1-F)(\omega)\;. \tag{2.4}$$

Für $a > 1$, setzen wir

$$C_a = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \geq a\}\;.$$

Dies ist eine messbre Menge und es gilt:

$$\mu(C_a) \overset{(2.3)}{\geq} a \cdot \lambda(C_a) \;\geq\; a(\mu(C_a) + \nu(C_a))\;.$$

Somit folgt

$$\mu(C_a) \;=\; 0 \;=\; \nu(C_a)\;, \qquad \forall\, a > 1\;.$$

Also ist $F \leq 1$ fast sicher bez. λ, μ und ν. Genauso schließt man mit (2.4), dass $1 - F \leq 1$ fast sicher bez. λ, μ und ν gilt. Zusammengefasst ist also $0 \leq F \leq 1$ fast sicher bez. λ, μ und ν. Nun setzen wir

$$C_n \;=\; \left\{\omega \in \Omega \;:\; 1 - \frac{1}{n} \leq F(\omega) < 1 - \frac{1}{n+1}\right\} \quad , \quad n \geq 1\;,$$

und

$$C \;=\; \bigcup_{n\geq 1} C_n\;.$$

Wiederum sind das alles messbare Mengen. Dann gilt $F(\omega) = 1$ für $\omega \in \Omega \backslash C$, sodass mit (2.3)

$$\mu(\Omega\backslash C) \;=\; \int_{\Omega\backslash C} \lambda(d\omega)\;F(\omega) \;=\; \int_{\Omega\backslash C} \lambda(d\omega) \;=\; \mu(\Omega\backslash C) + \nu(\Omega\backslash C)\;.$$

Es folgt:

$$\nu(\Omega\backslash C) \;=\; 0\;.$$

Nun setzen wir

$$g_n \;=\; \frac{F}{1-F}\,\chi_{C_n}\;, \qquad f \;=\; \sum_{n\geq 1} g_n\;,$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion auf $A \in \Sigma$ ist. Somit gilt für messbares $B \subset C$:

$$\begin{aligned}
\int_B \nu(d\omega)\;g_n(\omega) \;&\overset{(2.4)}{=}\; \int_B \lambda(d\omega)\;(1 - F(\omega))\;g_n(\omega) \\
&=\; \int_B \lambda(d\omega)\;(1 - F(\omega))\;\frac{F(\omega)}{1-F(\omega)}\;\chi_{C_n}(\omega) \\
&=\; \int_{B\cap C_n} \lambda(d\omega)\;F(\omega) \\
&\overset{(2.3)}{=}\; \mu(B \cap C_n)\;.
\end{aligned}$$

Also folgt nach dem Satz der monotonen Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\int \nu(d\omega) f(\omega) \;&=\; \int \nu(d\omega) \sum_{n\geq 1} g_n(\omega) \\
&=\; \sum_{n\geq 1} \int \nu(d\omega)\;g_n(\omega) \\
&=\; \sum_{n\geq 1} \mu(C_n) \;\overset{\text{Maß}}{=}\; \mu(C) \;<\; \infty\;,
\end{aligned}$$

d.h. $f \in L^1(\Omega, \nu)$. Außerdem gilt für $B \subset C$

$$\int_B \nu(d\omega) f(\omega) \;=\; \sum_{n\geq 1} \int_B \nu(d\omega)\; g_n(\omega) \;=\; \sum_{n\geq 1} \mu(B \cap C_n) \;=\; \mu(B) \;,$$

genau wie behauptet. $\square$

Nun kommen wir zur ergodentheoretischen Anwendung. Hierzu sei zunächst ein dynamisches System mit diskreter Zeit eingeführt. Zugrundeliegend ist ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ), welcher die Rolle des Phasenraumes spielt. Die Dynamik ist dann eine messbare Abbildung $F : \Omega \to \Omega$. Iterationen werden mit $F^n = F \circ \ldots \circ F$ bezeichnet und $(F^n_\omega)_{n\geq 1}$ heißt der Orbit von $\omega \in \Omega$. Nun definieren wir

$$\mu \text{ invariant (bez. } F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(F^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \Sigma$$

und

$$\mu \text{ ergodisch} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(F^{-1}(A) = A \Longrightarrow \mu(A) = 0 \text{ oder } \mu(A) = 1\big)$$

Eine Observable ist eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Seine Birkhoff-Summe entlang des Orbits $(F^n\omega)_{n\geq 1}$ ist $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(F^n\omega)$.

Die klassische Fragestellung, zurückgehend auf Boltzmann, ist nun, ob dynamische Mittel (Limites von Birkhoff-Summen) mit Ensemble-Mitteln (Integration bez. μ) übereinstimmen. Präziser ausgedrückt, für welche $\omega \in \Omega$ und Observable f gilt

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(F^n\omega) \;=\; \int \mu(d\omega')\; f(\omega') \;,$$

und in welchem Sinne ist diese Gleichheit gegeben. Hierzu kann folgendes Ergebnis bewiesen werden.

Satz (Birkhoff 1931:) $f \in L^1(\Omega, \mu)$ und μ invariant bez. F. Dann:

(i) $\tilde{f}(\omega) = \lim_N \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(F^n\omega)$ existiert μ-fast sicher.

(ii) $\int \mu(d\omega)\tilde{f}(\omega) = \int \mu(d\omega) f(\omega)$

(iii) Wenn μ ergodisch ist, so ist $\tilde{f} = \int \mu(d\omega) f(\omega)$ μ-fast sicher konstant.

Ein detaillierter Beweis ist meist Teil einer Wahrscheinlichkeitstheorie-Vorlesung und wird hier nicht reproduziert. Es wird vielmehr ein Hilbert-Raum Zugang vorgestellt, der auf Koopman (1931) und von Neumann (1932) zurückgeht. Er führt zu komplementären Aussagen.

Lemma 2.29 *(Koopman)*
Es sei

$$U : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$$

definiert durch

$$(Uf)(\omega) \;=\; f(F\omega) \;.$$

Wenn F invertierbar und μ invariant bez. F ist, so ist U unitär.

Beweis: Dies folgt aus folgender Rechnung unter Verwendung der Invarianz:

$$\begin{aligned}\langle Uf|Ug\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} &= \int \mu(d\omega)\ \overline{f(F(\omega))}\ g(F\omega)\\ &= \int \mu(d(F^{-1}\omega))\ \overline{f(\omega)}\ g(\omega)\\ &= \int \mu(d\omega)\ \overline{f(\omega)}\ g(\omega)\ =\ \langle f|g\rangle_{L^2(\Omega,\mu)}\ .\end{aligned}$$

Um die Variablentransformation und Invarianz detaillierter zu zeigen, kann man mit Elementarfunktionen argumentieren. □

Somit können also Birkhoff-Summen auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f\circ F^n \ =\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n f$$

Satz 2.30 *(von Neumann's Ergodentheorie) Sei* U *unitär auf einem Hilbert-Raum* $\mathcal{H}$*. Sei* P *die Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum* $\{x\in\mathcal{H} : Ux = x\} = (U-1)^{-1}(\{0\})$*. Dann gilt mit Konvergenz im Hilbert-Raum* $\mathcal{H}$*:*

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n x \ =\ Px\ , \qquad \forall\ x\in\mathcal{H}\ .$$

Beweis: Wegen $\mathbb{1} = P + (\mathbb{1} - P)$ gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n x \ =\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n Px \ +\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n(1-P)x\ .$$

Da $Px \in \mathrm{Ker}(U-\mathbb{1})$, folgt zunächst

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n x \ =\ Px \ +\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n(1-P)x\ .$$

Außerdem gilt wegen der Äquivalenzen $Uy = y \Longleftrightarrow y = U^{-1}y \Longleftrightarrow y = U^*y$ auch

$$(1-P)x\in \mathrm{Ker}(U-\mathbb{1})^\perp \ =\ \mathrm{Ker}(U^*-\mathbb{1})^\perp \ \overset{2.23}{=}\ (\mathrm{Ran}(U-\mathbb{1})^\perp)^\perp \ \overset{2.11}{=}\ \overline{\mathrm{Ran}(U-\mathbb{1})}\ .$$

Für $y\in\mathrm{Ran}(U-\mathbb{1})$ gilt $y = (U-\mathbb{1})z = Uz - z$ für ein $z\in\mathcal{H}$. Somit teleskopiert die zweite Summe:

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^n y\right\| \ =\ \left\|\frac{1}{N}(U^{N+1}z - Uz)\right\| \ \le\ \frac{2\|z\|}{N} \ \longrightarrow\ 0 \quad \text{für} \quad N\to\infty\ .$$

Nach einem 3ϵ-Argument gilt Gleiches auch für $y\in\overline{\mathrm{Ran}(U-\mathbb{1})}$, d.h. auch für $(1-P)x$. □

2.3 Fourier-Transformation und Sobolev-Räume

Zunächst seien folgende Standardnotationen eingeführt. Für $x, p \in \mathbb{R}^d$, setzen wir:

$$x \cdot p = \sum_{j=1}^{d} x_j p_j \;, \qquad x^2 = x \cdot x \;, \qquad |x| = \sqrt{x^2} \;.$$

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ hingegen ist $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$. Zugehörig zu einem solchen Multiindex sind partielle Ableitungen und Polynome definiert durch

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \;, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} \;.$$

Definition 2.31 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Die Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ und Schwartzfunktionen $\mathcal{S}(\Omega)$ auf Ω sind definiert als*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &= C_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,:\, \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega \textit{ kompakt}\} \;, \\ \mathcal{S}(\Omega) &= \{f \in C^\infty(\Omega) \,:\, \lim_{|x|\to\infty,\, x\in\Omega} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\} \;, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{\varphi \neq 0\}}$ *den Träger von φ bezeichnet. Als weitere Notation seien eingeführt $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Beispiele: Die Funktion $\varphi(x) = c e^{-\frac{1}{1-x^2}} \chi_{\{|x|\leq 1\}}(x)$ ist in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Sie ist nicht analytisch in den Punkten -1 und 1. Durch einen geeigneten Vorfaktor c kann sie auch L^1-normiert werden, d.h. $\int dx\; \varphi(x) = 1$.
Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aber nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Bemerkungen 2.32 1. Offensichtlich gilt $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$.

2. Topologien auf $\mathcal{D}$ und $\mathcal{S}$ sind durch Familien von Halbnormen gegeben, d.h. $\mathcal{D}$ und $\mathcal{S}$ sind so genannte lokalkonvexe Räume. Die Dualräume $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{S}'$ sind dann die Distributionen bzw. temperierten (oder Schwartz-) Distributionen. Details hierzu können z.B. in Reed-Simon nachgelesen werden.

3. Hier ist eine oft verwandte äquivalente Definition:

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \;:\; \sup_x (1 + |x|^m) |\partial^\beta f(x)| < \infty \;\forall\; \beta \in \mathbb{N}^d, m \geq 0 \right\}$$

Tatsächlich folgt dies aus der Ungleichung $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq |x^{(|\alpha|,\ldots,|\alpha|)}|$.

Satz 2.33 (i) *$\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega, dx)$ für $1 \leq p < \infty$.*

(ii) *$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ dicht.*

Für den Beweis benötigen wir ein Hilfsmittel (was in Satz 1.72 in allgemeinerer Form aus dem Satz von Riesz-Thorin hergeleitet wurde, aber hier sei ein direkter Beweis gegeben).

Satz 2.34 (Young'sche Ungleichung, Spezialfall)

$$\|\varphi * f\|_p \;\leq\; \|\varphi\|_1 \, \|f\|_p \qquad , \qquad p \geq 1$$

Beweis der Young'schen Ungleichung: sei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$
\begin{aligned}
|(\varphi * f)(x)| &\leq \int \mu(dy)\,|\varphi(x-y)|\,|f(y)| \\
&= \int \mu(dy)\,|\varphi(x-y)|^{\frac{1}{q}}\left(|f(y)|^p|\varphi(x-y)|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int \mu(dy)|\varphi(x-y)|\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int \mu(dy)|f(y)|^p|\varphi(x-y)|\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

nach Hölder Ungleichung. Also mit Translationsinvarianz und Fubini

$$
\begin{aligned}
\|\varphi * f\|_p^p &\leq \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dx) \int \mu(dy)\,|f(y)|^p|\varphi(x-y)| \\
&= \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dy)\,\|\varphi\|_1|f(y)|^p \\
&= \|\varphi\|_1^{1+\frac{p}{q}}\,\|f\|_p^p = \Big(\|\varphi\|_1\|f\|_p\Big)^p
\end{aligned}
$$

was die Ungleichung beweist $\square$

Beweis von Satz 2.33: Zunächst folgt (ii) direkt aus (i), weil $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ nach der Hölder-Ungleichung. Nun also zu (i). Sei $\varphi(x)=c\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\chi_{\{|x|\leq 1\}}$ wie oben. Wir setzen $\varphi_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon^d}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Zu $n\in\mathbb{N}$ ist nun die Menge

$$
k_n = \left\{x \in \Omega \;:\; |x| \leq n,\; d(x,\partial\Omega) \geq \frac{2}{n}\right\}
$$

kompakt. Für jedes $f \in L^p(\Omega)$ definieren wir jetzt

$$
f_n(x) \;=\; \varphi_{\frac{1}{n}} * (f\chi_{k_n})(x) \;=\; \int dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(y)\;f(x-y)\;\chi_{k_n}(x-y) \;=\; \int_{k_n} dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(-y+x)\;f(y)\;.
$$

Somit ist f_n eine Glättung von f, d.h. $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, denn das Integral vertauscht mit der Ableitung ∂_x.
Behauptung: $\lim_n f_n = f$ in L^p, woraus dann (i) folgt.
Begründung: Hierzu verwenden wir folgende Abschätzungen:

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p &\leq \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f(\chi_{k_n}-1)\|_p + \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f - f\|_p \\
&\leq \|\varphi_{\frac{1}{n}}\|_1\|f(\chi_{k_n}-1)\|_p + \left(\int dx\left|\int dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(y)(f(x-y)-f(x))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\;,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Young'sche Ungleichung verwandt haben und, dass $\int dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(y)=1$. Nun impliziert die Jensen-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p &\leq 1\cdot\|f(1-\chi_{k_n})\|_p + \left(\int dx \int dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(y)\;|f(x-y)-f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon + \left(\int dy\;\varphi_{\frac{1}{n}}(y)\;\|S_y f - f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\;,
\end{aligned}
$$

wobei hier $n \geq N(\epsilon)$ ausreichend groß gewählt werden muss und $S_y f(x) = f(x+y)$ die Translation bezeichnet. Der Satz folgt nun aus dem folgenden Satz. $\square$

Satz 2.35 *Die Abbildung $y \in \mathbb{R}^d \mapsto S_y f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ist stetig für $1 \leq p < \infty$.*

Bemerkung 2.36 Die Aussage ist falsch für $p = \infty$.

Beweis: Es ist bekannt (Satz 1.8), dass $C_K(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ liegt. Zu $f \in L^p$, sei also gegeben ein $g \in C_K(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|f - g\|_p \;\leq\; \epsilon \;.$$

Sei $\operatorname{supp}(g) \subset [-c, c]^d$. Da g gleichmäßig stetig auf $[-c, c]^d$ ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass für $x, y \in [-c, c]^d$ und $|x - y| \leq \delta$ gilt:

$$|g(x) - g(y)| \;\leq\; \frac{\epsilon}{(2(c+\delta))^{d/p}} \;.$$

Dann folgt für $\delta' < \delta$

$$\|S_{\delta'} g - g\|_p^p \;\leq\; \int_{[-c-\delta, c+\delta]^d} dx \; |g(x + \delta') - g(x)|^p \;\leq\; \epsilon^p \;.$$

Also, weiterhin für $\delta' < \delta$,

$$\|S_{\delta'} f - f\|_p \;\leq\; \|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p + \|S_{\delta'} g - g\|_p + \|g - f\|_p \;\leq\; 3\epsilon \;,$$

wobei $\|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p = \|f - g\|_p$ verwandt wurde. Dies beendet den Beweis. □

Wichtigste Eigenschaft von $\mathcal{S}$ ist, dass die Fourier-Transformation definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; e^{-ip\cdot x} f(x) \quad , \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d) \;,$$

eine Bijektion auf $\mathcal{S}$ ist. Zunächst beweisen wir folgendes klassische Resultat über die Fouriertransformation:

Satz 2.37 *(Riemann-Lebesgue Lemma)*
Es gilt $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ und $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$.

Beweis: Zunächst ist klar, dass das Integral, was $\mathcal{F}$ definiert, tatsächlich existiert, wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Die Normabschätzung folgt direkt aus Satz 1.59 (i) für Integraloperatoren. Die Stetigkeit für kompakt getragenes f folgt nun aus folgender Abschätzung mit geeigneter Konstanter $c > 0$:

$$|(\mathcal{F}f)(p) - (\mathcal{F}f)(p')| \;\leq\; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; |1 - e^{i(p-p')x}| \; |f(x)| \;\leq\; c \; |p - p'| \; \|f\|_{L^1} \;.$$

Da die kompakt getragenen Funktionen dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen, erlaubt ein 3ϵ-Argument für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu schließen. Nun zum Verschwinden im Unendlichen. Dies braucht nur für $f \in \mathcal{D}$ nachgewiesen werden (wegen der Dichte von $\mathcal{D}$ in L^1 und $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f - g\|_1$). Eine partielle Integration (ohne Randterme, da $f \in \mathcal{D}$) ergibt für jedes $j = 1, \ldots, d$:

$$|(\mathcal{F}f)(p)| \;=\; \left| - \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; \partial_j f(x) \; \frac{1}{-ip_j} \; e^{-ip\cdot x} \right| \;\leq\; \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \; \|\partial_j f\|_{L^1} \; \frac{1}{|p_j|} \;.$$

Da $\partial_j f \in L^1$ für $f \in \mathcal{D}$, folgt, dass $(\mathcal{F}f)(p) \to 0$ für $|p| \to \infty$. □

Satz 2.38 *Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt Folgendes:*

(i) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *ist eine Bijektion mit Inversem*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) \;=\; \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} \; f(p) \; e^{ix\cdot p} \; .$$

(ii) *(Plancharel Gleichung, kontinuierliches Analog zur Parseval Gleichung)*

$$\langle \mathcal{F} f \mid \mathcal{F} g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;=\; \langle f \mid g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

(iii) $\partial_p^\alpha (\mathcal{F} f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$

(iv) $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) = i^{|\alpha|} p^\alpha \mathcal{F} f$

(v) $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F} f) * (\mathcal{F} g)$ *und* $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} (\mathcal{F} f) \cdot (\mathcal{F} g)$, *wobei die Konvolution definiert ist durch* $(f * g)(x) = \int dy \; f(x-y) g(y)$.

Beweis: Zunächst zeigen wir (iii) durch folgende Rechnung:

$$\partial_p^\alpha (\mathcal{F} f)(p) \;=\; \partial_p^\alpha \int \frac{dx}{(\sqrt{2\pi})^d} \; e^{-ip\cdot x} \; f(x) \;=\; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ip\cdot x} \; ,$$

wobei wir den Satz von Lebesgue anwenden durften, da $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S} \subset L^1$. Nun zu (iv). Nach einer partiellen Integration ohne Randterme folgt in der Tat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) \;&=\; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; e^{-ip\cdot x} \; \partial_x^\alpha f(x) \\
&=\; (-1)^{|\alpha|} \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; (\partial_x^\alpha e^{-ip\cdot x}) f(x) \\
&=\; (-1)^{|\alpha|} (-ip)^\alpha (\mathcal{F} f)(p) \; .
\end{aligned}$$

Weiter zu (i). Zunächst zeigen wir $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Hierzu

$$p^\alpha \partial_p^\beta (\mathcal{F} f)(p) \overset{\text{(iii)}}{=} (-i)^{|\beta|} p^\alpha (\mathcal{F}(x^\beta f))(p) \overset{\text{(iv)}}{=} (-i)^{|\beta|} (-i)^{-|\alpha|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha (x^\beta f))(p) \; .$$

Da nun $\partial_x^\alpha (x^\beta f) \in \mathcal{S}$, folgt nach Satz 2.37, dass $p^\alpha \partial_p^\beta \mathcal{F} f(p) \to 0$ für $|p| \to \infty$. Als Nächstes verwenden wir die Identität

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a^2 x^2}{2}})(p) \;=\; \frac{1}{a^d} \; e^{-\frac{p^2}{2a^2}} \; ,$$

Für $d = 1$ und $a = 1$ ist dies die Berechnung eines Gauß'schen Integrals nach quadratischer Ergänzung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-ipx} \; e^{-\frac{x^2}{2}} \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}(x+ip)^2} e^{-\frac{p^2}{2}} \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{x^2}{2}} \; e^{-\frac{p^2}{2}} \;=\; e^{-\frac{p^2}{2}} \; .$$

Im vorletzten Schritt ist der komplexe Integrationsweg $x \in \mathbb{R} \mapsto x + ip$ mithilfe von funktionentheoretischen Mitteln auf die reelle Achse verschoben worden. Alternativ kann die Ableitung ∂_p des Integrals berechnet werden (mit partieller Integration):

$$\begin{aligned}
\partial_p \big(e^{\frac{p^2}{2}} \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(p) \big) \;&=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; (p - ix) e^{\frac{p^2}{2} - ipx} \; e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; e^{\frac{p^2}{2} - ipx} \; (p + i\partial_x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \; \big((p - i\partial_x) e^{\frac{p^2}{2} - ipx} \big) \; e^{-\frac{x^2}{2}} \;=\; 0
\end{aligned}$$

Somit ist es ausreichend den Wert bei $p = 0$ zu berechnen was ebenfalls zu der Identitität führt. Für andere a führt man dann nur eine Skalierung durch. Die Identität benötigen wir nun für den Nachweis von

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) \;=\; f(-x)\;, \qquad f \in \mathcal{S}\;, \qquad x \in \mathbb{R}^d\;.$$

Dies ist zunächst wohl definiert, weil $\mathcal{F}f \in \mathcal{S} \subset L^1$ ist. Unter Verwendung von $\lim_{a\to 0} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} = 1$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) &= \int \frac{dp}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{-ix\cdot p} \int \frac{dy}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{-ip\cdot y} f(y) \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dp}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{-ixp} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ip\cdot y} f(y) \qquad \text{(Lebesgue)} \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{-i(x+y)p}\, e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \right) f(y) \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}}\, \frac{1}{a^d}\, e^{-\frac{(x+y)^2}{2a^2}} f(y) \qquad \text{(nach obigem Integral)} \\
&= \left(\lim_{a\to 0} \int dy\, \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d}\, e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\, \big(f(y-x) - f(-x)\big) \right) + f(-x)\;,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Variablen transformiert haben sowie die Eigenschaft, dass die auftretende Gauss-Kurve zusammen mit dem Vorfaktor ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Nun verwenden wir folgende "Approximation der Eins"-Eigenschaft

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} \;=\; \delta(y)\;.$$

Hierbei ist $\delta(y)$ die Dirac'sche Delta-Distribution, die durch folgende Identität definiert ist:

$$\int dy\; g(y)\; \delta(y) \;=\; g(0)\;, \qquad g \in \mathcal{S}\;.$$

Um die Approximationseigenschaft nachzuweisen, wird der Integrationsbereich zerlegt wie $\mathbb{R} = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \cup R$, wobei R der Rest ist. Auf R konvergiert die Approximation der Eins gegen 0, für $y \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$ is $f(y-x) - f(-x)$ klein. Somit ist nun $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$ nachgewiesen und wir kommen zur Begründung von (i). Zunächst gilt $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$, also $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$ und somit $(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}^2\mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\; f(p) e^{ip\cdot x}$. Ähnlich kann nun für (ii) vorgegangen werden:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g \rangle_{L^2} &= \int dp \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\; e^{ix\cdot p}\; \overline{f(x)} (\mathcal{F}g)(p) \\
&= \int dx \overline{f(x)} \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\; e^{ix\cdot p}\; (\mathcal{F}g)(p) \\
&= \int dx \overline{f(x)} (\mathcal{F}^2 g)(-x) \;=\; \int dx\; \overline{f(x)}\; g(x)
\end{aligned}$$

Beachte, dass diese Rechnung wieder formal auf die Identität

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d}\; e^{ip\cdot(x-y)} \;=\; \delta(x-y)$$

reduziert werden kann. Zuletzt zu (v). Da $f \in \mathcal{S}$, ist auch $e^{ipx} \cdot \overline{f(x)} \in \mathcal{S}$. Also

$$
\begin{aligned}
\left\langle e^{ipx}\, \overline{f} \mid g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int dx\ e^{-ipx} f(x)\ g(x) \ = \ (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(f \cdot g)(p) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \left\langle \mathcal{F}(e^{ipx}\overline{f}) | \mathcal{F}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \int dq\ \overline{\int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\ e^{-iqx}\ e^{ipx}\ \overline{f(x)}}\ (\mathcal{F}g)(q) \\
&= \int dq\ (\mathcal{F}f)(p-q)\ (\mathcal{F}g)(q) \ = \ (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(p)\ ,
\end{aligned}
$$

was den Beweis beendet. □

Insbesondere impliziert der Satz, dass

$$
\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \ = \ \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\ , \qquad \forall\ f \in \mathcal{S}\ .
$$

Da $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ dicht liegt, kann $\mathcal{F}$ also stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung

$$
\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)\ , \qquad \mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}\ .
$$

Es gilt dann die so genannte Plancherel-Identität

$$
\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle \ = \ \langle g | f \rangle \quad \text{für alle} \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)\ .
$$

Aber es gilt im Allgmeinen **nicht**, dass

$$
(\mathcal{F}_2 f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\ e^{-ip\cdot x} f(x)\ , \qquad \forall\ f \in L^2(\mathbb{R}^d)\ ,
$$

weil nämlich $e^{-ipx} f(x)$ nicht integrierbar ist. Aber für das Kompaktum $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ |x| \leq R\}$ gilt $L^2(B_R) \subset L^1(B_R)$. Somit macht Folgendes Sinn (und ist richtig):

Satz 2.39 (i) $(\mathcal{F}_2 f)(p) = L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\ e^{-ipx} f(x)$ *für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $(\mathcal{F}_2 f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\ e^{-ipx} f(x)$ *fast sicher in* p *für alle* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Wir beginnen mit (ii). Nach Satz 2.33 existiert eine Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ in $\mathcal{S}$ mit

$$
\|f - f_k\|_1 \to 0 \quad \text{und} \quad \|f - f_k\|_2 \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty
$$

(da f_k explizit durch die Glättung gegeben ist und $f \in L^1$ und $f \in L^2$). Wohldefiniert sind sowohl $\mathcal{F}f_k$ als auch $\mathcal{F}f$ (da $f_k, f \in L^1$). Nach dem Satz 2.37 (Riemann-Lebesgue Lemma) folgt also $\mathcal{F}f_k \to \mathcal{F}f$ in $(C_0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ und es gilt $\|\mathcal{F}\|_{L^1\to C_0} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$. Somit gilt für alle $R > 0$, dass $\int_{B_R} dp\ |\mathcal{F}f_k(p) - \mathcal{F}f(p)|^2 \ \leq \ \mathrm{Vol}(B_R) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\ \|f_k - f\|_{L^1} \to 0$ für $k \to \infty$. Zudem folgt für alle $R > 0$:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} dp\ |\mathcal{F}f_k(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2 \ &\leq \ \|\mathcal{F}f_k - \mathcal{F}_2 f\|_2^2 \\
&= \ \|\mathcal{F}_2(f_k - f)\|_2^2 \qquad (\text{da } \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{S} = \mathcal{F}) \\
&= \ \|f_k - f\|_2^2 \qquad (\text{nach Plancherel}).
\end{aligned}
$$

Dies wird im Limes $k \to \infty$ also verschwinden, genauso wie

$$\int_{B_R} dp\ |\mathcal{F}f(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2 \ \leq\ \int_{B_R} dp|\mathcal{F}f(p) - \mathcal{F}f_k(p)|^2\ +\ \int_{B_R} dp\ |\mathcal{F}f_k(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2\ .$$

Also folgt für alle $R > 0$

$$\int_{B_R} dp\ |\mathcal{F}f(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2\ =\ 0\ .$$

Deswegen gilt $\mathcal{F}f(p) = \mathcal{F}_2 f(p)$ fast sicher bez. des Lebesgue-Maßes. Nun zu (i). Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\chi_{B_R} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Nach (ii) gilt also fast sicher $\mathcal{F}(\chi_{B_R} f) = \mathcal{F}_2(\chi_{B_R} f)$. Außerdem gilt nach dem Satz von Lebesgue, dass $\chi_{B_R} f \to f$ in L^2 für $R \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{F}_2$ gilt also:

$$\mathcal{F}_2 f\ =\ L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}_2(\chi_{B_R} f)\ =\ L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}(\chi_{B_R} f)\ .$$

Nun ist aber letzterer Ausdruck genau die gewünschte Formel. □

Satz 2.40 *(Hausdorff-Young) Sei $1 \leq p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\ \leq\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{2}}}\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\ , \qquad f \in \mathcal{S}\ .$$

Also kann $\mathcal{F}$ zu einem stetigen Operator von L^p nach L^q fortgesetzt werden.

Beweis: Dies ist eine direkte Anwendung des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin. (Details: Übung) □

Definition 2.41 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ die schwache α-Ableitung von f genau dann, wenn*

$$\langle \varphi | D^\alpha f \rangle_{L^2}\ =\ (-1)^{|\alpha|}\, \langle \partial^\alpha \varphi | f \rangle_{L^2}\ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ .$$

Bemerkungen 2.42

1. Sei $f \in C^k(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \leq k$ und $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha f = \partial^\alpha f$, wie eine partielle Integration mit verschwindenden Randtermen sofort zeigt (da $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$).

2. Es gibt auch **nicht** differenzierbare Funktionen, die eine schwache Ableitung haben. Hierzu sei zunächst Folgendes einfache Beispiel vorgestellt. Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $f(x) = |x|$. Dann ist $D^1 f(x) = \mathrm{sgn}(x)$. Hierbei spielt der Wert bei $x = 0$ keine Rolle, da $\{0\}$ Nullmenge ist. Andererseits haben aber nicht alle Funktionen schwache Ableitungen!

3. Die Begrifflichkeit "schwach" bedeutet hier, dass Gleichheit lediglich bei "Abtasten" mit Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vorliegt.

4. Die schwache Ableitung ist immer eindeutig bestimmt (als Äquivalenzklasse in $L^2(\Omega)$). Zur Begründung sei eine zweite Funktion g gegeben mit der Eigenschaft

$$\langle \varphi | g \rangle_{L^2}\ =\ (-1)^{|\alpha|}\, \langle \partial^\alpha \varphi | f \rangle_{L^2}\ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ .$$

Dann gilt $\langle \varphi \mid D^\alpha f - g \rangle_{L^2} = 0$ für alle $\varphi \in D(\Omega)$ und somit nach Satz 2.33, dass auch $\langle \varphi \mid D^\alpha f - g \rangle_{L^2} = 0$ für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$ gilt. Hieraus folgt, dass $D^\alpha f = g$ in $L^2(\Omega)$ gilt.

Definition 2.43 *(Sobolev-Räume) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $m \in \mathbb{N}$.*

(i) $W^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ *existiert für alle* $|\alpha| \leq m\}$.

(ii) $\langle f|g\rangle_{W^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha f \mid D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}$ *für* $f, g \in W^m(\Omega)$.

(iii) $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|.\|_{W^m}}$.

(iv) $H^m(\overline{\Omega}) = \overline{C^m(\overline{\Omega}) \cap W^m(\Omega)}^{\|.\|_{W^m}}$.

Bemerkungen 2.44 1. Dies sind alles Vektorräume mit $\langle .|.\rangle_{W^m}$ als Skalarprodukt (Übung).

2. Wenn Ω beschränkt ist, so gilt $H^m(\overline{\Omega}) = \overline{C^m(\overline{\Omega})}^{\|\ \|_{W^m}}$, da $C^m(\overline{\Omega}) \subset W^m(\Omega)$. Außerdem gilt für glatten Rand $\partial\Omega$, dass $H^m(\overline{\Omega}) = W^m(\Omega)$. Ein Beweis hierfür findet sich in dem Buch von Adams über "Sobolev-Räume", 1975.

3. Es gilt $W^m(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} W^{m-1}(\Omega)$ mit stetiger Einbettung i.

Satz 2.45 $H_0^m(\Omega) \subset H^m(\overline{\Omega}) \subset W^m(\Omega)$ *versehen mit* $\langle .|.\rangle_{W^m}$ *sind Hilbert-Räume.*

Beweis: Da $H^m(\overline{\Omega})$ und $H_0^m(\Omega)$ durch Abschlüsse definiert sind, reicht es, die Vollständigkeit von $W^m(\Omega)$ zu zeigen. Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $(W^m(\Omega), \|.\|_{W^m})$. Dann ist $(D^\alpha f_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Die Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ impliziert also die Existenz von

$$g_\alpha = L^2\text{-}\lim_n D^\alpha f_n \ , \qquad g_\alpha \in L^2(\Omega) \ .$$

Sei $g = g_{(0,\ldots,0)}$. Zu zeigen ist noch, dass $g_\alpha = D^\alpha g$, denn dann ist $g \in W^m(\Omega)$ und $f_n \to g$ in $W^m(\Omega)$. Für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt aber

$$\begin{aligned}
\langle \varphi|g_\alpha\rangle_{L^2} &= \langle \varphi|L^2\text{-}\lim_n D^\alpha f_n\rangle \\
&= \lim_n \langle \varphi|D^\alpha f_n\rangle \qquad \big(\text{Stetigkeit von } \langle .|.\rangle\big) \\
&= \lim_n\, (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi|f_n\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \partial^\alpha \varphi|L^2\text{-}\lim_n f_n \right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi|g\rangle \ .
\end{aligned}$$

Somit gilt in der Tat $g_\alpha = D^\alpha g$ in L^2. □

Nun untersuchen wir den Zusammenhang mit der Fourier-Transformation im Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Satz 2.46 *Sei* $f \in W^m(\mathbb{R}^d)$ *und* $|\alpha| \leq m$.

(i) $\mathcal{F}_2(D^\alpha f)(p) = i^{|\alpha|} p^\alpha \mathcal{F}_2 f(p)$ *(insbesondere ist die rechte Seite in* L^2*)*

(ii) $W^m(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, (1+|p|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}_2 f(p) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$

Bemerkung 2.47 Die rechte Seite in (ii) erlaubt $W^m(\mathbb{R}^d)$ auch für $m \in \mathbb{R}$ zu definieren.

Beweis: (i) Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt nach der Plancherel-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_2\varphi \mid \mathcal{F}_2(D^\alpha f)\rangle_{L^2} &= \langle \varphi \mid D^\alpha f\rangle_{L^2} \\
&= (-1)^{|\alpha|}\,\langle \partial^\alpha\varphi \mid f\rangle_{L^2} \\
&= (-1)^{|\alpha|}\,\langle \mathcal{F}_2\partial^\alpha\varphi \mid \mathcal{F}_2 f\rangle_{L^2} \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2\varphi(p) \mid \mathcal{F}_2 f\right\rangle_{L^2} \qquad \text{(Satz 2.38)} \\
&= \left\langle \mathcal{F}_2\varphi \mid i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f\right\rangle_{L^2} \ .
\end{aligned}$$

Nun ist $\mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ eine Bijektion auf $\mathcal{S}$. Somit gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S} \supset \mathcal{D}$:

$$\left\langle \varphi \mid \mathcal{F}_2(D^\alpha f) - i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f\right\rangle_{L^2} = 0 \ .$$

Dies impliziert allerdings noch nicht, dass $\mathcal{F}_2(\mathcal{D}^\alpha f) - i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f$ tatsächlich in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, weil die Integrabilität im Unendlichen von φ herstammen kann. Allerdings gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ und $R > 0$

$$\left\langle \varphi \mid \mathcal{F}_2(D^\alpha f) - i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f\right\rangle_{L^2(B_R)} \ = \ 0 \ ,$$

und zudem ist $\mathcal{F}_2(D^\alpha f) - i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f \ \in \ L^2(B_R)$, weil dann $|p| \ \leq \ R$. Dies zeigt $\mathcal{F}_2(D^\alpha f)(p) = i^{|\alpha|}p^\alpha\mathcal{F}_2 f(p)$ für fast alle $p \in B_R$ und $R > 0$. Da $\mathcal{F}_2(D^\alpha f) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, folgt nun auch $p^\alpha\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
(ii) Nach (i) ist "$\subset$" klar. Nun also zu "$\supset$". Die Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erfülle $(1+|p|^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt nach obiger Rechnung:

$$(-1)^{|\alpha|}\,\langle \partial^\alpha\varphi \mid f\rangle \ = \ i^{|\alpha|}\,\langle \mathcal{F}_2\varphi \mid p^\alpha\mathcal{F}_2 f\rangle \ = \ \langle \varphi \mid i^{|\alpha|}\mathcal{F}_2^{-1}(p^\alpha\mathcal{F}_2 f)\rangle \ .$$

Nun ist $p^\alpha\mathcal{F}_2 f \ \in \ L^2$ nach Voraussetzung und $\mathcal{F}_2$ ein Isomorphismus. Also existiert eine schwache Ableitung $D^\alpha f = i^{|\alpha|}\mathcal{F}_2^{-1}(p^\alpha(\mathcal{F}_2 f)) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. □

Bemerkung 2.48 Explizit besagt die letzte Formel im Beweis, dass

$$D^\alpha f(x) = \int \frac{dp\ dy}{(2\pi)^d}\ e^{ip(x-y)}i^{|\alpha|}p^\alpha f(y) \ .$$

Dies ist ein Beispiel eines Fourier-Integral-Operators, der im Allgemeinen von der Form

$$(Af)(x) = \int \frac{dp\ dy}{(2\pi)^d}\ e^{ip(x-y)}\ a(x,y,p)\ f(y)$$

ist. Dann heißt a das Symbol von A. Diese Fourier-Integraloperatoren verallgemeinern sowohl Integral- als auch Differentialoperatoren. Ein vierbändiges Standardwerk hierzu wurde von Hörmander geschrieben. □

Nun definieren wir für $f, g \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle f \mid g\rangle\!\rangle_{W^1} &= \sum_{i=1}^{d}\langle D_i f \mid D_i g\rangle_{L^2} \qquad \text{(nur die Ableitungen)} \\
|\!|\!| f |\!|\!|_{W^1} &= (\langle\!\langle f \mid f\rangle\!\rangle_{W^1})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Es ist hierbei zu beachten, dass $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1}$ auf $H^1(\Omega)$ keine Norm sein kann, weil nämlich für jede konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $|\!|\!| f |\!|\!|_1 = 0$. Der folgende Satz besagt, unter anderem, dass $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1}$ auf $H_0^1(\Omega)$ hingegen eine Norm ist, falls Ω beschränkt ist.

Satz 2.49 *(Poincaré-Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen. Für $f \in H_0^1(\Omega)$ gilt dann*

$$\|f\|_{L^2} \leq \mathrm{Diam}(\Omega) |\!|\!| f |\!|\!|_{W^1} \ .$$

Also sind $\|.\|_{W^1}$ und $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1}$ äquivalente Normen auf $H_0^1(\Omega)$.

Beweis: Da $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1} \leq \|.\|_{W^1}$ und $\|.\|_{L^2} \leq \|.\|_{W^1}$ gilt, sind beide Seiten der Ungleichung stetig bez. der $\|.\|_{W^1}$-Norm. Somit reicht es, die Ungleichung für die dichte Teilmenge $\mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen. Nach Translation ist $\Omega \subset (-s,s)^d$ mit $2s = \mathrm{Diam}(\Omega)$. Setze $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ durch 0 fort zu $f \in \mathcal{D}((-s,s)^d)$. Für $x = (x_1, \ldots, x_d)$ gilt:

$$f(x) = \int_{-s}^{x_1} dt\ \partial_1^1 f(t, x_2, \ldots, x_d) = \int_{-s}^{s} dt\ \chi_{(-s,x_1)}(t)\ \partial_1^1 f(t, x_2, \ldots, x_d) \ .$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt also

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &\leq \left(\int_{-s}^{s} dt\ \chi_{(-s,x_1)}(t)^2 \right) \left(\int_{-s}^{s} dt\ |\partial_1^1 f(t, x_2, \ldots, x_d)|^2 \right) \\ &\leq 2s \int_{-s}^{s} dt\ |\partial_1^1 f(t, x_2, \ldots, x_d)|^2. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2((-s,s)^d)} &\leq \underbrace{\int_{-s}^{s} dx_1}_{2s} \ldots \int_{-s}^{s} dx_d\ 2s \int_{-s}^{s} dt\ |\partial_1^1 f(t, x_2, \ldots, x_d)|^2 \\ &= (2s)^2\ \|\partial_1^1 f\|^2_{L^2} \leq (2s)^2 |\!|\!| f |\!|\!|^2_{W^1} \ . \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$|\!|\!| f |\!|\!|_{W^1} \leq \|f\|_{W^1} = (\|f\|^2_{L^2} + |\!|\!| f |\!|\!|^2_{W^1})^{\frac{1}{2}} \leq (\mathrm{Diam}(\Omega)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} |\!|\!| f |\!|\!|_{W^1} \ ,$$

was den Beweis beendet. □

Anwendung: Schwache Lösungen eines Dirichlet'schen Randwertproblems. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Suche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$-\Delta u = f \quad \text{auf} \quad \Omega \ , \quad \text{und} \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \ . \tag{2.5}$$

Hierbei ist $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ der Laplace-Operator und $f \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$. Umformulierung der Differentialgleichung ergibt nun für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle -\Delta u \mid \varphi \rangle_{L^2} = \langle f \mid \varphi \rangle_{L^2} \ ,$$

beziehungsweise

$$\langle\!\langle u | \varphi \rangle\!\rangle_{W^1} = \sum_{j=1}^{d} \langle D_j u \mid \partial_j \varphi \rangle_{L^2} = \langle f \mid \varphi \rangle_{L^2} \ .$$

Dies ist auch sinnvoll für $u \in H_0^1(\Omega)$! Die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ entspricht also der Bedingung $u \in H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^1}}$.

Definition 2.50 *u ist eine schwache Lösung von (2.5) genau dann, wenn $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\langle\!\langle u|\varphi\rangle\!\rangle_{W^1} = \langle f|\varphi\rangle_{L^2}$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt.*

Satz 2.51 *Es gibt genau eine schwache Lösung von (2.5).*

Beweis: Wir betrachten das lineare Funktional

$$T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C} \,, \qquad T\varphi \;=\; \langle f|\varphi\rangle_{L^2} \,.$$

Dann ist T stetig bez. $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1}$, weil nach der Poincaré-Ungleichung

$$|T\varphi| \;\leq\; \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \;\leq\; \mathrm{Diam}(\Omega)\;\|f\|_{L^2}|\!|\!|\varphi|\!|\!|_{W^1} \,.$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es also genau ein $u \in H_0^1$ mit

$$T\varphi \;=\; \langle\!\langle u|\varphi\rangle\!\rangle_{W^1} \,.$$

Somit ist u die gewünschte schwache Lösung. □

Nun betrachten wir ein nicht-selbstadjungiertes Randwertproblem:

$$-\Delta u + \sum_{j=1}^{d}(\partial_j u + u) \;=\; f \;, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \,.$$

Für eine schwache Formulierung definieren wir nun die Abbildung $B : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{C}$ durch

$$B(u,\varphi) \;=\; \sum_{j=1}^{d}(\left\langle D^j u|D^j\varphi\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^j u|\varphi\right\rangle + \langle u|\varphi\rangle) \,.$$

Dann ist die schwache Formulierung gegeben durch

$$B(u,\varphi) \;=\; \langle f|\varphi\rangle \;, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \,,\;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,.$$

Nun ist B sesquiliniear auf $H_0^1(\Omega)$, beschränkt bez. $|\!|\!|.|\!|\!|_{W^1}$ (dies folgt wieder aus der Poincaré-Ungleichung) und zudem positiv auf $H_0^1(\Omega)$, weil nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} B(u,u) \;&\geq\; \sum_{j=1}^{d}(\|D^j u\|_{L^2}^2 - \|D^j u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^2) \\ &=\; \sum_{j=1}^{d}(\tfrac{1}{2}(\|D^j u\|_{L^2} - \|u\|_{L^2})^2 + \tfrac{1}{2}\|D^j u\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2) \\ &\geq\; \tfrac{1}{2}|\!|\!|u|\!|\!|_{W^1}^2 \end{aligned}$$

Nach dem Lax-Milgram-Lemma existiert also wieder genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle f|\varphi\rangle \;=\; B(u,\varphi) \;, \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega) \,,$$

d.h. wieder genau eine schwache Lösung.

Zum Abschluss zeigen erwähnen wir noch ein Standardergebnis, welches besagt, dass Sobolev Funktionen unter gewissen Bedingungen stetig differenzierbare Repräsentanten haben.

Satz 2.52 *(Sobolev-Lemma) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $m, k \in \mathbb{N}$ mit $m > k + \frac{d}{2}$. Dann gilt $H_0^m(\Omega) \subset C_0^k(\Omega)$ im Sinne, dass jedes $f \in H_0^m(\Omega)$ einen Repräsentanten in $C_0^k(\Omega)$ besitzt.*

Beweisskizze lediglich für $\Omega = \mathbb{R}^d$ so dass $H_0^m(\mathbb{R}^d) = W^m(\mathbb{R}^d)$: Wir verwenden das Kriterium

$$x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{für} \quad |\alpha| \;\leq\; k \;\Longrightarrow\; \mathcal{F}g \in C_0^k(\mathbb{R}^d) \;.$$

Dies folgt nach iterativer Anwendung des Riemann-Lebesgue-Lemmas zusammen mit dem Vertauschen von Integration und Ableitung wie in Satz 2.38. Die grobe Idee hierbei ist, dass der integrierbare Abfall der Fourier-Transformation der Glattheit der Funktion entspricht. Das Kriterium wird nun angewandt auf $g = \mathcal{F}f$.

Behauptung: $f \in W^m(\mathbb{R}^d)$ und $m > k + \frac{d}{2} \;\Longrightarrow\; p^\alpha \mathcal{F}_2 f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für $|\alpha| \leq k$.

Schon bekannt ist nach Satz 2.46, dass $(1 + |p|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Außerdem

$$\begin{aligned}
\int dp\; |p^\alpha \mathcal{F}_2 f(p)| \;&\leq\; \int dp\; (1+|p|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\mathcal{F}_2 f(p)| \;\leq\; \int dp\; (1+|p|^2)^{\frac{k}{2}} |\mathcal{F}_2 f(p)| \\
&=\; \int dp \left\{(1+|p|^2)^{\frac{m}{2}} |\mathcal{F}_2 f(p)|\right\} \left\{(1+|p|^2)^{\frac{k}{2}-\frac{m}{2}}\right\} \\
&\leq\; \left(\int dp\; (1+|p|^2)^m |\mathcal{F}_2 f(p)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int dp\; (1+|p|^2)^{k-m}\right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Nun ist Letzteres endlich, weil nach Variablenwechsel zu Kugelkoordinaten $r = |p|$,

$$\int_0^\infty dr\; r^{d-1} (1+r^2)^{k-m} \;<\; \infty$$

für $d - 1 + 2k - 2m < -1$, d.h. für $\frac{d}{2} + k < m$. □

3 Lineare Funktionale

3.1 Der Satz von Hahn-Banach und Anwendungsbeispiele

In diesem Paragraph ist X zunächst lediglich ein Vektorraum, der evtl. also nicht einmal normiert sein muss.

Satz 3.1 *(Hahn 1926 und Banach 1929) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $p : X \to \mathbb{R}$ eine positiv homogene und subadditive Abbildung (auch genannt sublinear), d.h. für alle $x, y \in X$ und $\lambda > 0$ gilt*

$$p(\lambda x) \;=\; \lambda\, p(x) \;, \qquad p(x+y) \;\leq\; p(x) + p(y) \;.$$

Sei weiter $Y \subset X$ ein Unterraum und $T : Y \to \mathbb{R}$ lineares Funktional mit

$$T(x) \;\leq\; p(x) \;, \qquad \forall\; x \in Y \;.$$

Dann existiert eine Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{R}$ als lineares Funktional mit $\widetilde{T}(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Diese Erweiterung ist im Allgemeinen **nicht** *eindeutig (siehe Beweis)!*

Beweis: Sei $Y \neq X$ und $z \in X$ mit $z \notin Y$. Setze $Z = \text{span}\{Y, z\} = \{y + \lambda z \,:\, y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Wir wollen nur $\widetilde{T}(z) \in \mathbb{R}$ so wählen, dass

$$\widetilde{T}(y + \lambda z) \;=\; T(y) + \lambda \widetilde{T}(z) \;\leq\; p(y + \lambda z) \;, \qquad \forall\, y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R} \;.$$

Wegen der positiven Homogenität reicht es zu zeigen, dass dies für $\lambda = \pm 1$ gilt:

$$T(y) + \widetilde{T}(z) \;\leq\; p(y + z) \;, \qquad T(y') - \widetilde{T}(z) \;\leq\; p(y' - z) \;,$$

weil dann, z.B. für positive λ,

$$\widetilde{T}(y + \lambda z) \;=\; \lambda \widetilde{T}\left(\frac{1}{\lambda}\, y + z\right) \;\leq\; \lambda p\left(\frac{1}{\lambda}\, y + z\right) \;=\; p(y + \lambda z) \;.$$

Somit sollte also gelten

$$T(y') - p(y' - z) \;\leq\; \widetilde{T}(z) \;\leq\; p(y + z) - T(y) \;, \qquad \forall\, y, y' \in Y \;.$$

So ein $\widetilde{T}(z)$ existiert also nur, wenn

$$T(y') - p(y' - z) \;\leq\; p(y + z) - T(y) \;, \qquad \forall\, y, y' \in Y \;.$$

oder

$$T(y + y') \;\leq\; p(y + z) + p(y' - z) \;, \qquad \forall\, y, y' \in Y \;.$$

Dies gilt aber, weil wegen der Voraussetzung und der Subadditivität

$$T(y + y') \;\leq\; p(y + y') \;\leq\; p(y' + z) + p(y - z) \;.$$

Also haben wir gezeigt, dass T immer auf einen Raum Z erweitert werden kann, der echt größer als Y ist. Um zu schließen, verwenden wir das Lemma von Zorn. Hierzu definieren wir

$$\Sigma \;=\; \{(Z, T) \,:\, Y \subset Z \subset X \text{ Unterräume}, T : Z \to \mathbb{R} \text{ Erweiterung mit } T \leq p\} \;,$$

und

$$(Z, T) \;\leq\; (Z', T') \iff Z \subset Z' \text{ und } T'|_Z \;=\; T \;.$$

Letztes definiert eine partielle Ordnung auf Σ . Wir zeigen, dass Σ induktiv geordnet ist (jede Kette hat eine obere Schranke). Sei also $(Z_\alpha, T_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Kette (eine total geordnete Menge). Dann ist tatsächlich die obere Schranke $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$ mit $T : Z \to \mathbb{R}$ definiert durch $T|_{Z_\alpha} = T_\alpha$. Gemäß dem Zorn'schen Lemma existieren nun maximale Elemente in $(\Sigma, \leq)$. Nach obigem Argument müssen diese aber überall definiert sein. Falls X eine abzählbare dichte Teilmenge hat (d.h. eine Topologie hat, bzgl. der X separabel ist), kann man die Kette und das maximale Element einfach iterativ konstruieren, ohne das Zorn'sche Lemma zu verwenden. $\square$

Beispiel 3.2 Als erstes Anwendungsbeispiel des Satzes von Hahn-Banach führen wir Banach Limes ein. Dies sind gewisse Mittel von Zahlenfolgen, die z.B. bei der Konstruktion von Dixmier-Spuren verwandt werden. Hierzu sei zunächst an folgende Notationen erinnert:

$$\ell^\infty \;=\; \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \;=\; \{(t_n)_{n \geq 1} \,:\, t_n \in \mathbb{R},\ \sup |t_n| < \infty\} \;,$$

$$c \;=\; c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \;=\; \{\lim t_n \text{ existiert}\} \;.$$

Dann definieren wir

$$T : c \to \mathbb{R}\ , \qquad T((t_n)_{n\geq 1}) \ = \ \lim t_n\ , \qquad\qquad \text{(lineares Funktional)}$$

und

$$p : \ell^\infty \to \mathbb{R}\ , \qquad p((t_n)_{n\geq 1}) = \limsup_{n\to\infty} t_n\ .$$

Offensichtlich ist p positiv homogen und subadditiv, und es gilt $T \leq p$. Somit existiert eine (nicht eindeutige) Erweiterung $\mathrm{LIM} = \widetilde{T} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ als lineares Funktional mit

$$\liminf t_n \ \leq\ \mathrm{LIM}((t_n)_{n\geq 1}) \ \leq\ \limsup_n t_n\ .$$

Dabei gilt die untere Schranke wegen

$$\mathrm{LIM}((t_n)_{n\geq 1}) \ = \ -\mathrm{LIM}((-t_n)_{n\geq 1}) \ \geq\ -\limsup_n (-t_n) \ = \ \liminf_n t_n\ .$$

Unter Verwendung von Fölner-Folgen kann man zudem zeigen, dass LIM shift-invariant gewählt werden kann.

Satz 3.3 *(Komplexe Version von Hahn-Banach) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und sei $p : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Halbnorm, d.h.*

$$p(\lambda x) \ = \ |\lambda|\ p(x)\ , \qquad p(x+y) \ \leq\ p(x) + p(y)\ , \qquad \forall\ x, y \in X\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}\ .$$

Weiter sei $Y \subset X$ ein Unterraum und $T : Y \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional mit

$$|T(y)| \ \leq\ p(y)\ , \qquad \forall\ y \in Y\ .$$

Dann existiert eine Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{C}$ als lineares Funktional mit

$$|\widetilde{T}(x)| \ \leq\ p(x)\ , \qquad \forall\ x \in X\ .$$

Beweis: X ist auch ein reeller Vektorraum (wenn die Skalare lediglich reell gewählt werden). Setze

$$t(y) \ = \ \Re e\ T(y)\ , \qquad y \in Y\ .$$

Da

$$t(iy) \ = \ \Re e\ T(iy) \ = \ \Re e\ (i\ T(y)) \ = \ -\Im m\, T(y)\ ,$$

gilt

$$T(y) \ = \ t(y) - i(t(iy))\ . \tag{3.1}$$

Da $t(y) \leq p(y)$ und p positiv homogen und subadditiv ist, kann t nach Satz 3.1 erweitert werden zu $\widetilde{t}$, mit $\widetilde{t}(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nun verwenden wir (3.1), um eine Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{C}$ des Funktionals $T : Y \to \mathbb{C}$ zu definieren durch:

$$\widetilde{T}(x) \ = \ \widetilde{t}(x) - i\ \widetilde{t}(ix)\ .$$

Dann ist $\widetilde{T}$ linear, weil es additiv ist, reell linear ist und

$$\widetilde{T}(ix) \ = \ \widetilde{t}(ix) - i(-\widetilde{t}(x)) \ = \ i\ \widetilde{T}(x)$$

gilt. Des Weiteren haben wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{T}(x)| &= e^{-i\theta}\widetilde{T}(x) && \text{(wobei } \theta = \text{Arg } (\widetilde{T}(x))\text{)} \\
&= \widetilde{T}(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R} && \text{(also kein Imaginärteil)} \\
&= \widetilde{t}(e^{-i\theta}x) \\
&\leq p(e^{-i\theta}x) && \text{(wegen der Eigenschaft von } \widetilde{t}\text{)} \\
&= p(x) && \text{(nach Voraussetzung)} .
\end{aligned}$$

Somit erfüllt $\widetilde{T}$ alle gewünschten Eigenschaften. □

Satz 3.4 *Sei* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Vektorraum,* $Y \subset X$ *ein Unterraum und* $T : Y \to \mathbb{K}$ *ein stetiges lineares Funktional. Dann existiert eine stetige Erweiterung* $\widetilde{T} : X \to \mathbb{K}$ *mit* $\|\widetilde{T}\|_{\mathcal{B}(X,\mathbb{K})} = \|T\|_{\mathcal{B}(Y,\mathbb{K})}$.

Begründung: Dies folgt direkt aus den Sätzen 3.1 und 3.3 unter Verwendung von $p(x) = \|T\|_{\mathcal{B}(Y,\mathbb{K})}\|x\|$.
□

Satz 3.5 *Sei* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Vektorraum und* $y \in X$*. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional* $T : X \to \mathbb{K}$ *mit* $T(y) = \|y\|$.

Beweis: Wir wählen $Y = \{\lambda y \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ und $T(\lambda y) = \lambda\|y\|$ in Satz 3.4. □

Als ein detailliertes Anwendungsbeispiel werden wir jetzt den Satz von Riesz-Markov für das Riemann-Stieltjes-Integral auf dem Intervall $I = [0, 1]$ beweisen. Folgende Räume werden verwandt:

$$\begin{aligned}
C(I) &= \{\text{stetige } \mathbb{R}\text{-wertige Funktionen } f : I \to \mathbb{R}\} \\
PC(I) &= \Big\{\text{stückweise stetig, mit endlich vielen Sprungstellen, linksseitig stetig } \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = f(x_0), \\
&\qquad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \text{ existiert}\Big\} \\
S(I) &= \left\{\text{Treppenfunktion } \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \chi_{(x_{j-1},x_j]} + \lambda_1 \chi_{[x_0,x_1]},\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ x_0 = 0,\ x_n = 1\right\}
\end{aligned}$$

Auf all diesen reellen Vektorräumen ist die Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ gegeben. Als Übung zeigen Sie unter Verwendung der gleichmäßigen Stetigkeit, dass $S(I)$ dicht in $(PC(I), \|.\|_\infty)$ liegt, sodass die Vervollständigungen $\overline{PC(I)} = \overline{S(I)}$ bez. $\|.\|_\infty$ gleich sind.

Jetzt sei $F : I \to [0, 1]$ monoton wachsend (nicht streng) und habe nur abzählbar viele Sprünge. Außerdem gelte $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$ und F sei rechtsseitig stetig. (Für das Riemann-Stieltjes-Integral braucht F nicht rechtsseitig stetig zu sein, wohl aber für das Lebesgue-Stieltjes-Integral, denn der Wert an den Sprüngen ändert den Wert des Riemann-Integrals nicht.) Dann definieren wir ein lineares Funktional $\mathcal{I} : S(I) \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathcal{I}(s) = \mathcal{I}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{(x_{j-1},x_j]}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (F(x_j) - F(x_{j-1}))\right) .$$

Nun ist $\mathcal{I}$ stetig auf $(S(I), \|.\|_\infty)$, da nämlich

$$|\mathcal{I}(s)| \;\leq\; (\max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})|}_{=1} \;=\; \|s\|_\infty \;.$$

Sei $\hat{\mathcal{I}}$ *stetige Fortsetzung* von $\mathcal{I}$ auf $\overline{S(I)} = \overline{PC(I)}$. Dann ist $\hat{\mathcal{I}}|_{PC(I)}$ das Riemann-Stieltjes-Integral (nach Definition):

$$\int_0^1 dF(x)\; f(x) \;=\; \hat{\mathcal{I}}(f) \;, \qquad f \in PC(I) \;.$$

Als Übung sei überprüft, dass dies mit der "Standarddefinition" durch Unter- und Obersummen übereinstimmt. *Falls* F rechtsseitig stetig ist, erhält man das Lebesgue-Stieltjes-Integral durch den Maßerweiterungssatz aus der Mengenfunktion μ, definiert auf dem Semiring der halboffenen Intervalle:

$$\mu((a,b]) \;=\; \int_0^1 dF(x)\; \chi_{(a,b]}(x) \;=\; F(b) - F(a) \;, \qquad 0 \leq a \leq b \leq 1 \;.$$

Dies definiert ein Maß μ bez. dessen dann auch eine große Klasse von Funktionen integriert werden können.

Satz 3.6 *(Satz von Riesz-Markov auf $I = [0,1]$)*
Sei $T : C(I) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional, welches normiert und positiv ist, d.h.

$$T(\mathbb{1}) \;=\; 1 \;, \qquad T(f) \geq 0 \quad \textit{für} \quad f \geq 0 \;.$$

Dann existiert ein monotones $F : I \to [0,1]$ mit abzählbar vielen Sprungsellen und $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$, so dass

$$T(f) \;=\; \int dF(x)\; f(x) \;, \qquad f \in C(I) \;.$$

Beweis: Nach dem Satz von Hahn-Banach kann T erweitert werden zu einem stetigen Funktional $\widetilde{T} : PC(I) \to \mathbb{R}$, aber wir wollen zudem zeigen, dass dieses $\widetilde{T}$ positiv gewählt werden kann. Setze hierzu

$$p(f) \;=\; \inf_{g \in C(I),\; f \leq g} T(g) \;, \qquad f \in PC(I) \;.$$

Nach dieser Definition gilt dann

$$f \;\leq\; h \quad \Longrightarrow \quad p(f) \;\leq\; p(h) \;.$$

Aus der Positivität von T folgt nun, dass $T(f) \leq p(f)$ für alle $f \in C(I)$. Außerdem $p(f) \leq \|f\|_\infty$. Wir zeigen zunächst, dass p positiv homogen und subadditiv ist. Für $\lambda > 0$ und $f \in PC(I)$ gilt

$$\begin{aligned} p(\lambda f) &= \inf_{\lambda f \leq g,\; g \in C(I)} T(g) \;=\; \inf_{f \leq \frac{1}{\lambda} g,\; g \in C(I)} \lambda\, T\left(\frac{1}{\lambda} g\right) \\ &= \inf_{f \leq \tilde{g},\; \tilde{g} \in C(I)} \lambda\, T(\tilde{g}) \;=\; \lambda\, p(f) \;. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $f, f' \in PC(I)$

$$\begin{aligned} p(f + f') &= \inf_{f + f' \leq g} T(g) \;=\; \inf_{f + f' \leq g + g'} T(g + g') \\ &\leq \inf_{f \leq g, f' \leq g'} \underbrace{T(g + g')}_{=T(g)+T(g')} \\ &= \inf_{f \leq g} T(g) + \inf_{f' \leq g'} T(g') \;=\; p(f) + p(f') \;. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine lineare Erweiterung $\widetilde{T} : PC(I) \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{T}(f) \leq p(f) \leq \|f\|_\infty$$

für $f \in PC(I)$. Nun ist $\widetilde{T}$ auch positiv, denn wenn $g \leq 0$, so folgt $\widetilde{T}(g) \leq p(g) \leq p(0) = 0$, sodass für $f \geq 0$

$$\widetilde{T}(f) \;=\; -\widetilde{T}(-f) \;\geq\; 0 \;.$$

Jetzt setzen wir

$$F(x) \;=\; \widetilde{T}(\chi_{[0,x]}) \;,$$

was möglich ist, da $\chi_{[0,x]} \in PC(I)$.

Behauptung: F ist monoton.

Begründung: Für $x < y$ gilt $\chi_{[0,y]} \geq \chi_{[0,x]}$. Da jedes positive lineare Funktional monoton ist (d.h. $f \leq g$ impliziert $\widetilde{T}(f) \leq \widetilde{T}(g)$), gilt zudem

$$F(y) \;=\; \widetilde{T}(\chi_{[0,y]}) \;\geq\; \widetilde{T}(\chi_{[0,x]}) \;=\; F(x) \;.$$

Behauptung: $T(f) = \int dF(x)\; f(x) \quad \text{für} \quad f \in C(I)$.

Begründung: Wir setzen

$$f_n \;=\; f\left(\frac{1}{n}\right)\chi_{[0,\frac{1}{n}]} \;+\; \sum_{j=2}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\chi_{\left(\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]} \;.$$

Dann ist $f_n \in S(I)$ und $f_n \to f$ in $(PC(I), \|.\|_\infty)$. Außerdem gilt wegen der Linearität von $\widetilde{T}$

$$\widetilde{T}(f_n) \;=\; \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\widetilde{T}\left(\chi_{\left(\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]}\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\left(F\left(\frac{j}{n}\right) - F\left(\frac{j-1}{n}\right)\right) \;=\; \mathcal{I}(f_n) \;.$$

Also folgt

$$\int dF(x)\; f(x) \;=\; \lim_n \mathcal{I}(f_n) \;=\; \lim_n \widetilde{T}(f_n) \;=\; \widetilde{T}(f) \;=\; T(f) \;,$$

was den Beweis beendet. □

Bemerkung 3.7 Die Beweisstrategie erlaubt nicht, folgendes allgemeinere Resultat zu beweisen.

Satz von Riesz-Markov Sei Ω ein kompakter Hausdorff-Raum (andere Versionen für lokal kompakte Räume existieren auch). Gegeben sei ein positives lineares Funktional $T : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Dann existiert genau ein endliches Radon-Maß μ (von innen reguläres Borel-Maß), sodass

$$T(f) \;=\; \int \mu(d\omega)\; f(\omega) \;, \qquad \forall\; f \in C(\Omega, \mathbb{R}) \;.$$

Hierzu sei noch Folgendes bemerkt:

1. Unter den Annahmen ist T automatisch stetig. In der Tat, sei $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Wegen der Kompaktheit von Ω, gilt dann $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$. Somit folgt $-T(\mathbb{1})\|f\|_\infty \leq T(f) \leq T(\mathbb{1})\|f\|_\infty$, also $|T(f)| \leq T(\mathbb{1})\|f\|_\infty$.

2. In Satz 3.6 ist die Eindeutigkeit nicht gegeben. Jedoch gibt es nur ein rechtsseitig stetiges F und das ist dann die Verteilungsfunktion eines Radon-Maßes.

Als letzte Anwendung betrachten wir den "geometrischen Hahn-Banach-Satz". Es gibt mehrere (einfache) Verallgemeinerungen (siehe insbesondere das Buch von Lax).

Satz 3.8 *(Trennung von konvexer Menge durch Hyperebene) Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $A \subset X$ eine offene und konvexe Menge. Weiter sei $0 \in A$ und $y \notin A$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $T : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$T(x) < 1\ , \qquad \forall\ x \in A \quad \textit{und} \quad T(y) = 1\ .$$

Beweis: Die Idee ist T zunächst auf der eindimensionalen Unterraum gegeben durch die Linie durch y zu definieren und dann mit dem reellen Hahn-Banach Satz fortzusetzen. Hierzu benötigt man eine adequate positive homogene und subadditive Abbildung. Wir definieren das von A abhängige Minkowski-Funktional $p : X \to [0, \infty]$ durch

$$p(x) \;=\; \inf \left\{ \lambda > 0 \;:\; \frac{x}{\lambda} \in A \right\} \;=\; \inf_{\frac{x}{\lambda} \in A} \lambda\ .$$

Behauptung 1: p ist positiv homogen und subadditiv.

Begründung: Die positive Homogenität ist klar nach Definition. Seien $\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\mu} \in A$. Dann ist auch folgende konvexe Linearkombination

$$\frac{\lambda}{\lambda\,+\,\mu}\;\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\;\frac{x'}{\mu} \;=\; \frac{x+x'}{\lambda+\mu}$$

ein Punkt in A. Zur Subadditivität:

$$\begin{aligned} p(x+x') \;&=\; \inf_{\frac{x+x'}{\lambda+\mu} \in A} (\lambda+\mu) \;\leq\; \inf_{\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\mu} \in A} (\lambda+\mu) \\ &=\; \inf_{\frac{x}{\lambda} \in A} \lambda \;+\; \inf_{\frac{x'}{\mu} \in A} \mu \;=\; p(x) + p(x')\ . \end{aligned}$$

Behauptung 2: $p(x) < 1 \Longleftrightarrow x \in A$

Begründung: "$\Longrightarrow$" Es gibt ein $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in A$. Dann ist auch $(1-\lambda)\cdot 0 + \lambda\frac{x}{\lambda} = x \in A$.

"$\Longleftarrow$" Sei $p(x) \geq 1$. Dann gilt $\frac{x}{\lambda} \notin A$ für $\lambda < 1$. Somit ist $\frac{x}{\lambda} \in CA$ für $\lambda < 1$. Nun ist das Komplement abgeschlossen. Somit ist $x = \lim_{\lambda\uparrow 1} \frac{x}{\lambda} \in CA$ als Limes in einer abgeschlossenen Menge.

Schluss des Arguments: Sei $Y = \text{span}(y)$. Wir setzen

$$T : Y \to \mathbb{R}\ , \qquad T(\lambda y) \;=\; \lambda\, T(y) \;=\; \lambda\ ,$$

d.h. $T(y) = 1$. Für $\lambda > 0$ gilt dann nach Behauptung 2 und der Annahme $y \notin A$

$$T(\lambda y) \;=\; \lambda \;\leq\; \lambda\, p(y) \;=\; p(\lambda y)\ ,$$

wobei die letzte Gleichung aus der positiven Homogenität folgt. Für $\lambda \leq 0$ ist $T(\lambda y) \leq p(\lambda y)$ trivial weil dann $T(\lambda y) \leq 0 \leq p(\lambda y)$, also folgt

$$T(y) \;\leq\; p(y)\ , \qquad \forall\ y \in Y\ .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{R}$, welche erfüllt

$$\widetilde{T}(x) \ \leq \ p(x) \ , \qquad \forall\, x \in X \ .$$

Insbesondere gilt also:

$$\widetilde{T}(x) \ \leq \ p(x) \ < \ 1 \ , \qquad \forall\, x \in A \ ,$$

was genau die Aussage des Satzes ist, bis auf die Stetigkeit von T.

Behauptung 3: T ist stetig.

Begründung: Da $0 \in A$ und A offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(0) \subset A$. Deswegen ist also für jedes $x \in X$ auch $\frac{\epsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B_\epsilon(0) \subset A$, d.h.

$$p(x) \ \leq \ \frac{2}{\epsilon} \, \|x\| \ .$$

Zusammen mit $T(x) \leq p(x)$ folgt also $\|T\| \leq \frac{2}{\epsilon}$. □

3.2 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Zunächst sei an folgende topologische Begrifflichkeiten erinnert:

Definition 3.9 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.*

(i) *Das Innere von A ist definiert als*

$$\mathring{A} = \{x \in A \ : \ A \ \textit{Umgebung von } x\} = \bigcup_{O \subset A, \ O \in \mathcal{O}} O$$

(ii) *A dicht in $X \iff \overline{A} = X \iff C\overline{A} = \emptyset$*

(iii) *A nirgends dicht $\iff C\overline{A}$ dicht $\iff \emptyset = C\overline{C\overline{A}} = \mathring{\overline{A}}$*
(Letzteres weil $\mathring{B} = C\overline{CB}$ für jede Menge B)

Satz 3.10 *(Baire'scher Kategoriesatz) Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Dann ist X von so genannter zweiter Kategorie (nicht von erster Kategorie), was per Definition bedeutet, dass X nicht eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist.*

Anders ausgedrückt: Wenn $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, dann existiert ein N mit $\mathring{\overline{A}}_N \neq \emptyset$.

Beweis: Wir machen die Gegenannahme: $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n. Um dies zu einem Widerspruch zu führen, konstruieren wir eine Cauchy-Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ mit Limes $x \notin A_n$ für alle $n \geq 1$. Da A_1 nirgends dicht ist, existiert ein $x_1 \notin \overline{A}_1$ (d.h. $x_1 \in C\overline{A}_1$). Zudem sei $B_1 = B_{r_1}(x_1)$ eine offene Kugel mit $B_1 \cap A_1 = \emptyset$ und $r_1 \leq 1$. Da auch A_2 nirgends dicht ist, existiert nun ein $x_2 \in B_1 \backslash \overline{A}_2 = B_1 \cap C\overline{A}_2$. Insbesondere gilt $x_2 \notin A_2$. Zudem sei $B_2 = B_{r_2}(x_2)$ eine offene Kugel mit $\overline{B}_2 \subset B_1, B_2 \cap A_2 = \emptyset$ und $r_2 \leq \frac{1}{2}$. Nun gehen wir genauso iterativ vor. Da A_n nirgends dicht ist, existiert ein $x_n \in B_{n-1} \backslash \overline{A}_n$ und $r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, sodass $B_n = B_{r_n}(x_n)$ erfüllt

$$\overline{B}_n \subset B_{n-1} \ , \qquad B_n \cap A_n = \emptyset \ .$$

Unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas erhält man eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, da $x_n, x_m \in B_N$ für $n, m \geq N$, also

$$d(x_n, x_m) \;\leq\; d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \;\leq\; \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}}\;.$$

Letztendlich sei $x = \lim_n x_n$, was wegen der Vollständigkeit von x ja in X liegt. Da $x_n \in B_N$ für alle $n \geq N$, gilt $x \in \overline{B}_N \subset B_{N-1}$ für $N \geq 2$. Somit ist $x \notin A_{N-1}$ für $N \geq 2$, da $B_n \cap A_n = \emptyset$. Also ist $x \notin \bigcup_{n\geq 1} A_n$, im Widerspruch zur Annahme. □

Bemerkung 3.11 Mit dem Satz von Baire läßt sich beweisen, dass jede algebraische Basis in einem unendlich dimensionalen Vektorraum überabzählbar sein muss. Tatsächlich, sei $(b_n)_{n\geq 1}$ ein abzählbare algebraische Basis. Dann setze $X_n = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$. Nach Voraussetzung ist dann also $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$. Also existiert ein N so dass $\overline{X_N} = X_N$ einen nicht-leeres Inneres hat. Also wäre dann $X_N = X$ und X somit endlich dimensional. ◇

Satz 3.12 *(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für einen vollständigen metrischen Raum (X,d))*
Sei Y ein normierter Vektorraum und $C(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ stetig}\}$. Gegeben sei eine punktweise beschränkte Teilmenge $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$, d.h. für alle $x \in X$ existiert ein $c(x)$, sodass

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| \;\leq\; c(x)\;.$$

Dann existiert ein offenes $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ und $C < \infty$ derart, dass

$$\sup_{x\in A}\;\sup_{f\in\mathcal{F}}\;\|f(x)\| \;\leq\; C \;<\; \infty\;.$$

Beweis: Wir setzen

$$A_n \;=\; \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \{x \in X \;:\; \|f(x)\| \leq n\}\;.$$

Als Schnitt abgeschlossener Teilmengen ist A_n abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$. Somit existiert nach dem Satz von Baire ein N mit $\mathring{A}_N \neq \emptyset$. Also

$$\sup_{x\in A_N}\;\sup_{f\in\mathcal{F}}\;\|f(x)\| \;\leq\; N\;.$$

□

Zusammen mit der Forderung, dass alle Abbildungen linear sind, erhält man jetzt folgendes zentrale Ergebnis der Funktionalanalysis.

Satz 3.13 *(Banach-Steinhaus 1927, Prinzip gleichmäßiger Beschränktheit)*
Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X,Y)$, sodass für alle $x \in X$

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\|_Y \;\leq\; c(x) \;<\; \infty\;.$$

Dann gilt

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\;\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \;\leq\; C \;<\; \infty\;.$$

Beweis: Nach Satz 3.12 existieren $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$ mit (gewählt, sodass $B_\epsilon(x_0) \subset A$ liegt), sodass

$$\sup_{x \in \overline{B_\epsilon(x_0)}} \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T(x)\| \;\leq\; \tilde{C} \;<\; \infty \;.$$

Für $\|x\| \leq 1$ gilt also

$$\|T(x)\| \;=\; \frac{1}{\epsilon}\,\|T(\epsilon x)\| \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\,(\|T(\epsilon x + x_0)\| + \|T(x_0)\|) \;\leq\; \frac{2\tilde{C}}{\epsilon} \;=\; C \;,$$

was den Beweis beendet. □

3.3 Dualräume und Reflexivität

Definition 3.14 *Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist der Dualraum X' die Menge der stetigen Funktionale:*

$$X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

Die Operatortopologie auf X' ist

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\| \leq 1,\; x \in X} |T(x)| \;, \qquad T \in X' \;.$$

Bemerkungen 3.15 $(X', \|.\|)$ ist ein Banachraum (nach Satz 1.38, selbst wenn X nicht vollständig ist). Außerdem ist X' nicht leer (nach dem Satz von Hahn-Banach).

Zunächst werden einige Beispiele betrachtet:

Satz 3.16 *Für einen $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum gilt $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}$.*

Beweis: Nach dem Satz von Riesz ist jedes stetige Funktional T genau durch einen Vektor $y_T \in \mathcal{H}$ dargestellt:

$$Tx \;=\; \langle y_T | x \rangle \;.$$

Da $\|T\| = \|y_T\|$, gibt die Abbildung $T \mapsto y_T$ den gewünschten Isomorphismus. □

Satz 3.17 *Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $1 \leq p < \infty$ erfülle $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $(L^p_\mu)' = L^q_\mu$ und ein isometrischer Isomorphismus $F : L^q_\mu \to (L^p_\mu)'$ ist gegeben durch*

$$(Fg)(f) \;=\; \int \mu(d\omega)\; g(\omega) f(\omega) \;.$$

Beweis: In diesem Beweis werden wir uns auf den Fall eines endlichen Maßraumes einschränken, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$. Zunächst zeigen wir, dass $Fg \in (L^p_\mu)'$ und dass F eine Isometrie ist:

$$\|Fg\|_{\mathcal{B}(L^p_\mu, \mathbb{C})} \;=\; \sup_{\|f\|_p \,=\, 1} |(Fg)(f)| = \sup_{\|f\|_p = 1} \left| \int \mu(d\omega) g(\omega) f(\omega) \right| \;=\; \|g\|_q \;,$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung $\leq$ aus der Hölder-Ungleichung folgt und die Gleichheit durch Einsetzen von $f = \frac{|g|^q}{g\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}$ gezeigt wird. Nun zur Surjektivität von F im Falle eines *endlichen* Maßes μ. Für $T \in (L^p_\mu)'$ definieren wir eine Mengenfunktion $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ durch

$$\nu(A) = T(\chi_A) \;, \qquad A \in \Sigma \;.$$

Dann ist ν σ-additiv, weil für $A = \mathring{\bigcup}_{n\geq 1} A_n$ gilt wegen der Stetigkeit von T:

$$\nu(A) \;=\; T\left(L^p\text{-}\lim_N \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}\right) \;=\; \lim_N T\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}\right) \;=\; \sum_{n\geq 1} T(\chi_{A_n}) \;=\; \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)\;.$$

Beachte, dass dies für $p = \infty$ falsch ist, da *nicht* gilt $\chi_A = L^\infty\text{-}\lim_N \sum_{n=1}^N \chi_{A_n}$. Außerdem impliziert $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$, d.h. $\nu \ll \mu$, und somit existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße ein $g \in L^1_\mu$ mit

$$\nu(A) \;=\; \int_A \mu(d\omega)\; g(\omega)\;.$$

Als Nächstes zeigen wir

$$T(f) \;=\; \int \mu(d\omega)\; g(\omega) f(\omega)\;, \qquad \forall\; f \in L^\infty_\mu\;, \tag{3.2}$$

weil es für Treppenfunktionen gilt, welche für $r < \infty$ dicht in L^r_μ liegen, sodass die Gleichheit zunächst für alle $f \in L^r_\mu$ gilt. Da aber der Maßraum endlich ist, ist auch die Abbildung $f \in L^\infty_\mu \mapsto f \in L^r_\mu$ eine stetige Einbettung und somit gilt die Gleichheit (3.2) für alle $f \in L^\infty_\mu$. (Beachte, dass dies nicht bedeutet, dass für jedes stetige T auf L^∞_μ ein $g \in L^1_\mu$ existiert.) Für $p < \infty$ ist eine weitere Fortsetzung von T auf L^p_μ möglich, wie die Hölder-Ungleichung und Folgendes zeigt:

Behauptung: $g \in L^q_\mu$

Begründung: Zunächst sei $q < \infty$. Für $N \in \mathbb{N}$ ist $|g|^p \chi_{\{|g|\leq N\}} \in L^\infty_\mu$, sodass nach obigem

$$\begin{aligned}
\int \mu(d\omega) |g(\omega)|^q \chi_{\{|g|\leq N\}}(\omega) \;&=\; T\left(\frac{|g|^q}{g} \chi_{\{|g|\leq N\}}\right) \\
&\leq\; \|T\|_{\mathcal{B}(L^p_\mu,\mathbb{K})} \|g^{q-1}\chi_{\{|g|\leq N\}}\|_p \\
&=\; \|T\|_{\mathcal{B}(L^p_\mu,\mathbb{K})} \left(\int \mu(d\omega)\; |g(\omega)|^q \chi_{\{|g|\leq N\}}\right)^{\frac{1}{p}}\;,
\end{aligned}$$

Letzteres, weil $(q-1)p = q$. Somit folgt $\|g\chi_{\{|g|\leq N\}}\|_q \leq \|T\|$ für alle N, was den Beweis beendet für $q < \infty$ beendet. Für den Fall $q = \infty$ und somit $p = 1$, betrachte die Menge $\Theta = \{\omega \in \Omega \,:\, g(\omega) > \|T\|\}$. Sei weiter $f = \chi_\Theta \frac{g}{|g|}$. Falls $\mu(\Theta) > 0$, gilt dann

$$\mu(\Theta)\|T\| \;<\; \mu(|g|\chi_\Theta) \;=\; \mu(fg) \;=\; T(f) \;\leq\; \|T\|\,\|f\|_1 \;=\; \|T\|\,\mu(\Theta)\;,$$

was ein Widerspruch ist. Also ist g μ-fast sicher kleiner oder gleich $\|T\|$, d.h. $g \in L^\infty_\mu$. □

Bemerkung 3.18 $(L^\infty_\mu)' \supset L^1_\mu$ ist eine *echte* Inklusion. Eine ähnliche Situation liegt bei Folgenräumen vor, wo nämlich

$$\ell^1 = (c_0)'\;, \qquad c_0 \subset \ell^\infty\;, \qquad \ell^\infty = (\ell^1)'\;, \qquad c_0 \neq \ell^\infty\;.$$

Satz 3.19 *(Riesz-Markov) Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
C(\Omega,\mathbb{R})' \;&=\; \{\text{signierte endliche Radon-Maße auf } \Omega\} \\
&=\; \{\mu = \mu_+ - \mu_- \,:\, \mu_+ \text{ und } \mu_- \text{ endliches Radon-Maß}\}\;,
\end{aligned}$$

mit der Identifikation

$$T_\mu(f) \;=\; \int \mu(d\omega) f(\omega)\;, \qquad \forall\; f \in C(\Omega)\;.$$

Beweis: Schon bekannt sei (siehe oben bzw. Maßtheorie)

$$\{T \in C(\Omega, \mathbb{R})' \, : \, T \text{ positiv}\} \;=\; \{\mu \text{ endliches Radon-Maß auf } \Omega\} \;,$$

wobei wieder the Radon-Maße die von innen regulären Borel-Maße sind. Wir zeigen jetzt die Zerlegung $T = T_+ - T_-$, wobei T_+, T_- positiv sind, woraus dann der Satz folgt. Hierzu setzen wir

$$T_+ : C(\Omega)_+ \;=\; \{f \in C(\Omega) \, : \, f \geq 0\} \to \mathbb{R}$$

$$T_+(f) \;=\; \sup_{\substack{0 \leq h \leq f \\ h \in C(\Omega)}} T(h)$$

Dann ist T_+ stetig, da $|T(h)| \leq \|T\| \|h\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_\infty$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} T_+(\lambda f) &= \lambda T_+(f) \;, \qquad \lambda > 0 \;, \\ T_+(f) &\geq T(0) \;=\; 0 \;, \qquad \forall \, f \in C(\Omega)_+ \;. \end{aligned}$$

Nun soll die Linearität von T_+ nachgewiesen werden. Nach Definition gilt

$$T_+(f + g) \;=\; \sup_{0 \leq h \leq f + g} T(h) \;.$$

Es ist also eine Zerlegung von h notwendig.

Behauptung: Falls $0 \leq h \leq f + g$, so gibt es eine Zerlegung $h = h_1 + h_2$ mit $h_1, h_2 \in C(\Omega)_+$ und $0 \leq h_1 \leq f$ und $0 \leq h_2 \leq g$.

Begründung: Setze

$$h_1 = \min\{f, h\} \;, \qquad h_2 = h - h_1 \;.$$

Dann ist offensichtlich

$$0 \leq h_1 \leq f \;, \qquad h_2 \geq 0 \;.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $h_2 \leq g$. Falls $h_1(x) = h(x)$, dann gilt $h_2(x) = 0 \leq g(x)$. Falls $h_1(x) = f(x)$, dann folgt aus $h \leq f + g$, dass

$$h_2(x) \;=\; h(x) - f(x) \;\leq\; f(x) + g(x) - f(x) \;=\; g(x) \;.$$

$\diamond$

Somit folgt nun die Linearität von T_+ auf $C(\Omega)_+$:

$$T_+(f + g) \;=\; \sup_{0 \leq h_1 \leq f, \; 0 \leq h_2 \leq g} T(h_1 + h_2) \;=\; T_+(f) + T_+(g) \;.$$

Nun definieren wir die Erweiterung $T_+ : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$T_+(f) \;=\; T_+(f_+ - f_-) \;=\; T_+(f_+) - T_+(f_-) \;,$$

wobei

$$f_+ = \max\{f, 0\} \geq 0 \;, \qquad f_- = -\min\{f, 0\} \geq 0 \;.$$

Behauptung: T_+ linear auf $C(\Omega)$

Begründung: Zunächst gilt für $f, g \in C(\Omega)$:

$$\begin{aligned} T_+(f) + T_+(g) &= T_+(f_+) - T_+(f_-) + T_+(g_+) - T_+(g_-) \\ &= T_+(f_+ + g_+) - T_+(f_- + g_-) \;. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$f_+ + g_+ \;=\; (f+g)_+ + r\;, \qquad f_- + g_- \;=\; (f+g)_- + r$$

mit gleichem r (bilde Differenz). Also führt Einsetzen zu

$$\begin{aligned} T_+(f) + T_+(g) &= T_+((f+g)_+) + T_+(r) - (T_+((f+g)_-) + T_+(r)) \\ &= T_+(f+g). \end{aligned}$$

$\diamond$

Letztendlich setzt man $T_- = T_+ - T$. Dann ist T_- linear (als Summe linearer Funktionale) und positiv, weil für $f \geq 0$ gilt $T_-(f) = T_+(f) - T(f) \geq 0$ nach Definition T_+. Dies zeigt die Zerlegung und somit den Satz. $\square$

Bemerkungen 3.20 1. Übung: $\|T\| = T_+(\mathbb{1}) + T_-(\mathbb{1})$ und die Zerlegung $T = T_+ - T_-$ ist eindeutig.

2. Für komplexwertige Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} C(\Omega, \mathbb{C})' &= \{\text{komplexe endliche Radon-Maße auf } \Omega\} \\ &= \{\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4 \,:\, \mu_j \text{ endliches Radon-Maß}\} \end{aligned}$$

3. Sei $\mathcal{M}(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{R})'$ die Menge der signierten endlichen Radon-Maße auf Ω. Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+(\Omega) &= \{T \in \mathcal{M}(\Omega) \,:\, T \geq 0\} = \{\text{endliche Radon-Maße}\} \\ \mathcal{M}_{+,1}(\Omega) &= \{T \in \mathcal{M}(\Omega) \,:\, T \geq 0, \|T\| = 1\} = \{\text{WS-Maße auf } \Omega\} \end{aligned}$$

sind beide konvex. Außerdem ist $\mathcal{M}_+(\Omega)$ ein Kegel.

Begründung: Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{M}_{+,1}(\Omega)$. Dann ist $\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2 \in \mathcal{M}_{+,1}(\Omega)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$. Zudem gilt

$$\|\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2\| \;=\; (\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2)(\mathbb{1}) \;=\; \lambda T_1(\mathbb{1}) + (1-\lambda)T_2(\mathbb{1}) \;=\; 1\;.$$

Geometrisch ist also $\mathcal{M}_{+,1}(\Omega)$ der Schnitt von dem Kegel mit der Einheitskugel, was hier tatsächlich konvex ist!

Nach diesen Beispielen von Dualräumen können wir mit der allgemeinen Theorie fortfahren.

Satz 3.21 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann gilt für $x \in X$*

$$\|x\| = \sup_{T \in X', \|T\| \leq 1} |T(x)| = \max_{T \in X', \|T\| \leq 1} |T(x)|\;.$$

Beweis: Die Ungleichung "$\geq$" der ersten Gleichheit folgt direkt aus $|T(x)| \leq \|T\|\|x\| = \|x\|$. Für die umgekehrte Ungleichung "$\leq$" geben wir ein $T \in X'$ an, sodass

$$|T(x)| \;=\; \|x\| \quad \text{und} \quad \|T\| = 1\;.$$

Sei $Y = \mathrm{span}\{x\} = \{\lambda x \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Auf diesem eindimensionalen Unterraum von X definieren wir

$$T : Y \to \mathbb{K}\;, \qquad T(\lambda x) = \lambda \|x\|\;.$$

Es gilt bez. der Halbnorm $p(x) = \|x\|$, dass

$$|T(y)| \leq p(y) \,, \qquad \forall\, y \in Y \,.$$

Somit besagt der Satz von Hahn-Banach, dass eine Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{K}$ existiert mit

$$\widetilde{T}(x') \;\leq\; p(x') \;=\; \|x'\| \,, \qquad \forall\, x' \in X \,.$$

Somit gilt $\|\widetilde{T}\| = 1$. Dies zeigt auch, dass das Supremum angenommen wird. □

Satz 3.22 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, Z ein Unterraum und $y \notin Z$. Definiere $d = \inf_{z\in Z} \|y-z\|$, den Abstand von y zu Z. Dann existiert $T \in X'$ mit $T(y) = d$ und $T(z) = 0$ für $z \in Z$.*

Beweis: Wir betrachten den Unterraum $Y = \text{span}\{y, Z\}$ und definieren $T : Y \to \mathbb{K}$ durch $T(z + \lambda y) = \lambda d$. Außerdem führen wir folgende Halbnorm auf X ein:

$$p(x) \;=\; \inf_{z\in Z} \|x - z\|$$

(Dies ist die Distanz $p(x) = d(x, Z)$ wie in Satz 1.28 über Quotientenräume.) Offensichtlich gilt $|T(x)| \leq p(x)$ auf Y. Somit garantiert der Satz von Hahn-Banach wieder die Existenz der Erweiterung $\widetilde{T} : X \to \mathbb{K}$ mit $\widetilde{T}|_{\overline{Z}} = 0$. Die Stetigkeit folgt nun aus

$$|\widetilde{T}(x)| \;\leq\; p(x) \;\leq\; \|x\| \,,$$

weil $z = 0 \in Z$. □

Satz 3.23 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Wenn X' separabel ist, so ist auch X separabel.*

Beweis: Sei $(T_n)_{n\geq 1}$ eine dichte Menge in X'. Wähle $(x_n)_{n\geq 1}$ in X, sodass

$$|T_n(x_n)| \;\geq\; \tfrac{1}{2}\|T_n\|.$$

Setze:

$$D \;=\; \left\{ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n \;:\; N \in \mathbb{N}\,,\;\; \lambda_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

Dann ist D abzählbar in X. Zu zeigen ist, dass D dicht ist.
Gegenannahme: Es gibt ein $y \notin Z = \overline{\text{span}(D)}$. Dann ist $d(y, Z) = d > 0$. Aus Satz 3.22 folgt die Existenz eines $T \in X'$ mit $T(y) = d,\ T(z) = 0$ für alle $z \in Z \supset D$. Sei nun $(T_{n_k})_{k\geq 1}$ eine Teilfolge mit $\|T_{n_k} - T\| \to 0$ (diese existiert nach der Dichtheit). Dann gilt

$$\|T - T_{n_k}\|_{X'} \;\geq\; |(T - T_{n_k})(x_{n_k})| \;=\; |T_{n_k}(x_{n_k})| \;\geq\; \tfrac{1}{2}\|T_{n_k}\| \,.$$

Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|T_{n_k}\| = 0$$

und auch $T = 0$, was im Widerspruch zu Obigem steht. □

Bemerkung 3.24 Die Umkehrung des Satzes ist falsch. Zum Beispiel gilt $(\ell^1)' = \ell^\infty$, aber ℓ^1 ist separabel und ℓ^∞ nicht. Wir sehen auch, dass $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ (Gleichheit wäre ein Widerspruch zu Satz 3.23).

Satz 3.25 *Sei* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Raum. Dann ist* $X'' = (X')'$ *der Bidualraum von* X. *Definiere*

$$\mathcal{T} : X \to X'' \ , \qquad \mathcal{T}(x)(T) = T(x) \ , \qquad T \in X' \ .$$

Dann ist $\mathcal{T}$ *eine isometrische Einbettung (injektiv).*

Beweis: Es gilt

$$|\mathcal{T}(x)(T)| \ = \ |T(x)| \ \leq \ \|T\|_{X'}\|x\|_X \ = \ \|x\|_X\|T\|_{X'} \ .$$

Somit ist $\mathcal{T}(x)$ beschränkt, d.h. tatsächlich in X'' und

$$\|\mathcal{T}(x)\|_{X''} \ \leq \ \|x\|_X \ .$$

Andererseits existiert nach Satz 3.21 ein $T \in X'$ mit

$$\|x\|_X \ = \ |T(x)| \ , \qquad \|T\|_{X'} \ = \ 1 \ .$$

Also folgt

$$\|\mathcal{T}(x)\|_{X''} \ = \ \sup_{T \in X', \|T\| \leq 1} |\mathcal{T}(x)(T)| \ \geq \ \|x\|_X \ ,$$

d.h. $\|\mathcal{T}(x)\|_{X''} = \|x\|_X$, was den Beweis beendet. □

Bemerkung 3.26 Im Allgemeinen ist $\mathcal{T}$ *nicht* surjektiv. Z.B. für alle unvollständigen Räume kann X'' als "Vervollständigung" verwendet werden.

Definition 3.27 *Ein Banachraum* X *heißt reflexiv* $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$ *surjektiv ist (also Isomorphismus ist).*

Beispiele 3.28

1. Hilberträume sind reflexiv (Satz 3.16).
2. Für $1 < p < \infty$ ist $L^p_\mu = L^p(\Omega, \mu)$ reflexiv.
   Begründung mit Satz 3.17: $(L^p_\mu)'' = (L^q_\mu)' = L^p_\mu$
3. L^1_μ nicht reflexiv, da $(L^1_\mu)' = L^\infty_\mu$ nicht separabel ist.
4. Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv (Beweis: Übung!).
5. X ist ein reflexiver Banachraum. Dann gilt nach Satz 3.23:
   $$X \quad \text{separabel} \quad \Longleftrightarrow \quad X' \quad \text{separabel}$$

3.4 Schwache Folgenkonvergenz

Definition 3.29 *Sei* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Vektorraum und* $(x_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge in* X. *Dann heißt* $(x_n)_{n\geq 1}$ *schwach konvergent gegen* $x \Longleftrightarrow \ \forall \ T \in X'$ *gilt:* $\lim_n T(x_n) = T(x)$. *Man schreibt dann auch* $\text{w-}\lim_n x_n = x$. *Falls* $\lim_n \|x_n - x\| = 0$, *d.h. Konvergenz bez.* $\|.\|$ *vorliegt, heißt die Folge stark konvergent. Offensichtlich ist jede stark konvergente Folge auch schwach konvergent.*

Beispiele 3.30

1. Sei $(e_n)_{n\geq 1}$ eine orthonormale Familie in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann gilt $\text{w-}\lim_n e_n = \vec{0}$, aber diese Folge ist nicht stark konvergent.
   Begründung: Sei $y \in \mathcal{H}' = \mathcal{H}$, dann besagt die Bessel'sche Ungleichung
   $$\sum_n |\langle e_n|y\rangle|^2 \ \leq \ \|y\|^2 \ ,$$
   und somit nach dem Riesz'schen Darstellungssatz
   $$\lim_n T_y(e_n) \ = \ \lim \langle y|e_n\rangle \ = \ 0 \ .$$

2. Sei Ω kompakt und $f_n,\ f \in C(\Omega)$. Dann gilt:

   $\text{w-}\lim_n f_n = f \iff \lim_n f_n(\omega) = f(\omega)\ \forall\ \omega \in \Omega$ (Punktweise Konvergenz)

   Begründung: Es wird der Satz von Riesz-Markov $C(\Omega)' = \mathcal{M}(\Omega)$ verwandt.
   "$\Longrightarrow$" Für das Dirac-Maß $\mu = \delta_\omega = C(\Omega)'$ gilt

$$\lim_n \mu(f_n) \;=\; \lim_n f_n(\omega) \;=\; \mu(f) \;=\; f(\omega)\ .$$

   "$\Longleftarrow$" Sei $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann folgt aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz für jedes $\mu \in C(\Omega)'$

$$\lim_n \mu(f_n) \;=\; \mu(\lim_n f_n) \;=\; \mu(f)\ .$$

3. Es gibt normierte Räume, in denen schwache Konvergenz auch starke Konvergenz impliziert. Als Übung sei folgendes, auf Schur zurückgehendes Resultat bewiesen:

   Satz: $(t_n)_{n\geq 1}$ in ℓ^1 schwach konvergent $\iff$ $(t_n)_{n\geq 1}$ in ℓ^1 stark konvergent.

Satz 3.31 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in X. Falls der schwache Limes $\text{w-}\lim x_n$ existiert, gilt $\sup_n \|x_n\| \leq C < \infty$.*

Beweis: Dies folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus angewendet auf den Banachraum X'. Sei $\mathcal{T} : X \to X''$ die Einbettung definiert wie in Satz 3.25. Dann setzen wir

$$\mathcal{F} \;=\; \{\mathcal{T}(x_n) \,:\, n \geq 1\} \;\subset\; \mathcal{B}(X', \mathbb{K}) \;=\; X''\ .$$

Es gilt nun die punktweise Beschränktheit, d.h. für alle $T \in X'$ gilt

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(T)|_{\mathbb{K}} \;=\; \sup_n |T(x_n)| \;\leq\; C_T \;<\; \infty\ .$$

Somit folgt mit Satz 3.25 und dem Satz vo Banach-Steinhaus

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathcal{B}(X',\mathbb{K})} \;=\; \sup_n \|\mathcal{T}(x_n)\|_{X''} \;=\; \sup \|x_n\|_X \;\leq\; C \;<\; \infty\ ,$$

was den Beweis beendet. □

Satz 3.32 $\text{w-}\lim_n x_n = x$ *impliziert* $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

Beweis: Nach Satz 3.21 existiert $T \in X'$ mit

$$\|x\| = |T(x)|\ , \qquad \|T\|_{X'} = 1\ .$$

Es gilt nun $|T(x_n)| \leq \|T\|\|x_n\| = \|x_n\|$ und unter Verwendung der schwachen Konvergenz folgt somit $|T(x)| = |\lim_n T(x_n)| \leq \liminf \|x_n\|$. □

Schwache Kompaktheit bzw. Folgenkompaktheit garantiert die Existenz von (schwachen) Lösungen, z.B. bei Anwendung des hier präsentierten allgemeinen Rahmens im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen. Ein wichtiges Kriterium hierfür ist folgendes Resultat, welches mit der Nichtkompaktheit von B_X bez. $\|.\|$ verglichen werden sollte.

Satz 3.33 *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist die Einheitskugel B_X schwach folgenkompakt, d.h. jede beschränkte Folge in X besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Zunächst werden wir die vereinfachende Annahme machen, dass X separabel ist. Da X reflexiv ist, folgt aus Satz 3.23, dass X' separabel ist. Sei also $(T_n)_{n\geq 1}$ eine dichte Folge in $B_{X'}$. Für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ ist auch $(T_n(x_k))_{k\geq 1}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ für alle $n \geq 1$. Somit existiert eine konvergente Teilfolge. Wir können nun ein Diagonalfolgenargument durchführen. Hierzu wählen wir sukzessive Teilfolgen $(x_k^{(n)})_{k\geq 1}$ aus, so dass $(T_n(x_k^{(n)}))_{k\geq 1}$ konvergiert. Dann erfüllt die Diagonalfolge $y_k = x_k^{(k)}$, dass $\lim_k T_n(y_k)$ existiert für alle $n \geq 1$.

Behauptung: $(T(y_k))_{k\geq 1}$ konvergiert für alle $T \in B_{X'}$.

Begründung: Für $\epsilon > 0$ wähle T_n mit $\|T - T_n\|_{X'} \leq \epsilon$. Dann

$$
\begin{aligned}
|T(y_k) - T(y_\ell)| &\leq |T(y_k) - T_n(y_k)| + |T_n(y_k) - T_n(y_\ell)| + |T_n(y_\ell) - T(y_\ell)| \\
&\leq \epsilon \sup_k \|y_k\| \ + \ \epsilon \ + \ \epsilon \sup_k \|y_k\| \qquad\qquad (\text{für} \ \ k, \ell \geq L = L(\epsilon)) \\
&\leq (2c+1)\epsilon \ .
\end{aligned}
$$

Also ist $(T(y_k))_{k\geq 1}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent. $\diamond$

Jetzt betrachten wir $y : X' \to \mathbb{K}$ definiert durch $y(T) = \lim_k T(y_k)$. Dann ist y linear und stetig, da $|y(T)| = \lim_k |T(y_k)| \leq \|T\| \sup_k \|y_k\| \leq c\|T\|$. Somit gilt $y \in X'' \cong X$ (mit Identifikation $y = \mathcal{T}(y)$). Also folgt für alle $T \in X'$

$$
T(y) \ = \ y(T) \ = \ \lim_k T(y_k) \ ,
$$

was genau die schwache Konvergenz von $(y_k)_{k\geq 1}$ gegen y ist.

Falls X nicht separabel ist, verwenden wir den abgeschlossenen Unterraum $Y = \overline{\mathrm{span}\{x_n | n \geq 1\}}$. Dann ist Y separabel und nach Beispiel 3.28 auch reflexiv, so dass wie oben vorgegangen werden kann. $\square$

Folgender Satz erlaubt es, eine Aussage über den Limespunkt zu machen. Es gibt auch eine Version über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Satz 3.34 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $A \subset X$ eine konvexe abgeschlossene Menge mit $0 \in A$. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in A mit schwachem Limespunkt x. Dann ist $x \in A$.*

Beweis: Gegenannahme: $x \notin A$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Setze

$$
A_r \ = \ A + B_r(0) \ = \ \{y \in X \ : \ \|y - a\| < r \text{ für ein } a \in A\} \ .
$$

Dann ist $A_r = \bigcup_{a \in A} B_r(a)$ offen und auch konvex (denn jede Summe konvexer Mengen ist konvex!). Außerdem ist $x \notin A_r$. Nach dem Trennungssatz 3.8 existiert ein $T \in X'$ mit $T(y) < 1$ für alle $y \in A_r$ und $T(x) = 1$. Somit

$$
T(a + u) \ = \ T(a) + T(u) \ < \ T(x) \qquad \forall \ a \in A, \ u \in B_r(0) \ ,
$$

und somit für $u = \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B_r(0)$

$$
T(a) \ \leq \ T(x)\Big(1 - \frac{r}{2\|x\|}\Big) \ , \qquad \forall \ a \in A \ .
$$

Da $x_n \in A$ ist dies im Widerspruch zu $\lim_n T(x_n) = T(x)$. $\square$

Beispiel 3.35 Abgeschlossenheit alleine reicht als Voraussetzung in Satz 3.34 nicht. Betrachte hierfür z.B. $A = \{x \in \mathcal{H} \,:\, \|x\| = 1\}$. Dann ist A abgeschlossen, aber nicht konvex. Wenn nun $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalbasis ist, dann gilt $\text{w-}\lim_n e_n = \vec{0}$, aber $\vec{0} \notin A$. $\diamond$

Definition 3.36 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum mit Dualraum X'. Weiter seien $(T_n)_{n\geq 1}$, T in X'. Dann heißt $(T_n)_{n\geq 1}$ schwach-* konvergent gegen $T \iff$ für alle $x \in X$ gilt $\lim_n T_n(x) = T(x)$. Notation:* $\text{w}^*\text{-}\lim T_n = T$

Bemerkung 3.37 Falls X reflexiv ist, stimmen die Begriffe der schwach-* und schwachen Konvergenz überein. Des Weiteren kann schwach-* Konvergenz in jedem Banachraum mit Prädual definiert werden. $\diamond$

Beispiel 3.38 Sei $\mathcal{M}(\Omega) = C(\Omega)'$ und $(\mu_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Maßen. Dann gilt

$$\text{w}^*\text{-}\lim \mu_n = \mu \quad \iff \quad \lim_n \mu_n(f) \;=\; \mu(f)\;, \qquad \forall\, f \in C(\Omega)\;.$$

Dies ist also genau die vage Konvergenz in der Wahrscheinlichkeitstheorie. $\diamond$

Satz 3.39 $\text{w}^*\text{-}\lim_n T_n$ *existiert. Dann* $\sup_n \|T_n\|_{X'} \leq C < \infty$.

Beweis: Wie oben folgt dies direkt aus dem Satz von Banach-Steinhaus. $\square$

Satz 3.40 *(Helly's Auswahlprinzip) Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_{X'} \subset X'$ schwach-* folgenkompakt, d.h. jede beschränkte Folge in X' hat eine schwach-* konvergente Teilfolge.*

Beweis: (wie oben) Sei $(x_k)_{k\geq 1}$ eine dichte Folge in B_X und $(T_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in X'. Dann existiert $\lim_n T_n(x_k)$ für alle $k \geq 1$. Ein Diagonalfolgenargument erlaubt nun eine Teilfolge $(n_j)_{j\geq 1}$ auszuwählen, sodass $\lim_j T_{n_j}(x_k)$ für alle $k \geq 1$ existiert. Mit einem 3ϵ-Argument folgt die Existenz von $\lim_j T_{n_j}(x)$ für alle $x \in X$. Also definiert man nun $T(x) = \lim_j T_{n_j}(x)$ und überprüft $T \in X'$. $\square$

Bemerkung 3.41 Meist wird dies auf $\mathcal{M}(\Omega) = C(\Omega)'$ angewendet. $\diamond$

Definition 3.42 *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (offen und zusammenhängend) und $f : D \to X$ eine gegebene Funktion.*

(i) *f heißt stark analytisch*

$\iff$ *s-*$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *existiert für alle $z \in D$.*

$\iff$ *Es existiert ein $f'(z) \in X$, sodass für jede Folge $h_n \to 0$ gilt*

$$\lim_n \left\| \frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} - f'(z) \right\|_X \;=\; 0\;.$$

(ii) *f heißt schwach analytisch*

$\iff$ $\text{w-}\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *existiert für alle $z \in D$.*

$\iff$ *Für alle $T \in X'$ ist $D \ni z \mapsto T(f(z)) \in \mathbb{C}$ analytisch.*

Satz 3.43 *(Dunford) Jede schwach analytische Funktion ist stark analytisch.*

Beweis: Gemäß der Cauchy-Formel gilt für jeden geschlossenen Weg Γ in D um z:

$$T(f(z)) \;=\; \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\,\frac{T(f(\xi))}{\xi - z}\;.$$

Gleiches gilt für $z+h$ und $z+h'$, wobei $h \neq h'$ und $h \neq 0 \neq h'$. Also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h-h'}\left[\frac{T(f(z+h)) - T(f(z))}{h} - \frac{T(f(z+h')) - T(f(z))}{h'}\right] \\
&= \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\,T(f(\xi))\,\frac{1}{h-h'}\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z}\right) - \frac{1}{h'}\left(\frac{1}{\xi - z - h'} - \frac{1}{\xi - z}\right)\right\} \\
&= \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\,T(f(\xi))\,\frac{1}{h-h'}\left\{\frac{1}{(\xi - z - h)(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z - h')(\xi - z)}\right\} \\
&= \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\,T(f(\xi))\,\frac{-1}{(\xi - z - h)(\xi - z - h')(\xi - z)} \\
&\leq C_T < \infty\;,
\end{aligned}$$

Letzteres unabhängig von h und h'. Nun setzen wir

$$x_{h,h'} \;=\; \frac{1}{h-h'}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+h')-f(z)}{h'}\right] \in X\;.$$

Dann gilt für alle $T \in X'$ und h, h' ausreichend klein

$$T(x_{h,h'}) \;\leq\; C_T\;.$$

Also impliziert der Satz von Banach-Steinhaus angewandt auf $\{\mathcal{T}(x_{h,h'}) \in X'' \,:\, h, h'\}$, dass für alle solche h, h'

$$\|\mathcal{T}(x_{h,h'})\|_{X''} \;\leq\; C\;,$$

und somit wegen der Isometrie von $\mathcal{T}$ auch

$$\|x_{h,h'}\|_X \;\leq\; C\;.$$

Dies impliziert

$$\left\|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+h')-f(z)}{h'}\right\| \;\leq\; C\,|h-h'|\;.$$

Somit gilt die Cauchy-Eigenschaft für jede Folge h_n. Wegen der Vollständigkeit von X existiert also der starke Limes und ist unabhängig von der Folge h_n. $\Box$

Nun kommen wir zu einer weiteren Anwendung, dem Herglotz'schen Darstellungssatz. Zunächst wird der Poissonkern P_r eingeführt. Seien $r < 1$, $\theta, t \in \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Dann ist

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}\;.$$

Aufsummieren der geometrischen Reihe zeigt:

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \;=\; \Re e\,\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\;.$$

Es gilt offensichtlich $P_r(\theta - t) \geq 0$ und außerdem

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; P_r(\theta - t) \; e^{int} \;=\; r^{|n|} \; e^{in\theta} \tag{3.3}$$

also insbesondere

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; P_r(\theta - t) \;=\; 1 \; .$$

Des Weiteren überprüft man auf Testfunktionen, d.h. im Sinne der schwach-* Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$:

$$\lim_{r \to 1} P_r(\theta - t) \;=\; \delta(\theta - t)$$

Nun sei $f = h + ig$ analytisch auf ganz $\overline{\mathbb{D}} = \{z \,:\, |z| \leq 1\}$, d.h.

$$f(z) \;=\; \sum_{n \geq 0} a_n z^n \; , \qquad h(z) \;=\; \tfrac{1}{2} \left(f(z) + \overline{f(z)} \right) \; .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; P_r(\theta - t) \; h(e^{it}) \quad &= \quad \tfrac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; P_r(\theta - t) \; (a_n e^{int} + \overline{a}_n e^{-int}) \\ &\overset{(3.3)}{=} \quad \tfrac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (a_n r^n e^{in\theta} + \overline{a}_n r^n e^{-in\theta}) \;=\; h(re^{i\theta}) \; . \end{aligned}$$

Also mit $z = re^{i\theta}$ gilt

$$h(z) \;=\; \Re e \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \; h(e^{it})$$

Da eine reelle harmonische Funktion nur auf eindeutige Art und Weise mit einem Imaginärteil zu einer analytischen Funktion kombiniert werden kann (bis auf Konstante, z.B. wegen Cauchy-Riemann, d.h. jede analytische Funktion kann durch ihren Realteil ausgedrückt werden), folgt somit

$$f(z) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \; h(e^{it}) + ic \; , \qquad c \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{D} \; .$$

Nun führen wir folgende Reskalierung für analytisches $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und für alle $R < 1$ durch:

$$f(z) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; \frac{R + ze^{-it}}{R - ze^{-it}} \; h(Re^{it}) \;+\; ic \; , \qquad \forall \; |z| < R \; .$$

Die zentrale Frage betrifft nun das Randwertverhalten der analytischen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sowie des Poissonintegrals. Eine elementare Antwort (z.B. Rudin) ist die Folgende: Falls $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ stetig ist, dann gilt

$$f(z) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \; \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \; h(e^{it}) \;+\; ic \;\; , \qquad \forall \; |z| < 1 \; .$$

Eine detailliertere Antwort für eine spezielle Klasse von Funktionen ist folgendes zentrale Ergebnis der Analysis:

Satz 3.44 *(Herglotz'scher Darstellungssatz für die Kreisscheibe) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ eine Herglotz-Funktion, d.h. analytisch mit $\Re e f \geq 0$. Dann existiert ein eindeutiges positives Radon-Maß μ auf $\mathbb{S}^1$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(z) \;=\; \int \mu(dt)\; \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} \;+\; ic\;.$$

Umgekehrt definiert jedes Maß so eine Herglotz-Funktion, d.h.

$$\{\text{Herglotz-Funktionen}\} \;\cong\; \mathcal{M}_+(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}\;.$$

Beweis: Sei $(R_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende Folge mit $\lim R_n = 1$. Definiere

$$T_n : C(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{C}\;, \qquad T_n(g) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\; h(R_n e^{it})\; g(t)\;,$$

wobei $h = \Re e(f)$ wie oben. **Behauptung:** T_n ist ein stetiges positives Funktional und $\|T_n\| = h(0)$.

Begründung: Da $h = \Re e(f)$ positiv ist, gilt nach der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$$|T_n(g)| \;\leq\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\; h(R_n e^{it})\; \|g\|_\infty \;=\; h(0)\; \|g\|_\infty\;.$$

Zudem gilt $T_n(1) = h(0)$, also $\|T_n\| = h(0)$. Die Positivität ist klar, da $h \geq 0$. □

Des Weiteren ist $C(\mathbb{S}^1)$ separabel (verwende den Satz von Weierstraß oder die Fourierbasis von $L^2(\mathbb{S}^1)$). Nach dem Helly'schen Auswahlprinzip existiert eine schwach-* konvergente Teilfolge, welche wieder mit T_n bezeichnet wird. Sei

$$T \;=\; \text{w}^*\text{-}\lim_n T_n\;,$$

d.h.

$$T(g) \;=\; \lim_n T_n(g) \qquad \forall\, g \in C(\mathbb{S}^1)\;.$$

Also ist T positiv und somit existiert nach dem Satz von Riesz-Markov ein endliches positives Radon-Maß μ, sodass

$$T(g) \;=\; \int \mu(dt)\; g(t) \qquad \forall\, g \in C(\mathbb{S}^1)\;.$$

Außerdem gilt für jede konvergente Folge $g_n \to g$ in $(C(\mathbb{S}^1), \|.\|)$, dass

$$\lim_n T_n(g_n) \;=\; T(g)\;.$$

In der Tat, da $\|T_n\| = h(0)$,

$$\begin{aligned} |T_n(g_n) - T(g)| \;&\leq\; |T_n(g_n) - T_n(g)| + |T_n(g) - T(g)| \\ &\leq\; \|T_n\|\|g_n - g\| + |T_n(g) - T(g)| \\ &\leq\; c\epsilon \qquad\quad \text{(für } n \text{ ausreichend groß).} \end{aligned}$$

Wähle für $|z| < 1$:

$$g_n(t) \;=\; \frac{R_n + ze^{-it}}{R_n - ze^{-it}}\;.$$

Dann gilt mit Konvergenz in $C(\mathbb{S}^1)$, dass $\lim_n g_n = g$

$$g(t) \;=\; \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\;.$$

Nun gilt aber (für $|z| < R_n$):

$$T_n(g_n) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\, h(R_n e^{it})\; g_n(t) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\, h(R_n e^{it})\, \frac{R_n + ze^{-it}}{R_n - ze^{-it}} \;=\; f(z) - ic\;,$$

also (für $|z| < 1$)

$$f(z) - ic \;=\; \lim_n T_n(g_n) \;=\; T(g) \;=\; \int \mu(dt)\, \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\;,$$

was den Beweis beendet.

Bemerkung 3.45 Wegen des Riemann'schen Abbildungssatzes kann $\mathbb{D}$ auch durch ein anderes einfach zusammenhängendes Gebiet G ersetzt werden. Oft findet man die Version mit der oberen Halbebene $G = \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im m(z) > 0\}$, welche durch die Caley-Transformation aus $\mathbb{D}$ erhalten wird.

3.5 Schwache Topologien

Definition 3.46 *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum und $Y \subset X'$ ein Unterraum. Die Topologie $\sigma(X,Y)$ auf X ist die gröbste Topologie, sodass für alle $T \in Y$ die Abbildung $T : X \to \mathbb{K}$ stetig bez. $\sigma(X,Y)$ ist.*

Beispiele 3.47

1. $\sigma(X, X')$ heißt die schwache Topologie auf X.
2. $\sigma(X', X)$ heißt die schwach-* Topologie auf X'.
3. $\sigma(X', X'')$ ist die schwache Topologie auf X'. Da $X \subset X''$ (unter Identifikation mit $\mathcal{T}$) ist die schwach-* Topologie gröber als die schwache auf X (denn weniger Funktionale müssen ja stetig gemacht werden, also benötigt man weniger offene Mengen).

Bemerkungen 3.48

1. Eine Umgebungsbasis von $\vec{0}$ in $\sigma(X,Y)$ wird gebildet von Mengen

$$\begin{aligned} U(T_1, \ldots, T_J; \epsilon) &= \{x \in X \,:\, T_j \in Y,\ |T_j(x)| < \epsilon \quad j = 1, \ldots, J\} \\ &= \bigcap_{j=1,\ldots,J} \{x \in X \,:\, |T_j(x)| < \epsilon,\ T_j \in Y\}, \end{aligned}$$

   wobei hier nur *endliche* Schnitte betrachtet werden. Translation gibt alle Umgebungsbasen.

2. Die Topologie $\sigma(X,Y)$ ist eine so genannte Initialtopologie wie auch die Produkttopologie (Details zum Zusammenhang später).
3. Falls $\dim(X) = \infty$, gibt es keine die Topologie $\sigma(X,Y)$ induzierende Metrik.

Satz 3.49 *Falls Y Punkte trennt, d.h. falls für alle $x, x' \in X$ ein $T \in Y$ existiert mit $T(x) \neq T(x')$, dann ist $\sigma(X,Y)$ Hausdorff'sch, d.h. T_2-Eigenschaft erfüllt. Dies ist der Fall für schwache und schwach-* Topologien.*

Beweis: Zu beliebigen $x, x' \in X$, sei $T \in Y$ mit $d = |T(x) - T(x')| > 0$. Trennende Umgebungen sind dann:

$$U(x) \;=\; \left\{\widetilde{x} \in X \,:\, |T(\widetilde{x} - x)| < \tfrac{d}{2}\right\}\;, \qquad U(x') \;=\; \left\{\widetilde{x} \in X \,:\, |T(\widetilde{x} - x')| < \tfrac{d}{2}\right\}\;,$$

was die erste Behauptung beweist. Nun zur Punktseparation für $\sigma(X,X')$. Seien $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $T \in X'$ mit $T(x) \neq T(x')$ (setze hierfür $T(x) = 0$ und $T(x') = 1$ und erweitere). Die Punktseparation für $\sigma(X',X)$ ist trivial, da $T \neq T'$ ja gerade bedeutet, dass $T(x) \neq T'(x)$ für ein x. □

Folgerung: Wegen der T_2-Trennungseigenschaft sind Limespunkte von konvergenten Filtern, Netzen und Folgen eindeutig bestimmt.

Satz 3.50 *Jede schwach (oder schwach-*) konvergente Folge im Sinne von Kapitel 3.4 konvergiert bez. der Topologie $\sigma(X,X')$ (bzw. $\sigma(X',X)$).*

Begründung: $\text{w-}\lim_n x_n = x$ bedeutet, dass für alle $T \in X'$ gilt $\lim_n T(x_n) = T(x)$. Somit existiert zu jedem Umgebungsbasiselement $U(x)$ von x in $\sigma(X,X')$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U(x)$ für alle $n \geq N$. Genauso argumentiert man für $\sigma(X',X)$. □

Satz 3.51 *Jede offene Menge in $\sigma(X,X')$ ist unbeschränkt bez. $\|.\|$, falls $\dim X = \infty$. Insbesondere ist die Menge $B_R(0) = \{x \in X \,:\, \|x\| < R\}$ nicht $\sigma(X,X')$-offen.*

Bemerkung 3.52 Natürlich ist $B_R(0)$ offen in $(X, \|.\|)$. Die schwachen Topologien enthalten also *wenig* offene Mengen. Sie sind sehr "grob".

Beweis: Nach Translation reicht es zu zeigen, dass alle Mengen der Umgebungsbasis von $\vec{0}$ unbeschränkt sind. Betrachte also:

$$\begin{aligned} U &= \{x \in X \,:\, |T_j(x)| < \epsilon \,, \quad j = 1, \dots, J, \ T_j \in X'\} \\ &= \bigcap_{j=1}^{J} \{x \in X \,:\, |T_j(x)| < \epsilon\} \\ &\supset \bigcap_{j=1}^{J} \operatorname{Ker}(T_j) \end{aligned}$$

Jetzt ist $\operatorname{codim}\,(\operatorname{Ker} T_j) \leq 1$ und gleich 0, nur falls $T_j = 0$. Somit

$$\operatorname{codim} \left(\bigcap_{j=1}^{J} \operatorname{Ker}(T_j) \right) \ \leq \ J \ < \ \infty \,.$$

Da $\dim(X) = \infty$, enthält U also einen nicht trivialen Unterraum, der natürlich Vektoren beliebiger Länge hat. □

Satz 3.53 *Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum, $T : X \to \mathbb{K}$ linear und $Y \subset X'$ ein Unterraum. Dann ist T stetig bez. $\sigma(X,Y)$ genau dann, wenn $T \in Y$.*

Beweis: "$\Longleftarrow$" ist klar nach der Definition der Topologie $\sigma(X,Y)$. Für die Umkehrung "$\Longrightarrow$" setzen wir zunächst $B_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Dann ist $T^{-1}(B_1) = \{x \in X \,:\, |T(x)| < 1\}$ offen in $\sigma(X,Y)$. Also ist ein Element der Basis der Topologie bzw. eine Umgebung von $\vec{0} \in T^{-1}(B_1)$ darin enthalten. Somit existiert ein $\epsilon > 0$ und $T_1, \dots, T_I \in Y$ mit

$$T^{-1}(B_1) \supset \{x \in X \,:\, |T_i(x)| < \epsilon, \ i = 1, \dots, I\} \,.$$

Nun setzen wir

$$K = \bigcap_{i=1}^{I} \mathrm{Ker}(T_i) .$$

Dann ist K ein abgeschlossener Unterraum mit $\mathrm{codim}(K) \leq I$. Falls $x \in K$, ist $x \in T^{-1}(B_1)$, so ist ebenso $\frac{1}{\epsilon}x \in T^{-1}(B_1)$ für alle $\epsilon > 0$. Also gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\left| T\left(\frac{1}{\epsilon}x\right) \right| < 1 ,$$

sodass $|T(x)| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, d.h. $T(x) = 0$. Somit kann $\widetilde{T} : X/K \to \mathbb{K}$ definiert werden durch

$$\widetilde{T}([x+u]) = T(x+u) = T(x) , \qquad u \in K .$$

Ebenso führen wir $\widetilde{T}_i : X/K \to \mathbb{K}$ ein durch

$$\widetilde{T}_i([x+u]) = T_i(x+u) = T_i(x) .$$

Behauptung: $(X/K)' = \mathrm{span}\{\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_I\}$

Begründung: $X/K = \mathrm{span}\{[x_i] : T_i(x_i) \neq \vec{0},\ i = 1, \ldots, I\}$ und $\dim(X/K) \leq I < \infty$. Somit $\dim((X/K)') = \dim(X/K)$ und

$$(X/K)' = \{\tilde{s} : X/K \to \mathbb{K} \text{ linear}\}$$

wird genau von den $\widetilde{T}_i$ aufgespannt (Details zur Übung). Also gilt $\widetilde{T} = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \widetilde{T}_i$, was ja gerade $T \in Y$ bedeutet. □

Satz 3.54 *(Alaoglu 1940) Sei* $(X, \|.\|)$ *ein normierter Raum und* X' *ein Dualraum. Dann ist die* $B_{X'} = \{T \in X' : \|T\|_{X'} \leq 1\}$ *schwach-* kompakt (kompakt bez.* $\sigma(X', X)$*).*

Beweis: Fasse $T \in X'$ auf als ein Element $(T(x))_{x \in X} \in \mathbb{K}^X$, d.h. $X' \subset \mathbb{K}^X$. Auf $\mathbb{K}^X$ ist die Produkttopologie die gröbste Topologie (Initialtopologie), sodass alle Projektionen (Faserabbildungen)

$$\pi_x : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K} , \qquad \pi_x(S) = S(x) , \qquad S = (S(x))_{x \in X} ,$$

stetig sind.

Behauptung: Die Unterraumtopologie von $X' \subset \mathbb{K}^X$, wenn $\mathbb{K}^X$ mit Produkttopologie versehen, ist genau die schwach-* Topologie.

Begründung: Sei $i : X' \hookrightarrow \mathbb{K}^X$ die Einbettung des Unterraums (*nicht* Unter*vektor*raum). Die Unterraumtopologie auf X' ist die gröbste Topologie auf X', sodass i stetig ist (Charakterisierung der Produkttopologie) und somit die gröbste Topologie auf X', sodass $\pi_x(i(T)) = T(x)$ stetig für alle $x \in X$ ist. □

Behauptung: $B_{X'} \subset \prod_{x \in X} B_{\|x\|} \subset \mathbb{K}^X$ ist abgeschlossen, wobei $B_{\|x\|} = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq \|x\|\}$.

Begründung: Wegen Additivität, Homogenität und Beschränktheit gilt folgende Identität:

$$B_{X'} = \bigcap_{x,y \in X} \{\pi_{x+y} = \pi_x + \pi_y\} \cap \bigcap_{x \in X, \lambda \in \mathbb{K}} \{\pi_{\lambda x} = \lambda \pi_x\} \cap \bigcap_{x \in X, \|x\| \leq 1} \pi_x^{-1}([-1, 1])$$

Nun sind alle auftretenden Mengen abgeschlossen, weil:

(i) $\{f = g\} = \{\omega \in \Omega \,:\, f(\omega) = g(\omega)\}$ abgeschlossen ist für stetige f, g.

(ii) Stetige Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Somit ist $B_{X'}$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Schluss des Beweises : Nach dem Satz von Tychonov ist $\prod_{x\in X} B_{\|x\|}$ kompakt in der Produkttopologie. Als abgeschlossene Teilmenge $B_{X'} \subset \prod_{x\in X} B_{\|x\|}$ ist also auch $B_{X'}$ kompakt. □

Des Weiteren sei noch folgender Satz zitiert.

Satz 3.55 *(Eberlein 1947) Sei X ein Banachraum. Dann gilt X reflexiv $\Longleftrightarrow$ $B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\}$ schwach kompakt.*

Beweis: "$\Longrightarrow$" klar nach Satz 3.54, da Dualraum und Predualraum übereinstimmen und somit auch die mit der schwach-* Topologie. Die Umkehrung "$\Longleftarrow$" ist länglich, siehe Literatur. □

Bemerkung 3.56 Wegen eines Satzes von Eberlein-Shmulyan gilt schwach*-folgenkompakt $\Longleftrightarrow$ schwach-* kompakt. Somit sind die Sätze von Alaoglu und Helly eigentlich äquivalent.

4 Operatortheorie

4.1 Grundlagen

Satz 4.1 *(Prinzip der offenen Abbildung, Banach 1929) Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann folgt aus der Surjektivität von T, dass T offen ist, d.h. Bilder offener Mengen sind offen.*

Beweis: Unter Verwendung allgemeiner Ergebnisse der Topologie gelten folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
T \text{ offen} &\Longleftrightarrow \big(\forall\, x \in X : U \text{ Umgebung von } x \Longrightarrow T(U) \text{ Umgebung von } T(x)\big)\\
&\Longleftrightarrow \big(\forall x \in X : U - x \text{ Umgebung von } \vec{0} \in X \Longrightarrow T(U - x) \text{ Umgebung von } \vec{0} \in Y\big)\\
&\Longleftrightarrow (U \text{ Umgebung von } \vec{0} \Longrightarrow T(U) \text{ Umgebung von } \vec{0})\\
&\Longleftrightarrow \forall\, r > 0 \text{ gilt } T(B^X_r) \supset B^Y_{r'} \text{ für ein } r' > 0,
\end{aligned}
$$

wobei folgende Notation für die Kugel in X um $\vec{0}$ vom Radius r verwendet wurde:

$$B^X_r = \{x \in X \,:\, \|x\| < r\}\ .$$

Unter Verwendung der Skalierung $T(B^X_r) = rT(B^X_1)$ folgt also

T offen $\Longleftrightarrow \exists\, r > 0$ mit $T(B^X_r) \supset B^Y_{r'}$ für ein $r' > 0$.

Weil T surjektiv ist, gilt nun $Y = \bigcup_{n\geq 1} T(B^X_n)$. Nach dem Satz von Baire existiert also ein n, sodass $\overline{T(B^X_n)}$ nicht leeres Inneres hat. Nach Translation und Reskalierung folgt also die Existenz eines $\epsilon > 0$ mit $\overline{T(B^X_1)} \supset B^Y_\epsilon$, für welches dann auch für alle $n \geq 1$ gilt

$$\overline{T\left(B^X_{\frac{1}{2^n}}\right)} \supset B^Y_{\frac{\epsilon}{2^n}}\ .$$

Behauptung: $\overline{T(B^X_1)} \subset T(B^X_2)$.

Aus dieser Behauptung zusammen mit dem eben Bewiesenen folgt dann die Existenz eines $\epsilon > 0$ mit

$B_\epsilon^Y \subset T(B_2^X)$. Nach obiger Äquivalenz zeigt dies also, dass T offen ist.

Begründung der Behauptung: Sei $y \in \overline{T(B_1^X)}$. Wähle $x_1 \in B_1^X$, sodass $y - Tx_1 \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^Y \subset \overline{T(B_{\frac{1}{2}}^X)}$. Dann wähle $x_2 \in B_{\frac{1}{2}}^X$, sodass $y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\frac{\epsilon}{2^2}}^Y \subset \overline{T(B_{\frac{1}{2^2}}^X)}$. Nun gehen wir iterativ vor, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n \in B_{\frac{1}{2^{n-1}}}^X$, sodass

$$y - \sum_{\ell=1}^{n} Tx_\ell \ \in \ B_{\frac{\epsilon}{2^n}}^Y \ \subset \ \overline{T\left(B_{\frac{1}{2^n}}^X\right)} \ . \tag{4.1}$$

Setze

$$x \ = \ \sum_{n\geq 1} x_n \ .$$

Dann ist $x \in B_2^X$, weil

$$\|x\| \ \leq \ \sum_{n\geq 1} \|x_n\| \ < \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} \ = \ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \ = \ 2 \ .$$

Außerdem folgt aus der Stetigkeit von T, dass $Tx = \sum_{n\geq 1} Tx_n = y$, Letzteres nach (4.1). Dies beweist die Behauptung und somit auch den Satz. □

Satz 4.2 *(Satz der inversen Abbildung) Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine stetige Bijektion. Dann ist das Inverse T^{-1} auch stetig.*

Beweis: Aus der Surjektivität folgt nach dem Satz der offenen Abbildung, dass T auch offen ist, welches wegen der Bijektivität aber gerade die Stetigkeit von T^{-1} ist. □

Definition 4.3 *Seien X und Y normierte Räume und $D \subset X$ ein Unterraum. Außerdem sei $T : D \to Y$ eine lineare Abbildung mit Definitionsbereich D. Der Graph von T ist definiert als*

$$\Gamma(T) \ = \ \{(x, Tx) \, : \, x \in D\} \ \subset \ X \times Y \ .$$

Nun heißt T abgeschlossen genau dann, wenn $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist in $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie.

Bemerkung 4.4 Die Konvergenz $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ ist nach Definition der Produkttopologie gleichbedeutend mit den Konvergenzen $x_n \to x$ in X und $Tx_n \to y$ in Y (**beide** konvergieren!). Wenn nun $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist, folgt $(x, y) \in \Gamma(T)$, falls $x_n \in D$. Dies impliziert $x \in D$ **und** $Tx = y$, aber **nicht**, dass D abgeschlossen ist.

Satz 4.5 (Satz vom abgeschlossenem Graphen) *Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear (überall definiert!). Dann gilt:*
T stetig $\Longleftrightarrow$ T abgeschlossen.

Beweis: "$\Longrightarrow$" ist trivial, da $x_n \to x$ in X impliziert, dass $Tx_n \to Tx$, d.h. $x \in D = X$.
"$\Longleftarrow$" Der Vektorraum $X \times Y$ wird zu einem Banachraum, wenn versehen mit der Norm (Satz 1.34)

$$\|(x, y)\|_1 \ = \ \|x\|_X + \|y\|_Y \ .$$

Dieser Raum wird mit $X \oplus_1 Y$ bezeichnet. Aus der Linearität von T folgt, dass $\Gamma(T) \subset X \oplus_1 Y$ ein Unterraum ist, der nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Also ist auch $(\Gamma(T), \|.\|_1)$ ein Banachraum. Nun sind die Faserprojektionen

$$\begin{aligned} \pi_1 : \Gamma(T) \to X \ , \qquad & \pi_1(x, T(x)) = x \ , \\ \pi_2 : \Gamma(T) \to Y \ , \qquad & \pi_2(x, T(x)) = T(x) \ , \end{aligned}$$

stetig gemäß der Definition der Produkttopologie. Da T überall definiert ist, ist π_1 bijektiv. Nach Satz 4.2 ist also $(\pi_1)^{-1}$ stetig. Somit ist $T = \pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}$ auch stetig. □

Bemerkungen 4.6 Betrachte die drei Aussagen:

(a) $x_n \to x$ in X

(b) $Tx_n \to y$ in Y

(c) $Tx = y$

Falls T stetig ist, dann gilt: (a) $\Longrightarrow$ (b) und (c).
Der Satz besagt nun, dass T stetig ist, falls (a) und (b) $\Longrightarrow$ (c).

Satz 4.7 *(Hellinger-Toeplitz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein überall definierter, linearer und symmetrischer Operator, d.h.*

$$\langle x|Ty\rangle \ = \ \langle Tx|y\rangle \ , \quad \forall \ x, y \in \mathcal{H} \ .$$

Dann ist T beschränkt.

Beweis: Wir beweisen, dass $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist und wenden dann Satz 4.5 an. Sei $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Zu zeigen ist, dass $(x, y) \in \Gamma(T)$, d.h. $Tx = y$. Für alle $z \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle z|y\rangle \ = \ \lim_n \langle z|Tx_n\rangle \ = \ \lim_n \langle Tz|x_n\rangle \ = \ \langle Tz|x\rangle \ = \ \langle z|Tx\rangle \ .$$

Somit folgt tatsächlich $y = Tx$. □

Bemerkung 4.8 In der Quantenmechanik soll die Energie, beschrieben durch den Hamiltonoperator $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, reell sein. Deswegen muss gelten

$$\langle x|Hx\rangle \ = \ \overline{\langle x|Hx\rangle} \ = \ \langle Hx|x\rangle \ , \quad \forall x \in \mathcal{H} \ .$$

Aus der Polarisationsidentität folgt dann auch

$$\langle x|Hy\rangle \ = \ \langle Hx|y\rangle \ , \qquad \forall \ x, y \in \mathcal{H} \ .$$

Falls die Energie unbeschränkt ist, so kann nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz H nicht überall definiert sein.

Erinnerung: Wenn X ein normierter Vektorraum und Y ein Banachraum ist, dann ist $(\mathcal{B}(X, Y), \|.\|_{\mathrm{op}})$ ein Banachraum. Nun sollen gröbere Topologien eingeführt werden.

Definition 4.9 (i) *Die starke Operatortopologie auf $\mathcal{B}(X,Y)$ ist die gröbste Topologie, sodass für alle $x \in X$ die Abbildungen*

$$E_x : \mathcal{B}(X,Y) \to Y \ , \qquad E_x(T) \ = \ T(x)$$

stetig sind. Eine Umgebungsbasis des Nulloperators ist

$$\{T \in \mathcal{B}(X,Y) \ : \ \|T(x_i)\| < \epsilon, \ x_i \in X, \ i = 1, \dots, I\} \ .$$

Notation für stark konvergente Operatorfolgen: $\text{s-}\lim_n T_n$.

(ii) *Die schwache Operatortopologie auf $\mathcal{B}(X,Y)$ ist die gröbste Topologie, sodass für alle $x \in X$ und $s \in Y'$ die Abbildungen*

$$E_{x,s} : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{K} \ , \qquad E_{x,s}(T) \ = \ s(T(x)) \ ,$$

stetig sind. Eine Umgebungsbasis von 0 *ist:*

$$\{T \in \mathcal{B}(X,Y) | (s_j(T(x_j))| < \epsilon, \ x_j \in X, s_j \in Y' \ i = 1, \dots, I, \ j = 1, \dots, J\}$$

Notation für schwach konvergente Operatorfolgen: $\text{w-}\lim_n T_n$

Bemerkung 4.10 Auf Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, gilt

$$\text{w-}\lim_n T_n = T \iff \forall \ x, y \in \mathcal{H} : \qquad \lim_n \langle x | T_n y \rangle \ = \ \langle x | T y \rangle \ ,$$

d.h. alle Matrixelemente konvergieren.

4.2 Spektraltheorie auf Banachräumen

In diesem und den folgenden Paragraphen ist der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Einiges ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ möglich, aber die meisten Begrifflichkeiten sind uninteressant. Zunächst sei an die Spektraltheorie einer Matrix $T \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ erinnert:

$$\begin{aligned} \lambda \quad \text{Eigenwert von} \quad T \iff & \ \exists \ x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \quad \text{mit} \quad Tx = \lambda x \\ \iff & \ \det(T - \lambda \mathbb{1}) = 0 \\ \iff & \ \lambda \mathbb{1} - T \quad \text{nicht invertierbar} \end{aligned}$$

Dann ist das Spektrum $\sigma(T)$ von

$$\sigma(T) \ = \ \{\text{Eigenwerte von } T\} \ = \ \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda \mathbb{1} - T \text{ nicht invertierbar}\} \ .$$

Nun werden diese Begriffe verallgmeinert.

Definition 4.11 *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{B}(X)$*

(i) *Die Resolventenmenge von T ist definiert als*

$$\rho(T) \ = \ \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda \mathbb{1} - T \text{ Bijektion mit stetigem Inversen}\} \ .$$

Dann heißt $R_\lambda(T) = (\lambda \mathbb{1} - T)^{-1}$ die Resolvente von T.

(ii) *Das Spektrum von T ist definiert als*

$$\sigma(T) \;=\; \mathbb{C}\backslash\rho(T)\ .$$

(iii) *$\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von T mit Eigenvektor $x \neq 0 \iff Tx = \lambda x$.*

(iv) *Das Punktspektrum von T ist die Menge*

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) \;&=\; \{\lambda \in \mathbb{C}\,:\,\lambda \text{ Eigenwert von } T\}\\ &=\; \{\lambda \in \mathbb{C}\,:\,\lambda\mathbb{1} - T \text{ nicht injektiv (nicht trivialer Kern)}\}\ .\end{aligned}$$

(v) *Das kontinuierliche oder stetige Spektrum von T ist die Menge*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,:\,\lambda \text{ nicht Eigenwert von } T,\ \mathrm{Ran}(\lambda\mathbb{1} - T) \neq X,\ \text{aber dicht}\}\ .$$

(vi) *Das residuelle oder Restspektrum von T ist*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,:\,\lambda \text{ nicht Eigenwert von } T,\ \mathrm{Ran}(\lambda\mathbb{1} - T) \text{ nicht dicht}\}\ .$$

Bemerkungen 4.12 1. Die Stetigkeit der Resolventen folgt automatisch aus Satz 4.2, weil $\lambda\mathbb{1}-T$ stetig ist. Wenn weiter unten auch unbeschränkte T betrachtet werden, muss es jedoch gefordert werden.

2. Die Bedingung "$\lambda\mathbb{1} - T$ Bijektion" kann sowohl durch fehlende Injektivität als auch Surjektivität verletzt werden und Letzteres wird nochmals unterteilt. Somit liegt folgende disjunkte Zerlegung vor:
$$\sigma(T) \;=\; \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)\ .$$
Das residuelle Spektrum ist absepariert, weil es oft leer ist (z.B. für selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen).

Satz 4.13 *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist.*

(i) *$\rho(T) \subset \mathbb{C}$ offen*

(ii) *$R_\lambda(T)$ ist analytisch in λ auf jeder Komponente von $\rho(T)$ (maximal zusammenhängende Teilmenge).*

(iii) *$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}\,:\,|z| \leq \|T\|\}$ ist kompakt.*

(iv) *Für $\lambda, \mu \in \rho(T)$ gilt die erste Resolventenidentität*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) \;=\; (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T)\ .$$

Insbesondere gilt also $[R_\mu(T),\ R_\lambda(T)] = 0$.

(v) *Wenn $d(\lambda, \sigma(T))$ den euklidischen Abstand von λ zum Spektrum bezeichnet, dann gilt:*

$$\|R_\lambda(T)\| \;\geq\; \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}\ .$$

Beweis: (i) Sei $\lambda \in \rho(T)$, d.h. $R_\lambda(T) \in \mathcal{B}(X)$ existiert und ist beschränkt. Formell gilt nun für $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{\mu - T} \;=\; \frac{1}{\mu - \lambda + \lambda - T} \;=\; \frac{1}{\lambda - T}\,\frac{1}{1 - \frac{\lambda-\mu}{\lambda-T}} \;=\; \frac{1}{\lambda - T}\left(\mathbb{1} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-T}\right)^n\right)$$

Also definieren wir für $|\lambda - \mu| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}$ den Operator

$$\widetilde{R}_\mu(T) \;=\; R_\lambda(T)\left(\mathbb{1} + \sum_{n\geq 1}(\lambda-\mu)^n R_\lambda(T)^n\right) \;,$$

wobei die Reihe bez. der Operatornorm konvergiert, weil

$$\left\|\sum_{n\geq 1}(\lambda-\mu)^n R_\lambda(T)^n\right\| \;\leq\; \sum_{n\geq 1}|\lambda-\mu|^n \|R_\lambda(T)\|^n < \infty \;.$$

Nun gilt unter Verwendung der geometrischen Reihe und der Identität $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$

$$\begin{aligned}
(\mu\mathbb{1} - T)\widetilde{R}_\mu(T) \;&=\; (\mu\mathbb{1} - T)(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}(\mathbb{1} - (\lambda-\mu)R_\lambda(T))^{-1} \\
&=\; (\mu\mathbb{1} - T)[(\mathbb{1} - (\lambda-\mu)R_\lambda(T))(\lambda\mathbb{1} - T)]^{-1} \\
&=\; (\mu\mathbb{1} - T)[\lambda\mathbb{1} - T - (\lambda-\mu)\mathbb{1}]^{-1} = \mathbb{1} \;.
\end{aligned}$$

Also existiert $R_\mu(T) = \widetilde{R}_\mu(T)$, d.h. $\mu \in \rho(T)$. Somit ist $\rho(T)$ offen.

(ii) $R_\mu(T)$ für $\mu \in \rho(T)$ hat nach (i) eine Potenzreihenentwicklung, ist also analytisch.

(iii) Für $\lambda > \|T\|$ konvergiert (bez. der Operatornorm) die Reihe

$$\widetilde{R}_\lambda(T) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{1} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right) \;.$$

Die gleiche Rechnung wie oben zeigt $R_\lambda(T) = \widetilde{R}_\lambda(T)$. Also ist $\lambda \in \rho(T)$. Somit gilt $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$, was also beschränkt und abgeschlossen ist.

(iv) Es gilt:

$$\begin{aligned}
R_\lambda(T) - R_\mu(T) \;&=\; R_\lambda(T)(\mu\mathbb{1} - T)R_\mu(T) - R_\mu(T)(\lambda\mathbb{1} - T)R_\lambda(T) \\
&=\; (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T) \;,
\end{aligned}$$

was den letzten Punkt zeigt.

(v) Sei $\lambda \in \rho(T)$. Im Beweis von (i) wurde gezeigt, dass $|\lambda-\mu| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}$ impliziert, dass $\mu \in \rho(T)$. Nun sei $\widetilde{\mu} \in \sigma(T)$, sodass $d(\lambda, \sigma(T)) = |\lambda - \widetilde{\mu}|$. Dann muss also gelten $|\lambda - \widetilde{\mu}| \geq \|R_\lambda(T)\|^{-1}$. □

Um das Spektrum zu bestimmen, wird oft folgendes Hilfsmittel verwandt.

Definition 4.14 *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Einheitsvektoren in X heißt Weyl-Folge von T zu $\lambda \in \mathbb{C}$, falls*

$$\lim_{n\to\infty}(T - \lambda\mathbb{1})x_n \;=\; 0 \;.$$

Wenn $(x_n)_{n\geq 1}$ gegen x konvergiert, dann gilt $Tx = \lambda x$, d.h. λ ist ein Eigenwert von T. Es gibt aber viele Beispiele, in denen die Weyl-Folge nicht konvergiert. Gemäß des folgenden Satzes kann dennoch geschlossen werden, dass λ im Spektrum (aber nicht Punktspektrum) ist.

Satz 4.15 *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$ und $\rho(T)$ und $\sigma(T)$ beide nicht leer. Dann:*

(i) *Wenn eine Weyl-Folge zu $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, dann $\lambda \in \sigma(T)$.*

(ii) *Wenn $\lambda \in \partial\sigma(T)$ auf dem Rand des Spektrums liegt, dann existiert eine Weyl-Folge zu $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Wenn $\lambda \in \sigma_c(T)$, dann existiert eine Weyl-Folge zu $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Beweis: (i) Wir nehmen an, dass $\lambda \in \rho(T)$, sodass $\|R_\lambda(T)\| < \infty$. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ die Weyl-Folge zu λ. Dann gilt

$$1 \;=\; \|x_n\| \;=\; \|R_\lambda(T)(T-\lambda\mathbb{1})x_n\| \;\leq\; \|R_\lambda(T)\|\|(T-\lambda\mathbb{1})x_n\| \;\to\; 0$$

im Limes $n \to \infty$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

(ii) Sei nun $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\rho(T)$ mit Limes λ. Nach Satz 4.13 (v) gilt dann $\|R_{\lambda_k}(T)\| \to \infty$ für $k \to \infty$. Also existiert eine Folge $y_k \in \mathcal{H}$ mit $\|y_k\| = 1$ und $\|R_{\lambda_k}(T)y_k\| \to \infty$. Setze

$$x_n \;=\; \frac{R_{\lambda_n}(T)y_n}{\|R_{\lambda_n}(T)y_n\|} \;.$$

Dann gilt $\|x_n\| = 1$ und

$$\begin{aligned}(T-\lambda\mathbb{1})x_n \;&=\; (T-\lambda_n\mathbb{1})x_n + (\lambda_n-\lambda)x_n \\ &=\; \frac{1}{\|R_{\lambda_n}(T)y_n\|}\; y_n + (\lambda_n-\lambda)x_n \\ &\to\; 0+0 \;=\; 0 \qquad \text{für } n \to \infty \;.\end{aligned}$$

Somit ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Weyl-Folge für λ. Nun zu (iii). Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Wenn es keine Weyl Folge gäbe, dann würde ein $\delta > 0$ existieren mit $\|(T-\lambda\mathbf{1})v\| \geq \delta\,\|v\|$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Aber dann gilt für alle $w = (T-\lambda\mathbf{1})v \in \text{Ran}(T-\lambda\mathbf{1})$ wegen der Bijektivität (weil der Kern trivial ist), dass $v = (T-\lambda\mathbf{1})^{-1}w$. Also kann $(T-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ als linearer Operator dicht definiert werden auf $\text{Ran}(T-\lambda\mathbf{1})$. Zudem

$$\|(T-\lambda\mathbf{1})^{-1}w\| \;\leq\; \delta^{-1}\,\|w\| \;,$$

so dass $(T-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ stetig fortgesetzt werden kann, was aber bedeutet, dass λ nicht im Spektrum wäre. Also muss eine Weyl-Folge existieren. □

Definition 4.16 *Der Spektralradius von $T \in \mathcal{B}(X)$ ist*

$$r(T) \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \;.$$

Satz 4.17 $r(T) = \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Beweis: Die Folge $a_n = \log\|T^n\|$ ist subadditiv, d.h.

$$a_{n+m} \;=\; \log\|T^{n+m}\| \;\leq\; \log\|T^n\|\|T^m\| \;=\; a_n + a_m \;.$$

Somit gilt $\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}$.

Begründung (Standardargument für die Existenz des Limes): Für m fest, zerlege $n = mq + r$ mit Rest $0 \leq r \leq m-1$. Dann gilt

$$\frac{a_n}{n} \;=\; \frac{a_{mq+r}}{mq+r} \;\leq\; \frac{qa_m + a_r}{mq+r} \;\leq\; \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n}\;.$$

Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_n \frac{a_n}{n} \;\leq\; \frac{a_m}{m}\;,$$

und somit

$$\limsup_n \frac{a_n}{n} \;\leq\; \inf_m \frac{a_m}{m} \;\leq\; \liminf_m \frac{a_m}{m}\;.$$

$\diamond$

Behauptung: $r(T) \leq \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Begründung: Sei $|\lambda| > \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Dann existiert ein N mit $|\lambda| > \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ für alle $n \geq N$. Also existiert

$$R_\lambda(T) \;=\; \frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\;.$$

Also ist $\lambda \in \rho(T)$, woraus die Behauptung folgt. $\diamond$

Behauptung: $r(T) \geq \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Begründung: Sei $|\mu| > r(T)$. Wir zeigen $|\mu| \geq \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Sei $S \in \mathcal{B}(X)'$ (Dualraum). Nach Satz 4.13(ii) ist dann $f(\lambda) = S(R_\lambda(T))$ analytisch auf $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\lambda| > r(T)\}$. Somit ist $f(\lambda) = \sum_{n\geq 0}\frac{S(T^n)}{\lambda^{n+1}}$ eine konvergente Laurent-Reihe um ∞. Insbesondere gilt für $\mu \in D$ und alle $S \in \mathcal{B}(X)'$

$$\lim_n \frac{S(T^n)}{\mu^{n+1}} \;=\; 0\;.$$

Das heißt genau $\text{w-}\lim_n \frac{T^n}{\mu^{n+1}} = 0$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (genauer Satz 3.31, der zeigt, dass schwache Konvergenz Beschränktheit einer Folge impliziert) folgt also

$$\sup_n \left\|\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right\| \;\leq\; C \;<\; \infty$$

und somit

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; C^{\frac{1}{n}}|\mu|^{\frac{n+1}{n}}\;,$$

was die Behauptung und somit auch den Satz beweist. $\square$

Nun kommen wir zum Funktionalkalkül für einen Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ auf einen Banachraum X. Dies ist ganz natürlich für ein Polynom $p(z) = \sum_{n=0}^N p_n z^n$, denn

$$p(T) \;=\; \sum_{n=0}^N p_n\, T^n\;.$$

Etwas allgemeiner, für eine ganze Funktion $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ kann

$$f(T) \;=\; \sum_{n\geq 0} f_n\, T^n$$

als eine Norm-konvergente Reihe definiert werden. Noch allgemeiner, kann diese Formel für auf $B_{\|T\|+\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < \|T\| + \epsilon\}$ analytisches f verwandt werden. Nun sollen noch allgemeinere Funktionen betrachtet werden.

Definition 4.18 *(Holomorphes Funktionalkalkül) Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann betrachten wir folgende Algebra von Funktionen:*

$$\mathcal{F} = \{f \text{ analytisch auf Umgebung } G \text{ vom Spektrum } \sigma(T)\} \ .$$

Nun sei Γ ein Weg in $G \backslash \sigma(T) = G \cap \rho(T)$, der jeden Punkt von $\sigma(T)$ im positiven Sinne einmal umläuft. Wir definieren $f(T) \in \mathcal{B}(X)$ als folgendes norm-konvergentes Riemann-Integral (oder alternativ als schwaches Integral unter Paarung mit $\mathcal{B}(X)'$):

$$f(T) \ = \ \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \ f(z) \ R_z(T) \ .$$

Bemerkungen 4.19

1. Es ist möglich, dass G mehrere Zusammenhangskomponenten hat. Dann besteht auch Γ aus mehreren Teilwegen.
2. Die Definition ist unabhängig von der Wahl von Γ wegen der Cauchy'schen Integral-Formel, die angewendet werden kann, wenn mit $\mathcal{B}(X)'$ gepaart wird, denn $R_z(T)$ ist analytisch auf $\rho(T)$.

Satz 4.20 (i) *Für ganze Funktionen f stimmen diese Definitionen überein, d.h.*

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \ f(z) \ R_z(T) \ = \ \sum_{n \geq 0} f_n \ T^n \ .$$

(ii) *Die Abbildung $f \in \mathcal{F} \mapsto f(T) \in \mathcal{B}(X)$ ist ein Algebrenhomomorphismus (**kein** *-Algebrenhomomorphismus falls $X = \mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist).*

(iii) *Es gilt der spektrale Abbildungssatz:*

$$\sigma(f(T)) \ = \ f(\sigma(T)) \ .$$

(iv) *Sei h analytisch auf einer Umgebung von $\sigma(f(T))$. Dann gilt*

$$h(f(T)) \ = \ (h \circ f)(T) \ .$$

Bemerkung 4.21 Für diagonalisierbares $T \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, d.h.

$$T = MDM^{-1} \ , \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{diagonal} \ ,$$

definiert man in den Anfängervorlesungen

$$f(T) \ = \ Mf(D)M^{-1} \ = \ M \begin{pmatrix} f(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(d_n) \end{pmatrix} M^{-1}$$

sogar für beliebige Funktion f (natürlich sind nur Werte auf dem Spektrum wichtig). Hier fordert man keine Diagonalisierbarkeit, kann aber nur mit einer eingeschränkten Klasse von Funktionen arbeiten. Für allgemeinere Funktionsklassen muss man dann Bedingungen an T stellen. So ist Borel-Funktionalkalkül gemäß des später bewiesenen Spektralsatzes für normale Operatoren T möglich.

Beweis: (i) Da f ganz ist, kann der Weg Γ im Komplement von $B_{\|T\|} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$ gewählt werden. Dort konvergiert die Neumann-Reihe, sodass in der Tat

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, R_z(T)\, f(z) \;=\; \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{z^{n+1}}\, f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} T^n f_n \;.$$

(ii) Offensichtlich gilt die Linearität

$$(f+\lambda g)(T) \;=\; f(T) + \lambda g(T)\;, \qquad f,g \in \mathcal{F},\; \lambda \in \mathbb{C}\;.$$

Zu zeigen ist also die Multiplikativität

$$(f\cdot g)(T) \;=\; f(T)\, g(T)\;, \qquad f,g \in \mathcal{F}\;.$$

Seien f und g analytisch auf G. Wir wählen Wege Γ, γ in $G \cap \rho(T)$ wie oben, aber mit leerem Schnitt $\Gamma \cap \gamma = \emptyset$ und sodass γ innerhalb von Γ liegt. Dann ist

$$f(T) \;=\; \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, R_z(T)\, f(z)\;, \qquad g(T) \;=\; \oint_\gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\, R_\xi(T)\, g(y)\;.$$

Unter Verwendung der Resolventenidentität $R_z(T)R_\xi(T) = \frac{1}{z-\xi}(R_\xi(T) - R_z(T))$ folgt

$$\begin{aligned}
f(T)g(T) \;&=\; \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\, \frac{1}{z-\xi}\, (R_\xi(T) - R_z(T))\, f(z)\, g(\xi) \\
&=\; \oint_\gamma \frac{d\xi}{2\pi i} \underbrace{\left[\oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, \frac{1}{z-\xi}\, f(z)\right]}_{\text{nach Cauchy } f(\xi)} g(\xi)\, R_\xi(T) - \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{\left[\oint_\gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\, \frac{1}{z-\xi}\, g(\xi)\right]}_{=0 \text{ weil analytisch}} R_z(T)\, f(z) \\
&=\; (fg)(T)\;.
\end{aligned}$$

(iii) Hier ist zu zeigen: $\mu \in \sigma(f(T)) \Longleftrightarrow \mu = f(\lambda)$ für ein $\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \mu \in f(\sigma(T))$. Für "$\Longrightarrow$" beweisen wir die Negation. Sei also $\mu \neq f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$. Dann ist $f(z) - \mu \neq 0$ für alle $z \in \sigma(T)$ und somit ist $g(z) = \frac{1}{f(z)-\mu}$ analytisch auf einer Umgebung von $\sigma(T)$. Also ist

$$g(T) \;=\; \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, R_z(T)\, \frac{1}{f(z)-\mu}$$

wohldefiniert. Es gilt nun nach (ii):

$$(f(T) - \mu \mathbb{1})\, g(T) \;=\; (f-\mu)\,(T)\, g(T) \;=\; \oint \frac{dz}{2\pi i}\, R_z(T)\, (f-\mu)(z)\, \frac{1}{f(z)-\mu} \;=\; \mathbb{1}$$

Also ist $f(T) - \mu\mathbb{1}$ invertierbar und somit $\mu \notin \sigma(f(T))$. Nun zur Umkehrung "$\Longleftarrow$". Sei $\mu = f(\lambda)$ für $\lambda \in \sigma(T)$, d.h. $(T - \lambda\mathbb{1})$ ist nicht invertierbar. Setze $k(z) = \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$. Dies ist analytisch auf einer Umgebung von $\sigma(T)$. Deswegen ist $k(T)$ wohldefiniert. Da aber $(z-\lambda)k(z) = f(z) - f(\lambda)$, folgt aus (ii):

$$(T - \lambda\mathbb{1})k(T) \;=\; f(T) - f(\lambda)\mathbb{1}\;.$$

Da $T - \lambda\mathbb{1}$ nicht invertierbar ist (dies ist unabhängig davon, ob $k(T)$ invertierbar ist), ist auch $f(T) - f(\lambda)\mathbb{1}$ nicht invertierbar und somit ist $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$.

(iv) Wenn γ eine Kurve um $\sigma(f(T))$ ist, so ist

$$h(f(T)) \;=\; \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i}\; R_z(f(T))\; h(z)$$

wohldefiniert. Für festes $z \notin \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ ist

$$g(\xi) \;=\; \frac{1}{z - f(\xi)}$$

analytisch auf einer Umgebung von $\sigma(T)$. Somit gilt für eine Kurve Γ um $\sigma(T)$

$$R_z(f(T)) \;=\; \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\; \frac{1}{z - f(\xi)}\; R_y(T)\;.$$

Nun können wir wie folgt schließen:

$$\begin{aligned} h(f(T)) &= \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\; \frac{1}{z - f(\xi)}\; h(z)\; R_y(T) \\ &= \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i} \left[\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z - f(\xi)} h(z) \right] R_y(T) \\ &= \oint_\Gamma \frac{d\xi}{2\pi i}\; h \circ f(\xi)\; R_y(T) \;=\; (h \circ f)(T)\;. \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Man kann auch um Teile des Spektrums integrieren, falls diese Teile disjunkte abgeschlossene Komponenten sind. Wichtigstes Beispiel hierfür ist

Definition 4.22 *Das Spektrum $\sigma(T) = \mathring{\bigcup}_{j=1,\dots,J} \sigma_j$ von $T \in \mathcal{B}(X)$ sei zerlegt in paarweise disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $\sigma_j \subset \mathbb{C}$. Sei Γ_j eine Kurve, die σ_j einmal, aber keinen anderen Teil $\sigma_i,\ i \neq j$, umkreist. Dann ist die spektrale Projektion P_j auf σ_j, auch Riesz Projektion genannt, definiert durch*

$$P_j \;=\; \oint_{\Gamma_j} \frac{dz}{2\pi i}\; R_z(T)\;.$$

Satz 4.23 (i) $P_j^2 = P_j P_j = P_j$

(ii) $P_i P_j = 0$ *für* $j \neq i$

(iii) $\sum_{j=1,\dots,J} P_j = \mathbb{1}$, *d.h. es liegt eine Zerlegung der Eins vor.*

(iv) $\mathrm{Ran}(P_j)$ *und* $\mathrm{Ker}(P_j)$ *sind T-invariant Unterräume.*

(v) $\mathrm{Ran}(P_j) + \mathrm{Ker}(P_j) = X$

(vi) *Das Spectrum des Operators $P_j T P_j$ aufgefasst als Operator auf* $\mathrm{Ran}(P_j)$ *ist σ_j, d.h.*

$$\sigma(T) \;=\; \mathring{\bigcup}_{j=1,\dots,J} \sigma(P_j T P_j)\;.$$

Beweis: Die ersten 3 Punkte sind Korollare aus Obigem. Nun zu (iv): Sei $x \in \mathrm{Ran}(P_j)$. Dann existiert $y \in X$ mit $x = P_j y$. Da T mit $R_z(T)$ kommutiert, gilt nun $Tx = TP_j y = P_j T y \in \mathrm{Ran}(P_j)$. Analog wird auch die T-Invarianz von $\mathrm{Ker}(P_j)$. Der Punkt (v) gilt für jeden Idempotenten, denn $x = P_j x + (\mathbb{1} - P_j)x$ ist eine Zerlegung von $x \in X$. Für (vi), beachte dass für $z \in \rho(T)$

$$\frac{1}{z-T} \;=\; \frac{1}{z-T}\sum_j P_j \;=\; \sum_j \frac{1}{zP_j - P_j T P_j}\;.$$

Wenn also $z \in \rho(T)$ folgt $z \in \rho(P_j T P_j)$ für alle j, d.h. $\cup_j \sigma(P_j T P_j) \subset \sigma(T)$. Analog, wenn $z \in \cap_j \rho(P_j T P_j)$ und die rechte Seite der Formel existiert, so folgt auch $z \in \rho(T)$. Also ist die behauptete Gleichheit gezeigt, bis auf die Disjunktheit der Zerlegung. Sei nun $z \notin \sigma_j$. Dann betrachte eine stetige Funktion f_j mit

$$f_j(\lambda) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{z-\lambda}\,, & \lambda \in \sigma_j\,, \\ 0\,, & \lambda \in \sigma_i\,,\;\; i \neq j\,, \end{cases}$$

die zudem analytisch auf einer Umgebung von σ_j ist. Dann gilt nach Funktionalkalkül (mit einer auf jeder Komponente des Spektrums analytischen Funktion)

$$f_j(T)(z-T) \;=\; P_j \;=\; f_j(T)P_j(z-T) = f_j(T)(zP_j - P_j T P_j)\;.$$

Somit ist $z \notin \sigma(P_j T P_j)$. Also $\sigma_i \cap \sigma(P_j T P_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass das Bild einer endlich-dimensionalen Riesz Projektion auf einen isolierten Eigenwert gleich der (ggfs. schiefen) Projektion auf den zugehörigen Hauptraum ist.

Satz 4.24 *Sei z ein isolierter Eigenwert von T und die zugehörige Riesz Projektion von P von endlicher Dimension. Dann gilt, für p ausreichend gross,*

$$\mathrm{Ran}(P) \;=\; \mathrm{Ker}\big((T-z)^p\big)\;.$$

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Ker}((T-z)^p)$ und setze

$$w \;=\; \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(z-T)^n}{(z-\lambda)^n}\, v\;.$$

Dann

$$\left(1 - \frac{z-T}{z-\lambda}\right) w \;=\; v \quad\Longleftrightarrow\quad (-\lambda + T)w \;=\; (z-\lambda)v \quad\Longleftrightarrow\quad R_\lambda(T)v \;=\; (\lambda - z)^{-1} w\;.$$

Einsetzen von w liefert also

$$R_\lambda(T)v \;=\; \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(z-T)^n}{(z-\lambda)^{n+1}}\, v\,,$$

so dass

$$Pv \;=\; \oint_{\partial B_r(z)} \frac{d\lambda}{2\pi i}\, R_\lambda(T)v \;=\; v\,,$$

d.h. $v \in \mathrm{Ran}(P)$, d.h. $\mathrm{Ker}((T-z)^p) \subset \mathrm{Ran}(P)$. Da P endliche Dimension hat, folgt dass ein p existiert, so dass $\mathrm{Ker}((T-z)^n) = \mathrm{Ker}((T-z)^p)$ für all $n \geq p$. Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir nun die Laurent Entwicklung der Resolvente um z:

$$R_\lambda(T) \;=\; \sum_{n=1}^{p} \frac{P_n}{(\lambda - z)^n} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} Q_n (\lambda - z)^n\;.$$

Hierbei sind die P_n und Q_n operatorwertige Koeffizienten gegeben durch

$$P_n \;=\; \oint_{\partial B_r(z)} \frac{d\lambda}{2\pi i}\,(\lambda - z)^{n-1}\,R_\lambda(T)\;.$$

Insbesondere ist $P_1 = P$. Zudem ist der Hauptteil tatsächlich endlich, weil z endliche algebraische Multiplizität hat und in

$$R_\lambda(T) \;=\; P\,\frac{1}{\lambda - T} \;+\; (1-P)\,\frac{1}{\lambda - T} \;=\; \frac{1}{\lambda P - PTP} \;+\; \frac{1}{\lambda(1-P) - (1-P)T(1-P)}$$

der zweite Summand regulär bei z ist und der erste endlich dimensional. Nach holomorphen Funktionalkalkül gilt

$$P_n \;=\; (T-z)^{n-1}P \;=\; P(T-z)^{n-1}\;, \qquad (T-z)^p P \;=\; 0\;.$$

Aus Letzterem folgt $\mathrm{Ran}(P) \subset \mathrm{Ker}((T-z)^p)$. $\Box$

Nun soll als Anwendung von Riesz Projektionen die analytische Störungstheorie von einem diskreten einfachen Eigenwert z_0 von $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbert Raum $\mathcal{H}$ diskutiert werden (es gilt auch auf einem Banach-Raum, mit leicht modifizierten Beweis [Kat]). Ein solcher Eigenwert ist ein isolierter Punkt des Spektrum $\sigma(T)$, die zugehörige Riesz Projektion P_0 von Rang 1 ist.

Satz 4.25 *Sei $T_\lambda = T + \lambda V$ für $T, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbert Raum $\mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, und sei z_0 ein diskreter einfacher Eigenwert von $T = T_0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine analytische Funktion $\lambda \in B_\delta \mapsto z_\lambda$ so, dass z_λ ein diskreter einfacher Eigenwert von T_λ ist.*

Beweis: Zunächst wählen wir $\delta > 0$ so, dass $\Gamma = \partial B_\delta(z_0)$ lediglich den Punkt z_0 vom Spektrum von T einmal umläuft. Nun ist T_λ stetig in λ (ja sogar analytisch) und, da Invertierbarkeit eine offene Bedingung ist, existiert ein $\delta > 0$, eventuell kleiner, so dass auch $R_z(T_\lambda)$ auf Γ existiert (detailliertes Argument wieder mit Neumann Reihe). Dann setze

$$P_\lambda \;=\; \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\; R_z(T_\lambda)\;.$$

Diese Riesz Projektion von T_λ ist stetig (wiederum sogar analytisch) in λ und somit ist insbesondere der Rang von P_λ konstant, also gleich dem Rang 1 von P_0. Da T_λ das eindimensionale Bild von P_λ invariant lässt, ist es durch einen Eigenvektor aufgespannt mit Eigenwert z_λ, der in $B_\delta(z_0)$ liegen muss. Jetzt verbleibt also zu zeigen, dass z_λ analytisch von λ abhängt. Hierzu verwenden wir die Formel

$$z_\lambda \;=\; \frac{\langle x_0 | T_\lambda P_\lambda x_0\rangle}{\langle x_0 | P_\lambda x_0\rangle} \;=\; z_0 \;+\; \lambda\,\frac{\langle x_0 | P_\lambda V x_0\rangle}{\langle x_0 | P_\lambda x_0\rangle}\;,$$

wobei $x_0 \in \mathrm{Ran}(P_0)$ für λ ausreichend klein wegen Stetigkeit tatsächlich $\langle x_0 | P_\lambda x_0\rangle \neq 0$ erfüllt. Somit ist die Analyzität von z_λ auf die Analyzität von P_λ reduziert. Letztere folgt durch iteratives Einsetzen der Resolventenidentität

$$R_z(T_\lambda) \;=\; R_z(T_0) \;+\; \lambda\, R_z(T_0)\, V\, R_z(T_\lambda)$$

in die Riesz Projektion P_λ. Für λ ausreichend klein konvergiert die zugehörige Reihe. Wenn eingesetzt in obige Formel für z_λ erhält man die sogenannte Rayleigh-Schrödinger Reihe für den Eigenwert. $\Box$

Bemerkung: Wenn z_0 Eigenwert mit Multiplizität $p = \dim(P_0)$ is, dann sind die Eigenwerte analytisch in der $p$ten Wurzel von λ (Puiseux Entwicklung). Wenn jedoch zudem angenommen wird, dass

T_λ normal ist, so können die Zweige analytisch in λ gewählt werden (Satz von Kato-Rellich).

Ziel der folgenden Entwicklungen ist es, die Spektralanalyse von kompakten Operatoren durchzuführen. Dies geht auf Arbeiten von Riesz aus dem Jahre 1918 zurück. Grob zusammengefasst ist das Ergebnis das Folgende: Das Spektrum eines kompakten Operators auf einem Banachraum ist ein reines Punktspektrum $(\lambda_j)_{j\in J}$ mit endlicher Multiplizität (bis auf 0) mit einem einzigem Häufungspunkt 0. Zunächst sei an folgende Begriffe und Ergebnisse aus Kapitel 1.2 erinnert.

Definition 1.47 $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt
$\Longleftrightarrow \overline{K(B_X)}^{\|\ \|}$ kompakt, wobei $B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\}$
$\Longleftrightarrow$ für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in X besitzt $(K(x_n))_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.50 $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ ist ein abgeschlossenes, beidseitiges Ideal.

Satz 1.52 $K \in \mathcal{K}(X),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0 \Longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - K)) < \infty$

Satz 4.26 *Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ und setze $T = \mathbb{1} - K$. Dann gilt:*

(i) $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathrm{Ker}(T^k) = \mathrm{Ker}(T^n) \quad \forall\ k \geq n$.

(ii) $\mathrm{Ran}(T) = \{x \in X \,:\, \exists\ y \text{ mit } Ty = x\}$ *ist ein abgeschlossener Unterraum.*

(iii) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T)) = \dim(X/\mathrm{Ran}(T))$
(Man sagt: der Fredholm-Index von T ist 0.)

Beweis: Wichtigstes Hilfsmittel ist das Riesz Lemma 1.27: Wenn $U \neq X$ ein abgeschlossener Unterraum ist, so $\exists\ x \in X,\ \|x\| = 1$ mit $d(x, U) = \inf_{u\in U} \|x - u\| \geq \frac{1}{2}$.

(i) Da $T^n = TT^{n-1}$, gilt $\mathrm{Ker}(T^n) \supset \mathrm{Ker}(T^{n-1})$. Außerdem gilt nach Satz 1.50

$$T^n \ = \ (\mathbb{1} - K)^n \ = \ \mathbb{1} + K' \qquad \text{für ein } K' \in \mathcal{K}(X)\ .$$

Nach Satz 1.52 ist also $\dim(\mathrm{Ker}(T^n)) < \infty$ und somit ist $\mathrm{Ker}(T^n)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir machen nun die Gegenannahme zu (i): $\exists$ monoton wachsende Folge $(k_j)_{j\geq 1}$, sodass

$$\mathrm{Ker}(T^{k_j - 1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(T^{k_j})$$

jeweils echte Unterräume sind. Nach dem Riesz-Lemma $\exists\ y_j \in \mathrm{Ker}(T^{k_j})$ mit $\|y_j\| = 1$ und

$$d(y_j, \mathrm{Ker}(T^{k_j - 1})) \ \geq \ \tfrac{1}{2}\ .$$

Für $j < i$ setze nun

$$z_i \ = \ Ty_i + y_j - Ty_j\ .$$

Jeder der Summanden in z_i ist in $\mathrm{Ker}(T^{k_i - 1})$, sodass auch $z_i \in \mathrm{Ker}(T^{k_i - 1})$. Zudem gilt:

$$Ky_i - Ky_j \ = \ y_i - z_i\ .$$

Also folgt $\|Ky_i - Ky_j\| \ \geq \ d(y_i, \mathrm{Ker}(T^{k_i - 1})) \ \geq \ \frac{1}{2}$. Somit enthält $(K(y_j))_{j\geq 1}$ keine Cauchy-Folge, obwohl $\|y_j\| = 1$. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit.

(ii) Sei $y_k = Tx_k$ mit $\lim_k y_k = y$. Zu zeigen ist: $\exists\ w \in X$ mit $Tw = y$.
Setze: $d_k = d(x_k, \mathrm{Ker}(T)) = \inf_{z\in\mathrm{Ker}(T)} \|x_k - z\|$. Dann gilt

Behauptung: $d_k \leq C < \infty$
Begründung: Wähle $z_k \in \mathrm{Ker}(T)$ mit

$$\|x_k - z_k\| \ < \ 2\ d_k\ .$$

Setze:

$$w_k \ = \ x_k - z_k\ , \qquad u_k \ = \ \frac{w_k}{d_k}\ .$$

Dann ist

$$Tw_k \ = \ Tx_k - Tz_k \ = \ Tx_k \ = \ y_k\ ,$$

eine beschränkte Folge, weil ja y_k konvergent ist. Annahme: $d_k \to \infty$ (nach Übergang zu Teilfolge). Dann gilt

$$Tu_k \ = \ T\frac{w_k}{d_k} \ = \ \frac{y_k}{d_k} \quad \longrightarrow \quad 0\ , \quad \text{für } k \to \infty\ .$$

Außerdem gilt:

$$\|u_k\| = \frac{\|x_k - z_k\|}{d_k} < 2\ .$$

Also impliziert die Kompaktheit von K, dass Ku_k eine konvergente Teilfolge enthält, die wieder mit Ku_k bezeichnet wird. Da aber $u_k - Ku_k = Tu_k \longrightarrow 0$, folgt dann, dass auch die Folge $(u_k)_{k\geq 1}$ konvergiert. Setze $u = \lim_k u_k$. Nach der Stetigkeit von T gilt dann $\lim_k Tu_k = Tu = 0$, d.h. $u \in \mathrm{Ker}(T)$. Aber $\|w_k - z\| \geq d_k$ für alle $z \in \mathrm{Ker}(T)$ gemäß der Definition von d_k. Somit $\|u_k - z\| \geq 1$ für alle $z \in \mathrm{Ker}(T)$, was ein Widerspruch ist und somit die Behauptung beweist. $\diamond$

Jetzt gilt

$$w_k - Kw_k \ = \ y_k \ \longrightarrow \ y\ , \quad \text{für } k \to \infty\ .$$

Da $\|w_k\| \leq 2d_k \leq C < \infty$ beschränkt ist und K kompakt, hat $(Kw_k)_{k\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge und somit hat auch $(w_k)_{k\geq 1}$ eine (die gleiche) konvergente Teilfolge. Nun setzen wir $w = \lim_k w_k$. Unter Verwendung der Stetigkeit gilt dann $w - Kw = Tw = y$.

(iii) Zunächst betrachten wir den Spezialfall $\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$, sodass T eine Bijektion auf sein Bild ist. Dann ist zu zeigen: $\mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T)) = 0 \iff \mathrm{Ran}(T) = X$.

Gegenannahme: $X_1 = \mathrm{Ran}(T) \subsetneq X$ ist ein echter Unterraum.

Da T eine Bijektion ist, folgt dass auch $X_2 = T(X_1) \subsetneq X_1$ ein echter Unterraum ist. Also setzten wir $X_n = T^n X$. Dann ist $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ eine Folge echter Unterräume. Da $T^n = \mathbb{1} + K'$ für ein $K' \in \mathcal{K}(X)$, folgt nach (ii), dass $X_n = \mathrm{Ran}(T^n)$ abgeschlossen ist. Nun wenden wir das Riesz-Lemma an und wählen $x_n \in X_n \supset X_{n+1}$ mit

$$\|x_n\| \ = \ 1\ , \qquad d(x_n, X_{n+1}) \ \geq \ \tfrac{1}{2}\ .$$

Für $m < n$ setze nun

$$z_m \ = \ Tx_m + x_n - Tx_n\,.$$

Dann gilt

$$Kx_m - Kx_n \ = \ x_m - z_m\ .$$

Da alle Summanden von z_m in X_{m+1} sind, folgt dass

$$\|Kx_m - Kx_n\| \ \geq \ d(x_m, X_{m+1}) \ \geq \ \tfrac{1}{2}\ .$$

Somit hat $(Kx_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge, obwohl $(x_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist. Dies zeigt, dass die Annahme zu einem Widerspruch führt. $\diamond$

Für den allgemeinen Fall gehen wir zum Quotienten über. Setze hierfür $U = \mathrm{Ker}(T^n)$ mit n wie in (i). Nun ist U invariant unter T, d.h. $TU \subset U$, also ist U auch invariant unter $K = \mathbb{1} - T$. Wir führen den Quotienten $X/U = \{[x]_\sim \,:\, x \in X\}$ ein, wobei $x \sim y \Longleftrightarrow x = y + u$ für $u \in U$. Wegen der Invarianz von U sind folgende Abbildungen

$$\widetilde{T}, \tilde{K} : X/U \longrightarrow X/U$$

gegeben durch

$$\widetilde{T}([x]) = [Tx] \ , \qquad \tilde{K}([x]) \ = \ [K(x)] \ ,$$

wohldefiniert. Es gilt:

$$\widetilde{T} \ = \ \mathbb{1} - \tilde{K} \ .$$

Nun ist $\tilde{K}$ kompakt (hierzu überprüfe man, dass beschränkte Folgen $([x_n])_{n\geq 1}$ in X/U zu Folgen $([Kx_n])_{n\geq 1}$ in X/U, die konvergente Teilfolgen haben). Außerdem gilt $\mathrm{Ker}(\widetilde{T}) = \{[\vec{0}]\}$ (sonst wäre $\widetilde{T}([x]) = [\vec{0}]$ für ein $x \notin U$, d.h. $[x] \neq [\vec{0}]$, sodass $Tx \in U$ und somit $\mathrm{Ker}(T^{n+1}) \supsetneq \mathrm{Ker}(T^n) = U$).

Nun können wir obigen Spezialfall anwenden und schließen, dass $\mathrm{Ran}(\widetilde{T}) = X/U$. Also folgt, dass

$$\forall\, x \in X \ \exists\, y \in X,\ u \in U \quad \text{mit} \quad x = Ty + u \ .$$

Also ist $X = \mathrm{Ran}(T) + U$ eine Summe von Unterräumen, die aber nicht notwendigerweise direkt ist (es kann einen nicht leeren Durchschnitt geben). Somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ran}(T) \cap U \ &= \ \{u \in U \,:\, \exists\, z \in X \quad \text{mit} \quad Tz = u\} \\
&= \ \{u \in U \,:\, \exists\, z \in U \quad \text{mit} \quad Tz = u\} \\
&= \ \mathrm{Ran}(T|_U) \ .
\end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit muss in der Tat $z \in U$ sein, denn sonst wäre wieder $T^{n+1}z = 0$, d.h. $\mathrm{Ker}(T^{n+1}) \supsetneq U$. Da nun $\dim(U) < \infty$, folgt nach dem Dimensionssatz

$$\begin{aligned}
\dim(U) \ &= \ \dim(\mathrm{Ker}(T|_U)) + \dim(\mathrm{Ran}(T|_U)) \\
&= \ \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ran}(T) \cap U) \ .
\end{aligned}$$

Da $X = \mathrm{Ran}(T) + U$ folgt:

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T)) \ = \ \dim(U) - \dim(\mathrm{Ran}(T) \cap U) \ = \ \dim(\mathrm{Ker}(T)) \ ,$$

was genau die Aussage ist. $\square$

Satz 4.27 *(Riesz' Spektraltheorie kompakter Operatoren, 1918)*
Sei X ein unendlich dimensionaler Banachraum und $K \in \mathcal{B}(X)$ kompakt. Dann hat K reines Punktspektrum

$$\sigma(K)\backslash\{0\} \ = \ \{\lambda_j \in \mathbb{C} \,:\, j \in \mathbb{N}\} \ ,$$

wobei $\lambda_j \neq 0$ ein Eigenwert mit endlicher Multiplizität ist und die Folge $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ nur $\lambda_0 = 0$ als einzigen möglichen Häufungspunkt besitzt.

Bemerkung: Der Satz besagt nicht, dass $\lambda = 0$ immer ein Eigenwert ist. Außerdem kann 0 Eigenwert mit unendlicher Multiplizität sein.

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$, definiere $T = \mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}K$. Es gilt nach Satz 4.26 (iii)

$$\operatorname{Ker}(T) \ = \ 0 \implies \operatorname{Ran}(T) \ = \ X \ .$$

Somit kann die Invertierbarkeit von T nur durch einen nicht trivialen Kern verletzt werden. Also gilt $\sigma(K) = \sigma_p(K)$, d.h. jeder Punkt des Spektrums von K ist Eigenwert. Außerdem gilt nach Satz 1.52 zudem, dass $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}K\right)\right) < \infty$, d.h. die Multiplizität von $\lambda \neq 0$ ist endlich.

Es bleibt noch zu zeigen, dass 0 einziger möglicher Häufungspunkt ist. Sei $(\lambda_n)_{n\geq 1},\ \lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$, eine Folge von Eigenwerten. Wähle zugehörige Eigenvektoren aus:

$$Kx_n \ = \ \lambda_n x_n \ .$$

Setze

$$Y_n \ = \ \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \ .$$

Da die x_n linear unabhängig sind (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig), gilt mit echten Inklusionen

$$Y_{n-1} \ \subsetneq \ Y_n \ .$$

Nach dem Riesz-Lemma wählen wir nun $y_n \in Y_n$ mit

$$\|y_n\| \ = \ 1 \ , \qquad d(y_n, Y_{n-1}) \ \geq \ \tfrac{1}{2} \ .$$

Jedes dieser y_n kann jetzt als Linearkombinantion dargestellt werden:

$$y_n \ = \ \sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j \ , \qquad \sigma_j \in \mathbb{C} \ .$$

Es gilt $Ky_n - \lambda_n y_n = \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda_n)\sigma_j x_j \in Y_{n-1}$ und somit für $n > m$

$$Ky_n - Ky_m \ = \ \lambda_n y_n - y \qquad \text{mit} \qquad y \in Y_{n-1} \ .$$

Es folgt $\|Ky_n - Ky_m\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2}$ nach obiger Abschätzung $d(y_n, Y_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Hätte nun $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ einen Häufungspunkt ungleich 0, d.h. eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_j})_{j\geq 1}$, so hätte für die beschränkte Folge $(y_{n_j})_{j\geq 1}$ die Bildfolge $(Ky_{n_j})_{j\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge, was im Widerspruch zur Kompaktheit von K steht. □

Definition 4.28 *Seien X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Der adjungierte Operator $T' : Y' \to X'$ ist definiert durch*

$$(T'(y'))(x) \ = \ y'(T(x)) \ , \qquad y' \in Y' \ , \ x \in X \ .$$

Bemerkung 4.29 Falls $X = Y = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist, dann ist $T' = \overline{T^*}$ wobei T^* wie in Kapitel 2.2 definiert und der Querstrich das komplexe Konjugat ist. In einem reellen Hilbert-Raum gilt $T' = T^*$.

Satz 4.30 (i) $\|T'\|_{\mathcal{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$

(ii) $(ST)' = T'S'$ *für* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$

(iii) *Seien* $\mathcal{T}_X : X \hookrightarrow X''$ *und* $\mathcal{T}_Y : Y \hookrightarrow Y''$ *die Einbettungen aus Satz 3.25. Dann gilt* $T'' \circ \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y \circ T$.

Beweis: (i) Es gilt mit Satz 3.21

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \overset{3.21}{=} \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y'\|\le 1} |y'(Tx)| \\ &= \sup_{\|y'\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |T'(y')(x)| \ \ge \sup_{\|y'\|\le 1} \|T'(y')\| \ = \ \|T'\| \ , \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung daraus folgt, dass die abgeschlossenen Einheitskugel $B_X \subset B_{X''}$ erfüllen (und die Gleichheit nur in reflexiven Räumen gilt). Für die Umkehrung, fixiere ein $x \in X$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $y' \in Y'$ mit $\|y'\| = 1$ und $y'(Tx) = \|Tx\|$. Also

$$\|Tx\| \ = \ (T'y')(x) \ \le \ \|T'\| \, \|y'\| \, \|x\| \ = \ \|T'\| \, \|x\| \ .$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, folgt auch $\|T\| \le \|T'\|$. (ii) und (iii) können nachgerechnet werden. □

Satz 4.31 *(Schauder 1930) Seien* X *und* Y *Banachräume und* $K \in \mathcal{B}(X,Y)$. *Dann gilt:* K *kompakt* $\Longleftrightarrow$ K' *kompakt*

Beweis: Seien $B_X = \{x \in X \, : \, \|x\| \le 1\}$ und $B_{Y'} = \{T \in Y' \, : \, \|T\| \le 1\}$.
"$\Longrightarrow$" Sei $(T_n)_{n\ge 1}$ eine Folge in Y' mit $\|T_n\| \le 1$. Zu zeigen ist, dass $(K'(T_n))_{n\ge 1}$ eine konvergente Teilfolge hat. Hierzu setzen wir $A = \overline{K(B_X)} \subset Y$, was nach Voraussetzung kompakt ist. Somit ist $(A, \|.\|_Y)$ ein kompakter metrischer Raum. Nun definieren wir $f_n : A \to \mathbb{C}$ durch $f_n(y) = T_n(y)$ und betrachten die Menge $\mathcal{F} = \{f_n \, : \, n \ge 1\} \subset (C(A), \|.\|_\infty)$. Diese Menge $\mathcal{F}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig, weil sie nämlich global Lipshitz-stetig mit Lipshitzkonstante 1 ist. In der Tat, für alle $y, y' \in A$ gilt:

$$|f_n(y) - f_n(y')| \ = \ |T_n(y - y')| \ \le \ \|T_n\| \|y - y'\| \ \le \ \|y - y'\| \ .$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist $\mathcal{F}$ also relativ kompakt, sodass eine konvergente (bez. $\|.\|_\infty$) Teilfolge $(f_{n_j})_{j\ge 1}$ existiert. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \|K'(T_{n_j}) - K'(T_{n_i})\| &= \sup_{x \in B_X} |T_{n_j}(K(x)) - T_{n_j}(K(x))| \\ &= \sup_{y \in A} \|T_{n_j}(y) - T_{n_i}(y)\| = \|f_{n_j} - f_{n_i}\|_\infty \ , \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt verwandt wurde, dass $K(B_X)$ dicht in A liegt. Somit ist $(K'(T_{n_j}))_{j\ge 1}$ als Cauchy-Folge konvergent in X' und die Kompaktheit von K' nachgewiesen.

"$\Longleftarrow$" Wenn K' kompakt ist, so folgt nach Obigem, dass $K'' : X'' \to Y''$ kompakt ist. Da aber nach Satz 4.30(iii) $K'' \circ \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y \circ K$ und $\mathcal{T}_Y$ eine isometrische Einbettung ist, folgt dass auch K kompakt ist. □

Definition 4.32 *Sei* $U \subset X'$ *ein Unterraum. Dann ist der Unterraum* $U^\perp \subset X$ *definiert durch*

$$U^\perp \ = \ \{x \in X \, : \, u(x) = 0 \ \forall \ u \in U\} \ .$$

Bemerkung 4.33 $U^\perp$ ist immer abgeschlossen, denn wenn $x_n \in U^\perp$ mit $x_n \to x$, dann gilt $u(x_n) = 0$ und nach Stetigkeit von u dann auch $u(x) = 0$. In einem reellen Hilbert-Raum ist $U^\perp$ das orthogonale Komplement, aber im komplexen ist hier wieder eine komplexe Konjugation involviert.

Satz 4.34 *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt:*

$$\overline{\mathrm{Ran}(T)} \;=\; \mathrm{Ker}(T')^\perp \;.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir die Inklusion "$\subset$". Sei $y = Tx \in \mathrm{Ran}(T)$ und $y' \in \mathrm{Ker}(T')$. Dann gilt

$$y'(y) \;=\; y'(Tx) \;=\; (T'y')(x) \;=\; 0(y') \;=\; 0 \;.$$

Somit folgt $\mathrm{Ran}(T) \subset \mathrm{Ker}(T')^\perp$ und die Inklusion, weil ja $\mathrm{Ker}(T')^\perp$ abgeschlossen ist.

Für die Inklusion "$\supset$" sei $y \notin \overline{\mathrm{Ran}(T)}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert dann ein $y' \in X'$ mit $y'|_{\overline{\mathrm{Ran}(T)}} = 0$, aber $y'(y) \neq 0$. Also gilt $y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$, d.h. $y' \in \mathrm{Ker}(T')$. Daraus folgt nun aber $y \notin \mathrm{Ker}(T')^\perp$, weil sonst $y'(y) = 0$ gelten würde. □

Satz 4.35 *(Fredholm Alternative 1903, formuliert für Integraloperatoren)*
Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ auf einem Banachraum X. Außerdem sei $\lambda \neq 0$.

Entweder (i) $Kx = \lambda x$ *hat nur die triviale Lösung (was gleichbedeutend mit $\lambda \notin \sigma(K)$ ist), dann hat die Gleichung*

$$\lambda x - Kx \;=\; y$$

für alle $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$.

Oder (ii) $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1} - K) \neq \{0\}$ *(was gleichbedeutend mit $\lambda \in \sigma(K)$ ist), dann hat*

$$\lambda x - Kx \;=\; y$$

eine Lösung $x \in X \iff y \in \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1} - K')^\perp$.

Beweis: Falls $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - K) = \{0\}$, dann ist $\lambda\mathbb{1} - K$ nach Satz 4.27 invertierbar, also $x = (\lambda\mathbb{1} - K)^{-1}(y)$. Sonst existiert eine Lösung x nur, falls

$$\lambda x - Kx \;=\; y \in \mathrm{Ran}(\lambda\mathbb{1} - K) \;\overset{4.26}{=}\; \overline{\mathrm{Ran}(\lambda\mathbb{1} - K)} \;\overset{4.34}{=}\; \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - K')^\perp \;.$$

Offensichtlich ist die Lösung dann nicht eindeutig. □

Als Anwendung betrachten wir nun eine Fredholm'sche Integralgleichung 2. Art. Sei ein Integralkern $k \in C(I \times I)$ auf $I = [0, 1]$ gegeben. Dieser definiert einen Integraloperator

$$K : C(I) \to C(I) \;, \qquad (Kf)(x) \;=\; \int_0^1 dy\, k(x, y) f(y) \;.$$

Nach Satz 1.59 ist K kompakt. Zu gegebenem $g \in C(I)$ und $\lambda \neq 0$ (sonst 1.Art) ist nun eine Lösung $f \in C(I)$ der Fredholm'schen Gleichung 2. Art:

$$\lambda f - Kf \;=\; g$$

gesucht. Falls $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1}-K)=\{0\}$, ist diese also immer lösbar. Ansonsten muss der Kern von $\lambda\mathbb{1}-K'$ berechnet werden, welcher endliche Dimension $n=\dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1}-K'))$ hat. Hierbei ist $K':C(I)'=\mathcal{M}(I)\to\mathcal{M}(I)$ der adjungente Integraloperator gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
(K'\mu)(f) &= \mu(Kf) = \int \mu(dx)\int dy\, k(x,y)f(y) \\
&= \int dy \int \mu(dx)\ k(x,y)f(y)\ ,
\end{aligned}
$$

d.h. das Bild von K' ist absolut stetig. Somit sind Eigenvektoren von K' zum Eigenwert λ von der Gestalt $\mu(dy)=h(y)dy$ mit

$$
\lambda\ h(y) = \int dx\ k(x,y)\ h(x)\ .
$$

Diese Gleichung hat n linear unabhängige Lösungen, die in konkreten Situationen explizit berechnet werden müssen. Falls dann gilt, dass $g\in\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1}-K')^{\perp}$, d.h.

$$
h(g) = \int dy\, h(y)g(y) = 0\ , \qquad \forall\ h\in\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1}-K')\ ,
$$

dann hat die Fredholm'sche Gleichung eine Lösung, sonst nicht.

Fredholm's ursprünglicher Zugang zur Integralgleichung basierte nicht auf der allgemeinen Theorie kompakter Operatoren, sondern so genannter Fredholm-Determinanten, die nun kurz beschrieben werden sollen, weil es durchaus aktuelle Anwendungen in der inversen Streutheorie, der Theorie der integrablen Systeme und den Zufallsmatrizen gibt. Sei K wie oben ein Integraloperator auf $I=[0,1]$ mit stetigem Integralkern k. Wir betrachten dann der Einfachheit halber die Fredholm'sche Gleichung zu $\lambda=-1$:

$$
f+Kf = g\ .
$$

Definition 4.36 *Für $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in I$ und $z\in\mathbb{C}$ sei*

$$
k\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ y_1,\dots,y_n\end{pmatrix} = \det\left((k(x_i,y_j))_{1\le i,j\le n}\right)\ .
$$

Dann ist die Fredholm-Determinante definiert als

$$
D(z) = \sum_{n\ge 0}\frac{z^n}{n!}\int_{I^n} dx_1\dots dx_n\ k\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}\ .
$$

Außerdem ist die Fredholm-Resolvente

$$
r(x,y;z) = \sum_{n\ge 0}\frac{z^{n+1}}{n!}\int_{I^n} dx_1\dots dx_n\ k\begin{pmatrix} x,x_1,\dots,x_n \\ y,x_1,\dots,x_n\end{pmatrix}\ , \qquad x,y\in I\ .
$$

Der zu $r(x,y;z)$ gehörige Integraloperator wird mit $R(z)$ bezeichnet.

Satz 4.37 (i) *$D(z)$ ist wohldefiniert und ganz.*

(ii) *$r(x,y;z)$ ist wohldefiniert, stetig in x,y und ganz.*

(iii) *Falls $D(1)\neq 0$, ist $\mathbb{1}+K$ invertierbar und $(\mathbb{1}+K)^{-1}=\mathbb{1}+\frac{1}{D(1)}\,R(1)$. Somit ist insbesondere das Inverse von $\mathbb{1}+K$ auch Integraloperator.*

(iv) *Falls $D(1)=0$, hat $\mathbb{1}+K$ einen nicht trivialen Kern. Insbesondere ist $\mathbb{1}+K$ also nicht invertierbar, d.h. $-1\in\sigma(K)$.*

(v) *$D(z)=0 \iff -\frac{1}{z}$ Eigenwert von K, d.h.*

$$\sigma(K) \;=\; \left\{-\frac{1}{z}\;:\;D(z)=0\right\}\cup\{0\}\;.$$

Bemerkungen 4.38 1. $D(z)$ entspricht dem charakteristischen Polynom $\det(\mathbb{1}+zK)$.

2. Falls k Hölder-stetig mit Exponent $\geq\frac{1}{2}$ ist, gilt zudem wie für Matrizen:

$$D(z) \;=\; \prod_{j\geq 1}(1+z\lambda_j)$$

und

$$\int_0^1 dx\,k(x,x) \;=\; \sum_{j\geq 1}\lambda_j\;.$$

Letzteres bedetet, dass K Spurklasse ist und die Spur durch das Integral über die Diagonale des Integralkerns berechnet werden kann.

Beweis: (i) Da k stetig auf dem Kompaktum $I\times I$ ist, folgt dass $|k(x,y)|\leq C$. Somit ist

$$\left\|\begin{pmatrix}k(x_1,x_j)\\ \vdots\\ k(x_n,x_j)\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{C}^n} \;=\; \left(\sum_{\ell=1}^{n}|k(x_\ell,x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; Cn^{\frac{1}{2}}\;.$$

Somit ergibt die Standard-Volumenabschätzung der Determinante

$$\left|k\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ x_1,\ldots,x_n\end{pmatrix}\right| \;\leq\; \prod_{j=1}^{n}\left\|\begin{pmatrix}k(x_1,x_j)\\ \vdots\\ k(x_n,x_j)\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{C}^n} \;\leq\; C^n\,n^{\frac{n}{2}}\;.$$

Gemäß der Stirling'schen Formel gilt $n!\geq\frac{1}{2}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Somit, da das Integral über I^n gleich 1 ist,

$$|D(z)| \;\leq\; \sum_{n\geq 0}\frac{|z|^nC^nn^{\frac{n}{2}}}{n!} \;\leq\; \sum_{n\geq 0}2\left(\frac{|z|Ce}{\sqrt{n}}\right)^n \;<\; \infty\;.$$

Da überall konvergente Reihen analytischer Funktionen ganz sind, folgt nun (i).

(ii) folgt genauso unter Verwendung der Tatsache, dass uniform konvergente Reihen stetiger Funktionen stetig sind.

(iii) Entwicklung der Determinante nach erster Zeile ergibt:

$$\begin{aligned} k\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_n \\ y, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} &= k(x,y)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} - k(x,x_1)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \\ &\quad + k(x,x_2)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_3, \ldots, x_n \end{pmatrix} - \ldots + (-1)^n k(x,x_n)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_1, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die Integrale der letzten n Terme gleich sind, indem die Indizes 1 und j umbenannt werden:

$$\begin{aligned} &(-1)^j \int_{I^n} dx_1 \ldots dx_n\ k(x,x_j)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^j \int_{I^n} dx_1 \ldots dx_n\ k(x,x_1)\ k\begin{pmatrix} x_j, \ldots, x_1, \ldots, x_n \\ y, x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j+2j-1+j-2} \int dx_1 \ldots dx_n\ k(x,x_1)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Zeilen 1 und j vertauscht wurden, was zu einem Faktor $(-1)^{2j-1}$ führt, gleichzeitig die Spalte 2 in die j-te Spalte geschrieben wurde, was zu einem weiteren Faktor $(-1)^{j-2}$ führt. Somit folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{I^n} dx_1 \ldots dx_n\ k\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_n \\ y, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} &= k(x,y) \int_{I^n} dx_1 \ldots dx_n\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} \\ &\quad - n \int_{I^n} dx_1 \ldots dx_n\ k(x,x_1)\ k\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\frac{z^{n+1}}{n!}$ und Summation über n ergibt also

$$r(x,y;z) = z\ k(x,y)\ D(z) - z \int_I dx_1\ k(x,x_1)\ r(x_1,y;z) . \tag{4.2}$$

Genauso erhält man durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$r(x,y;z) = z\ k(x,y)\ D(z) - z \int_I dx_1\ k(x_1,y)\ r(x,x_1;z) .$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} R(z) &= z\ D(z)K - z\ KR(z) , \\ R(z) &= z\ D(z)K - z\ R(z)K , \end{aligned}$$

und für $D(z) \neq 0$ durch Einsetzen der ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + zK)\left(\mathbb{1} - \frac{1}{D(z)}\ R(z)\right) &= \mathbb{1} + zK - \frac{1}{D(z)}\ R(z) - z\ \frac{1}{D(z)}\ KR(z) \\ &= \mathbb{1} + zK - \left(zK - z\frac{1}{D(z)}\ KR(z)\right) - z\ \frac{1}{D(z)}\ KR(z) = \mathbb{1} , \end{aligned}$$

was (iii) beweist.

(iv) Sei $z = 1$ eine Nullstelle von D der Ordnung m:

$$D(z) = c(z-1)^m + \mathcal{O}((z-1)^{m+1}) , \qquad c \neq 0$$

Nun gilt nach der Definition von $D(z)$:

$$\int_0^1 dx\ r(x,x;z) \ = \ \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{n!} \int dx\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n\, k \begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_n \\ x, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} \ = \ z\ \frac{d}{dz}\ D(z)\ .$$

Letzterer Ausdruck hat eine Nullstelle von Ordnung $m-1$ bei $z=1$. Da das Integral auf der linken Seite bei diesem z verschwindet, muss der Integrand auf dem Intervall I mindestens eine Nullstelle haben. Somit existiert ein $x_0 \in I$, sodass $r(x_0, x_0, z)$ eine Nullstelle von Ordnung $\ell \leq m-1$ bei $z=1$ hat, d.h.

$$r(x,y;z) \ = \ g(x,y)(z-1)^\ell \ + \ \mathcal{O}(|z-1|^{\ell+1})\ ,$$

mit einem $g(x,y)$, das nicht identisch verschwindet. Nun teilen wir (4.2) durch $|z-1|^\ell$ und betrachten Limes $z \to 1$

$$g(x,y) \ = \ -\int dx_1\ k(x,x_1)\ g(x_1,y)\ .$$

Somit erfüllt $f(x) = g(x,x_0)$ (was nicht identisch gleich 0 ist) die Gleichung

$$f + Kf \ = \ 0\ .$$

(v) Dies ist lediglich eine Reskalierung von Obigem. □

4.3 Positive Operatoren auf Hilberträumen

Zunächst sei mit einer kurzen Wiederholung einiger zentraler Sachverhalte aus Kapitel 2 begonnen. Im Folgenden ist $\mathcal{H}$ ein **komplexer** Hilbertraum, d.h. ein vollständiger Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$, welches linear im zweiten Argument und antilinear im ersten ist.

Satz Sei $Y \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum. Dann ist das orthogonale Komplement $Y^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x|y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in Y\}$ abgeschlossen.

Korrolar Sei $Y \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen. Dann lässt sich jedes $x \in \mathcal{H}$ zerlegen in $x = y + y^\perp$. Wenn $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert ist durch $Px = y$, dann gilt $P = P^2 = P^*$. Dieser Operator heißt die orthogonale Projektion auf y.

Riesz'scher Darstellungssatz: Es gilt $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$, d.h. zu jedem stetigen linearen Funktional $T : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ existiert ein $y_T \in \mathcal{H}$, sodass

$$Tx \ = \ \langle y_T|x\rangle\,, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}\ .$$

Satz Es existieren Orthonormalbasen $(b_i)_{i\in I}$ und $\mathbb{1} = \sum_{i\in I} |b_i\rangle\,\langle b_i|$.

Hellinger-Toeplitz: Falls $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ symmetrisch ist, so ist T auch stetig.

Definition Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Unter Verwendung des Riesz'schen Darstellungssatzes kann der adjungierte Operator T^* definiert werden durch

$$\langle T^*x|y\rangle \ = \ \langle x|Ty\rangle\ , \qquad \forall\, x,y \in \mathcal{H}\ .$$

Satz $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

(i) $\|T^*\| = \|T\|$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$ und $(T^*)^* = T$.

(iii) Wenn $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ (C^*-Gleichung)

(v) $(\mathrm{Ran}(T))^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$

Nun fahren wir mit neuen Sachverhalten fort.

Satz 4.39 *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, d.h. $T^*T = TT^*$. Dann erfüllt der Spekralradius:*

$$r(T) \;=\; \|T\| \;.$$

Bemerkung 4.40 Die Voraussetzung ist schon bei 2×2 Matrizen notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;, \qquad \sigma(T) = \{1\} \;, \qquad \text{aber } \|T\| > 1 \;.$$

Beweis: Zunächst sei daran erinnert, dass

$$r(T) \;=\; \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;=\; \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;.$$

Nun gilt aber unter mehrfacher Verwendung der C^*-Gleichung und der Normalität von T:

$$\begin{aligned}
\|T^{2^k}\|^2 \;&=\; \|(T^{2^k})^* T^{2^k}\| \;=\; \|(T^*T)^{2^k}\| \\
&=\; \|((T^*T)^{2^{k-1}})^* (T^*T)^{2^{k-1}}\|^2 \;=\; \|(T^*T)^{2^{k-1}}\|^2 \\
&=\; \|((T^*T)^{2^{k-2}})^* (T^*T)^{2^{k-2}}\|^2 \;=\; \|(T^*T)^{2^{k-2}}\|^4 \;=\; \ldots = \|T^*T\|^{2^k} \\
&=\; \|T\|^{2^{k+1}} \;.
\end{aligned}$$

Wenn dies in obige Formel für $r(T)$ eingesetzt wird, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.41 Im Beweis wurde nur die C^*-Gleichung verwendet. Er überträgt sich also direkt auf unitale C^*-Algebren, welches Banach $*$-Algebra sind, in denen die C^*-Gleichung gilt. Dies gilt für viele Resultate über Operatoren auf Hilberträumen.

Satz 4.42 (i) *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Isometrie, d.h. $T^*T = \mathbb{1}$ oder, was äquivalent ist, $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dann $r(T) = 1$.*

(ii) *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitär, d.h. $T^*T = TT^* = \mathbb{1}$. Dann $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$.*

(iii) *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, d.h. $T^* = T$. Dann $\sigma(T) \subset \big[-\|T\|, \|T\|\big] \subset \mathbb{R}$.*

Lemma 4.43 *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

(i) *$\sigma(\lambda\mathbb{1} - T) = \lambda - \sigma(T)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(ii) *$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, wobei $\overline{\sigma(T)}$ hier die komplexe Konjugation bezeichnet und nicht den Abschluss.*

(iii) *Falls T invertierbar ist, so $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1}$.*

Begründung: (i) und (iii) folgen direkt aus dem spektralem Abbildungssatz für holomorphe Funktionen. Dennoch argumentieren wir hier direkt. Zunächst zu (i):

(i)

$$\begin{aligned} \mu \in \rho(\lambda \mathbb{1} - T) &\iff (\mu \mathbb{1} - (\lambda \mathbb{1} - T)^{-1}) \quad \text{existiert} \\ &\iff ((\mu - \lambda)\mathbb{1} - T)^{-1} \quad \text{existiert} \\ &\iff \mu - \lambda \in \rho(T) \end{aligned}$$

Nun zu (ii):

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(T^*) &\iff (\lambda \mathbb{1} - T^*)^{-1} = ((\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)^*)^{-1} = ((\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)^{-1})^* \quad \text{existiert} \\ &\iff (\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)^{-1} \quad \text{existiert} \\ &\iff \overline{\lambda} \in \rho(T) \end{aligned}$$

Letztendlich zu (iii):

$$\begin{aligned} 0 \neq \lambda \in \rho(T) &\iff (\lambda \mathbb{1} - T)^{-1} \quad \text{existiert} \\ &\iff T(\lambda \mathbb{1} - T)^{-1} = (\lambda T^{-1} - \mathbb{1})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}\right)^{-1} \quad \text{existiert} \\ &\iff \frac{1}{\lambda} \in \rho(T^{-1}) \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ ist nichts zu überprüfen. □

Beweis von Satz 4.42: (i) Ähnlich wie Satz 4.39 folgt aus der C^*-Gleichung:

$$\|T^n\|^2 \;=\; \|(T^n)^* T^n\| \;=\; \|(T^*)^{n-1} T^{n-1}\| \;=\; \dots \;=\; \|\mathbb{1}\| = 1 \;.$$

(ii) Da T isometrisch ist, gilt $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\}$. Zudem:

$$\sigma(T) \;=\; \overline{\sigma(T^*)} \;=\; \overline{\sigma(T^{-1})} \;=\; \overline{\sigma(T)^{-1}} \;=\; \overline{\sigma(T)}^{-1} \;.$$

Also, wenn $|\lambda| < 1$ wäre, dann würde $r(T) > 1$ gelten, ein Widerspruch.

(iii) Da T normal ist, gilt $r(T) = \|T\|$. Sei $\lambda > \|T\|$, dann existiert

$$\left(i\mathbb{1} \pm \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1} \;=\; -i \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\pm 1}{i\lambda}\, T\right)^n \;.$$

Nun definieren wir einen Operator via Cayley Transformation:

$$U \;=\; \left(i\;\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda}\, T\right)\left(i\;\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1}$$

Dann ist U unitär, weil nämlich Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} U^*U \;&=\; \left(-i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1}\left(-i\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda}\, T\right)\left(i\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda}\, T\right)\left(i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1} \\ &=\; \left(-i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1}\left(i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}\, T\right)^{-1}\left(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda^2}\, T^2\right) \qquad (\text{weil } [T, \mathbb{1}] = 0\ ) \\ &=\; \left(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda^2}\, T^2\right)^{-1}\left(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda^2}\, T^2\right) \;=\; \mathbb{1} \;=\; UU^* \;. \end{aligned}$$

Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\Im m(\mu) \neq 0$ gilt jetzt

$$\frac{i + \frac{1}{\lambda}\mu}{i - \frac{1}{\lambda}\mu} \;=\; \frac{1 - i\frac{\mu}{\lambda}}{1 + i\frac{\mu}{\lambda}} \;\notin\; \mathbb{S}^1 \;.$$

Somit existiert das Inverse von:

$$\begin{aligned}\frac{i + \frac{\mu}{\lambda}}{i - \frac{\mu}{\lambda}}\mathbb{1} - U \;&=\; \frac{1}{i - \frac{\mu}{\lambda}}\left[\left(i + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}T\right) - \left(i + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(i\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda}T\right)\right]\left(i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} \\ &=\; \frac{2i}{i\lambda - \mu}(\mu\mathbb{1} - T)\left(i\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} \;.\end{aligned}$$

Das bedeutet aber $\mu \in \rho(T)$, sodass $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Also folgt $\sigma(T) \subset \big[\|T\|, \|T\|\big]$, weil zudem $\sigma(T) \subset B_{\|T\|}(0)$. $\square$

Letzteres besagt noch nichts Genaueres über die Ränder des Spektrums.

Satz 4.44 *Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Setze*

$$a = \inf_{\|x\|=1} \langle x|Tx\rangle \;, \qquad b = \sup_{\|x\|=1} \langle x|Tx\rangle \;.$$

Dann $\sigma(T) \subset [a, b]$ und $a, b \in \sigma(T)$.

Beweis: Sei $\lambda < a,\; \lambda \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass $T - \lambda\mathbb{1}$ invertierbar ist. Hierzu verwenden wir die Bilinearform $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$B(x, y) \;=\; \langle x|(T - \lambda\mathbb{1})y\rangle \;.$$

Dann ist $B(x, y)$ antilinear in x, linear in y, und beschränkt:

$$|B(x, y)| \;\leq\; \|x\|(\|T\| + |\lambda|)\|y\| \;.$$

Außerdem ist B positiv, denn nach Voraussetzung gilt:

$$B(x, x) \;=\; \langle x|(T - \lambda\mathbb{1})x\rangle \;\geq\; (a - \lambda)\|x\|^2 \;.$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram (Satz 2.14) existiert zu jedem linearen Funktional $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ ein $y_S \in \mathcal{H}$ mit

$$Sx \;=\; B(y_S, x) \;.$$

Insbesondere gilt also, dass für alle $z \in \mathcal{H}$ ein $y_z \in \mathcal{H}$ existiert, sodass

$$\langle z|x\rangle \;=\; B(y_z, x) \;=\; \langle y_z|(T - \lambda\mathbb{1})x\rangle \;=\; \langle (T - \lambda\mathbb{1})y_z|x\rangle \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H} \;.$$

Somit existiert für alle $z \in \mathcal{H}$ ein y_z derart, dass

$$z \;=\; (T - \lambda\mathbb{1})y_z \;.$$

Hieraus folgt aber, dass $T - \lambda\mathbb{1}$ invertierbar ist und somit $\lambda \notin \sigma(T)$. Für $\lambda > b$ kann ähnlich argumentiert werden (oder betrachte $-T$).

Noch zu zeigen ist, dass $a, b \in \sigma(T)$. Zunächst gilt $[a, b] \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Andererseits besagt der Spektralradiussatz, dass entweder $-a = \|T\|$ oder $b = \|T\|$, d.h. dass entweder $|a|$ oder b Spektralrand ist. Um den jeweils anderen zu betrachten, muss das gleiche Argument entweder auf $T - a\mathbb{1}$ bzw. $T - b\mathbb{1}$ angewandt werden. $\square$

Definition 4.45 *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positiv, in Kurzschreibweise $T \geq 0 \Longleftrightarrow T = T^*$ und $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ebenso: $T > 0$ strikt positiv $\Longleftrightarrow T = T^*$ und $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{>0}$.*

Folgendes wird oft als Definition verwendet.

Satz 4.46 *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt:*

$$T \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle x|Tx\rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}\ .$$

Beweis "$\Longrightarrow$" Nach Voraussetzung und Satz 4.44 gilt

$$0 \ \leq \ \inf_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda \ = \ \inf_{\|x\|\leq 1} \langle x|Tx\rangle\ ,$$

was schon die Aussage beweist. Für die Umkehrung "$\Longleftarrow$" müssen wir zunächst zeigen, dass $T = T^*$ gilt. Hierfür überprüft man zunächst die Polarisationsidentität in der Form

$$4\,\langle Tx|y\rangle \ = \langle T(x+y)|x+y\rangle \ - \ \langle T(x-y)|x-y\rangle - i\,\langle T(x+iy)|x+iy\rangle \ + i\,\langle T(x-iy)|x-iy\rangle\ .$$

Da nun nach Voraussetzung $\langle Tz|z\rangle = \langle z|Tz\rangle$ für alle $z \in \mathcal{H}$ (hierfür wird sogar nur $\langle z|Tz\rangle \in \mathbb{R}$ und nicht $\langle z|Tz\rangle \geq 0$ benötigt), folgt nach 4-maliger Anwendung $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$ und somit $T = T^*$. Wiederum mit Satz 4.44 folgt nun auch $T \geq 0$. □

Bemerkung 4.47 Für beliebiges $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $T^*T \geq 0$. In der Tat gilt $(T^*T)^* = T^*T$ und für $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle x|T^*Tx\rangle \ = \ \langle Tx|Tx\rangle \ \geq \ 0\ .$$

Satz 4.48 *Wenn $T \geq 0$, $S \geq 0$ und $\lambda \geq 0$, dann $T + \lambda S \geq 0$, d.h. die positiven Operatoren bilden einen Kegel.*

Beweis: Wir führen zwei verschiedene Beweise (wobei die Beweiselemente des zweiten später noch verwandt werden). Zunächst gilt nach

$$\inf_{\|x\|\leq 1} \langle x|(T+\lambda S)x\rangle \ \geq \ \inf_{\|x\|\leq 1} \langle x|Tx\rangle \ + \ \lambda \ \inf_{\|x\|\leq 1} \langle x|Sx\rangle \ \geq \ 0\ ,$$

nach Voraussetzung und Satz 4.44. Somit folgt mit Satz 4.44 $(T + \lambda S) \geq 0$.

Für den zweiten Beweis ist zunächst klar, dass $\lambda T \geq 0$ für $\lambda \geq 0$ und $T \geq 0$ nach dem spektralen Abbildungssatz gilt.

Behauptung: $T = T^*$ und $\|\mathbb{1} - T\| \leq 1 \Longrightarrow \sigma(T) \subset [0, 2]$.

Begründung: Nach dem Spektralradiussatz gilt $\sigma(\mathbb{1} - T) \subset [-1, 1]$. Zudem $\sigma(T) = \sigma(\mathbb{1} - \mathbb{1} + T) = 1 - \sigma(\mathbb{1} - T) \subset [0, 2]$. ◇

Behauptung: Wenn $T = T^*$,

$$T \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\| \mathbb{1} - \frac{1}{\|T\|}\, T \right\| \leq 1\ .$$

Begründung: "$\Longrightarrow$" Zunächst gilt $\sigma\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\|T\|}T\right) \ = \ 1 \ - \ \frac{1}{\|T\|}\sigma(T) \ \subset \ [0, 1]$. Also erlaubt der Spektralradiussatz zu schließen. Für die Umkehrung "$\Longleftarrow$" verwenden wir $\sigma\left(\mathbb{1} - \frac{1}{\|T\|}T\right) \subset [-1, 1]$. Nach dem spektralen Abbildungssatz folgt dann $\sigma(T) \subset [0, 2\|T\|] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. ◇

Seien nun $T \geq 0$ und $S \geq 0$ mit $\|T\| \geq \|S\|$. Dann gilt $\left\| 1 - \frac{S}{\|T\|} \right\| \leq 1$ und

$$\left\| \mathbb{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{S}{\|T\|} + \frac{T}{\|T\|}\right) \right\| \;=\; \frac{1}{2}\left\| \left(\mathbb{1} - \frac{S}{\|T\|}\right) + \left(\mathbb{1} - \frac{T}{\|T\|}\right) \right\| \;\leq\; \frac{1}{2}(1+1) \;\leq\; 1 \;.$$

Nach obiger Behauptung folgt

$$\frac{1}{2}\;\left(\frac{S}{\|T\|} + \frac{T}{\|T\|}\right) \;\geq\; 0 \;,$$

was dann $S + T \geq 0$ impliziert. □

Satz 4.49 *(Wurzellemma) Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

$$T \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\; S \geq 0 \textit{ mit } S^2 = T \;.$$

Zudem ist S eindeutig und es gilt $[S, A] = 0$ für alle A mit $[T, A] = 0$. Man schreibt auch $S = T^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir "$\Longleftarrow$". Es gilt $\|S\|^2 = \|S^*S\| = \|S^2\| = \|T\|$. Außerdem folgt aus dem spektralen Abbildungssatz für die analytische Funktion $x \mapsto x^2$:

$$\sigma(T) \;=\; \sigma(S^2) \;=\; \sigma(S)^2 \;\subset\; [0, \|S\|^2] \;=\; [0, \|T\|] \;.$$

Nun zu "$\Longrightarrow$". Wir benötigen folgenden analytischen Fakt.

Behauptung: Die Reihe $\sqrt{1-z} = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ konvergiert absolut für $|z| \leq 1$.

Begründung: Die Funktion $f(z) = \sqrt{1-z}$ ist analytisch auf $|z| < 1$ und somit konvergiert die Reihe absolut für $|z| < 1$. Außerdem zeigt explizites Ausrechnen, dass für alle $n \geq 1$

$$\partial_z^n f(z)\Big|_{z=0} \;\leq\; 0 \;.$$

Somit gilt $c_n \leq 0$ für $n \geq 1$. Also folgt wegen $c_0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \;=\; 2 - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \;=\; 2 - \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;=\; 2 - \lim_{x \uparrow 1} \sqrt{1-x} \;=\; 2 \;.$$

Somit konvergiert die Reihe auch absolut für $|z| = 1$. □

Wegen der formalen Rechnung $\sqrt{T} = \|T\|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{T}{\|T\|}} = \|T\|^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{T}{\|T\|}\right)}$ setzen wir nun

$$S \;=\; \|T\|^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{1} + \sum_{n \geq 1} c_n \left(\mathbb{1} - \frac{T}{\|T\|} \right)^n \right) \;.$$

Da $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, folgt wie im vorangehenden Beweis $\left\| \mathbb{1} - \frac{T}{\|T\|} \right\| \leq 1$. Somit ist S als normkonvergente Reihe wohldefiniert. Nun ist es eine rein algebraische Rechnung, die zu $S^2 = T$ führt. Außerdem gilt $[S, A] = 0$ für alle A mit $[A, T] = 0$.

Behauptung: $S \geq 0$

Begründung: $R = \sum_{n\geq 1}(-c_n)\left(\mathbb{1} - \frac{T}{\|T\|}\right)^n$ ist positiv als Summe positiver Operatoren (nach Satz 4.48). Zudem gilt nach Obigem $\|R\| \leq \sum_{n\geq 1}|c_n| \leq 1$. Also $\sigma(\mathbb{1}-R) = 1-\sigma(R) \subset 1-[0,1] = [0,1]$. Somit

$$\sigma(S) \;=\; \sigma\left(\|T\|^{\frac{1}{2}}(\mathbb{1}-R)\right) \;=\; \left[0, \|T\|^{\frac{1}{2}}\right] \;.$$

Die Eindeutigkeit zu zeigen ist eine Übung. □

Bemerkung 4.50 Das Wurzellemma folgt auch direkt aus dem später bewiesenen Spektralsatz für stetige Funktionen, jedoch nicht aus dem Funktionalkalkül für holomorphe Funktionen, es sei denn $T > 0$ ist strikt positiv.

Definition 4.51 *Eine partielle Ordnung auf den selbstadjungierten Operatoren wird definiert durch:*

$$S \leq T \qquad \Longleftrightarrow \qquad T - S \geq 0 \;.$$

Satz 4.52 *Seien $R, S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt:*

(i) *Wenn $S \leq T$, so gilt $R^*SR \leq R^*TR$.*

(ii) *Wenn $0 < S \leq T$, so sind S und T invertierbar und $0 < T^{-1} \leq S^{-1}$.*

(iii) $(S+T)^*(S+T) \leq 2(S^*S + T^*T)$

Bemerkung 4.53 Wenn $S \geq 0$ und $T \geq 0$, folgt daraus im Allgemeinen nicht $ST \geq 0$, wohl aber dass für die Spur gilt $\mathrm{Tr}(ST) \geq 0$. Der Punkt (ii) kann weitgehend verallgemeinert werden. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaft:

$$S \leq T \;\Longrightarrow\; f(S) \leq f(T) \quad \text{(Letzteres definiert mit Spektralkalkül)}$$

heißen operatorpositiv. Nach Loewner's Satz sind die Herglotz-Funktionen operatorpositiv. Obiger Punkt (ii) ist das Beispiel der Herglotz-Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Beweis: (i) Die Ungleichung $S \leq T$ bedeutet $T - S \geq 0$. Also existiert $(T-S)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned} R^*TR - R^*SR \;&=\; R^*(T-S)R \;=\; R^*(T-S)^{\frac{1}{2}}\,(T-S)^{\frac{1}{2}}\,R \\ &=\; \left((T-S)^{\frac{1}{2}}R\right)^*\left((T-S)^{\frac{1}{2}}R\right) \;\geq\; 0 \;. \end{aligned}$$

Nun zu (ii). Da $0 < S$, folgt, dass $0 \notin \sigma(S)$. Somit existiert S^{-1} und ebenso T^{-1}. Außerdem gilt $\sigma(S^{-1}) = \sigma(S)^{-1} \subset \mathbb{R}_{>0}$, also insbesondere $S^{-1} > 0$. Unter Verwendung von (i) folgt nun

$$\mathbb{1} \;=\; S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}} \;\leq\; S^{-\frac{1}{2}}TS^{-\frac{1}{2}} \;.$$

Nun gilt ganz allgemein: $\mathbb{1} \leq R \iff R^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}R^{-\frac{1}{2}} \leq R^{-\frac{1}{2}}RR^{-\frac{1}{2}} \iff R^{-1} \leq \mathbb{1}$. Also

$$\left(S^{-\frac{1}{2}}TS^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \;=\; S^{\frac{1}{2}}T^{-1}S^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \mathbb{1} \;.$$

Wegen (i) impliziert dies aber $T^{-1} \leq S^{-1}$. Letztendlich kommen wir zu (iii). Es gilt zunächst die Operator-Parallelogrammregel:

$$(S+T)^*(S+T) + (S-T)^*(S-T) \;=\; 2(S^*S + T^*T) \;.$$

Da aber $(S-T)^*(S-T) \geq 0$, folgt schon (iii). □

Bemerkung 4.54 Es gilt auch die Operator-Polarisations-Identität

$$4\,T^*S \;=\; \sum_{k=0}^{3} i^k (S+i^kT)^*(S+i^kT)\ .$$

Definition 4.55 *Sei $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

(i) *P idempotent $\Longleftrightarrow P^2 = P$*

(ii) *P (orthogonale) Projektion $\Longleftrightarrow P^2 = P = P^*$*

Bemerkungen 4.56 (i) Es gibt schon 2×2-Matrizen, die idempotent, aber nicht selbstadjungiert sind, z.B.

$$P \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-bc} & b \\ c & \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-bc} \end{pmatrix}\ .$$

(ii) Sei $P^2 = P$. Für $x \in \mathrm{Ran}(P)$ gilt dann $Px = x$. In der Tat, sei $x = Py$. Dann gilt

$$Px - x \;=\; P^2y - Py \;=\; Py - Py \;=\; 0\ .$$

(iii) In $\mathcal{H}$ liegt die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(P) + \mathrm{Ran}(P)$ vor, da $z = (1-P)z + Pz$. Nach (ii) gilt also $\sigma(P) \in \{0,1\}$ für jedes idempotente P.

(iv) Mit (iii) gilt auch, dass $\mathrm{Ran}(P) = \mathrm{Ker}(1-P)$ abgeschlossen ist.

Auf spektralem Niveau sind Idempotente und Projektion ununterscheidbar. Dieser Unterschied wird nun im nächsten Satz untersucht und betrifft die Tatsache, dass obige direkte Summen-Zerlegung nicht immer orthogonal sein muss.

Satz 4.57 $0 \neq P = P^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *$P = P^*$ (d.h. P Projektion)*

(ii) *$\langle x|Px\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$.*

(iii) $\mathrm{Ran}(P) \perp \mathrm{Ker}(P)$

(iv) $\|P\| = 1$

(v) *$PP^* = P^*P$ (d.h. P ist normal)*

Beweis:
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Da $\sigma(P) = \{0,1\}$, folgt (ii) aus Satz 4.44, weil $\inf(\sigma(P)) = \inf\{\langle x : Px\rangle\,|\,\|x\| = 1\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Seien $x \in \mathrm{Ker}(P)$ und $y \in \mathrm{Ran}(P)$, außerdem $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann

$$0 \;\leq\; \langle x+\lambda y|P(x+\lambda y)\rangle \;=\; \lambda\,\langle x+\lambda y|Py\rangle \;=\; \lambda\,\langle x+\lambda y|y\rangle \;=\; \lambda\,\langle x|y\rangle + \lambda^2\,\langle y|y\rangle\ .$$

Da dies für alle λ (beliebig klein) gilt, folgt $\langle x|y\rangle = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Weil $\mathrm{Ker}(P)\perp\mathrm{Ran}(P)$, gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle Px|y\rangle \;=\; \langle Px|Py + (1-P)y\rangle \;=\; \langle Px|Py\rangle\ .$$

Somit folgt

$$\langle x|Py\rangle \;=\; \langle Px+(1-P)x|Py\rangle \;=\; \langle Px|Py\rangle \;=\; \langle Px|y\rangle \;.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Wieder unter Verwendung von $\mathrm{Ker}(P)\perp\mathrm{Ran}(P)$ folgt

$$\|x\|^2 \;=\; \|Px+(1-P)x\|^2 \;=\; \|Px\|^2+\|(1-P)x\|^2 \;.$$

Also gilt $\|Px\|^2\le\|x\|^2$ mit Gleichheit, wenn $x\in\mathrm{Ran}(P)$, also $\|P\|=1$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Seien $x\in\mathrm{Ker}(P)$ und $y\in\mathrm{Ran}(P)$ und $\lambda\in\mathbb{R}$. Also gilt $P(x+\lambda y)=\lambda y$, sodass

$$\|\lambda y\|^2 \;=\; \|P(x+\lambda y)\|^2 \;\le\; \|x+\lambda y\|^2 \;=\; \|x\|^2+\|\lambda y\|^2+2\,\Re e(\lambda\,\langle x|y\rangle)\;,$$

d.h. $2\,\lambda\,\Re e\,\langle x|y\rangle\ge-\|x\|^2$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$. Dies impliziert $\Re e\,\langle x|y\rangle=0$. Genauso folgt $\Im m\,\langle x|y\rangle=0$ wenn $i\lambda$ verwandt wird, was den Beweis beendet.

(i) $\Longrightarrow$ (v) ist offensichtlich.

(v) $\Longrightarrow$ (iii) Sei $x\in\mathrm{Ran}(P)^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px|Px\rangle \;=\; \langle x|P^*Px\rangle \;=\; \langle x|PP^*x\rangle \;=\; 0\;,$$

Letzteres weil $PP^*x\in\mathrm{Ran}(P)$. Somit ist $Px=0$. Also $\mathrm{Ran}(P)^\perp\subset\mathrm{Ker}(P)$ und somit (iii). □

Definition 4.58 (i) *Für $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ der Betrag von T.*

(ii) *$V\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt partielle Isometrie $\Longleftrightarrow$ V^*V Projektion*

Bemerkung 4.59 Es gilt $|\lambda T|=|\lambda||T|$ für $\lambda\in\mathbb{C}$, aber folgende Aussagen sind im Allgemeinen allesamt falsch:

$$|TS| \;=\; |T||S|\;,\qquad |T^*| \;=\; |T|\;,\qquad |T+S| \;\le\; |T|+|S|\;.$$

Satz 4.60 (i) *V partielle Isometrie $\Longleftrightarrow$ $V|_{\mathrm{Ker}(V)^\perp}$ Isometrie, d.h. $\|Vx\|=\|x\|$ für $x\in\mathrm{Ker}(V)^\perp$.*

(ii) *V partielle Isometrie $\Longleftrightarrow$ V^* partielle Isometrie.*

(iii) *Es gilt* $\mathrm{Ran}(V^*)=\mathrm{Ran}(V^*V)=\mathrm{Ker}(V)^\perp$ *und* $\mathrm{Ran}(V)=\mathrm{Ran}(VV^*)=\mathrm{Ker}(V^*)^\perp$.

(iv) *$V:\mathrm{Ran}(V^*)\to\mathrm{Ran}(V)$ ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung V^*.*

Beweis: Wir beginnen mit "$\Longrightarrow$" von (i). Für $x\in\mathrm{Ker}(V)^\perp$ gilt $V^*Vx=x$, da ja x im Bild der Projektion V^*V liegt. Also folgt

$$\|Vx\|^2 \;=\; \langle Vx|Vx\rangle \;=\; \langle x|V^*Vx\rangle \;=\; \langle x|x\rangle \;=\; \|x\|^2\;.$$

Für "$\Longleftarrow$" verwenden wir die Zerlegung in zwei abgeschlossene Unterräume $\mathcal{H}=\mathrm{Ker}(V)\oplus\mathrm{Ker}(V)^\perp$. Es ist zu zeigen, dass $P=V^*V$ eine Projektion ist. Zunächst ist $P^*=P$ klar. Außerdem gilt für alle $x\in\mathrm{Ker}(V)^\perp$ nach Voraussetzung, dass

$$\langle x|Px\rangle \;=\; \langle Vx|Vx\rangle \;=\; \langle x|x\rangle \;.$$

Also folgt $Px=x+y$ mit $y\perp x$. Da $\|P\|\le\|V\|^2=1$, ist aber $y=0$. Somit $P^2=P$ auf $\mathrm{Ker}(V)^\perp$ und trivialerweise auch auf $\mathrm{Ker}(V)$. Nun zu (ii). Sei $Q=VV^*$. Offensichtlich gilt $Q^*=Q$. Es ist $V(1-P)=0$, weil $1-P$ die Projektion auf $(\mathrm{Ker}(V)^\perp)^\perp=\mathrm{Ker}(V)$ ist. Somit gilt

$$Q^2 \;=\; VV^*VV^* \;=\; VPV^* \;=\; VV^* \;=\; Q\;,$$

und Q ist tatsächlich eine Projektion, was bedeutet, dass V^* eine partielle Isometrie ist. Die Rückrichtung ist dann auch klar. Nun zu (iii). Zunächst gilt $\mathrm{Ker}(V) \subset \mathrm{Ker}(V^*V)$. Wegen $\langle x|V^*Vx\rangle = \|Vx\|^2$ gilt auch $\mathrm{Ker}(V^*V) \subset \mathrm{Ker}(V)$. Somit $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(V^*V)$ und

$$\mathrm{Ker}(V)^\perp \;=\; \mathrm{Ker}(V^*V)^\perp \;=\; \overline{\mathrm{Ran}(V^*V)} \;=\; \mathrm{Ran}(V^*V)\;,$$

Letzteres weil V^*V ein Projektion ist und somit das Bild abgeschlossen ist. (iv) ist eine Übung. □

Beispiel 4.61 Der Linksshift $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ist definiert durch

$$S|n\rangle \;=\; \begin{cases} |n-1\rangle\;, & n \geq 1\;,\\ 0\;, & n = 0\;.\end{cases}$$

Dann gilt $SS^* = \mathbb{1}$, aber $S^*S = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$ ist eine nicht triviale Projektion. Somit ist S eine partielle Isometrie, aber keine Isometrie.

Satz 4.62 *(Polarzerlegung nach von Neumann) Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann existiert eine eindeutige partielle Isometrie V mit $T = V|T|$ und* $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(T)$.

Es gilt: (i) $V^*V|T| = |T|$ (ii) $V^*T = |T|$ (iii) $VV^*T = T$

Beweis: Zunächst gilt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\||T|x\|^2 \;=\; \langle |T|x||T|x\rangle \;=\; \big\langle x||T|^2x\big\rangle \;=\; \langle x|T^*Tx\rangle \;=\; \|Tx\|^2\;. \tag{4.3}$$

Also ist $\mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ker}(T)$. Nun definieren wir $\mathrm{Ran}(|T|) \to \mathrm{Ran}(T)$ durch

$$V|T|x \;=\; Tx\;.$$

Nach (4.3) ist V wohldefiniert, weil $|T|x = |T|y$ impliziert

$$0 \;=\; \||T|x - |T|y\| \;=\; \||T|(x-y)\| \;=\; \|T(x-y)\| \;=\; \|Tx - Ty\|\;,$$

so dass $Tx = Ty$. Zudem ist V nach (4.3) isometrisch. Somit existiert eine isometrische Fortsetzung $V : \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Ran}(T)}$. Nun muss V auf $\overline{\mathrm{Ran}(|T|)}^\perp = \mathrm{Ran}(|T|)^\perp = \mathrm{Ker}(|T|)$ definiert werden (für letztere Gleichheit haben wir $|T|^* = |T|$ verwandt). Wir setzen $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ker}(T)$. Nach Satz 4.60 ist V dann eine partielle Isometrie.

Zur *Eindeutigkeit:* Sei $\widetilde{V}$ eine weitere partielle Isometrie mit

$$\widetilde{V}|T| \;=\; V|T| \;=\; T\;, \qquad \mathrm{Ker}(\widetilde{V}) \;=\; \mathrm{Ker}(T) \;=\; \mathrm{Ker}(V) \;=\; \mathrm{Ker}|T|\;.$$

Aus Ersterem folgt $\widetilde{V}y = Vy$ für alle $y \in \overline{\mathrm{Ran}(|T|)} = \mathrm{Ker}(|T|)^\perp$, was zusammen mit Letzterem $\widetilde{V} = V$ impliziert.

Zuletzt zu den *Identitäten:*

(i) V^*V ist die Projektion auf $\mathrm{Ker}(V)^\perp = \mathrm{Ker}(T)^\perp = \mathrm{Ker}(|T|)^\perp = \mathrm{Ran}(|T|)^\perp$. Also folgt $V^*V|T| = |T|$.

(ii) $V^*T = V^*V|T| \overset{\text{(i)}}{=} |T|$.

(iii) $VV^*T = VV^*V|T| \overset{\text{(i)}}{=} V|T| = T$. □

Bemerkungen 4.63 1. Es gilt des Weiteren

$$T^* \;=\; |T|V^* \;\overset{\text{(i)}}{=}\; V^*(V|T|V^*)\;,$$

was *die* Polarzerlegung von T^* ist. Insbesondere $|T^*| = V|T|V^*$.

2. Wenn T invertierbar ist, so ist V in der Polarzerlegung unitär (da $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$).

4.4 Kompakte Operatoren auf Hilbert-Räumen

Zunächst sei an folgende Charakterisierungen der kompakten Operatoren erinnert:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathcal{H}) &= \{K:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\;:\;K(B_{\mathcal{H}})\text{ präkompakt in }\mathcal{H}\}\\ &= \{K:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\;:\;Kx_n\text{ hat konvergente Teilfolge, falls }x_n\text{ beschränkt ist}\}\\ &= \overline{\{\text{Operatoren mit endlich dimensionalem Bild}\}}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}}\;,\end{aligned}$$

Letzteres nur, falls $\mathcal{H}$ separabel ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ die Einheitskugel in $\mathcal{H}$. Außerdem ist $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein abgeschlossenes beidseitiges *-Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, wobei die *-Eigenschaft aus dem Satz von Schauder folgt. Des Weiteren gilt der Riesz'sche Spektralsatz für jeden kompakten Operator K auf einem unendlich dimensionalen Hilbert-Raum:

$$\sigma(K) \;=\; \{0\}\cup\{\lambda_n\neq 0\;:\;\lambda_n\text{ Eigenwert endlicher Multiplizität und 0 einziger Häufungspunkt}\}\;.$$

Für $\lambda\in\sigma(K),\;\lambda\neq 0$, definieren wir einen idempotenten Operator

$$P(\lambda)\;=\;\oint_{|z-\lambda|=\epsilon}\frac{dz}{2\pi i}\,\frac{1}{z-K}\;,\qquad P(\lambda)^2\;=\;P(\lambda)\;,\qquad [P(\lambda),K]\;=\;0\;,$$

wobei ϵ ausreichend klein gewählt werden muss, sodass $\overline{\mathcal{B}_\epsilon(\lambda)}$ keinen weiteren Eigenwert enthält. Es gilt dann für $\lambda\neq\lambda'$

$$P(\lambda)P(\lambda')\;=\;0\;.$$

Es ist dabei zu beachten, dass diese Idempotente nicht unbedingt Projektionen sind und somit gilt im Allgemeinen auch nicht immer $P(\lambda)^*P(\lambda')\neq 0$. Richtig hingegen ist die Zerlegung der Eins-Eigenschaft:

$$\sum_{n\geq 1}P(\lambda_n)+P_{\mathrm{Ker}(K)}\;=\;\mathbb{1}\;,$$

wobei $P_{\mathrm{Ker}(K)}$ die Projektion auf den Kern ist und die Summe im schwachen Sinn zu verstehen ist. Also gilt folgende Zerlegung von K in endlich-dimensionale Jordan-Blöcke:

$$K\;=\;\left(\sum_{n\geq 1}P(\lambda_n)\right)K\;=\;\sum_{n\geq 1}P(\lambda_n)KP(\lambda_n)$$

Nun ist $\dim(\mathrm{Ran}(P(\lambda_n)))$ die algebraische Vielfachheit von λ_n d.h. die Anzahl der linear unabhängigen Hauptvektoren zu λ_n. Die geometrische Vielfachheit hingegen ist $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda_n\mathbb{1}-K))$, was auch die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren ist. Im Allgemeinen ist $P(\lambda_n)$ *nicht* gleich der Projektion auf $\mathrm{Ker}((\lambda_n\mathbb{1}-K)^m)$, mit m wie im Satz von Riesz. Wenn hingegen $K^*=K$, dann folgt für $\lambda\in\sigma(K)\subset\mathbb{R}$

$$P(\lambda)^*\;=\;\left(\oint_{|z-\lambda|=\epsilon}\frac{dz}{2\pi i}\,\frac{1}{z-K}\right)^*\;=\;\oint_{|z-\lambda|=\epsilon}\frac{dz}{2\pi(-i)}\,\frac{1}{z-K}\;=\;P(\lambda)\;,$$

wobei im zweiten Kurvenintegral die Orientierung des Weges negativ ist, was dann zu letzter Gleichheit führt. Zudem ist aus der linearen Algebra bekannt, dass selbstadjungierte Jordan-Blöcke diagonal sind. Somit hat jeder selbstadjungierte kompakte Operaor K eine normkonvergente Reihendarstellung:

$$K\;=\;\sum_{n\geq 1}\lambda_n\,P(\lambda_n)\;.$$

Das gleiche Diagonalisierbarkeitsresultat gilt nun auch für normale Operatoren. Hierfür muss im Wesentlichen der Beweis aus der linearen Algebra wiederholt werden.

Satz 4.64 *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbert-Raum. Dann ist $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kompakt und normal genau dann, wenn $K = \sum_{n\geq 1} \lambda_n P(\lambda_n)$, wobei $\lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ nur 0 als Häufungspunkt hat und $P(\lambda_n)$ endlich dimensionale Projektionen sind mit $P(\lambda_n)P(\lambda_m) = 0$ für $n \neq m$.*

Beweis: "$\Longleftarrow$" ist klar. Für die Umkehrung "$\Longrightarrow$" beginnen wir mit:

Behauptung 1: $Kx = \lambda x \Longleftrightarrow K^* x = \overline{\lambda} x$

Begründung: Weil K normal ist, gilt

$$\|(K - \lambda \mathbb{1})x\| \;=\; \|(K^* - \overline{\lambda}\mathbb{1})x\| \;.$$

Behauptung 2: Wenn $Kx = \lambda x$ und $Ky = \mu y$ mit $\lambda \neq \mu$, dann $\langle x|y\rangle = 0$.

Begründung: Sei $\mu \neq 0$. Dann gilt

$$\langle x|y\rangle \;=\; \frac{1}{\mu}\langle x|Ky\rangle \;=\; \frac{1}{\mu}\langle K^* x|y\rangle \overset{\text{Beh.1}}{=} \frac{1}{\mu}\left\langle \overline{\lambda}x|y\right\rangle \;=\; \frac{\lambda}{\mu}\langle x|y\rangle \;=0\;.$$

Behauptung 3: $\exists\, x \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = \|K\|$, so dass $Kx = \lambda x$.

Begründung: Nach dem Spektralradiussatz für normale Operatoren ist $\|K\| = \sup_{\lambda\in\sigma(K)} |\lambda|$. Nach dem Satz von Riesz existiert nun also ein Eigenvektor.

Schluss des Beweises: Wähle orthonormierte Eigenvektoren x_n^j von K zu λ_n, wobei $j = 1, \ldots, m_n$ und m_n die geometrische Vielfachheit von λ_n ist. Nach Behauptung 2 ist (x_n^j) dann ein Orthonormalsystem. Nun betrachten wir folgende Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum:

$$P \;=\; \sum_{n\geq 1} P(\lambda_n) + P_{\mathrm{Ker}(K)}\;, \qquad P(\lambda_n) \;=\; \sum_{j=1}^{m_n} |x_n^j\rangle\langle x_n^j| \;.$$

Zu zeigen ist $P = \mathbb{1}$. Es sei die Gegenannahme $\mathbb{1} - P \neq 0$ gemacht. Es gilt $[K, P] = 0$, da

$$K\,|x_n^j\rangle\langle x_n^j| \;=\; \lambda_n |x_n^j\rangle\langle x_n^j| \;=\; |x_n^j\rangle\langle \overline{\lambda}_n x_n^j| \overset{\text{Beh.1}}{=} |x_n^j\rangle\langle K^* x_n^j| \;=\; |x_n^j\rangle\langle x_n^j|K \;.$$

So ist $(\mathbb{1} - P)K$ ein kompakter und normaler Operator. Falls $(\mathbb{1} - P)K = 0$, ist jeder Vektor $x \in (\mathbb{1}-P)\mathcal{H}$ in $\mathrm{Ker}(K)$, im Widerspruch zur Konstruktion von P. Falls $(\mathbb{1}-P)K \neq 0$, so impliziert Behauptung 3, dass ein $x \neq 0$ mit $(\mathbb{1}-P)Kx = \lambda x$ existiert, wobei $\|(\mathbb{1}-P)K\| = |\lambda|$. Weil $\mathbb{1}-P$ eine Projektion ist, gilt $(\mathbb{1}-P)x = x$ für $x \in \mathrm{Ran}(\mathbb{1}-P)$. Somit folgt $Kx = K(\mathbb{1}-P)x = (\mathbb{1}-P)Kx = \lambda x$, d.h. x ist Eigenvektor von K, wiederum im Widerspruch zur Konstruktion von P. □

Bemerkung 4.65 Es ist nun ein Leichtes, Spektralkalkül eines kompakten normalen Operators K durchzuführen. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt, dann definiert man

$$f(K) \;=\; \sum_{n\geq 1} f(\lambda_n)\; P(\lambda_n) \;\in\; \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;.$$

Falls $f(0) = 0$ und f stetig ist, gilt $f(K) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann ist die Abbildung

$$f \in \{g \in C(\mathbb{C}) \mid g(0) = 0\} \;\mapsto\; f(K) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

ein *-Algebren-Homomorphismus.

Definition 4.66 *Die singulären Werte von $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ sind die Eigenwerte von $|K|$. Notation für die singulären Werte: $\mu_1(K) \geq \mu_2(K) \ldots \geq 0$, wobei jeweils mit der Multiplizität aufgelistet wird.*

Bemerkung 4.67 $\mu_n(K) = \mu_n(|K|) = \mu_n(|K|^p)^{\frac{1}{p}}$

Satz 4.68 *(Kanonische Darstellung eines kompakten Operators auf einem Hilbertraum) Sei $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann existieren Orthonormalsysteme $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$, sodass*

$$K \;=\; \sum_{n\geq 1} \mu_n(K)\, |y_n\rangle\, \langle x_n| \;\; .$$

Bemerkung 4.69 Beachte, dass die Orthonormalsysteme nicht notwendigerweise vollständig sind.

Beweis: Nach Satz 4.64 und Wahl einer Orthonormalbasis im Bild von $P(\lambda_j(|K|))$ gilt

$$|K| \;=\; \sum_{n\geq 1} \mu_n(K)\, |x_n\rangle\, \langle x_n| \;\; .$$

Aus der Polarzerlegung folgt nun

$$K \;=\; V|K| \;=\; \sum_{n\geq 1} \mu_n(K)\, V|x_n\rangle\, \langle x_n| \;\; .$$

Da V eine Isometrie auf $\mathrm{Ran}(|K|) = \mathrm{Ker}(|K|)^{\perp}$ ist, d.h. V^*V die Projektion auf $\mathrm{Ran}(|K|)$ ist, bilden $y_n = Vx_n$ auch ein Orthonormalsystem. $\square$

Nun kommen wir zu **Variationsprinzipien** für die singulären Werte von $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nach Satz 4.44 gilt für den größten Eigenwert von $|K|$:

$$\mu_1(K) \;=\; \max_{x\in\mathcal{H}} \frac{\langle x||K|x\rangle}{\|x\|^2} \;=\; \max_{x\in\mathcal{H}} \frac{\|Kx\|}{\|x\|} \;,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, weil

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, |K|\frac{x}{\|x\|} \right\rangle \;\leq\; \sqrt{\left\langle |K|\frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, |K|\frac{x}{\|x\|} \right\rangle} \;=\; \frac{\|Kx\|}{\|x\|}$$

und beide Maxima bei dem Eigenvektor x_1 von $|K|$ angenommen werden. Deswegen definieren wir jetzt den Rayleigh-Ritz-Quotienten

$$R_K(x) \;=\; \frac{\|Kx\|}{\|x\|} \;.$$

Nach Satz 4.64 sind die Eigenvektoren $|K|x_n = \mu_n(K)x_n$ orthogonal. Also gilt

$$\mu_n(K) \;=\; \max_{x\perp x_1,\ldots,x_{n-1}} R_K(x) \;. \tag{4.4}$$

Dies ist jedoch unpraktisch für die Berechnung von $\mu_n(K)$, da die vorherigen Eigenvektoren berechnet werden müssen. Folgende Formeln sind wesentlich besser.

Satz 4.70 *Sei $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

(i) *Fischer's Prinzip*

$$\mu_n(K) \;=\; \max_{\dim(U_n)=n} \; \min_{x\in U_n} R_K(x) \;,$$

wobei das Maximum über Unterräume U_n von $\mathcal{H}$ der Dimension n genommen wird.

(ii) *Courant's Minimax-Prinzip*

$$\mu_n(K) \;=\; \min_{\dim(U_{n-1})=n-1} \; \max_{x\perp U_{n-1}} \; R_K(x) \;,$$

wobei das Minimum über Unterräume U_{n-1} von $\mathcal{H}$ der Dimension $n-1$ genommen wird.

Beweis: Zu (i). Da $\dim(U_n) = n$, existiert ein $y \in U_n$, welches orthogonal auf den Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_{n-1}$ von $|K|$ steht. Nach (4.4) gilt dann $R_K(y) \leq \mu_n(K)$. Da $y \in U_n$, ist $\min_{x\in U_n} R_K(x) \leq \mu_n(K)$. Dies gilt für alle U_n, also folgt $\max_{\dim(U_n)=n} \min_{x\in U_n} R_K(x) \leq \mu_n(K)$. Andererseits gilt für $U_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, dass $\min_{x\in U_n} R_K(x) = \mu_n(K)$.

Nun zu (ii). Setze $V_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Für Unterräume U_{n-1} mit $\dim(U_{n-1}) = n-1$ existiert ein $y \in V_n$ mit $y\perp U_{n-1}$. Nach (4.4) gilt aber $R_K(y) \geq \mu_n(K)$ für alle $y \in V_n$, sodass

$$\max_{x\perp U_{n-1}} \; R_K(x) \;\geq\; \mu_n(K) \;.$$

Da dies für alle U_{n-1} gilt, folgt

$$\min_{U_{n-1}} \; \max_{x\perp U_{n-1}} R_K(x) \;\geq\; \mu_n(K) \;.$$

Andererseits gilt für $U_{n-1} = V_{n-1}$ nach (4.4) die Gleichheit. □

Bemerkung 4.71 Für selbstadjungiertes $K = K^*$ gilt Ähnliches auch für negative Eigenwerte. Auch selbstadjungierte Operatoren, die nicht kompakt sind, aber Punktspektrum an den Bandrändern haben, können ähnlich behandelt werden. Außerdem kann anstelle des Rayleigh-Quotienten in beiden Variationsprinzipien auch $\langle x||K|x\rangle / \|x\|^2$ verwandt werden.

Es folgt eine weitere Version der Variationsprinzipien.

Satz 4.72 (Hersch) *Für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n(K) \;=\; \max_{\dim(P)=N} \mathrm{Tr}(P|K|P) \;,$$

wobei über alle Projektionen P mit N-dimensionalem Bild maximiert wird und Tr *die endlich dimensionale Spur, definiert wie in der linearen Algebra, ist.*

Beweis: Sei $|K|x_n = \mu_n(K)x_n$ und $\Pi_N = \sum_{n=1}^{N} |x_n\rangle \langle x_n|$ die zugehörige N-dimensionale Projektion. Zu P mit $\dim(P) = N > \dim(\Pi_{N-1})$, wähle $y_N \perp \Pi_{N-1}$ mit $Py_N = y_N$ und $\|y_N\| = 1$. Es gilt $\langle y_N||K|y_N\rangle \leq \mu_N(K)$.

Nun betrachte $P' = P - |y_N\rangle \langle y_N|$. Es gilt dann $\dim(P') = N-1 > \dim(\Pi_{N-2})$. Wähle $y_{N-1}\perp\Pi_{N-2}$ mit $P'y_{N-1} = y_{N-1}$ und $\|y_{N-1}\| = 1$. Wiederum folgt $\langle y_{N-1}||K|y_{N-1}\rangle \leq \mu_{N-1}(K)$. Nun iterieren wir die Konstruktion. Somit erhält man eine Darstellung $P = \sum_{n=1}^{N} |y_n\rangle \langle y_n|$ und

$$\mathrm{Tr}(P|K|P) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \langle y_n||K|y_n\rangle \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \mu_n(K) \;.$$

Andererseits wird das Maximum von $P = \Pi_N$ angenommen. $\square$

Folgender Satz fasst einige weitere Eigenschaften singulärer Werte zusammen.

Satz 4.73 *Seien $K, L \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für alle $n \geq 1$ gilt dann:*

(i) $\mu_n(K^*) = \mu_n(K)$

(ii) $\mu_n(TK) \leq \|T\| \; \mu_n(K)$ *und* $\mu_n(KT) \leq \|T\| \; \mu_n(K)$

(iii) *Wenn $0 \leq K \leq L$, dann $\mu_n(K) \leq \mu_n(L)$.*

(iv) *(Fan'sche Ungleichung 1949)* $\mu_{n+m+1}(K + L) \leq \mu_{n+1}(K) + \mu_{m+1}(L)$

(v) *(Hersch'sche Ungleichung 1964) Seien $K, L \geq 0$. Mit der Notation $\Lambda_N(K) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(K)$ gilt dann*

$$\Lambda_N(K + L) \; \leq \; \Lambda_N(K) + \Lambda_N(L) \; , \qquad \Lambda_N(K) + \Lambda_M(L) \; \leq \; \Lambda_{N+M}(K + L) \; .$$

Beweis: (i) Sei $K = V|K|$ die Polarzerlegung mit $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}(K)$. Dann gilt $KK^* = V|K||K|V^* = V|K|V^*V|K|V^*$, also

$$|K^*| \; = \; V|K|V^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad |K^*|V \; = \; V|K| \; .$$

Also folgt

$$|K|x \; = \; \mu x \qquad \Longleftrightarrow \qquad |K^*|Vx \; = \; \mu Vx$$

(iii) folgt aus beiden Variationsprinzipien, da $|K| = K$ und $|L| = L$. Zum Beispiel

$$\mu_n(K) \; = \; \max_{\dim(U_n)=n} \; \min_{x \in U_n} \frac{\langle x|Kx \rangle}{\|x\|^2} \; \leq \; \max_{\dim(U_n)=n} \; \min_{x \in U_n} \frac{\langle x|Lx \rangle}{\|x\|^2} \; = \; \mu_n(L) \; .$$

(ii) Es gilt

$$(TK)^*TK \; = \; K^*T^*TK \; \leq \; \|T\|^2 K^*K \; .$$

Nach Spektralkalkül für $|TK|^2 = (TK)^*TK$ und (iii) folgt somit

$$\mu_n(TK) \; = \; \mu_n((TK)^*TK)^{\frac{1}{2}} \; \leq \; \|T\| \; \mu_n(K^*K)^{\frac{1}{2}} \; = \; \|T\| \; \mu_n(K) \; .$$

Die zweite Ungleichung folgt zusammen mit (i):

$$\mu_n(KT) \; = \; \mu_n(T^*K^*) \; \leq \; \|T^*\| \; \mu_n(K^*) \; = \; \|T\| \; \mu_n(K) \; .$$

(iv) Für jeden Unterraum $U \subset \mathcal{H}$ setzen wir $Q_K(U) = \max_{x \perp U} R_K(x)$. Es gilt dann die Monotonieeigenschaft $U \subset V \implies Q_K(U) \geq Q_K(V)$. Nach dem Minimax-Prinzip gilt

$$\mu_{n+1}(K) \; = \; \min_{\dim(U)=n} Q_K(U) \; .$$

Da

$$R_{K+L}(x) \; = \; \frac{\|(K + L)x\|}{\|x\|} \; \leq \; R_K(x) + R_L(x) \; ,$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mu_{n+m+1}(K+L) &= \min_{\substack{\dim(U)=n,\dim(V)=m\\ U\perp V}} Q_{K+L}(U\oplus V)\\
&\leq \min_{\substack{\dim(U)=n,\dim(V)=m\\ U\perp V}} Q_K(U\oplus V)+Q_L(U\oplus V)\\
&\leq \min_{\dim(U)=n,\dim(V)=m} Q_K(U)+Q_L(V)\\
&= \mu_{n+1}(K)+\mu_{m+1}(L)\ .
\end{aligned}$$

(v) Nach Satz 4.72 gilt, wegen $K+L\geq 0$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_N(K+L) &= \max_{\dim(P)=N} \mathrm{Tr}(P(K+L)P)\\
&\leq \max_{\dim(P)=N} \mathrm{Tr}(PKP)+\max_{\dim(P)=N} \mathrm{Tr}(PLP)\\
&= \Lambda_N(K)+\Lambda_N(L)\ .
\end{aligned}$$

Für die zweite Ungleichung seien Π_N und Π_M zwei Projektionen, sodass

$$\Lambda_N(K) \;=\; \mathrm{Tr}\left(\Pi_N K\right)\ , \qquad \Lambda_M(L) \;=\; \mathrm{Tr}\left(\Pi_M L\right)\ .$$

Sei P die Projektion auf $\mathrm{span}(\Pi_N\mathcal{H},\Pi_M\mathcal{H})$. Dann

$$\dim(P) \;\leq\; N+M\ , \qquad \Pi_N \;\leq\; P\ , \qquad \Pi_M \;\leq\; P\ .$$

Somit folgt wie in der linearen Algebra

$$\mathrm{Tr}((P-\Pi_N)K) \;=\; \mathrm{Tr}((P-\Pi_N)^{\frac{1}{2}}\ K(P-\Pi_N)^{\frac{1}{2}}) \;\geq\; 0\ ,$$

d.h. $\mathrm{Tr}(\Pi_N K)\leq\mathrm{Tr}(PK)$. Analog gilt $\mathrm{Tr}(\Pi_M L)\leq\mathrm{Tr}(PL)$. Somit

$$\Lambda_N(K)+\Lambda_M(L) \;\leq\; \max_{\Pi_N,\Pi_M} \mathrm{Tr}(P(K+L)) \;\leq\; \Lambda_{N+M}(K+L)\ ,$$

was auch die letzte Ungleichung beweist. □

Viele weitere interessante Ungleichungen können in dem Buch [MOA] gefunden werden.

Bis jetzt haben wir lediglich endlich dimensionale Spuren verwendet. Nun werden Spuren über unendlich dimensionalen Räumen betrachtet.

Definition 4.74 und Satz *Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine ONB (Orthonormalbasis) von $\mathcal{H}$ und $T\geq 0$. Die Spur ist definiert als*

$$\mathrm{Tr}(T) \;=\; \sum_{i\in I}\langle x_i|Tx_i\rangle \;\in\; [0,\infty]\ .$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der ONB und es gilt:

(i) $\mathrm{Tr}(T+\lambda S)=\mathrm{Tr}(T)+\lambda\mathrm{Tr}(S)$ *für* $\lambda\geq 0$ *und* $S\geq 0$.

(ii) *Für alle $S\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, nicht notwendigerweise positiv, gilt*

$$\mathrm{Tr}(S^*S) \;=\; \mathrm{Tr}(SS^*)\ .$$

(iii) *Wenn $T \geq 0$ und $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitär ist, dann gilt*

$$\operatorname{Tr}(UTU^*) \;=\; \operatorname{Tr}(T)\;.$$

(iv) *Wenn $0 \leq T \leq S$, so $\operatorname{Tr}(T) \leq \operatorname{Tr}(S)$.*

(v) *Für $T \geq 0$ gilt $\|T\| \leq \operatorname{Tr}(T)$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir (ii) für jede ONB:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(S^*S) \;&=\; \sum_i \langle x_i|S^*Sx_i\rangle \;=\; \sum_i\sum_j \langle x_i|S^*x_j\rangle\,\langle x_j|Sx_i\rangle \;=\; \sum_i\sum_j |\,\langle x_j|Sx_j\rangle\,|^2 \\
&=\; \sum_j\sum_i \langle x_j|Sx_i\rangle\,\langle x_i|S^*x_j\rangle \;=\; \sum_j \langle x_j|SS^*x_j\rangle \;=\; \operatorname{Tr}(SS^*)\;,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass Doppelsummen positiver Terme immer vertauschen. Nun zu (iii), ebenfalls für jede ONB. Da $T \geq 0$, folgt $T = \left(T^{1/2}\right)^2 = T^{1/2}\left(T^{1/2}\right)^*$. Also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(UTU^*) \;&=\; \operatorname{Tr}\Big(UT^{1/2}\left(UT^{1/2}\right)^*\Big) \;\overset{\text{(ii)}}{=}\; \operatorname{Tr}\Big(\left(UT^{1/2}\right)^*UT^{1/2}\Big) \\
&=\; \operatorname{Tr}\Big(\left(T^{1/2}\right)^*T^{1/2}\Big) \;=\; \operatorname{Tr}(T)\;.
\end{aligned}$$

Da jeder Basiswechsel zwischen ONBs einem unitären Isomorphismus entsprechen, ist die Spur Tr tatsächlich unabhängig von der Wahl der Basis.

(i) und (iv) sind offensichtlich und (v) folgt aus $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\langle x|Tx\rangle$. □

Satz 4.75 *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $\operatorname{Tr}(|T|^p) < \infty$ für ein $p > 0$. Dann $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Bemerkung 4.76 Hier ist $|T|^p$ durch Spektralkalkül aus dem positiven Operaor $|T|$ definiert. Für $p \in \mathbb{N}$ sind dies einfach die Potenzen, für $p \in \mathbb{Q}$ kann das Wurzellemma iterativ verwandt werden. Für irrationales p benötigt man dann tatsächlich den Spektralsatz, dessen Beweis später jedoch unabhängig erbracht wird.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle aus einer ONB $(x_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ aus, sodass

$$\sum_{i\in I\setminus J} \langle x_i||T|^p x_i\rangle \;<\; \epsilon\;,$$

was möglich ist, da $\operatorname{Tr}(|T|^p) < \infty$. Sei $P = \sum_{i\in J} |x_i\rangle\,\langle x_i|$ die zugehörige endlich-dimensionale Projektion. Unter Verwendung der C^*-Gleichung und Satz 4.74 folgt

$$\left\|(\mathbb{1}-P)|T|^{p/2}\right\|^2 \;=\; \|(\mathbb{1}-P)\;|T|^p(\mathbb{1}-P)\| \;\leq\; \operatorname{Tr}((\mathbb{1}-P)\;|T|^p(\mathbb{1}-P)) \;<\; \epsilon\;.$$

Somit ist $|T|^{p/2}$ in der Operatornorm beliebig gut durch die Operatoren $P|T|^{p/2}$ mit endlich dimensionalem Bild approximiert, also ist $|T|^{p/2}$ kompakt (denn die kompakten Operatoren sind abgeschlossen in der Operatornorm). Nach Satz 4.64 liegt also die Darstellung $|T|^{p/2} = \sum_{i\geq 1}\mu_j\,|y_j\rangle\,\langle y_j|$ vor, wobei $\mu_j \to 0$ für $j \to \infty$. Deswegen ist auch $|T| = \sum_{j\geq 1}(\mu_j)^{2/p}\,|y_j\rangle\,\langle y_j|$ kompakt. Letztendlich folgt aus der Polarzerlegung, dass $T = U|T|$ auch kompakt ist. □

Definition 4.77 *Für $p > 0$ sind die (Schatten) Spurklassen definiert durch*

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \;=\; \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,:\, \mathrm{Tr}(|T|^p) < \infty\} \;=\; \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, \mathrm{Tr}(|T|^p) < \infty\} \;.$$

Man setzt außerdem $\|T\|_p = \mathrm{Tr}(|T|^p)^{1/p}$.

Satz 4.78 *Es gilt*

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \;=\; \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,:\, \sum_{n\geq 1} \mu_n(T)^p < \infty \right\} \;,$$

wobei $\mu_n(T)$ die singulären Werte von T bezeichnet. Außerdem setzen wir $\|T\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} \mu_n(T)^p\right)^{1/p}$.

Beweis: Sei $|T|^p x_n = \mu_n(|T|^p)x_n$. Dann kann $(x_n)_{n\geq 1}$ durch Vektoren aus dem Kern von $|T|^p$ zu einer ONB vervollständigt werden. Also gilt

$$\mathrm{Tr}(|T|^p) \;=\; \sum_n \langle x_n | |T|^p x_n\rangle \;=\; \sum_n \mu_n(|T|^p) \;.$$

Außerdem folgt $\mu_n(|T|^p) = \mu_n(|T|)^p = \mu_n(T)^p$ aus dem Spektralkalkül für kompakte Operatoren. □

Satz 4.79 *Sei $p \geq 1$. Dann ist $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ ein *-Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und es gilt:*

(i) $\|T^*\|_p = \|T\|_p$

(ii) $\|\lambda T\|_p = |\lambda| \|T\|_p$

(iii) $\|ST\|_p \leq \|S\|\|T\|_p$ *und* $\|TS\|_p \leq \|S\|\|T\|_p$ *für* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(iv) $\|S + T\|_p \leq \|S\|_p + \|T\|_p$

Zudem ist $(\mathcal{L}^p(\mathcal{H}), \|.\|_p)$ ein Banachraum.

Beweis: Aus (i) – (iv) folgt, dass $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ ein *-Ideal ist.

(i) Nach Satz 4.73(i) gilt $\mu_n(T^*) = \mu_n(T)$. Nach Satz 4.78 folgt also $\|T^*\|_p = \|T\|_p$. (ii)+(iii) folgen ähnlich aus Satz 4.73(ii). Nun zu (iv). Zunächst betrachten wir den Fall $p = 1$. Wegen der Polarzerlegungen $S + T = W|S + T|,\; S = U|S|$ und $T = V|T|$ gilt

$$\begin{aligned} \|S + T\|_1 \;&=\; \mathrm{Tr}(W^*(S + T)) \;=\; \mathrm{Tr}(W^*U|S| + W^*V|T|) \\ &\leq\; \sum_i |\, \langle x_i|W^*U|S|x_i\rangle \,| + \sum_i |\, \langle x_i|W^*V|T|x_i\rangle \,| \;, \end{aligned}$$

wobei $(x_i)_{i\in I}$ eine ONB ist. Wir betrachten den ersten Term. Wegen $|S| = |S|^{1/2}|S|^{1/2}$ gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_i |\, \langle x_i \mid W^*U|S|x_i\rangle \,| \;&\leq\; \left(\sum_i \langle x_i|W^*U|S|U^*W|x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \langle x_i||S|x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &=\; \mathrm{Tr}(W^*U|S|U^*W)^{\frac{1}{2}}\; \mathrm{Tr}(|S|)^{\frac{1}{2}} \;. \end{aligned}$$

(Beweisalternative: Verwende kanonische Darstellung von $|S|$.) Nun wählen wir eine ONB $(x_i)_{i\in I}$, sodass $x_i \in \mathrm{Ker}(W)$ oder $x_i \in \mathrm{Ker}(W)^\perp$. Dann folgt, weil $U|S|U^* \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(W^*U|S|U^*W) &= \sum_i \langle x_i|W^*U|S|U^*W|x_i\rangle \;\leq\; \sum_i \langle x_i|U|S|U^*|x_i\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(U|S|U^*)\ . \end{aligned}$$

Nun wähle erneut eine (andere) Basis, um ähnlich zu zeigen, dass

$$\mathrm{Tr}(U|S|U^*) \;\leq\; \mathrm{Tr}(|S|) \;=\; \|S\|_1\ .$$

(Beweisalternative: anstelle der eindeutigen partiellen Isometrie in der Polarzerlegung, verwende jeweils eine beliebige unitäre Fortsetzung.) Letztendlich behandeln wir den zweiten Term genauso und dies erlaubt den Beweis von (iv) für den Fall $p = 1$ zu beenden.

Nun zur Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Sei $(T_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge bez. der Operatornorm $\|.\|_1$. Nach Satz 4.74 ist $(T_n)_{n\geq 1}$ dann auch Cauchy bez. $\|.\|$. Also ist $T = \lim_n T_n$ als Limes bez. der Operatornorm wohldefiniert. Zu zeigen ist, dass $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Für endliches L und $|T - T_n| = U^*(T - T_n)$ gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{L} \langle x_k|U^*(T-T_n)x_k\rangle = \lim_m \sum_{k=1}^{L} \langle x_k|U^*(T_m - T_n)\ x_k\rangle \\ &\leq\ \limsup_m \sum_{k\geq 1} |\,\langle x_k|U^*W_m|T_m - T_n|\ x_k\rangle\,| \qquad (W_m \text{ partielle Isometrie}) \\ &\leq\ \limsup_m \|T_m - T_n\|_1 \qquad (\text{gleiches Argument wie oben}) \end{aligned}$$

Da L beliebig ist, folgt

$$\|T - T_n\|_1 \;\leq\; \limsup_m \|T_m - T_n\|_1 < \infty\ ,$$

sodass nach (iv) folgt, dass $\|T\|_1 \leq \|T - T_n\|_1 + \|T_n\|_1 < \infty$ und $T_n \to T$ in $\|.\|_1$.

Für den Fall $p \geq 1$ benötigen wir eine Vorstufe der Hölder-von Neumann-Ungleichung:

Lemma 4.80 *Seien $S, T \geq 0$ kompakte Operatoren, sodass $S^p \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ und $T^q \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit $1 < q \leq 2$. Dann gilt*

$$\mathrm{Tr}(|ST|) \;\leq\; \|S\|_p \|T\|_q\ .$$

Insbesondere $|ST| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Beweis: *Behauptung 1:* Für $\|y\| = 1$ gilt $\langle y|S^2y\rangle^{\frac{p}{2}} \leq \langle y|S^p y\rangle$.

Begründung: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ Eigenbasis von S. Dann

$$\begin{aligned} \big\langle y|S^2y\big\rangle^{\frac{p}{2}} &= \left(\sum_n \big\langle y|S^2x_n\big\rangle \left\langle x_n|y\right\rangle\right)^{\frac{p}{2}} \\ &= \left(\sum_n \mu_n(S)^2\ |\left\langle x_n|y\right\rangle|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq\ \sum_n \mu_n(S)^p\ |\left\langle x_n|y\right\rangle|^2 \;=\; \langle y|S^p y\rangle\ , \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Jensen's Ungleichung folgt. Sei nun $T=\sum_k \mu_k(T)\,|y_k\rangle\langle y_k|$ die kanonische Darstellung von T.

Behauptung 2: $\langle y_k||ST|y_k\rangle \leq \mu_k(T)\,\langle y_k|S^p y_k\rangle^{\frac{1}{p}}$.

Begründung: Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\langle y_k||ST|y_k\rangle &\leq \langle y_k|y_k\rangle^{\frac{1}{2}}\,\big\langle y_k||ST|^2 y_k\big\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle y_k|T^*S^*ST|y_k\rangle^{\frac{1}{2}} \;=\; \mu_k(T)\,\big\langle y_k|S^2 y_k\big\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mu_k(T)\,\langle y_k|S^p|y_k\rangle^{\frac{1}{p}}\;,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Behauptung 1 folgt. Nun können wir unter Verwendung der Hölder-Ungleichung wie folgt schließen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(|ST|) &= \sum_k \langle y_k||ST|y_k\rangle \;\leq\; \sum_k \mu_k(T)\,\langle y_k|S^p y_k\rangle^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_k \mu_k(T)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_k \langle y_k|S^p y_k\rangle\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \|T\|_q\|S\|_p\;,\end{aligned}$$

was den Beweis von Lemma 4.80 beendet. □

Beweis von $\|S+T\|_p \leq \|S\|_p + \|T\|_p$ für $p>1$. Mit partiellen Isometrien W,U,V,R,R':

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(|S+T|^p) &= \mathrm{Tr}\left(W(S+T)|S+T|^{p-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(WU|S||S+T|^{p-1} + WV|T||S+T|^{p-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(WUR||S||S+T|^{p-1}| + WVR'||T||S+T|^{p-1}|\right)\;.\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die gleichen Argumente wie oben im Fall $p=1$ (explizite Summe, Cauchy-Schwarz, partielle Isometrien), um mit Lemma 4.80 zu zeigen

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(|S+T|^p) &\leq \mathrm{Tr}(||S||S+T|^{p-1}|) + \mathrm{Tr}(||T||S+T|^{p-1}|) \\ &\leq \||S|\|_p\||S+T|^{p-1}\|_q + \||T|\|_p\||S+T|^{p-1}\|_q \\ &= \|S\|_p\|S+T\|_p^{\frac{p}{q}} + \|T\|_p\|S+T\|_p^{\frac{p}{q}}\;,\end{aligned}$$

Letzteres, weil $(p-1)q=p$. Hieraus folgt das Gewünschte. Die Vollständigkeit beweist man dann analog. □

Nun folgt eine in Anwendungen nützliche Abschätzung, mit der Spurklasseneigenschaften überprüft werden können.

Satz 4.81 *Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Orthonormalbasis eines separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes $p\geq 1$*

$$\|T\|_p \;\leq\; \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m\geq 0}|\langle x_{m+n}|T|x_m\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\;.$$

Proof. (Nach Aizenman-Graf 1998) Wir zerlegen $T=\sum_{n\geq 0} T^{(n)}$ wobei

$$\langle x_m|T^{(n)}|x_k\rangle \;=\; \langle x_m|T|x_k\rangle\,\delta_{m-n,k}\;.$$

Dann folgt aus der Minkovski Ungleichung

$$\|T\|_p \;\leq\; \sum_{n\geq 0} \|T^{(n)}\|_p \;.$$

Somit benötigen wir also

$$\|T^{(n)}\|_p \;=\; \|(T^{(n)})^* T^{(n)}\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \;.$$

Doch $(T^{(n)})^* T^{(n)}$ ist ein positiver und zudem diagonaler Operator weil

$$\begin{aligned}
\langle x_m|(T^{(n)})^* T^{(n)}|x_k\rangle &= \sum_{l\geq 0} \overline{\langle x_l|T^{(n)}|x_m\rangle}\; \langle x_l|T^{(n)}|x_k\rangle \\
&= \sum_{l\geq 0} \overline{\langle x_l|T|x_m\rangle}\; \delta_{l-n,m}\; \langle x_l|T|x_k\rangle\; \delta_{l-n,k} \\
&= |\langle x_{m+n}|T|x_m\rangle|^2\; \delta_{m,k} \;.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|(T^{(n)})^* T^{(n)}\|_{\frac{p}{2}} \;=\; \left(\sum_{m\geq 0} |\langle x_{m+n}|T|x_m\rangle|^p \right)^{\frac{2}{p}} \;.$$

Nach Einsetzen folgt also die Ungleichung. □

Folgendes ist analog zum Fakt, dass die Konvolutionsalgebra $(L^1(G), *, \|.\|_1)$ über einer Gruppe G eine Banach-Algebra ist (*keine* C^*-Algebra).

Satz 4.82 *$(\mathcal{L}^1(\mathcal{H}),\ \cdot\ , \|.\|_1)$ ist eine Banach-Algebra.*

Beweis: Es bleibt lediglich zu zeigen, dass gilt

$$\|ST\|_1 \;\leq\; \|S\|_1 \|T\|_1 \;.$$

Aber dies folgt direkt aus Satz 4.79(iii), weil $\|S\| \leq \|S\|_1$. □

Satz 4.83 und Definition *Für eine ONB $(x_i)_{i\in I}$ und ein $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ist die Spur definiert durch*

$$\mathrm{Tr}(T) \;=\; \sum_{i\in I} \langle x_i|T x_i\rangle \;\;.$$

Die Summe ist absolut summierbar und unabhängig von der Wahl der ONB. Es gilt, für unitäres U und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

(i) $\mathrm{Tr} : \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ *linear*

(ii) $\mathrm{Tr}(T^*) = \overline{\mathrm{Tr}(T)}$

(iii) $\mathrm{Tr}(U^*TU) = \mathrm{Tr}(T)$

(iv) $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$

(v) $|\mathrm{Tr}(ST)| \leq \|S\|\|T\|_1$ *und* $|\mathrm{Tr}(TS)| \leq \|S\|\|T\|_1$

Beweis: Wegen der kanonischen Darstellung $T = \sum_n \mu_n(T)\, |y_n\rangle\, \langle z_n|$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_i |\langle x_i|Tx_i\rangle| &\leq \sum_{i,n} \mu_n(T)\; |\langle x_i|y_n\rangle||\langle x_i \mid z_n\rangle| \\
&\leq \left(\sum_{i,n} \mu_n(T)|\langle x_i|y_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,n} \mu_n(T)|\langle x_i|z_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_n \mu_n(T) \;=\; \|T\|_1 \;.
\end{aligned}$$

Wegen der absoluten Summierbarkeit ist der Beweis der Unabhängigkeit der ONB jetzt genauso wie im Fall von $T \geq 0$. Punkte (i) und (ii) sind klar, und (iii) ist ja auch gerade ein Basiswechsel. Zuletzt zu (iv). Zunächst zeigen wir dies für einen unitären Operator $S = U$:

$$\mathrm{Tr}(TU) \;=\; \sum_n \langle x_n|TUx_n\rangle \;=\; \sum_n \langle U^* y_n|Ty_n\rangle \;=\; \mathrm{Tr}(UT) \;,$$

wobei $y_n = Ux_n$ eine neue ONB ist. Dies ist ausreichend wegen des folgenden Resultates.

Lemma 4.84 *Jedes $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist Linearkombination von vier Unitären.*

Beweis: Zunächst zerlegen wir S in eine Linearkombinantion der selbstadjungierten Operatoren $S + S^1$ und $i(S - S^*)$:

$$S \;=\; \frac{1}{2}\,(S + S^*) \;+\; \frac{1}{2i}\; i(S - S^*) \;.$$

Die selbstadjungierten können weiter zu Operatoren mit Norm 1 normiert werden. Für $T = T^*$ mit $\|T\| \leq 1$ sind

$$T \pm i\sqrt{\mathbb{1} - T^2}$$

unitär und es gilt

$$T \;=\; \tfrac{1}{2}\,(T + i\sqrt{\mathbb{1} - T^2}) + \tfrac{1}{2}\,(T - i\sqrt{\mathbb{1} - T^2}) \;.$$

Dies beweist das Lemma. □

Beweis von Satz 4.83(v): Mit Hilfe der Polarzerlegung folgt

$$\mathrm{Tr}(ST) \;=\; \mathrm{Tr}(V|ST|) \;=\; \mathrm{Tr}\left(V|ST|^{\frac{1}{2}}|ST|^{\frac{1}{2}}\right) \;=\; \sum_i \langle x_i|V|ST|^{\frac{1}{2}}|ST|^{\frac{1}{2}}x_i\rangle \;,$$

sodass

$$|\mathrm{Tr}(ST)| \;\leq\; \left(\sum_i \langle x_i \mid V|ST|V^* x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \langle x_i||ST|x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \;.$$

Nun wählen wir die ONB, sodass entweder $x_i \in \mathrm{Ker}(V^*)$ oder $x_i \in \mathrm{Ker}(V^*)^\perp$. Dann ist $(V^* x_i)_{i\in I}$ eine ONB von $\mathrm{Ran}(V^*) = \mathrm{Ker}(V)^\perp = \mathrm{Ker}(|ST|)^\perp$. Somit folgt

$$|\mathrm{Tr}(ST)| \;\leq\; \mathrm{Tr}(|ST|)^{\frac{1}{2}}\; \mathrm{Tr}(|ST|)^{\frac{1}{2}} \;=\; \|ST\|_1 \;\leq\; \|S\|\; \mathrm{Tr}(|T|) \;,$$

Letzteres nach Satz 4.79(iii). Die zweite Ungleichung folgt nun aus

$$|\mathrm{Tr}(TS)| \;=\; |\mathrm{Tr}(S^* T^*)| \;\leq\; \|S^*\|\|T^*\|_1 \;=\; \|S\|\|T\|_1 \;,$$

was den Beweis beendet. □

Satz 4.85 *(Hölder-von Neumann) Sei* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *und* $S\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H}),\ T\in\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$*. Dann ist* $ST\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ *und*

$$|\mathrm{Tr}(ST)| \;\leq\; \|S\|_p\|T\|_q \;.$$

Beweis: Zunächst verwenden wir Polarzerlegungen wie folgt:

$$ST \;=\; V|S|T \;=\; (T^*|S|V)^* \;=\; (W|T^*||S|V)^* \;.$$

Nun ist $T\in\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$, also $T^*\in\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ und nach Lemma 4.80 gilt $|T^*||S|\in\mathcal{L}^1$. Wiederum wegen der Idealeigenschaft von $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ist also $ST\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Weiter (mit jeweils anderen Polarzerlegungen):

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Tr}(ST)| \;&=\; |\mathrm{Tr}(V|ST|)| \;\leq\; \mathrm{Tr}(|ST|) && \text{(nach Satz 4.83 und } \|V\|=1)\\
&=\; \mathrm{Tr}(|W|S|T|) \leq \mathrm{Tr}(||S|T|) && \text{(wegen } |W|S|T| \;\leq\; \|W\|\cdot||S|T| \leq ||S|T| \\
& && \text{und der Monotonie der Spur)}\\
&=\; \||S|T\|_1 \;=\; \|T^*|S|\|_1 && \text{(nach Satz 4.79)}\\
&=\; \mathrm{Tr}(|U|T^*||S||) \leq \mathrm{Tr}\big(||T^*|\,|S||\big) && \text{(wie gerade)}\\
&\leq\; \||S|\|_p\||T^*|\|_q \;=\; \|S\|_p\|T\|_q && \text{(nach Lemma 4.80)}\;.
\end{aligned}$$

Somit ist der Beweis erbracht. □

Für $p=q=2$ erhält man also eine Cauchy-Schwarz Ungleichung. Zusammen mit der Vollständigkeit aus Satz 4.79 besagt dies, dass $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ Hilbert-Raum ist:

Definition 4.86 *Für* $S,T\in\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ *definiert man*

$$\langle S|T\rangle_2 \;=\; \mathrm{Tr}(S^*T) \;.$$

Dann heißt $(\mathcal{L}^2(\mathcal{H}),\langle\,.\,|\,.\rangle_2)$ *der Hilbert-Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren.*

Bemerkung 4.87 Insbesondere gilt

$$\mathrm{Tr}(S^*T) \;=\; \langle S|T\rangle_2 \;=\; \overline{\langle T|S\rangle_2} \;=\; \overline{\mathrm{Tr}(T^*S)} \;.$$

Außerdem gilt ebenfalls für $S,T\in\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$:

$$\mathrm{Tr}(ST) \;=\; \mathrm{Tr}(TS)$$

(einfach ausschreiben unter Verwendung absoluter Summierbarkeit, die aus der Cauchy-Schwarz-Unglei- chung folgt). Hierbei ist interessant, dass weder $T\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ noch $S\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Operatoren auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ heißen in der Physikliteratur oft "Superoperatoren".

Satz 4.88 $(\mathcal{K}(\mathcal{H})',\|.\|)=(\mathcal{L}^1(\mathcal{H}),\|.\|_1)$ *und die Dualität ist gegeben durch*

$$K\in\mathcal{K}(\mathcal{H}) \;\mapsto\; \varphi_T(K) \;=\; \mathrm{Tr}(TK)\;, \qquad T\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})\;.$$

Beweis: Offensichtlich ist φ_T linear und stetig nach Satz 4.83:

$$\|\varphi_T\| \;=\; \sup_K \frac{|\varphi_T(K)|}{\|K\|} \;\leq\; \sup_K \frac{\|T\|_1\|K\|}{\|K\|} \;=\; \|T\|_1 \;.$$

Andererseits, sei $\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{H})'$. Für $S \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ gilt dann

$$|\varphi(S)| \;\leq\; \|\varphi\|\|S\| \;\leq\; \|\varphi\|\|S\|_2 \,.$$

Somit ist φ eine stetige Linearform auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ mit

$$\varphi(S) \;=\; \langle T^*|S\rangle_2 \;=\; \mathrm{Tr}(TS) \,.$$

Für jede Projektion P in $\mathcal{H}$ von endlicher Dimension giltModul

$$|\mathrm{Tr}(P|T|)| \;=\; |\mathrm{Tr}(PU^*T)| \;=\; |\varphi(PU^*)| \;\leq\; \|PU^*\|\,\|\varphi\| \;=\|\varphi\| \,.$$

Da dies für alle P gilt, folgt

$$\|T\|_1 \;\leq\; \|\varphi\| \,.$$

Zudem ist die Zuordnung $T \leftrightarrow \varphi$ eine bijektive Isometrie. □

Übung: $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit gleicher Zuordnung. Außerdem gilt für $1 < p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Dualität $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})' = \mathcal{L}^q(\mathcal{H})$.

Ziel ist jetzt folgender tiefliegender Satz:

Satz 4.89 *(Spurformel, Lidskii 1959) Sei $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ mit Eigenwerten $\lambda_n(T)$ gezählt mit ihrer algebraischen Vielfachheit. Dann*

$$\mathrm{Tr}(T) \;=\; \sum_{n\geq 1} \lambda_n(T) \,.$$

Bemerkungen 4.90

1. Wenn T normal ist, dann folgt dies direkt aus dem Darstellungssatz 4.64

$$T \;=\; \sum_n \lambda_n(T)P(\lambda_n) \,,$$

indem man zur Berechnung der Spur eine ONB $(x_i)_{i\in I}$ verwendet mit Vektoren x_i, die entweder im Kern oder dem Bild von $P(\lambda_n)$ liegen.

2. Nach Satz 4.26, existiert zu jedem Eigenwert λ von T ein $m < \infty$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^n) \;&=\; \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^m) \,, \qquad \forall\, n \geq m \,, \\ \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^n) \;&\subsetneqq\; \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^m) \,, \qquad \forall\, n < m \,. \end{aligned}$$

Dann ist die algebraische Vielfachheit von λ gleich $\dim \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^m)$.

Es gibt Eigenvektoren und verallgemeinerte Eigenvektoren wie z.B.

$$(\lambda\mathbb{1} - T)^2 w \;=\; 0 \quad \text{aber} \quad (\lambda\mathbb{1} - T)w \neq 0 \,.$$

Dann

$$Tw \;=\; \lambda w + v \quad \text{mit} \quad Tv \;=\; \lambda v \,.$$

3. Das folgende Beispiel illustriert, dass die Spurformel ein tiefliegendes Ergebnis ist.

Sei T quasi-nilpotent, d.h. $\lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;=\; 0$. Dann ist der Spektralradius $r(T) \;=\; 0$, somit existieren keine Eigenwerte ungleich 0. *Falls* $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, ist dann nach der Spurformel $\mathrm{Tr}(T) = 0$, d.h. für alle ONB $(x_i)_{i\in I}$ ist $\sum_i \langle x_i|Tx_i\rangle = 0$. Dies ist beileibe nicht offensichtlich!

4. Es gibt zwei Beweisstrategien: (i) Jordan-Zerlegung und subtile Konvexitätsargumente
   (ii) Determinante und Hadamard'sche Produktformel (hier)

$$\det(\mathbb{1} + z\,T) \;=\; 1 + z\,\mathrm{Tr}(T) + \mathcal{O}(z^2) \;=\; \prod_{n\geq 1}(1 + z\,\lambda_n(T))\;.$$

   Dann ergibt formale Entwicklung der rechen Seite die Lidskii'sche Spurformel. Hierzu muss diese Formel sinnvoll definiert werden.

Satz 4.91 *(H. Weyl 1949) Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und seien $\lambda_n(T)$ die Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit, nummeriert, sodass*

$$|\lambda_1(T)| \;\geq\; |\lambda_2(T)| \;\geq\; \ldots \;\geq\; 0\;.$$

Außerdem seien $\mu_n(T)$ die singulären Werte von T mit $\mu_1(T) \geq \mu_2(T) \geq \ldots$ Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{n=1}^{N}|\lambda_n(T)| \;\leq\; \prod_{n=1}^{N}\mu_n(T)\;.$$

Beweis: Zu N sei P_N die Projektion auf den Spann der ersten N Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren, gewählt derart, dass $P_N\mathcal{H}$ invariant unter T ist. Zum Beispiel, wenn $\lambda = \lambda_N(T)$, verwende zuerst die Vektoren in $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T)$, dann die in $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{1} - T)^2)$ etc. Nun setzen wir

$$T_N \;=\; P_N T P_N \;:\; P_N\mathcal{H} \to P_N\mathcal{H}\;.$$

Dies ist ein endlich dimensionaler Operator. Wir betrachten nun seine Polarzerlegung in $P_N\mathcal{H}$:

$$T_N \;=\; U_N|T_N|\;.$$

Nun seien $\lambda_n(T) \neq 0$ für $n = 1, \ldots, N$ (ansonsten ist nichts zu beweisen). Dann ist T_N invertierbar. Also ist auch U_N invertierbar, d.h. unitär, somit $|\det(U_N)| = 1$ und also $|\det(T_N)| = \det(|T_N|)$, d.h.

$$\prod_{n=1}^{N}|\lambda_n(T)| \;=\; \prod_{n=1}^{N}\lambda_n(|T_N|)\;.$$

Nach Invarianz ist $P_N T P_N = T P_N$, also folgt $|TP_N| = |T_N|$ und somit

$$\lambda_n(|T_N|) \;=\; \mu_n(TP_N) \;\leq\; \mu_n(T)\|P_N\| \;=\; \mu_n(T)\;,$$

nach Satz 4.73. Wenn dies dann eingesetzt wird, folgt der Satz. □

Satz 4.92 *Für $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ gilt*

$$\sum_{n\geq 1}|\lambda_n(K)| \;\leq\; \sum_{n\geq 1}\mu_n(K) \;=\; \|T\|_1\;.$$

Beweis: Wegen der Monotonie des Logarithmus folgt aus der Weyl'schen Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{N}\log|\lambda_n(K)| \;\leq\; \sum_{n=1}^{N}\log\mu_n(K)$$

Die Aussage folgt nun aus folgendem allgemeinen Prinzip angewandt auf $\varphi(x) = e^x$. □

Lemma 4.93 *Seien $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots$ und $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots$ so, dass für alle N*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} b_n \;.$$

Dann gilt für jede konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(a_n) \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \varphi(b_n) \;.$$

Beweis: Die Menge der konvexen Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ bildet einen konvexen Kegel. Die Extremalpunkte dieses Kegels sind die Funktionen

$$f_r(x) \;=\; (x-r)\,\chi(x \geq r) \;, \qquad r \in \mathbb{R} \;.$$

Nach dem Satz von Krein-Milman existiert jede solche Funktion ein eindeutiges Mass m mit

$$\varphi(x) \;=\; \int m(dr)\; f_r(x) \;.$$

Da die Ungleichung in der Behauptung linear in φ ist, reicht es also, sie für $\varphi = f_r$ zu zeigen, für alle r. Letzteres ist aber im Wesentlichen gerade die Voraussetzung:

$$\sum_{n=1}^{N} f_r(a_n) \;=\; \sum_{n=1}^{N} (a_n - r)\,\chi(a_n \geq r) \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} (b_n - r)\,\chi(a_n \geq r) \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} f_r(b_n) \;,$$

wobei in der ersten Ungleichung die Monotonie der a_n verwandt wurde und im letzten Term für Term abgeschätzt wird (je nach Vorzeichen von $b_r - r$). □

Bemerkung 4.94 Ein alternativer Beweis kann in dem Buch von Bhattia Matrix Analysis"gefunden werden. Eine Variation des obigen Beweises zeigt, dass außerdem gilt für $1 \leq p < \infty$

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n(T)|^p \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \mu_n(T)^p \;.$$

◇

Für den Beweis des Satzes von Lidskii benötigen wir nun ein kurzes **Intermezzo** über Tensorprodukte und Fock-Räume. Seien $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ Hilbert-Räume. Wir fassen nun Punkte $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_n$ im mengentheoretischen Produkt auf als multilineare Formen $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n : \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ mittels der Definition

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n(y_1, \ldots, y_n) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \langle x_j | y_j \rangle_{\mathcal{H}_j} \;.$$

Dann betrachten wir den algebraischen Spann endlicher Linearkombinationen:

$$V_n \;=\; \mathrm{span}\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \;:\; x_j \in \mathcal{H}_j\} \;.$$

Dies ist eine Teilmenge aller multilinearen Abbildungen. Auf V_n definiert man jetzt eine Bilinearform durch

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n | y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \rangle_{V_n} \;=\; x_1 \otimes \ldots \otimes x_n(y_1, \ldots, y_n) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \langle x_j | y_j \rangle \;,$$

und die lineare Fortsetzung auf den Spann.

Lemma 4.95 *$(V_n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{V_n})$ ist ein Prä-Hilbert-Raum, d.h. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{V_n}$ ist wohldefiniert (unabhängig von der Wahl der Darstellung als Linearkombination) und positiv.*

Beweis: Dies ist eine Übung. □

Definition 4.96 *Das Hilbert-Raum Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$ ist definiert als der Abschluss von V_n bez. $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_{V_n}$.*

Lemma 4.97 *Sei $\left(x_m^{(j)}\right)_m$ eine ONB von $\mathcal{H}_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $\left(x_{m_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_{m_n}^{(n)}\right)_{m_1,\ldots,m_n}$ eine ONB von $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$.*

Beweis: Dies ist eine weitere Übung. □

Bemerkung 4.98 Es gilt $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \cong \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ mit einer Hilbert-Raum-Isomorphie. ◇

Definition 4.99 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum.*

(i) *Sein voller Fock-Raum ist $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}^{\otimes^n} = \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}$, wobei im n-ten Summanden n Faktoren vorliegen. Oft wird auch für $n = 0$ der Spann des Grundzustands $\mathcal{H}^{\otimes^0} \cong \mathbb{C}$ zu $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ als Summand hinzugefügt wird.*

(ii) *Die symmetrischen und antisymmetrischen Projektionen (bosonisch und fermionisch)*

$$\Pi_\pm : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ \to \ \mathcal{F}(\mathcal{H})$$

sind definiert durch

$$\begin{aligned} \Pi_+(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \ , \\ \Pi_-(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \ , \end{aligned}$$

und lineare stetige Fortsetzung auf jedes $\mathcal{H}^{\otimes^n}$ und die Summe.

Übung: *Zeige $(\Pi_\pm)^2 = \Pi_\pm = \Pi_\pm^*$ unter Verwendung von $|S_n| = n!$*
Tipp: *Betrachte für eine Permutation Π_σ das Produkt $S_n \Pi_\sigma = S_n$*

(iii) *Der symmetrische und antisymmetrische Fock-Raum (bzw. Bose-Fock-Raum und Fermi-Fock-Raum) sind*

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \ = \ \Pi_+ \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ , \qquad \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) \ = \ \Pi_- \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ .$$

(iv) *Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ein Einteilchenoperator). Seine zwei Quantisierungen*

$$d\Gamma(T) \ = \ \bigoplus_{n\geq 1} d\Gamma^n(T) : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ ,$$

und

$$\Gamma(T) \ = \ \bigoplus_{n\geq 1} \Gamma^n(T) : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ ,$$

sind definiert durch:

$$d\Gamma^n(T)x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes Tx_j \otimes \ldots \otimes x_n \;,$$

$$\Gamma^n(T)x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \;=\; Tx_1 \otimes \ldots \otimes Tx_n \;,$$

und lineare stetige Fortsetzung. Zudem setzt man dann

$$d\Gamma_\pm(T) \;=\; \Pi_\pm d\Gamma(T) : \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$$

$$\Gamma_\pm(T) \;=\; \Pi_\pm \Gamma(T) : \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$$

Bemerkungen 4.100 1. In der Quantenmechanik wird $d\Gamma$ für Observablen verwandt, und Γ für die Zeitenwicklung und Symmetrien. Es gilt der Zusammenhang

$$\Gamma\left(e^{iHt}\right) \;=\; e^{id\Gamma(H)t} \;, \qquad H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;,$$

welcher als Übung verifiziert sei. Die gleiche Identität hält für $\Gamma_\pm$ und $d\Gamma_\pm$.

2. In $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ werden oft (wie für Differentialformen) die folgenden Notationen verwandt

$$\Pi_- x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \;=\; x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \;, \qquad \Pi_- \mathcal{H}^{\otimes^n} \;=\; \Lambda^n \mathcal{H} \;, \qquad \Gamma^n_-(T) \;=\; \Lambda^n(T) \;.$$

3. Es gilt $\Gamma(ST) = \Gamma(S)\Gamma(T)$ und $\Gamma_\pm(ST) = \Gamma_\pm(S)\Gamma_\pm(T)$.

4. Wenn $\dim(\mathcal{H}) = N < \infty$, dann ist $\Lambda^N\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ und $\Lambda^N(T) = \det(T)$ als Multiplikationsoperator.

5. Wenn $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit Eigenwerten $(\lambda_k(T))_{k\geq 1}$, dann ist $\Lambda^n_-(T) \in \mathcal{K}(\Lambda^n\mathcal{H})$ mit Eigenwerten $\lambda_{k_1}(T) \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_n}(T)$ mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$.

Lemma 4.101 *Wenn $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, dann $\Lambda^n T \in \mathcal{L}^1(\Lambda^n\mathcal{H})$ und $\|\Lambda^n T\|_1 \leq \frac{1}{n!}(\|T\|_1)^n$.*

Beweis: Zunächst ist

$$|\Lambda^n T| \;=\; ((T \wedge \ldots \wedge T)^*(T \wedge \ldots \wedge T))^{\frac{1}{2}} \;=\; |T| \wedge \ldots \wedge |T| \;=\; \Lambda^n |T| \;.$$

Somit sind die singulären Werte von $\Lambda^n T$ gegeben durch $\mu_{k_1}(T) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_n}(T)$, wobei $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Also folgt

$$\|\Lambda^n T\|_1 \;=\; \sum_{k_1 < \ldots < k_n} \mu_{k_1}(T) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_n}(T) \;\leq\; \frac{1}{n!}\left(\sum_k \mu_k(T)\right)^n \;=\; \frac{1}{n!}\,(\|T\|_1)^n \;,$$

und der Beweis ist beendet. □

Dieses Lemma ermöglicht folgende Definition.

Definition 4.102 *Für $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, setzen wir*

$$\det(\mathbb{1} + z\, T) \;=\; \sum_{n \geq 0} z^n \;\mathrm{Tr}(\Lambda^n T) \;.$$

Bemerkung 4.103 Die linke Seite ist ein formaler, suggestiver Ausdruck für die rechte Seite. Wenn $\dim(\mathcal{H}) = N < \infty$, bricht Reihe ab und dies ist eine Identität, wenn die gewöhnliche Definition für die Determinante verwendet wird. Dies zu verifizieren ist eine algebraische Rechnung, die als Übung durchgeführt werden sollte. Gleiches gilt, wenn $\dim(\mathrm{Ran}(T)) < \infty$.

Satz 4.104 *Für $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ist $z \in \mathbb{C} \mapsto \det(\mathbb{1} + z\ T)$ eine ganze Funktion, sodass Folgendes gilt:*

(i) $|\det(\mathbb{1} + z\ T)| \leq \exp(|z|\ \|T\|_1)$

(ii) *Die Funktion ist vom exponentiellen Typ, d.h. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ C_\epsilon < \infty$ mit*

$$|\det(\mathbb{1} + z\ T)| \ \leq\ C_\epsilon \exp(\epsilon|z|)\ .$$

Beweis: Wegen $|\mathrm{Tr}(\Lambda^n T)| \leq \|\Lambda^n T\|$ folgt die Ganzheit und (i) direkt aus Lemma 4.101. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}
|\det(\mathbb{1} + z\ T)| &\leq \sum_{n\geq 0} |z|^n \sum_{k_1 < \cdots < k_n} \mu_{k_1}(T) \cdot \ldots \cdot \mu_{k_n}(T) && (n = 0 \text{ Term ist } 1)\\
&\leq \prod_{k\geq 1} (1 + |z|\ \mu_k(T)) && (\text{Umordnung der Terme})\\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{K} (1 + |z|\ \mu_k(T))\right) \exp\left(|z| \sum_{k>K} \mu_k(T)\right) && (\text{da: } 1 + x \leq e^x)\\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{K} (1 + |z|\ \mu_k(T))\right) \exp\left(|z|\ \frac{\epsilon}{2}\right)\ \leq\ C_\epsilon \exp(|z|\ \epsilon)\ ,
\end{aligned}$$

für K, sodass $\sum_{k>K} \mu_k(T) \leq \frac{\epsilon}{2}$, und letztere Ungleichung, da jede Exponentialfunktion in $|z|$ jedes Polynom in $|z|$ beschränkt, d.h.

$$\prod_{k=1}^{K} (1 + |z|\ \mu_k(T))\ e^{-\frac{\epsilon}{2}|z|}\ \leq\ C_\epsilon\ .$$

Dies zeigt (ii). □

Satz 4.105 *Die Abbildung $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \mapsto \det(\mathbb{1} + T) \in \mathbb{C}$ ist Lipshitz stetig. Explizit:*

$$|\det(1 + T) - \det(1 + S)|\ \leq\ (\|T - S\|_1^2 + \|T - S\|_1) \exp(\|T\|_1 + \|S\|_1 + 1)\ .$$

Beweis: Wir setzen $F(T) = \det(\mathbb{1} + T)$ und

$$g(z)\ =\ F(\tfrac{1}{2}(T + S) + z(T - S))\ .$$

Wie im Satz 4.104 kann jetzt gezeigt werden, dass $g(z)$ ganz ist. Nun

$$\begin{aligned}
|F(T) - F(S)| &= \left|g\left(\tfrac{1}{2}\right) - g\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right|\\
&\leq \sup_{-\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2}} |g'(t)| && (\text{Mittelwertsatz})\\
&\leq \frac{R + \frac{1}{2}}{R^2} \sup_{|z|\leq R+\frac{1}{2}} |g(z)|\ ,
\end{aligned}$$

Letzteres wegen der Cauchy-Formel:

$$g^{(n)}(z) \;=\; n! \oint_{\Gamma_R} \frac{d\xi}{2\pi i}\, \frac{g(\xi)}{(z-\xi)^{n+1}}\;,$$

wobei Γ_R der positiv orientierte Weg auf den Kreis um 0 vom Radius $R+\frac{1}{2}$ ist. Nun wählen wir $R=\frac{1}{\|T-S\|_1}$, dann gilt nach Satz 4.104(i):

$$\begin{aligned} |F(T)-F(S)| \;&\leq\; (\|T-S\|_1+\|T-S\|_1^2) \sup_{|z|\leq R+\frac{1}{2}} \exp\left(\left\|\tfrac{1}{2}(T+S)+z(T-S)\right\|_1\right) \\ &\leq\; (\|T-S\|_1+\|T-S\|_1^2)\exp\left(\tfrac{1}{2}\|T+S\|_1+\left(\frac{1}{\|T-S\|_1}+\tfrac{1}{2}\right)\|T-S\|_1\right) \\ &\leq\; (\|T-S\|_1+\|T-S\|_1^2)\exp(\|T\|_1+\|S\|_1+1)\;, \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Satz 4.106 *Seien $T,S\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ auf einem separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

(i) $\det(\mathbb{1}+T+S+TS)=\det(\mathbb{1}+T)\det(\mathbb{1}+S)$

(ii) *Wenn $\mathbb{1}+T$ invertierbar ist, so folgt* $\det(\mathbb{1}+T)\neq 0$.

(iii) *Wenn λ Eigenwert von T mit algebraischer Multiplizität m ist, so hat $z\mapsto\det(\mathbb{1}+z\,T)$ eine Nullstelle von Ordnung m bei $-\frac{1}{\lambda}$.*

Beweis: (i) Die Operatoren mit endlich dimensionalem Bild sind dicht in $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, und die Determinante ist stetig nach Satz 4.105. Somit reicht es, die Operatoren mit endlich dimensionalem Bild zu überprüfen, für welche die Identität im Wesentlichen die entsprechende endlich dimensionale ist.

(ii) Setze $S=-T(\mathbb{1}+T)^{-1}$. Dann

$$\mathbb{1}+S+T+ST \;=\; \mathbb{1}-T(\mathbb{1}+T)^{-1}+T-T(\mathbb{1}-T)^{-1}T \;=\; \mathbb{1}\;.$$

Somit folgt nach (i)

$$1 \;=\; \det(\mathbb{1}) \;=\; \det(\mathbb{1}+S)\;\det(\mathbb{1}+T)\;,$$

d.h. $\det(\mathbb{1}+T)\neq 0$.

(iii) Sei $P=P(\lambda)=\oint_\Gamma\frac{d\xi}{2\pi i}\frac{1}{\xi-T}$, wobei Γ ein kleiner Kreis um den Eigenwert λ ist. Dann $\dim(P)=\dim(\mathrm{Ran}(P))=m$ und $[P,T]=0$. Weiter:

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1}+z\,T) \;&=\; \det(\mathbb{1}+zPT+z(\mathbb{1}-P)T+zPT(\mathbb{1}-P)T) \\ &\overset{\text{(i)}}{=}\; \det(\mathbb{1}+zPT)\det(\mathbb{1}+z(\mathbb{1}-P)T) \end{aligned}$$

Nun ist $\lambda\notin\sigma((\mathbb{1}-P)T)$ und nach dem spektralen Abbildungssatz gilt somit:

$$\mathbb{1}+\frac{1}{\lambda}(\mathbb{1}-P)T \quad \text{invertierbar} \quad \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \quad \det\left(\mathbb{1}+\frac{1}{\lambda}(\mathbb{1}-P)T\right) \;\neq\; 0.$$

Also verbleibt zu zeigen: $\det(\mathbb{1}+zPTP)$ hat eine Nullstelle von Ordnung m bei $-\frac{1}{\lambda}$. Für die endlich dimensionale Matrix $PTP:P\mathcal{H}\to P\mathcal{H}$ ist dies aber gerade ein Resultat der linearen Algebra, weil PTP eine direkte Summe von Jordan-Blöcken zum Eigenwert λ ist. □

Nun benötigen wir ein Ergebnis der Funktionentheorie, welches eine Vorstufe zum Weierstraß'schen Produktsatz ist. Ein Beweis kann in den meisten Büchern zur Funktionentheorie gefunden werden.

Satz: (Hadamard'sche Produktformel)
Sei f eine ganze Funktion mit Nullstellen $(z_n)_{n\geq 1}$ gezählt mit ihrer Multiplizität. Des Weiteren gelte

(i) $f(0) = 1$

(ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|} < \infty$

(iii) *f ist von exponentiellem Typ, d.h. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ C_\epsilon$ mit*

$$|f(z)| \;\leq\; C_\epsilon\, e^{\epsilon |z|} \;.$$

Dann hat f die Darstellung

$$f(z) \;= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \;=\; \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\right) \;.$$

Satz 4.107 *Sei $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Dann*

$$\det(\mathbb{1} + z\, T) \;=\; \prod_{n\geq 1} (1 + z\lambda_n(T)) \;.$$

Bemerkung 4.108 Wegen der Definition

$$\det(\mathbb{1} + z\, T) \;=\; 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \mathrm{Tr}(\Lambda^n T)$$

folgt Lidskii's Theorem direkt aus dem linearen Koeffizienten in z in Satz 4.107. Außerdem ergibt der Koeffizientenvergleich von z^n Lidskii's Theorem für $\Lambda^n T$. ◇

Beweis von Satz 4.107: Nach Satz 4.104 (iii) ist $f(z) = \det(\mathbb{1} + zT)$ von exponentiellem Typ. Nach Satz 4.106 (iii) hat $f(z)$ Nullstellen bei $z_n = \frac{-1}{\lambda_n(T)}$ von Ordnung gleich der algebraischen Vielfachheit von $\lambda_n(T)$. Nach Satz 4.106 (ii) gibt es keine weiteres Nullstellen. Zusammen mit Satz 4.92 folgt also

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|} \;=\; \sum_{n\geq 1} |\lambda_n(T)| \;\leq\; \sum_{n\geq 1} \mu_n(T) \;=\; \|T\|_1 \;.$$

Somit folgt das Ergebnis aus der Hadamard'schen Produktformel. □

Das folgende für Rechnungen oft hilfreiche Ergebnis ist eine Anwendung des Satzes von Lidskii.

Satz 4.109 *Seien $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ so dass $TS \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ und $ST \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Dann gilt*

$$\mathrm{Tr}(TS) \;=\; \mathrm{Tr}(ST) \;.$$

Beweis: Die Operatoren TS und ST haben die gleiche nicht-verschwindenden Eigenwerte $\lambda_n(TS) = \lambda_n(ST)$, inklusive der Multiplizitäten (dies zu zeigen ist eine Übung). Deswegen folgt die Aussage aus dem Satz von Lidskii. □

Zum Abschluss dieses Paragraphen sei nun die Dixmier-Spur (1966) vorgestellt. Dieses lineare Funktional ist wie die gewöhnliche Spur zyklisch und unitär invariant, aber die Dixmier-Spur jeden Operators in $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ verschwindet. Die Dixmier-Spur dient vielmehr dem Extrahieren von logarithmischen Divergenzen, wie sie oft in Geometrie und Quantenfeldtheorie vorkommen. Wir betrachten also Operatoren $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit der Eigenschaft

$$\Lambda_N(T) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \mu_n(T) \sim \log(N) \;, \qquad \text{für } N \to \infty \;.$$

Dann setzen wir

$$\Gamma_N(T) \;=\; \frac{1}{\log N}\, \Lambda_N(T) \;, \qquad \|T\|_{1,+} \;=\; \limsup_N \Gamma_N(T) \;.$$

Satz 4.110 *Die Menge*

$$\mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H}) \;=\; \{T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,:\, T_j \geq 0,\; \|T_j\|_{1+} < \infty\}$$

ist ein beidseitiges Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, genannt Macaev-Ideal.

Beweis: Seien $T, S \geq 0$ mit $\|T\|_{1+} < \infty$, $\|S\|_{1,+} < \infty$. Dann impliziert die Hersch-Ungleichung $\Lambda_N(S+T) \leq \Lambda_N(S) + \Lambda_N(T)$, dass $\|S+T\|_{1,+} \leq \|S\|_{1,+} + \|T\|_{1,+}$. Alles andere wird genau wie beim Nachweis der *-Ideal-Eigenschaft von $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ gezeigt. □

Bemerkung 4.111 Es gilt $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^{1+\epsilon}(\mathcal{H})$ für alle $\epsilon > 0$.

Nun ist das Ziel die Extraktion des logarithmischen Pols als Definiton der Dixmier-Spur τ. Gerne würde man

$$\tau(T) \;=\; \lim_N \; \Gamma_N(T) \;, \qquad T \geq 0 \;,$$

setzen. Wegen der unitären Invarianz der singulären Werte folgt dann direkt die unitäre Invarianz von T. Aber es gibt folgende Probleme mit dieser Formel:

1. Die Existenz des Limes ist im Allgemeinen nicht gegeben.

2. Die Linearität $\tau(S+T) = \tau(S) + \tau(T)$ ist nicht offensichtlich.

Falls der Limes existiert, so folgt die Linearität. In der Tat, aus der Hersch-Ungleichung $\Lambda_N(S) + \Lambda_N(T) \leq \Lambda_{2N}(S+T)$ folgt

$$\Gamma_N(S) + \Gamma_N(T) \;\leq\; \frac{\log(2N)}{\log(N)}\, \Gamma_{2N}(S+T) \;.$$

Da nun der Quotient der Logarithmen gegen 1 konvergiert, folgt $\tau(S) + \tau(T) \leq \tau(S+T)$. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Hersch-Ungleichung. Um die Problematik der Existenz des Limes zu umgehen, ging Dixmier wie folgt vor. Gegeben sei ein lineares Funktional $\omega : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mit

(i) $\omega(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \geq 0$, wenn $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \geq 0$ (Positivität)

(ii) $\lim_n \gamma_n = g$ impliziert $\omega(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = g$ (Limesauswertung)

(iii) $\omega(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots) = \omega(\gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3, \ldots)$ (Skaleninvarianz)

Aus dem Satz von Hahn-Banach angewandt auf das Cesaro-Mittel auf $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ können viele solche ω angegeben werden.

Definition 4.112 und Satz *Für jedes solche ω definiert*

$$\tau_\omega(T) \;=\; \omega(\Gamma_N(T)) \;, \qquad T \geq 0,\; T \in \mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H}) \;,$$

zusammen mit linearer Fortsetzung auf ganz $\mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$ eine Spur, d.h.

(i) *τ_ω ist linear.*

(ii) *$\tau_\omega(TS) = \tau_\omega(ST)$ für $T \in \mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$ und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Beweis: (i) Wegen Skaleninvarianz bleibt obiges Argument unter ω erhalten.
(ii) folgt aus unitärer Äquivalenz nach Zerlegung in vier Unitäre. □

4.5 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Holomorphes Spektralkalkül beliebigiger beschränkter Operatoren wurde schon im Kapitel 4.1 eingeführt und untersucht. Außerdem wurde im Kapitel 4.4 über kompakte Operatoren auf Hilberträumen auch das stetige Funktionalkalkül von kompakten, normalen Operatoren diskutiert (Bemerkung 4.65). Nun soll stetiges Funktionalkalkül für beliebige selbstadjungierte Operatoren eingeführt werden. Dies erlaubt dann auch beliebige normale Operatoren zu betrachten.

Satz 4.113 *(Stetiges Funktionalkalkül) Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal mit Spektrum $\sigma(T)$. Dann existiert eine eindeutige bestimmte Abbildung $\phi = \phi_T : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *ϕ ist ein *-Algebren-Homomorphismus, d.h.*

$$\begin{aligned} \phi(f + \lambda g) &= \phi(f) + \lambda\phi(g) \\ \phi(fg) &= \phi(f)\; \phi(g) \\ \phi(1) &= \mathbb{1} \\ \phi(\overline{f}) &= \phi(f)^* \;. \end{aligned}$$

(ii) *ϕ ist stetig, d.h. $\|\phi(f)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C\|f\|_\infty$ für ein $C < \infty$.*

(iii) *$\phi(\mathrm{id}) = T$, wobei $\mathrm{id}(E) = E$ für $E \in \mathbb{R}$ ist.*

Außerdem gilt:

(iv) *$\sigma(\phi(f)) = f(\sigma(T))$, was wieder spektraler Abbildungssatz genannt wird.*

(v) *$f \geq 0$ impliziert $\phi(f) \geq 0$.*

(vi) *$\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$*

(vii) *$[S, T] = [S, T^*] = 0$ impliziert $[S, \phi(f)] = 0$ für alle $f \in C(\sigma(T))$.*

Notationen: $\phi(f) = f(T)$ und $\phi(C(\sigma(T)) = C^*(T) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Beweis: *Existenz von f:* Wir nehmen zunächst an, dass $T = T^*$. Dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Wegen (iii) und (i) ist ϕ auf Polynomen festgelegt:

$$p(E) \;=\; \sum_{n=0}^{N} p_n E^n \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(p) \;=\; \sum_{n=0}^{N} p_n T^n \;=\; p(T)$$

Nach dem Satz von Weierstraß-Stone liegen die Polynome dicht in der Menge der reellwertigen stetigen Funktionen $C(\sigma(T), \mathbb{R}) \subset C([-\|T\|, \|T\|], \mathbb{R})$. Eine stetige isometrische Fortsetzung von den Polynomen zu ganz $C(\sigma(T), \mathbb{R})$ ist möglich, weil für den normalen Operator $\phi(p)$ der Satz 4.39 und danach der spektrale Abbildungssatz 4.20 angewandt werden kann:

$$\|\phi(p)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \;=\; \sup_{\lambda \in \sigma(p(T))} |\lambda| \;=\; \sup_{\lambda \in p(\sigma(T))} |\lambda| \;=\; \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p(\lambda)| \;=\; \|p\|_{C(\sigma(T))} \;.$$

Dies zeigt auch (vi). Die *Eindeutigkeit* von ϕ ist auch klar, weil ϕ ja auf der dichten Teilmenge der Polynome schon festgelegt ist. Nun kommen wir zu (iv). Zunächst zeigen wir die Inklusion "$\subset$". Sei $\lambda \notin f(\sigma(T))$. Setze $g(E) = \frac{1}{\lambda - f(E)}$. Dann ist $g \in C(\sigma(T))$ und $g(\lambda - f) = 1$. Somit ist $g(T) = \phi(g)$ Inverses zu $\lambda\mathbb{1} - f(T)$, sodass $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Nun beweisen wir die andere Inklusion "$\supset$". Sei $\lambda = f(E)$ für $E \in \sigma(T)$. Wir wählen Polynome p_n mit $p_n \to f$ in $(C(\sigma(T)), \| \,\|_\infty)$. Aus Satz 4.20 folgt $p_n(E) \in \sigma(p_n(T)) = \sigma(\phi(p_n))$. Außerdem gilt die Konvergenz $p_n(E)\mathbb{1} - p_n(T) \to \lambda\mathbb{1} - f(T)$ in $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|.\|)$. Aber $p_n(E)\mathbb{1} - p_n(T)$ ist nicht invertierbar und die Menge der nicht invertierbaren Operatoren ist abgeschlossen (da die invertierbaren offen sind wegen einem Neumann-Reihen-Argument, oder weil das Spektrum eine abgeschlossene Menge ist). Somit ist $\lambda\mathbb{1} - f(T)$ nicht invertierbar, d.h. $\lambda \in \sigma(f(T))$. Dies beweist (iv). Hieraus folgt auch (v) und (vii) ist auch offensichtlich.

Jetzt betrachten wir den Fall, in dem T lediglich normal ist. Dann kann T zerlegt werden in eine Linearkombination zweier *kommutierender* selbstadjungierter Operatoren

$$T \;=\; T_1 + iT_2 \;, \qquad T_1 = \frac{T + T^*}{2} \;, \quad T_2 = \frac{T - T^*}{2i} \;.$$

Da jetzt $\sigma(T) \subset \mathbb{M}$ und muß nun mit Polynomen und Funktionen $p, f : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ gearbeitet werden. Weierstrass' Satz besagt jetzt, dass die Polynome in zwei kommutierenden Parametern E und F dicht $C(\sigma(T)) \subset C(B_{\|T\|})$ liegen. Diese Polynome sind von der Gestalt $p(E_1, E_2) = \sum_{n,m=0}^{N} p_{n,m} E_1^n E_2^m$. Nun definiert man den normalen Operator

$$\phi(p) \;=\; \sum_{n,m=0}^{N} p_{n,m}\, T_1^n T_2^m \;.$$

In der Tat gilt $\phi(p)^* = \phi(\overline{p})$ und $\phi(\mathrm{id}) = \phi(E_1 + iE_2) = T_1 + iT_2 = T$. Nun kann wie oben argumentiert werden. □

Bemerkungen 4.114 1. $C^*(T) = \phi(C(\sigma(T)))$ ist eine kommutative C^*-Algebra. Nach einem Satz von Gelfand ist jede kommutative C^*-Algebra von dieser Form.

2. Selbst wenn T selbstadjungiert ist, enhält $C^*(T)$ auch normale Operatoren, die nicht selbstadjungiert sind. Die selbstadjungierten Elemente in $C^*(T)$ sind wie folgt charakterisiert:

$$f(T) = f(T)^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \;.$$

3. In Punkt (vii) reicht es aus $[S,T]=0$ zu fordern, weil Fugledes Theorem dann impliziert, dass auch $[S,T^*]=0$.

4. Satz 4.113 beinhaltet auch das Wurzellemma. Hierzu wählt man einfach $f(E)=\sqrt{E}$ für $E\geq 0$.

5. Man kann Satz 4.113 auch zu Normabschätzungen verwenden. Z.B. sei $z\in\rho(T)$. Dann gilt

$$\|(z\mathbb{1}-T)^{-1}\| \;=\; \sup_{E\in\sigma(T)} |(z-E)^{-1}| \;=\; \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))}\;.$$

$\diamond$

Satz 4.115 und Definition *Seien $T=T^*\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $x,y\in\mathcal{H}$. Nach dem Satz von Riesz-Markov existiert zu dem stetigen linearen Funktional*

$$f\in C(\sigma(T)) \;\mapsto\; \langle x|f(T)y\rangle\in\mathbb{C}$$

ein (kompakt getragenes) Maß $\mu_{x,y}$ auf $\mathbb{R}$, genannt Spektralmaß von T zu x,y, sodass

$$\int \mu_{x,y}(dE)f(E) \;=\; \langle x|f(T)y\rangle\;.$$

Falls $x=y$, ist das Funktional positiv und $\mu_{y,x}=\mu_x$ ist ein positives Maß. Falls $\|x\|=1$, ist μ_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$.

Bemerkungen 4.116 1. Es reicht die Version des Satzes von Riesz-Markov, die wir mit dem Satz von Hahn-Banach bewiesen haben.

2. Analog zu der Polarisationsidentität gilt folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}\int \mu_{x,y}(dE)f(E) \;&=\; \frac{1}{4}\,\big[\langle x+y|f(T)(x+y)\rangle-\langle x-y|f(T)(x-y)\rangle\\ &\qquad -\,i\langle x+iy|f(T)(x+iy)\rangle+i\,\langle x-iy|f(T)(x-iy)\rangle\big]\\ &=\; \frac{1}{4}\int\big(\mu_{x+y}(dE)-\mu_{x-y}(dE)-i\;\mu_{x+iy}(dE)+i\;\mu_{x-iy}(dE)\big)f(E)\;,\end{aligned}$$

sodass man nur die diagonalen positiven Spektralmaße μ_x benötigt:

$$\mu_{x,y} \;=\; \frac{1}{4}\,\big(\mu_{x+y}-\mu_{x-y}-i\mu_{x+iy}+i\mu_{x-iy}\big)\;.$$

Da beschränkte Borel-Funktionen immer integrierbar sind, d.h. bez. aller oben konstruierter Maße auf $C(\sigma(T))$, kann man jetzt für jede beschränke Borel-Funktion f einen Operator $f(T)$ im schwachen Sinne definieren:

$$\langle x|f(T)y\rangle \;=\; \int \mu_{x,y}(dE)\;f(E)$$

Satz 4.117 *(Messbares Funktionalkalkül) Sei $T=T^*\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(\mathcal{B}(\sigma(T)),\|.\|_\infty)$ die Banach *-Algebra der beschränkten Borel-Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(T)$. Dann existiert ein eindeutiges $\widehat{\phi}=\widehat{\phi}_T:\mathcal{B}(\sigma(T))\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\widehat{\phi}$ ist ein *-Algebren-Homomorphismus.*

(ii) $\widehat{\phi}$ *ist stetig und* $\|\widehat{\phi}(f)\| \leq \|f\|_\infty$.

(iii) $\widehat{\phi}(\mathrm{id}) = T$ *(bzw.* $\widehat{\phi}$ *ist eine Erweiterung von* ϕ *aus Satz 4.113)*

(iv) *Wenn* $f_n \to f$ *punktweise und* $\sup_n \|f_n\| \leq C < \infty$, *dann* $\widehat{\phi}(f_n) \to \widehat{\phi}(f)$ *im Sinne der schwachen Konvergenz, d.h.*

$$\lim_n \langle x|\widehat{\phi}(f_n)y\rangle \;=\; \langle x|\widehat{\phi}(f)y\rangle \;, \qquad \forall\; x, y \in \mathcal{H} \;.$$

Notation *Wiederum schreiben wir* $f(T) = \widehat{\phi}(f)$.

Bemerkungen 4.118 1. Man kann auch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ anstelle von $\mathcal{B}(\sigma(T))$ verwenden. Allerdings spielen die Werte auf $\rho(T)$ keine Rolle.

2. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ und sein Bild unter $\widehat{\phi}$ sind Prototypen von kommutativen W^*-Algebren, auch kommutative von-Neumann-Algebren genannt. Dies sind per Definition schwach abgeschlossene C^*-Algebren.

Zum Beweis von Satz 4.117 benötigen wir folgendes Ergebnis aus der Maßtheorie:

Satz 4.119 *Sei* $(\Omega, \mathcal{O})$ *ein kompakter metrischer Raum, z.B. eine abgeschlossene Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *wie das Spektrum eines beschränkten Operators. Sei* $(\mathcal{B}(\Omega), \|.\|_\infty)$ *die Banach* **-Algebra beschränkter Borel-Funktionen und* $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\Omega)$, *sodass*

(i) $C(\Omega) \subset \mathcal{F}$

(ii) *Für eine Folge* $(f_n)_{n\geq 1}$ *in* $\mathcal{F}$ *mit* $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ *und* $f_n(\omega) \to f(\omega)$ *für alle* $\omega \in \Omega$, *gilt* $f \in \mathcal{F}$.

Dann ist $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Beweisskizze: Beachte zunächst, dass $(\mathcal{B}(\Omega), \|.\|_\infty)$ tatsächlich eine Banach *-Algebra ist, da $\|\,.\,\|_\infty$-Limiten von messbaren Funktionen wieder messbar sind. Sei $\mathcal{F}$ die kleinste Menge mit (i) und (ii) gegeben durch den Schnitt aller solcher Systeme.

Behauptung 1: $\mathcal{F}$ ist ein Vektorraum.

Begründung: Sei $g \in C(\Omega)$. Setze $\mathcal{F}_g = \mathcal{F} + g$. Dann gilt $C(\Omega) \subset \mathcal{F}_g$. Außerdem erfüllt $\mathcal{F}_g$ auch (ii). Gemäß der Minimalität von $\mathcal{F}$ folgt $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_g$, und somit $\mathcal{F}_{-g} \subset \mathcal{F}$. Also

$$f - g \in \mathcal{F} \qquad \forall\; f \in \mathcal{F},\; g \in C(\Omega). \tag{4.5}$$

Jetzt sei $g \in \mathcal{F}$. Nach (4.5) ist $C(\Omega) \subset \mathcal{F}_g$, d.h. (i) gilt für $\mathcal{F}_g$. Außerdem erfüllt $\mathcal{F}_g$ (ii). Aus der Minimalität folgt somit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_g$ und $f - g \in \mathcal{F}$ für alle $f, g \in \mathcal{F}$.

Weiter sei bekannt, dass die Treppenfunktion $= \mathrm{span}\{\chi_A \,:\, A \subset \Omega \text{ Borel}\}$ dicht in $(\mathcal{B}(\Omega), \|.\|_\infty)$ liegen. Da $\mathcal{F}$ ein Vektorraum ist und nach (ii) abgeschlossen bez. $\|.\|_\infty$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\chi_A \in \mathcal{F}$ für alle Borel-Mengen $A \subset \Omega$.

Behauptung 2: Wenn A offen, dann $\chi_A \in \mathcal{F}$.

Begründung: Für eine Menge B sei $B_\epsilon = \{\omega \in \Omega \,:\, d(\omega, B) < \epsilon\}$. Die Mengen CA und $B_n = C((CA)_{\frac{1}{n}})$ sind abgeschlossen und disjunkt. Somit existiert eine stetige Urysohn-Funktionen $0 \leq$

$f_n \leq 1$ mit $f_n|_{B_n} = 1$ und $f_n|_{CA} = 0$. Außerdem $\lim_n f_n(\omega) = \chi_A(\omega)$, woraus schon $\chi_A \in \mathcal{F}$ folgt.

Behauptung 3: $\mathcal{D} = \{A \subset \Omega \text{ Borel} : \chi_A \in \mathcal{F}\}$ ist ein Dynkin-System, d.h.

a) $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$

b) $A_n \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\Longrightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{D}$

Begründung: a) folgt aus $\chi_{A\backslash B} = \chi_A - \chi_B$. b) folgt aus $\chi_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \sum_{n\geq 1} \chi_{A_n}$ (mit punktweiser Konvergenz, sodass (ii) angewendet werden kann).

Da $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$ ist, folgt aus den allgemeinen Resultaten zu Dynkin-Systemen, dass $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, d.h. $\chi_A \in \mathcal{F}$ für alle $A \in \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$. □

Beweis von Satz 4.117: Zunächst zur Existenz. Die Abbildung

$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \ \mapsto \ \int \mu_{x,y}(dE)\ f(E) \in \mathbb{C}$$

ist für festes $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine sesquilineare Form (antilinear in x, linear in y). Diese Form ist stetig, da

$$\begin{aligned} \left| \int \mu_{x,y}(dE)\ f(E) \right| \ &\leq \ \|f\|_\infty \left| \int \mu_{x,y}(dE) \right| \ = \ \|f\|_\infty |\langle x|y\rangle| \\ &\leq \ \|f\|_\infty \|x\|\|y\| \ . \end{aligned}$$

Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt somit die Existenz eines $z = z_x \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle z|y\rangle \ = \ \int \mu_{x,y}(dE)\ f(E) \ .$$

Zudem ist die Zuordnung $x \mapsto z_x$ linear und stetig (nach Obigem). Nun definieren wir den linearen Operator S durch

$$z \ = \ Sx \ .$$

Dann gilt $\|S\| \leq \|f\|_\infty$. Dann setzen wir $\widehat{\phi}(f) = S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, welches dann erfüllt

$$\langle x|\widehat{\phi}(f)y\rangle \ = \ \int \mu_{x,y}(dE)\ f(E) \ .$$

Zu zeigen sind noch die Eigenschaften (i) – (iv) und die Eindeutigkeit. (ii) und (iii) sind offensichtlich und (iv) folgt direkt aus dem Lebesgue'schen Satz für majorisierte Konvergenz. Nun zu (i). Die Linearität von $\widehat{\phi}$ ist klar, weil das Integral linear ist. Da $\widehat{\phi}$ eine Erweiterung von ϕ ist, gilt nach Satz 4.113:

$$\widehat{\phi}(f)\ \widehat{\phi}(g) \ = \ \widehat{\phi}(fg) \ , \qquad \forall\ f, g \in C(\sigma(T))$$

Sei nun g stetig, und setze

$$\mathcal{F} \ = \ \{f \in \mathcal{B}(\sigma(T)) : \widehat{\phi}(f)\widehat{\phi}(g) = \widehat{\phi}(fg)\} \ .$$

Es gilt dann $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$. Nun sei $f_n \in \mathcal{F},\ f_n \to f$ punktweise und $\sup_n \|f_n\| < \infty$. Nach (iv) und diesen Voraussetzungen folgt dann für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle x|\widehat{\phi}(f)\widehat{\phi}(g)y\rangle \ &= \ \lim_n \langle x|\widehat{\phi}(f_n)\widehat{\phi}(g)y\rangle \ = \ \lim_n \langle x|\widehat{\phi}(f_n g)y\rangle \\ &= \ \langle x|\widehat{\phi}(fg)y\rangle \ . \end{aligned}$$

Also gilt $\widehat{\phi}(f)\widehat{\phi}(g) = \widehat{\phi}(fg)$ und somit $f \in \mathcal{F}$. Nach Satz 4.119 folgt $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\sigma(T))$.

Nun sei $g \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ und

$$\widetilde{\mathcal{F}} \;=\; \{f \in \mathcal{B}(\sigma(T)) \,:\, \widehat{\phi}(f)\widehat{\phi}(g) = \widehat{\phi}(fg)\} \;.$$

Nach dem eben Bewiesenen gilt $C(\sigma(T)) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Nach ähnlicher Rechnung folgt wieder mit Satz 4.119, dass $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\sigma(T))$. Zusammenfassend ist also $\widehat{\phi}(f)\widehat{\phi}(g) = \widehat{\phi}(fg)$ für alle $f, g \in \mathcal{B}(\sigma(T))$. Ähnlich zeigt man $\widehat{\phi}(\overline{f}) = \widehat{\phi}(f)^*$ für alle $f \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.

Zuletzt zur Eindeutigkeit: Sei

$$\mathcal{F} \;=\; \{f \in \mathcal{B}(\sigma(T)) \,:\, f = \lim_n f_n \text{ punktweise}, f_n \in C(\sigma(T)), \sup \|f_n\| < \infty\} \;.$$

Dann $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ und nach (iv) ist $\widehat{\phi}$ auf $\mathcal{F}$ festgelegt. Aber nach Satz 4.119 ist $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\sigma(T))$, somit ist $\widehat{\phi}$ überall festgelegt. □

Bemerkung 4.120 Die schwache Operatorkonvergenz in (iv) kann zu starker Operatorkonvergenz verbessert werden, sodass also für alle $x \in \mathcal{H}$ mit Konvergenz in $\mathcal{H}$ gilt

$$\lim_n \widehat{\phi}(f_n)x \;=\; \widehat{\phi}(f)x \;.$$

Begründung: Zunächst gilt mit (iv):

$$\|\widehat{\phi}(f_n)x\|^2 \;=\; \langle x|\widehat{\phi}(f_n)^*\widehat{\phi}(f_n)x\rangle \;=\; \langle x|\widehat{\phi}(\overline{f}_n f_n)x\rangle \;\longrightarrow\; \langle x|\widehat{\phi}(\overline{f}f)x\rangle \;=\; \|\widehat{\phi}(f)x\|^2 \;.$$

Somit folgt wiederum mit (iv):

$$\begin{aligned}\|(\widehat{\phi}(f_n) - \widehat{\phi}(f))x\|^2 \;&=\; \|\widehat{\phi}(f_n)x\|^2 + \|\widehat{\phi}(f)x\|^2 - 2\,\Re e\langle\widehat{\phi}(f)x|\widehat{\phi}(f_n)x\rangle \\ &\longrightarrow\; 2\|\widehat{\phi}(f)x\|^2 - 2\,\Re e\langle\widehat{\phi}(f)x|\widehat{\phi}(f)x\rangle \;=\; 0 \;.\end{aligned}$$

◇

Mit Satz 4.117 kann man insbesondere folgenden Operator bilden:

Definition 4.121 *Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $A \subset \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Dann ist $P(A) = \chi_A(T)$ die spektrale Projektion von T auf A.*

Bemerkung 4.122 Tatsächlich folgt aus Satz 4.117, dass $P(A) = P(A)^2 = P(A)^*$, sodass $P(A)$ eine Projektion ist.

Satz 4.123 und Definition *Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} \text{ Borel Menge}\}$. Die Familie $(P(A))_{A\in\mathcal{B}}$ von Spektralprojektion von T erfüllt:*

(i) $P(\emptyset) = 0$ *und* $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$.

(ii) *Für paarweise disjunkte Borel-Mengen $(A_n)_{n\geq 1}$ mit $A = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n$ gilt*

$$P(A) \;=\; s\text{-}\lim_N \sum_{n=1}^{N} P(A_n) \;.$$

(iii) $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ *für* $A, B \in \mathcal{B}$.

Eine Famile $(P(A))_{A\in\mathcal{B}}$ *von Projektionen, die (i) – (iii) erfüllt (und zunächst nicht notwendigerweise von einem* $T = T^*$ *stammt), heißt ein projektionswertiges Maß.*

Beweis: Alles folgt direkt aus Satz 4.117 und der Bemerkung 4.120. □

Gegeben ein projektionswertiges Maß P, kann jetzt sein operatorwertiges Integral definiert werden:

$$T_f \;=\; \int P(dE)f(E)\;.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten aus dem Intgral einen Sinn zu machen, die dann letztendlich äquivalent sind.

Als schwaches Integral: Setze $\mu_{x,y}(A) = \langle x|P(A)y\rangle$ für $A \in \mathcal{B}$. Dann ist $\mu_{x,y}$ ein komplexes Maß, und man kann definieren:

$$\langle x|\int P(dE)\;f(E)|y\rangle \;=\; \int \mu_{x,y}(dE)\;f(E)\;, \tag{4.6}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite im Sinne der gewöhlichen Maßtheorie zu verstehen ist. Da dies für alle $x, y \in \mathcal{H}$ möglich ist und sesquilinear auf $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ ist, kann man wiederum mit dem Satz von Riesz (wie im Beweis von Satz 4.117) folgern, dass (4.6) einen eindeutigen Operator $\int P(dE)f(E)$ definiert.

Als normkonvergente Approximation durch Treppenfunktionen: Dies ist eine Wiederholung der Konstruktion der Maßtheorie. Für $f = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\chi_{A_n}$ mit A_n paarweise disjunkt, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, setzt man

$$\int P(dE)\;f(E) \;=\; \sum_{n=1}^{N}\alpha_n P(A_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\;.$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Darstellung von f, wie ein einfaches Argument ganz wie in der Maßtheorie zeigt. Nun ist aus der Maßtheorie bekannt, dass zu jeder beschränkten Borel-Funktion $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Treppenfunktionen existiert, sodass

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty \;=\; 0\;.$$

Jetzt weisen wir die Cauchy-Eigenschaft der zugehörigen Operatoren nach unter Verwendung der Tatsache, dass $f_n - f_m = \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k}$ wieder eine Treppenfunktion ist:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int P(dE)f_n(E) - \int P(dE)f_m(E)\right)x\right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\|\int P(dE)(f_n-f_m)(E)x\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k P(A_k)x\right\|^2 \\
&= \sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|^2\|P(A_k)x\|^2 \qquad \big(\text{wegen der Orthogonalität der } P(A_k)\big) \\
&\leq (\sup|\alpha_k|)^2\sum_{k=m+1}^{n}\|P(A_n)x\|^2 \\
&= \|f_n - f_m\|_\infty^2\left\|\sum_{k=m+1}^{n}P(A_k)x\right\|^2 \;\leq\; \|f_n - f_m\|_\infty^2\|x\|^2\;.
\end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ kann man nun als Operatorlimes definieren:

$$\int P(dE)f(E) \;=\; \lim_n \int P(dE)f_n(E) \;,$$

und dies ist unabhängig von der Wahl der f_n. □

Satz 4.124 *Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(P(A))_{A\in\mathcal{B}}$ das zugehörige projektionswertige Maß gegeben durch die Spektralprojektion. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$f(T) \;=\; \widehat{\phi}(f) \;=\; \int P(dE)f(E) \;.$$

Begründung: Die Konstruktionen von $\widehat{\phi}(f)$ und $\int P(dE)f(E)$ (als schwaches Integral) stimmen überein. □

Satz 4.125 *Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der beschränkten selbstadjungierten Operatoren und der Menge der projektionswertigen Maße mit kompaktem Träger. Die Zuordnung ist gegeben in Satz 4.123 bzw. $T = \int P(dE)E$.*

Begründung: Dies folgt direkt aus obigen Sätzen. □

Es gibt noch weitere Versionen des Spektralsatzes.

Definition 4.126 *$x \in \mathcal{H}$ ist ein zyklischer Vektor für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn $\mathrm{span}\{T^n x : n \geq 0\}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist.*

Bemerkung 4.127 Nicht jeder Operator hat einen zyklischen Vektor.

Satz 4.128 *Sei $x \in \mathcal{H}$ ein zyklischer Vektor von $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann existiert ein unitärer Operator $U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(T), \mu_x)$, sodass*

$$\begin{aligned} UTU^*g(E) \;&=\; E\, g(E) \;, \qquad && g \in L^2(\sigma(T), \mu_x) \;, \\ Uf(T)U^*g(E) \;&=\; f(E)g(E) \;, \qquad && f \in C(\sigma(T)) \;. \end{aligned}$$

Dies heißt die Multiplikations-Operator-Version des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren mit zyklischem Vektor.

Beweis: Für $g \in C(\sigma(T))$ definieren wir $U : C^*(T)x \subset \mathcal{H} \to L^2(\sigma(T), \mu_x)$

$$U\phi(g)x \;=\; g \;.$$

Diese Zuordnung ist wohl-definiert, wenn nämlich $h(T)x = g(T)x$, so gilt $h(T)T^n x = g(T)T^n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit nach der Zyklizität auch $h(T) = g(T)$, was wiederum $h = g$ impliziert. Zudem ist U isometrisch, weil

$$\|\phi(g)x\|^2 \;=\; \langle x|\phi(g)^*\phi(g)x\rangle \;=\; \int \mu_x(dE)|g(E)|^2 \;=\; \|g\|^2_{L^2(\sigma(T),\mu_x)} \;. \tag{4.7}$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{C^*(T)x}^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Somit kann U zu einer Isometrie auf ganz $\mathcal{H}$ stetig fortgesetzt werden. Da $C(\sigma(T))$ dicht in $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ liegt, folgt

$$\mathrm{Ran}(U) \;=\; \overline{C(\sigma(T))}^{L^2} \;=\; L^2(\sigma(T), \mu_x) \;.$$

Somit ist U unitär. Beachte hierbei, dass $g = \tilde{g}$ μ_x-fast sicher impliziert, dass folgt $U^{-1}g = \phi(g)x = U^{-1}\tilde{g} = \phi(\tilde{g})x$ nach (4.7).

Letztendlich für $f, g \in C(\sigma(T))$:

$$\begin{aligned}(Uf(T)U^{-1}g)(E) &= (U\phi(f)\phi(g)x)(E) \\ &= (U\phi(fg)x)(E) \\ &= f(E)g(E) \ .\end{aligned}$$

Durch stetige Fortsetzung gilt dies auch für $g \in L^2(\sigma(T), \mu_x)$. □

Um diesen Satz für selbstadjungierte Operatoren ohne zyklischen Vektor verwenden zu können, beweisen wir:

Lemma 4.129 *Sei $\mathcal{H}$ separabel und $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann existiert eine Zerlegung $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}_n$ in Hilbert-Räume $\mathcal{H}_n$ mit*

(i) $T\ \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$

(ii) $T|_{\mathcal{H}_n}$ *hat einen zyklischen Vektor* x_n.

Beweis: Die Menge $\mathcal{Z}$ der Zerlegungen mit (i) und (ii), aber ohne $\bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$, ist partiell geordnet durch Inklusion. Jede Kette (total geordnete Menge von Zerlegungen) hat obere Schranke gegeben durch Vereinigung (hier geht Separabilität ein). Nach dem Zorn'schen Lemma existiert also ein maximales Element und ein Widerspruchsbeweis zeigt $\bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$. □

Satz 4.130 *(Multiplikationsoperatorversion des Spektralsatzes)*
Sei $\mathcal{H}$ separabel und $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann existieren Maße $(\mu_n)_{n\geq 1}$ auf $\sigma(T)$ und ein unitärer Operator

$$U : \mathcal{H} \ \rightarrow \ \bigoplus_{n\geq 1} L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$$

mit

$$(Uf(T)U^*g)_n(x) = f(x)g_n(x) \ , \qquad g = (g_n)_{n\geq 1} \in \bigoplus_{n\geq 1} L^2(\mathbb{R}, \mu_n) \ .$$

Beweis: Dies folgt aus Satz 4.128 angewandt auf jede Faser von Lemma 4.129. □

Bemerkungen 4.131

1. Die μ_n (und x_n) sind nicht eindeutig! Je nach Operator und Fragestellung kann es jedoch eine "gute" Wahl geben.

2. Wenn man $M = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}$ und $\mu = \sum_{n\geq 1}, \mu_n$ schreibt unter der Annahme, dass $\mu_n(\mathbb{R}) \leq \frac{1}{2^n}$ (nach geeigneter Wahl von $\|x_n\|$), dann kann ein unitärer Operator

$$U : \mathcal{H} \ \rightarrow \ L^2(M, \mu)$$

definiert werden durch

$$(Uf(T)U^*g)(m) = f(F(m))g(m) \ ,$$

wobei F eine beschränkte Funktion ist, die T zugeordnet ist.

3. Grob gesprochen ist die minimale Anzahl der μ_n die Multiplizität von T. Gibt es einen zyklischen Vektor, dann ist T multiplizitätsfrei (man sagt auch, das Spektrum einfach).

4.6 Fredholm-Operatoren

Einführendes Beispiel: Zunächst sei an den Rangsatz für beliebiges $T \in \mathrm{Mat}(N \times M, \mathbb{M})$ erinnert:

$$\begin{aligned} M = &\ \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ran}(T)) \\ = &\ \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T^*)^\perp) \\ = &\ \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \big(N - \dim(\mathrm{Ker}(T^*))\big) \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun die Stabilität (Homotopieinvarianz) von

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*))) = M - N \ .$$

Dies soll im Folgenden verallgemeinert werden. $\diamond$

In diesem Paragraphen ist $\mathcal{H}$ immer separabel. Es sei auch daran erinnert, dass $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ die kompakten Operatoren bezeichnet.

Satz 4.132 und Definition *(Atkinson* 1951*) Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $TS - \mathbb{1}$, $ST - \mathbb{1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Ein solches S heißt Pseudo-Inverses.*

(ii) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$, $\dim(\mathrm{Ker}(T^*)) < \infty$ *und $T(\mathcal{H})$ ist abgeschlossen in $\mathcal{H}$.*

(iii) *Es existiert ein eindeutiges $S_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit*

$$\mathrm{Ker}(S_0) = \mathrm{Ker}(T^*) \ , \qquad \mathrm{Ker}(S_0^*) = \mathrm{Ker}(T) \ ,$$

sodass S_0T und TS_0 die Projektionen auf $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ *und* $\mathrm{Ker}(T^*)^\perp$ *sind und, mit der Notation* $\dim(A) = \dim(A\mathcal{H})$ *für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, außerdem gilt*

$$\dim(\mathbb{1} - S_0T) < \infty \ , \qquad \dim(\mathbb{1} - TS_0) < \infty \ .$$

(iv) *Das Bild $\pi(T)$ von T in der Calkin-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist invertierbar. Hierbei:*

$$0 \ \to \ \mathcal{K}(\mathcal{H}) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \overset{\pi}{\to} \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}) \to 0 \quad \textit{exakte Sequenz}$$

Wenn all dies erfüllt ist, heißt T Fredholm Operator. Sein Fredholm- oder Noether-Index (nach Fritz Noether) ist dann definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(T) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) \\ &= \dim(\mathbb{1} - S_0T) - \dim(\mathbb{1} - T_0S) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - S_0T) - \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - TS_0) \ , \end{aligned}$$

wobei S_0 das in (iii) ausgezeichnete Pseudo-Inverse ist.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ eine unendliche ONB von $\mathrm{Ker}(T)$ ist. Dann sind $(x_n)_{n\geq 1}$ Eigenvektoren des kompakten Operators $K = ST - \mathbb{1}$ zum Eigenwert 1. Dies ist im Widerspruch zum Satz von Riesz (Satz 4.27). Für $\mathrm{Ker}(T^*)$ argumentiere genauso unter Verwendung von $\tilde{K} = (TS - \mathbb{1})^*$ (was kompakt nach Satz 4.31) ist. Nun verbleibt noch zu zeigen, dass $T(\mathcal{H})$ abgeschlossen ist. Sei $K = ST - \mathbb{1}$. Wähle $L \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit *endlich* dimensionalem Bild, sodass

$$\|K - L\| \ \leq \ \tfrac{1}{2} \ .$$

Dann gilt für alle $x \in \mathrm{Ker}(L)$:

$$\begin{aligned} \|S\|\|Tx\| &\geq \|STx\| = \|(\mathbb{1}+K)x\| \\ &\geq \|x\| - \|Kx\| \geq \|x\| - \|(K-L)x\| - \|Lx\| \\ &\geq \tfrac{1}{2}\|x\| , \end{aligned}$$

somit gilt $\|x\| \leq 2\|S\|\|Tx\|$ für alle $x \in \mathrm{Ker}(L)$. Hieraus kann nun zunächst geschlossen werden, dass $T(\mathrm{Ker}L)$ abgeschlossen ist. In der Tat, sei $(Tx_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, wobei $x_n \in \mathrm{Ker}(L)$. Setze $y = \lim_n Tx_n$. Dann gilt

$$\|x_n - x_m\| \leq 2 \|S\|\|Tx_n - Tx_m\| .$$

Also ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge und es existiert ein Limespunkt $x = \lim x_n$. Da T stetig ist, folgt $y = Tx \in T(\mathrm{Ker}(L))$. Außerdem gilt nach Satz 4.3, dass

$$T(\mathrm{Ker}(L)^\perp) = T(\mathrm{Ran}(L^*)) = TL^*(\mathcal{H}) .$$

Weil L^* auch ein endlich dimensionales Bild hat, folgt dass $T(\mathrm{Ker}(L)^\perp)$ endlich dimensional und somit abgeschlossen ist. Also ist auch $T\mathcal{H} = T(\mathrm{Ker}L) + T((\mathrm{Ker}L)^\perp)$ abgeschlossen.

"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" Nach Voraussetzung ist $T\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Somit ist $T|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp} : \mathrm{Ker}(T)^\perp \to T\mathcal{H}$ eine bijektiv und beschränkt lineare Abbildung zwischen Hilbert-Räumen. Nach dem Satz 4.2 der inversen Abbildung existiert ein Inverses $S_0 : T\mathcal{H} \to \mathrm{Ker}(T)^\perp$, das stetig ist. Außerdem kann dieses S_0 auf ganz $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden durch $S_0 x = 0$ für $x \in (T\mathcal{H})^\perp$. Dann ist TS_0 gleich der Identität auf $T\mathcal{H}$ und gleich der Nullabbildung auf $T\mathcal{H}^\perp$. Da $\mathcal{H} = T\mathcal{H} \oplus T\mathcal{H}^\perp$ folgt

$$\begin{aligned} TS_0 &= \text{Projektion in } \mathcal{H} \text{ auf } T\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(T) = \overline{\mathrm{Ran}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp , \\ S_0 T &= \text{Projektion auf } \mathrm{Ker}(T)^\perp = T^*\mathcal{H} . \end{aligned}$$

Dies impliziert alle angegebenen Eigenschaften. Die Eindeutigkeit sei als Übung verifiziert.

"(iii) $\Longrightarrow$ (i)" ist offensichtlich.

"(i) $\Longrightarrow$ (iv)" Da $\pi(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, gilt

$$0 = \pi(T)\pi(S) - \pi(\mathbb{1}) = \pi(T)\pi(S) - \mathbb{1} ,$$

somit ist $\pi(T)$ invertierbar.

"(iv) $\Longrightarrow$ (i)" Sei $\widehat{T} = \pi(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit Inversem $\widehat{S}$, d.h.

$$\widehat{T}\widehat{S} - \mathbb{1} = 0 = \widehat{S}\widehat{T} - \mathbb{1} .$$

Da π surjektiv ist, existiert ein so genannter Lift $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$\pi(TS - \mathbb{1}) = 0 = \pi(ST - \mathbb{1}) .$$

Dies heißt aber gerade, dass $TS - \mathbb{1},\ ST - \mathbb{1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. □

Bemerkungen 4.133 1. Nach (i) oder (iv) ist das Produkt von zwei Fredholm-Operatoren wieder ein Fredholm-Operator.

2. Nach (ii) gilt: T Fredholm $\Longleftrightarrow$ T^* Fredholm und
$$\operatorname{Ind}(T) \;=\; -\operatorname{Ind}(T^*)\ .$$

3. Wenn T invertierbar ist, dann ist T Fredholm und $\operatorname{Ind}(T) = 0$.

4. Wenn T Fredholm und S invertierbar sind, dann ist TS Fredholm und
$$\operatorname{Ind}(TS) \;=\; \operatorname{Ind}(ST) \;=\; \operatorname{Ind}(T)\ .$$

5. Als Beispiel betrachten wir den Shift $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch
$$S\,|n\rangle \;=\; \begin{cases} |n-1\rangle\ , & n \geq 1\ ,\\ 0\ , & n = 0\ .\end{cases}$$
Dann ist S ein Fredholm-Operator. Es gilt $SS^* = \mathbb{1}$ und $S^*S = \mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$, sodass
$$\operatorname{Ind}(S) \;=\; \dim(\operatorname{Ker}(S)) \;=\; 1\ .$$
Zudem
$$\operatorname{Ind}(S^n) \;=\; n\ , \qquad n \geq 1\ .$$

Satz 4.134 $\dim(\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T)) < \infty$ *impliziert, dass* $\operatorname{Ran}(T)$ *abgeschlossen ist.*
Somit sind die Aussagen in Satz 4.132 auch äquivalent zu

(v) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) < \infty,\ \dim(\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T)) < \infty$.

Es ist bei Obigem zu beachten, dass im Allgemeinen $\operatorname{Ker}(T^*) \cong \mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T)$ *nicht* gilt. Insbesondere, wenn $\operatorname{Ran}(T)$ nicht abgeschlossen ist, ist es sogar möglich, dass $\dim(\operatorname{Ker}(T^*)) = 0$ und $\dim(\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T)) = \infty$. Die Grösse $\dim(\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T))$ heißt auch die Kodimension von T.

Beweis: Zunächst betrachten wir die Quotientenabbildung $\widetilde{T} : \mathcal{H}/\operatorname{Ker}(T) \cong \operatorname{Ker}(T)^\perp \to \mathcal{H}$ geben durch die Einschränkung $\widetilde{T} = T|_{\operatorname{Ker}(T)^\perp}$ (siehe Sätze 1.44). Diese ist stetig und injektiv und hat das gleiche Bild $\operatorname{Ran}(\widetilde{T}) = \operatorname{Ran}(T)$ und den gleichen Kokern $\operatorname{Ker}(\widetilde{T}^*) = \operatorname{Ker}(T^*)$. Wir ersetzen $\widetilde{T}$ durch T, für welches jetzt die Injektivität gegeben ist. Sei nun $[v_1 + \operatorname{Ran}(T)], \ldots, [v_N + \operatorname{Ran}(T)]$ eine Basis von $\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T)$, dargestellt durch Vektoren $v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{H}$. Dann definieren wir die lineare Abbildung $\widehat{T} : \mathbb{K}^N \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch
$$\widehat{T}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N, x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n v_n \;+\; Tx\ .$$
Dann ist $\widehat{T}$ bijektiv und stetig (siehe Satz 1.28), also ist nach dem Satz der inversen Abbildung auch $\widehat{T}^{-1}$ stetig. Somit ist $T(\mathcal{H}) = \widehat{T}((0,\mathcal{H})) = (\widehat{T}^{-1})^{-1}((0,\mathcal{H}))$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung.

Für die Äquivalenz verbleibt nur noch zu bemerken, dass wegen der Abgeschlossenheit von $\operatorname{Ran}(T)$ nun gilt wegen Theorem 2.12, dass
$$\mathcal{H}/\operatorname{Ran}(T) \;\cong\; \operatorname{Ran}(T)^\perp \;=\; \operatorname{Ker}(T^*)\ ,$$
und somit die Dimensionen gleich sind. □

Wir führen nun folgende Notationen ein:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \;, \qquad \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) = \{T \text{ Fredholm} \,:\, \mathrm{Ind}(T) = n\} \;, \qquad n \in \mathbb{Z} \;.$$

Die folgenden Sätze zeigen, dass dies Zusammenhangskomponenten der Menge der Fredholm-Operatoren sind.

Satz 4.135 *Seien T, T' Fredholm-Operatoren und $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

(i) $\mathrm{Ind}(T + K) = \mathrm{Ind}(T)$

(ii) *(Homotopieinvarianz) Wenn $t \mapsto T_t$ ein normstetiger Weg von Fredholm-Operatoren ist, so ist $\mathrm{Ind}(T_t)$ konstant.*

(iii) *(Homomorphismus) Es gilt*

$$\mathrm{Ind}(TT') \;=\; \mathrm{Ind}(T) + \mathrm{Ind}(T') \;.$$

(iv) *$\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ ist offen und zusammenhängend.*

Beweis: Es sei an Satz 4.26 erinnert: $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ impliziert $\mathrm{Ind}(\mathbb{1} + K) = 0$, weil

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathbb{1} + K)) \;=\; \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(\mathbb{1} + K)) \;=\; \dim(\mathrm{Ran}(\mathbb{1} + K)^{\perp}) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}((\mathbb{1} + K)^*)) \;.$$

Also $\mathbb{1} + K \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$.

Behauptung 1: Wenn $T \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$, dann existiert eine partielle Isometrie V von endlichem Rang, sodass $T + V$ invertierbar.

Begründung: Nach Voraussetzung gilt

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) \;=\; N \;<\; \infty \;.$$

Sei $(x_n)_{n=1,\ldots,N}$ eine ONB von $\mathrm{Ker}(T)$ und $(y_n)_{n=1,\ldots,N}$ eine ONB von $\mathrm{Ker}(T^*)$. Dann setzen wir

$$V \;=\; \sum_{n=1}^{N} |y_n\rangle\,\langle x_n| \;\;.$$

Somit gilt $V\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$, also

$$V^*V \;=\; \text{Projektion auf } \mathrm{Ker}(T) \;, \qquad VV^* \;=\; \text{Projektion auf } \mathrm{Ker}(T^*) \;.$$

Nun ist $T + V$ ist injektiv, weil $(T + V)x = 0$ impliziert

$$Tx \;=\; -Vx \in T\mathcal{H} \;\cap\; \mathrm{Ran}(V) \;=\; T\mathcal{H} \;\cap\; \mathrm{Ker}(T^*) \;=\; T\mathcal{H} \;\cap\; \mathrm{Ran}(T)^{\perp} \;=\; 0 \;,$$

sodass $Tx = 0$ und $V^*Vx = 0$ oder anders ausgedrückt $x \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(V^*V) = \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = 0$. Außerdem ist $T + V$ surjektiv, weil unter Verwendung von $V\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$ folgt

$$(T + V)(\mathcal{H}) \;=\; (T + V)\big(\mathrm{Ker}(T)^{\perp} \oplus \mathrm{Ker}(T)\big) \;=\; T(\mathcal{H}) \oplus \mathrm{Ker}(T^*) \;=\; T\mathcal{H} \oplus (T\mathcal{H})^{\perp} \;=\; \mathcal{H} \;.$$

Also ist $T + V$ bijektiv und beschränkt, nach dem Satz der inversen Abbildung also invertierbar (d.h. das Inverse ist beschränkt).

Behauptung 2: Wenn $T \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ und $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, dann ist $T + K \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$.

Begründung: Sei V wie in Behauptung 1. Dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(T+K) &= \mathrm{Ind}(T+V+K-V) \\
&= \mathrm{Ind}(\underbrace{(T+V)}_{\text{invertierbar}}(\mathbb{1}+\underbrace{(T+V)^{-1}(K-V)}_{\text{kompakt}})) \\
&= \mathrm{Ind}(\mathbb{1}+(T+V)^{-1}(K-V)) \qquad \text{(nach Bemerkung 4.)} \\
&= 0 \qquad \text{(nach Erinnerung zu Anfang des Beweises)}
\end{aligned}$$

Behauptung 3: $\mathrm{Ind}(T+K) = \mathrm{Ind}(T)$, was also (i) zeigt.

Begründung: Allgemein gilt für eine orthogonale Summe $T \oplus S \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}')$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'}(T \oplus S) &= \dim(\mathrm{Ker}(T \oplus S)) - \dim(\mathrm{Ker}((T \oplus S)^*)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(S)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) - \dim(\mathrm{Ker}(S^*)) \\
&= \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}(T) + \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}'}(S)\ .
\end{aligned}$$

Sei nun $-n = \mathrm{Ind}(T) < 0$ (sonst betrachte man T^*). Sei S der Shift auf $\ell^2(\mathbb{N})$, sodass $\mathrm{Ind}(S^n) = n$. Also gilt insbesondere für $T \oplus S^n$ auf $\mathcal{H} \oplus \ell^2(\mathbb{N})$:

$$\mathrm{Ind}(T \oplus S^n) \;=\; \mathrm{Ind}(T) + \mathrm{Ind}(S^n) \;=\; 0\ .$$

Also folgt mit Behauptung 2

$$(T+K) \oplus S^n \;=\; T \oplus S^n + K \oplus 0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H} \oplus \ell^2(\mathbb{N}))\ ,$$

da $K \oplus 0$ kompakt ist. Wieder nach Obigem folgt dann $\mathrm{Ind}(T+K) + n = 0$.

Behauptung 4: $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ ist offen bez. der Operatornorm.

Begründung: Sei $T \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ und $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|T - T'\| < \epsilon$. Nach Behauptung 1 ist dann $T + V$ invertierbar für eine geeignete partielle Isometrie von endlichem Rang. Also gilt

$$T' + V \;=\; T + V + T' - T \;=\; (T+V)(\mathbb{1} + (T+V)^{-1}(T'-T))\ .$$

Für ϵ ausreichend klein ist nun die Norm von $(T+V)^{-1}(T'-T)$ echt kleiner als 1, sodass die Neumann-Reihe für das Inverse von $\mathbb{1}+(T+V)^{-1}(T'-T)$ konvergiert und somit $T'+V$ invertierbar ist. Dies impliziert $\mathrm{Ind}(T') = 0$, d.h. $T' \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$.

Behauptung 5: $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ offen.

Begründung: Sei $n > 0$ mit $\mathrm{Ind}(T) = -n$ und wieder T' mit $\|T' - T\| < \epsilon$. Nun betrachtet man $T' \oplus S^n$ und wiederholt obiges Argument.

Aus Behauptung 5 folgt direkt (ii) und wir kommen nun zu (iii) und nehmen zunächst an, dass $\mathrm{Ind}(T) = 0$. Nach Behauptung existiert dann eine partielle Isometrie V von endlichem Rang, sodass $T + V$ invertierbar ist. Also folgt aus Bemerkung 4:

$$\mathrm{Ind}(T') \;=\; \mathrm{Ind}((T+V)T') \;=\; \mathrm{Ind}(TT' + VT') \;=\; \mathrm{Ind}(TT')\ ,$$

Letzteres nach (i), weil VT' kompakt ist. Jetzt sei $\mathrm{Ind}(T) = -n < 0$. Dann ist $\mathrm{Ind}(T \oplus S^n) = 0$ und nach dem gerade Verifizierten gilt

$$\mathrm{Ind}((T \oplus S^n)(T' \oplus \mathbb{1})) \;=\; \mathrm{Ind}(T' \oplus \mathbb{1}) = \mathrm{Ind}(T')\ .$$

Andererseits

$$\mathrm{Ind}(TT' \oplus S^n) \;=\; \mathrm{Ind}(TT') + \mathrm{Ind}(S^n) \;=\; \mathrm{Ind}(TT') + n \;=\; \mathrm{Ind}(TT') - \mathrm{Ind}(T) \;,$$

was den Beweis beendet.

Behauptung 6: $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$ zusammenhängend.

Begründung: Sei zunächst $n = 0$. Für $T \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ sei V wie oben die kompakte partielle Isometrie, so dass $T + V$ invertierbar ist. Dann ist $t \in [0, 1] \mapsto T + tV$ ein stetiger Weg in $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ von T zu einem invertierbaren Operator T_1. Nun betrachte dessen Polarzerlegung $T_1 = U|T_1|$ mit einem unitären Operator U und definiere den stetigen Weg $t \in [1, 2] \mapsto T_t = U|T_1|^{2-t}$. Dann ist $T_2 = U$. Zuletzt wähle einen Zweig des Logarithmus und setze $H = -i \ln(U)$ (Spektralkalkül). Dann ist $t \in [2, 3] \mapsto T_t = e^{i(3-t)H}$ ein Weg von U zur Identität. Also sind alle $T \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ in $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ homotop zu $\mathbf{1}$. Diese Tatsache wird auch vereinfachend auch mit $T \sim \mathbf{1}$ bezeichnet.
Für n beliebig, wähle einen Referenzpunkt T_0 mit $\mathrm{Ind}(T_0) = n$ (z.B. sei T_0 der n-fache Shift auf einer gewählten Orthonormalbasis). Dann ist $T_0^* T_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ und somit $T_0^* T_0 \sim \mathbf{1}$, und ebenso $TT_0^* \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ und somit $TT_0^* \sim \mathbf{1}$. Zusammen ergibt sich $T \sim TT_0^* T_0 \sim T_0$. □

In Satz 4.132 hatten wir ein spezielles Pseudo-Inverses S_0 zu einem Fredholm-Operator T gefunden, sodass

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - S_0 T) - \mathrm{Tr}(1 - TS_0) \;.$$

Da für dieses S_0 gilt, dass $\mathbb{1} - S_0 T$ und $\mathbb{1} - TS_0$ Projektionen sind, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}((\mathbb{1} - S_0 T)^n) - \mathrm{Tr}((\mathbb{1} - TS_0)^n) \;. \tag{4.8}$$

Oft ist dieses S_0 nicht bekannt oder man möchte andere S betrachten. Die Formel (4.8) macht aber Sinn, sobald $(\mathbb{1} - ST) \in \mathcal{L}^n(\mathcal{H})$, d.h. $\mathbb{1} - ST$ ausreichned summierbar ist.

Satz 4.136 *(Fedosov Formel oder Calderon Formel) Seien $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass*

$$\mathbb{1} - ST \in \mathcal{L}^n(\mathcal{H}) \;, \qquad \mathbb{1} - TS \in \mathcal{L}^n(\mathcal{H}) \;.$$

Dann ist T ein Fredholm-Operator und für alle $m \geq n$ gilt:

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}((\mathbb{1} - ST)^m) - \mathrm{Tr}((\mathbb{1} - TS)^m) \;.$$

Beweis: Die Fredholm-Eigenschaft ist klar. Sei zunächst S_0 das spezielle Pseudo-Inverse in Satz 4.132. Dann gilt

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - S_0 T) - \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - TS_0) \;=\; \mathrm{Tr}([T, S_0]) \;.$$

Nun für $\mathbb{1} - ST \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ und $\mathbb{1} - TS \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ gilt

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{1} - ST) - \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - TS) \;=\; \mathrm{Tr}([T, S]) \;=\; \mathrm{Tr}([T, S_0]) + \mathrm{Tr}([T, S - S_0]) \;.$$

Im letzten Schritt wurde verwandt, dass $\mathbb{1} - TS - (\mathbb{1} - TS_0) = (S_0 - S)T$ spurklasse ist, und ebenso $T(S_0 - S)$. Also gilt auch $\mathrm{Tr}([T, S - S_0]) = 0$. Kombiniert mit Obigem ist also die Formel für $n = 1$ bewiesen. Nun kommen wir zu dem Fall mit $n > 1$. Setze $K = \mathbb{1} - ST$ und $L = \mathbb{1} - TS$. Wir ersetzen S durch $S_n = \left(\sum_{j=0}^{n-1} K^j\right) S$. Dann gilt

$$S_n T \;=\; \left(\sum_{j=0}^{n-1} K^j\right) ST \;=\; \left(\sum_{j=0}^{n-1} K^j\right) (\mathbb{1} - K) \;=\; \mathbb{1} - K^n \;.$$

Zudem ist $K^n = (\mathbb{1} - ST)^n \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ nach Voraussetzung. Außerdem folgt mit $TK = LT$

$$TS_n \;=\; T\left(\sum_{j=0}^{n-1} K^j\right) S \;=\; \left(\sum_{j=0}^{n-1} L^j\right) TS \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n-1} L^j\right)(\mathbb{1} - L) \;=\; \mathbb{1} - L^n \;.$$

Da $L^n \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, folgt jetzt nach Obigem:

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}(K^n) - \mathrm{Tr}(L^n) \;=\; \mathrm{Tr}((1 - ST)^n) - \mathrm{Tr}((\mathbb{1} - TS)^n)\;,$$

und der Beweis ist beendet. □

4.7 Quantisierte Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{S}^1$

Dieser Paragraph kann als eine Anwendung der Fredholm-Operatoren angesehen werden. Es wird an einem einfachen Beispiel illustriert, wie Fredholm-Indizes in der nicht-kommutativen Differentialtopologie verwandt werden können, um topologische Invarianten zu charakterisieren. Das Beispiel betrifft Windungszahlen von stetigen Funktionen auf dem Kreis $\mathbb{S}^1 \cong [0, 2\pi)$. Als im Wesentlich bekannt vorausgesetzt sei folgendes analytische Ergebnis aus der Homotopie-Theorie.

Satz 4.137 *Sei $f \in C(\mathbb{S}^1)$ invertierbar, d.h. $f(\theta) \neq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{S}^1$. Dann existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ und $\phi \in C(\mathbb{S}^1)$, sodass*

$$f(\theta) \;=\; e^{in\theta + \phi(\theta)}\;.$$

Zudem, wenn γ_f der geschlossene Pfad $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ ist, so gilt

$$n \;=\; \oint_{\gamma_f} \frac{dz}{2\pi i z}.$$

Dann heißt $n = \mathrm{Wind}(f)$ die Windungszahl von f.

Begründung: Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $C^1(\mathbb{S}^1)$ dicht in $C(\mathbb{S}^1)$ und nach einem Approximationsargument reicht es, Funktionen dieser dichten Teilmenge zu betrachten. Für $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ gilt

$$n \;=\; \oint_{\gamma_f} \frac{dz}{2\pi i z} \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi i}\,\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\;.$$

Setze

$$\phi(\theta) \;=\; \int_0^{\theta} d\psi\,\frac{f'(\psi)}{f(\psi)} \;-\; in\theta\;, \qquad \phi'(\theta) \;=\; \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \;-\; in.$$

Diese Funktion ϕ is periodisch und differenzierbar, so dass $\int_0^{2\pi} d\theta\,\phi'(\theta) = 0$. Integration der letzten Gleichung führt dann zu der gewünschten Darstellung. □

Eines der Ziele der folgenden Rechnungen ist, die Windungszahl als Index eines Fredholm-Operators zu berechnen. Ein solcher Zusammenhang zwischen topologischem Index (wie der Windungszahl) und analytischen Index (dem Noether Index eines Fredholm Operators) heißt Indexsatz. Hierzu benötigen wir folgenden Operator.

Definition 4.138 *Die Hilbert-Transformation $F{:}L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ ist auf der dichten Teilmenge $C^1(\mathbb{S}^1)$ definiert mit Hilfe des Cauchy'schen Prinzipalwertintegrales:*

$$(F\phi)(\theta) \;=\; ⨍_{\mathbb{S}^1} \frac{d\varphi}{\pi}\,\frac{\phi(\varphi)}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}} \;=\; \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{S}^1 \setminus B_\epsilon(\theta)} \frac{d\varphi}{\pi}\,\frac{\phi(\varphi)}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}}\;,$$

Bemerkung 4.139 Dies ist der Prototyp eines singulären Integraloperators. Das Studium solcher Operatoren macht einen großen Teil der harmonischen Analysis aus. Ohne den Prinzipalwert macht das Integral keinen Sinn.

Satz 4.140 *Es gilt $F^2 = \mathbb{1}$ und $F = F^*$. Zudem ist $P = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + F)$ die so genannte Szego-Projektion auf den Hardy-Raum H^2 der Funktionen in $L^2(\mathbb{S}^1)$ mit verschwindenden negativen Fourier-Koeffizienten:*

$$H^2 \;=\; \left\{ \sum_{n\geq 0} f_n e^{in\theta} \in L^2(\mathbb{S}^1) \;:\; (f_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 \right\} .$$

Beweis: Es ist hinreichend zu zeigen, dass

$$F e^{in\theta} \;=\; \begin{cases} e^{in\theta}, & n \geq 0 , \\ -e^{in\theta}, & n < 0 , \end{cases}$$

weil $(e^{i\theta n})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis ist. Dies rechnen wir nach. Zunächst sei $n \geq 0$. Dann

$$\begin{aligned} (Fe^{in\varphi})(\theta) &= ⨍ \frac{d\varphi}{\pi} \, \frac{e^{i\varphi n}}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}} \;=\; e^{i\theta n} ⨍ \frac{d\varphi}{\pi} \, \frac{e^{i\varphi n}}{1 - e^{-i\varphi}} \\ &= e^{in\theta} \lim_{\epsilon\downarrow 0} ⨍ \frac{dz}{i\pi z} \, \frac{z^n}{1 - \frac{1}{z}} \;=\; e^{in\theta} \lim_{\epsilon\downarrow 0} ⨍ \frac{dz}{i\pi} \, \frac{z^n}{z-1} , \end{aligned}$$

wobei das Kurvenintegral in den letzten beiden Ausdrücken über $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ohne ein ϵ-Intervall um 1 läuft. Wenn wir diesen Weg durch ein Wegstück innerhalb der Einheitskreisscheibe schließen, so ist das dann geschlossene Wegintegral gleich Null, da $f(z) = \frac{z^n}{1-z}$ für $n > 0$ keine Pole in der Kreisscheibe hat. Somit ist das Kurvenintegral auch gleich dem Integral über das kleine Wegstücke γ_ϵ, welches wir wie folgt parametrisieren: $\gamma_\epsilon(s) = 1 + i\epsilon\, e^{is}$ mit $s \in [0, \pi] + \mathcal{O}(\epsilon)$ (genaugenommen, bis auf kleine Fehler). Hieraus folgt dann:

$$\begin{aligned} (Fe^{i\varphi n})(\theta) &= e^{in\theta} \lim_{\epsilon\downarrow 0} ⨍_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{i\pi} \, \frac{z^n}{z-1} \\ &= e^{in\theta} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_0^\pi \frac{i\epsilon i e^{is} ds}{i\pi} \, \frac{(1 + i\epsilon e^{is})^n}{i\epsilon e^{is}} \\ &= e^{in\theta} , \end{aligned}$$

Letzteres nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz. Für $n < 0$ hat z^n einen Pol. Also setzt man $z = e^{-i\varphi}$. Dann führt obige Rechnung direkt auf das Vorzeichen. Zuletzt zur Selbstadjungiertheit.

$$\langle \psi | F\widetilde{\psi} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} \;=\; \int \frac{d\theta}{2\pi} \, \overline{\psi(\theta)} ⨍ \frac{d\varphi}{\pi} \, \frac{1}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}} \, \widetilde{\psi}(\varphi) \;=\; \langle F\psi | \widetilde{\psi} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} .$$

Somit ist der Beweis vollständig. □

Jetzt fassen wir $f \in C(\mathbb{S}^1)$ auf als Multiplikationsoperator $M_f = f$ auf $L^2(\mathbb{S}^1)$:

$$(f\psi)(\theta) \;=\; f(\theta)\, \psi(\theta) , \qquad \psi \in L^2(\mathbb{S}^1) .$$

Somit fassen wir die C^*-Algebra $C(\mathbb{S}^1)$ auf als eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$. Des Weiteren wird $C(\mathbb{S}^1)$ zu einer graduierten Algebra $C(\mathbb{S}^1) \otimes \Lambda^1\mathbb{C}$ erweitert werden, durch Tensorprodukt mit der Grassmann-Algebra $\Lambda^1\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_1$, gegeben durch die Summe der 0-Formen $\mathbb{C}_0$ und der 1-Formen $\mathbb{C}_1$. Dann bezeichnet deg den Grad der Formen, wenn diese lediglich Bestandteile festen Grades haben. Etwas allgemeiner, für eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit wie den Torus $\mathbb{T}^d$ betrachtet man $C(\mathbb{T}^d) \otimes \Lambda\mathbb{C}^d$.

Definition 4.141 *Die quantisierte Ableitung d auf $\mathbb{S}^1$ ist der Operaor*

$$d : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1)) \otimes \Lambda^1\mathbb{C} \ \to \ \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1)) \otimes \Lambda^1\mathbb{C}$$

definiert durch den graduierten Kommutator mit der Hilbert-Transformation

$$df \ = \ [F, f]_G \ = \ (Ff - (-1)^{\deg(f)} fF) \wedge e \ ,$$

wobei e der einzige Generator in $\Lambda^1\mathbb{C}$ ist. Ein Zustand auf $C(\mathbb{S}^1) \otimes \Lambda^1\mathbb{C}$ wird definiert durch $\mathcal{T}(f) =$ $\mathrm{Tr}(i(f))$, wobei i die Auswertung auf dem höchsten Grad ist.

Lemma 4.142 *Es gilt:*

(i) *(Leibniz Regel) $d(fg) = (df)g + fdg$ für $f, g \in C(\mathbb{S}^1)$*

(ii) $d^2 = 0$

Beweis: (i) folgt aus

$$\begin{aligned} d(fg) \ &= \ (Ffg - fgF) \wedge e \\ &= \ (Ff - fF)g \wedge e + f(Fg - gF) \wedge e \ = \ (df)g + f(dg) \ , \end{aligned}$$

und (ii) aus $e \wedge e = 0$. □

Lemma 4.143 *Wenn $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$, so ist $i(df) \in \mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{S}^1))$ ein Spurklasse-Operator und $\mathcal{T}(df) = 0$.*

Beweis: Explizites Ausschreiben zeigt

$$(df\psi)(\theta) = \left(\fint_{\mathbb{S}^1} \frac{d\varphi}{\pi} \ \frac{f(\theta) - f(\varphi)}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}} \ \psi(\varphi) \right) \wedge e \ .$$

Da jetzt f stetig differenzierbar, folgt, dass df ein Integraloperator mit folgendem stetigen Integralkern ist:

$$k(\theta, \varphi) \ = \ \frac{1}{\pi} \ \frac{f(\theta) - f(\varphi)}{1 - e^{i(\theta-\varphi)}} \ ,$$

mit Diagonale

$$k(\theta, \theta) \ = \ \frac{1}{i\pi} \ f'(\theta) \ .$$

Somit ist df Spurklasse (Übung), und die Spur kann in der ONB $|n\rangle = e^{i\theta n}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(df) \ &= \ \sum_n \langle n | i(df) | n \rangle \\ &= \ \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \ e^{-in\theta} \ k(\theta, \varphi) \ e^{in\varphi} \\ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \ k(\theta, \varphi) \ \underbrace{\sum_n e^{in(\varphi-\theta)}}_{2\pi \ \delta(\varphi-\theta)} \\ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \ k(\theta, \theta) \ = \ \frac{1}{i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \ f'(\theta) \ = \ 0 \ , \end{aligned}$$

Letzteres, weil f periodisch ist. □

Satz 4.144 *Wenn $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ invertierbar ist, so gilt* $\mathrm{Wind}(f) = \frac{1}{2}\mathcal{T}(f^{-1}df)$.

Beweis: Hierbei ist f^{-1} ein Multiplikationsoperator vom Grad 0, sodass $f^{-1}df$ vom Grad 1 ist. Also zeigt die gleiche Rechnung wie oben, dass

$$\mathcal{T}(f^{-1}df) \;=\; \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\; f^{-1}(\theta)f'(\theta) \;=\; 2\;\mathrm{Wind}(f)\;,$$

wobei im letzten Schritt obige Formel für die Windungszahl verwandt wurde. □

Ein wesentlicher Vorteil der Berechnung der Windungszahl mit dem quantisierten Differentialkalkül ist der folgende: Der Ausdruck $\mathcal{T}(f^{-1}df)$ bleibt mathematisch sinnvoll, solange nur df Spurklasse ist. Hinreichend hierfür, aber nicht notwendig, ist nach Lemma 4.143 $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Folgender Satz besagt unter anderem, welche Regularität vonnöten ist. Ein Beweis kann hier nicht erbracht werden.

Satz Sei $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$.

(i) (Kronecker) df hat endlichen Rang $\iff f = \frac{P}{Q}$, wobei P, Q Polynome sind, sodass Q keine Nullstellen auf $\mathbb{S}^1$ hat.

(ii) (Fefferman-Sarason) df kompakt $\iff f$ VMO (vanishing mean oscillation)

$$\overset{\text{Def}}{\iff} \lim_{a\to 0} M_a(f) = 0\;, \quad \text{wobei} \quad M_a(f) \;=\; \sup_{|I|\leq a}\frac{1}{|I|}\int_I \left| f - \left|\int_I f\right|\right|\;.$$

(iii) (Peller) $df \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(L^2(\mathbb{S}^1)\otimes\Lambda^1\mathbb{C}) \iff f \in B_p^{1/p}$ Besov-Raum

$$\overset{\text{Def}}{\iff} \int dx \int dt\; \frac{1}{t^2}|f(x+t)-f(x)|^p \;<\; \infty\;.$$

Es ist auch möglich, die Funktionen zu charakterisieren, für die df im Macaev-Ideal $\mathcal{L}^{p+}$ liegen. Wir werden im Weiteren jetzt darauf hinarbeiten, die Windungszahl als Index eines adäquaten Fredholm-Operators darzustellen. Dieser Operator wird der im Folgenden defierte Toeplitz-Operator sein.

Definition 4.145 *Sei P die Szego-Projektion von $L^2(\mathbb{S}^1)$ auf dem Hardy-Raum H^2. Dann heißt*

$$T_f \;=\; PfP \;:\; H^2 \;\to\; H^2$$

der Toeplitz-Operator zu $f \in C(\mathbb{S}^1)$ und

$$H_f \;=\; Pf(1-P) \;:\; H_-^2 \;=\; (H^2)^\perp \;\cong\; H^2 \;\to\; H^2$$

der Hankel-Operator zu f.

Bemerkung 4.146 Der Multiplikationsoperator zu $f \in C(\mathbb{S}^1)$ auf $L^2(\mathbb{S}^1)$ wird in vier Teile zerlegt:

$$f \;=\; \begin{pmatrix} PfP & Pf(1-P) \\ (1-P)fP & (1-P)f(1-P) \end{pmatrix} \;:\; H^2\oplus H_-^2 \;\to\; H^2\oplus H_-^2\;.$$

Zwei der Einträge sind die oben definierten Operatoren. Wir betrachten T_f nach diskreter Fourier-transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{S}^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definiert durch

$$(\mathcal{F}\psi)(n) \;=\; \int_{\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}}\;\psi(\theta)\;e^{in\theta}\;.$$

Es gilt dann $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathbb{1} = \mathcal{F}\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}(H^2) = \ell^2(\mathbb{N})$ und $\mathcal{F}^* |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$. Also folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}T_f\mathcal{F}^* &= \mathcal{F}P\mathcal{F}^*\mathcal{F}f\mathcal{F}^*\mathcal{F}P\mathcal{F}^* \\ &= \sum_{n,m\geq 0} |n\rangle \langle n|\mathcal{F}f\mathcal{F}^*|m\rangle \langle m| \ . \end{aligned}$$

Außerdem sind die Matrixeinträge durch die Fourierkoeffizienten gegeben:

$$\langle n|\mathcal{F}f\mathcal{F}^*|m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-in\theta} f(\theta) e^{im\theta} = \hat{f}\,(m-n) \ .$$

Somit ist $\mathcal{F}T_f\mathcal{F}^*$ ein halbseitiger translationsinvarianter Operator mit von der Diagonale abfallenden Koeffizienten:

$$\mathcal{F}T_f\mathcal{F}^* = \begin{pmatrix} \hat{f}\,(0) & \hat{f}\,(-1) & \hat{f}\,(-2) & \dots \\ \hat{f}\,(1) & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hat{f}\,(2) & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \ .$$

Endlich dimensionale Approximationen hiervon heißen auch Toeplitz-Matrizen. Es ist übrigens nicht bekannt, wie der Abfall von $\hat{f}\,(n)$ für $f \in C(\mathbb{S}^1)$ charakterisiert werden kann.

Satz 4.147 *Wenn $f \in C(\mathbb{S}^1)$ invertierbar ist, so ist ein T_f ein Fredholm-Operator auf H^2.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $T_fT_{f^{-1}} - \mathbb{1}_{H^2} \in \mathcal{K}(H^2)$. Ähnlich gilt dann $T_{f^{-1}}T_f - \mathbb{1} \in \mathcal{K}(H^2)$, sodass $T_{f^{-1}}$ ein Pseudo-Inverses zu T_f ist. Zunächst berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} T_fT_{f^{-1}} - \mathbb{1}_{H^2} &= PfPf^{-1}P - P \\ &= Pff^{-1}P + P[f,P]f^{-1}P - P \\ &= P[f,P]f^{-1}P \ . \end{aligned}$$

Somit reicht es zu zeigen, dass $[f,P] \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{S}^1))$. Dies folgt aus dem oben zitierten Satz von Fefferman-Sarason, da

$$df = [F,f] = [2P-1,f] = 2[P,f] \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{S}^1)) \iff f \quad \text{VMO} \ ,$$

und dies ist nach der folgenden Behauptung ausreichend. Hier sei aber auch ein direkter Beweis geführt.

Behauptung: Es reicht, $[P,f] \in \mathcal{K}$ für einen dichten Teilraum $\mathcal{C} \subset C(\mathbb{S}^1)$ zu zeigen.

Begründung: Sei $\mathcal{C} \ni f_n \to f$ in $C(\mathbb{S}^1)$. Dies impliziert $[P,f_n] \to [P,f]$ in $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$, da P beschränkt. Da $[P,f_n] \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist, folgt, dass $[P,f]$ kompakt ist.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß können wir $\mathcal{C}$ als die Menge der trigonometrischen Polynome wählen. Da $f \mapsto [P,f]$ linear und beschränkt ist, reicht es somit zu zeigen, dass $[P,e_n] \in \mathcal{K}$ für $e_n = e^{in\theta}$. Nun ist $e_n = (e_1)^n$, sodass eine Induktion zeigt

$$[P,e_n] = [P,e_1^n] = \sum_{k=1}^{n} (e_1)^{k-1}[P,e_1](e_1)^{n-k} \ .$$

Also reicht es, $[P,e_1]\in\mathcal{K}$ zu zeigen. Aber auf $|m\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e_m$ gilt

$$\begin{aligned}[P,e_1]\,|m\rangle &= Pe_1\,|m\rangle - e_1P\,|m\rangle \;=\; P\,|m+1\rangle - e_1\,|m\rangle\,\chi_{m\geq 0}\\ &= \chi_{m+1\geq 0}\,|m+1\rangle - \chi_{m\geq 0}\,|m+1\rangle\ ,\end{aligned}$$

was bis auf für $m=-1$ verschwindet. Also folgt

$$[P,e_1] \;=\; |0\rangle\,\langle -1|\ ,$$

was ein Operator von Rang 1 ist, also insbesondere kompakt. □

Satz 4.148 (Noether-Gohberg-Krein) *Sei $f\in C(\mathbb{S}^1)$ invertierbar. Dann gilt*

$$\mathrm{Wind}(f) \;=\; -\mathrm{Ind}(T_f)$$

1. Beweis: Sei $f(\theta)=e^{in\theta+\phi(\theta)}$ mit $\phi\in C(\mathbb{S}^1)$ (vgl. die Darstellung im Satz 4.137). Dann ist

$$t\in[0,1]\mapsto f_t(\theta)=e^{in\theta+t\phi(\theta)}\ ,\qquad n=\mathrm{Wind}(f)\ ,$$

eine norm-stetige Homotopie, weil nämlich

$$\begin{aligned}\|f_t-f_s\| &= \sup_\theta |f_t(\theta)-f_s(\theta)|\\ &= \sup_\theta |e^{t\phi(\theta)}-e^{s\phi(\theta)}|\\ &\leq |t-s|\ \sup_\theta |\phi(\theta)|e^{|\phi(\theta)|}\ .\end{aligned}$$

Wegen der Homotopie-Invarianz des Index folgt somit

$$\mathrm{Ind}(T_f) \;=\; \mathrm{Ind}(T_{f_0}) \;=\; \mathrm{Ind}(T_{e_n}) \;=\; \mathrm{Ind}(S^{-n}) \;=\; -n\ .$$

Letzteres wegen obiger Rechnung.

2. Beweis (algebraisch): Unter der zusätzlichen Annahme $f\in C^1(\mathbb{S}^1)$, sodass $df\in\mathcal{L}^1$. Somit folgt aus Satz 4.144 und $F=2P-1$, dass

$$\mathrm{Wind}(f) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{S}^1)}(f^{-1}[F,f]) \;=\; \mathrm{Tr}(f^{-1}[P,f])\ .$$

Jetzt gilt:

$$[P,f] \;=\; [P^2,f] \;=\; P^2f-PfP+PfP-fP^2 \;=\; P[P,f]+[P,f]P\ .$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Wind}(f) &= \mathrm{Tr}(f^{-1}P[P,f])+\mathrm{Tr}(f^{-1}[P,f]P)\\ &= \mathrm{Tr}(P[P,f]f^{-1}P)+\mathrm{Tr}(Pf^{-1}[P,f]P)\\ &= \mathrm{Tr}(P-PfPf^{-1}P)+\mathrm{Tr}(Pf^{-1}PfP-P)\\ &= -\mathrm{Tr}_{H^2}(T_fT_{f^{-1}}-\mathbb{1}_{H^2})+\mathrm{Tr}_{H^2}(T_{f^{-1}}T_f-\mathbb{1}_{H^2})\\ &= -\mathrm{Ind}(T_f)\ ,\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität aus der Fedosov-Formel folgt. □

Nun sollen diese Ergebnisse noch in einen breiteren Rahmen eingebunden werden. Hierfür sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine gegebene C^*-Algebra. In der obigen Situation war $\mathcal{A} = C(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$. Die Tatsache, dass hier eine C^*-Algebra betrachtet wird, spiegelt wieder, dass man in einer Klasse stetiger Objekte arbeitet und somit Homotopietheorie untersuchen kann. Insbesondere sind die folgenden Zusammenhangskomponenten (π_0-Gruppen) interessant:

$$\begin{aligned} K_1(\mathcal{A}) &= \{\text{Homotopie-Klassen invertierbarer Operatoren in } \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}\} \\ K_0(\mathcal{A}) &= \{\text{Homotopie-Klassen von Projektionen in } \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

Hierbei wurde $\mathcal{A}$ mit den kompakten Operatoren tensoriert, man sagt auch "stabilisiert". Diese beiden Mengen können nun mit einer Gruppenstruktur versehen werden. Bei $K_1(\mathcal{A})$ ist dies einfach durch das Operatorprodukt induziert, wohingegen in $K_0(\mathcal{A})$ durch die (Whitney) Summe von (orthogonal verdrehten) Projektionen zunächst eine Halbgruppe eingefürt wird, die dann zu einer Gruppe vervollständigt werden kann (Grothendieck-Konstruktion analog zum Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$; zu betrachten ist, dass obige Menge nur die angesprochene Halbgruppe ist).

Es ist nun das Ziel, die Klassen von invertierbaren Operatoren oder Projektionen durch Invarianten (typischerweise ganze Zahlen) zu untersuchen, die mit Mitteln der (nicht-kommutativen) Differential- und Integralrechnung bestimmt werden können. Dies wird in der klassischen Differentialtopologie durch Paarungen mit Kohomologie-Gruppen erreicht. In Alain Connes' nicht-kommutativer Geometrie verwendet man Paarungen mit der so genannten zyklischen Kohomologie. Ein Beispiel für einen zyklischen 1-Kozykel im Falle von $\mathcal{A} = C(\mathbb{S}^1)$ ist gegeben durch

$$\xi_1 \ : \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ \to \ \mathbb{C} \ , \qquad \xi_1(g,h) \ = \ \mathcal{T}(gdh) \ .$$

Wesentliche algebraische Eigenschaften sind seine Zyklizität

$$\xi_1(g,h) \ = \ -\xi_1(h,g) \ ,$$

und dass er unter dem Hochschild-Randoperator b definiert durch

$$b\xi_1(g,h,k) \ = \ \xi_1(gh,k) - \xi_1(g,hk) + \xi_1(kg,h)$$

verschwindet, d.h. $b\xi_1 = 0$. Dann ist die Paarung von ξ_1 mit einem invervierbaren Element $f \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$\langle \xi_1 | f \rangle \ = \ \xi_1(f^{-1}, f) \ .$$

Man zeigt nun, dass diese Paarung nur von den Homotopieklassen von ξ_1 und f abhängt. In der oben beschriebenen konkreten Situation gilt dann

$$\mathrm{Wind}(f) \ = \ \langle \xi_1 | f \rangle \ .$$

Dieser Zugang kann nun auf nicht-kommutative Algebren angewandt werden und dies ist einer der Programmpunkte von Connes' nicht-kommutativer Geometrie. Hier sie noch kurz Connes' Wörterbuch für nicht-kommutative Verallgemeinerungen präsentiert:

Klassisch	**Nicht-kommutativ**
Ω Raum, Funktionen darauf	allgemeine Algebra
Ω topologischer Raum, $C_0(\Omega)$ stetige Funktionen	C^*-Algebra
Maßraum (Ω, μ), $L^\infty(\Omega, \mu)$	W^*-Algebra
Zusammenhangskomponenten	Projektion
offene und abgeschlossene Teilmenge	Ideal und Quotient
Kompaktifizierung	Adjunktion der Eins
z komplexe Variable (Funktion auf Ω)	T beschränkter Operator
$f(z)$ analytische Funktion	holomorpher Funktionalkalkül
x reelle Variable	$T = T^*$
stetige und Borelfunktionen	Spektralsatz
differentielle Struktur dx	$dT = [F, T]$
$d^2 = 0$, d linear und Leibniz-Regel	$F^2 = \mathbb{1}$, $F = F^*$ oder
	auch $F = \lvert D\rvert^{-1} D$ Dirac-Phase
dx infinitesimal	dT kompakt
Ordnung der Infinitesimalen	$dT \in \mathcal{L}^p$
Integration	Tr oder $\mathcal{T}$, Zustände
Topologische Invarianten und K-Theorie	algebraische K-Theorie
de Rham Kohomologie	zyklische Kohomologie
Index-Theoreme (Attiyah-Singer)	Paarungen, KK-Theorie

5 Unbeschränkte Operatoren

5.1 Selbstadjungierte Operatoren

Zur Motivation sei daran erinnert, dass für einen Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ Stetigkeit und Beschränktheit äquivalent sind, und nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz ein überall definierter und symmetrischer Operator automatisch beschränkt ist. Typischerweise sind Operatoren in Anwendungen symmetrisch und unbeschränkt, somit können sie also nicht überall definiert sein!

Definition 5.1 (i) *Ein unbeschränkter Operator T ist gegeben durch einen Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$, welcher ein linearer Unterraum ist sowie eine Abbildungsvorschrift $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$.*

(ii) *Sein Bild ist der Unterraum*

$$\mathrm{Ran}(T) \;=\; T(\mathcal{D}(T)) \;.$$

(iii) *Sind zwei unbeschränkte Operatoren T, S gegeben, so definiert man*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T+S) &= \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) \;, \qquad & (T+S)x &= Tx + Sx \;, \\ \mathcal{D}(TS) &= \mathcal{D}(S) \cap S^{-1}(\mathcal{D}(T)) \;, \qquad & (TS)x &= T(Sx) \;, \end{aligned}$$

und falls T injektiv ist:

$$\mathcal{D}(T^{-1}) \;=\; \mathrm{Ran}(T) \;, \qquad T^{-1}(Tx) \;=\; x \;.$$

Bemerkungen 5.2 1. $(T+S)+R = T+(S+R)$ und $T(SR) = (TS)R$ sowie $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$, aber $(T+S)R \neq (TR) + (SR)$ im Allgemeinen.

2. Es ist möglich, dass $\mathcal{D}(T+S) = \{0\}$, obwohl $\mathcal{D}(T)$ und $\mathcal{D}(S)$ dicht sind.

3. Es ist zu beachten, dass die Definition von T^{-1} nicht (wie bei beschränkten Operatoren) beinhaltet, dass T^{-1} beschränkt ist. Bei unbeschränkten Operatoren ist vielmehr invertierbar im mengentheoretischen Sinn gemeint.

Beispiele 5.3 1. Der Positions-Operator in $L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\mathcal{D}(T) \;=\; \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \;:\; \int dx\, x^2 |\psi(x)|^2 < \infty \right\} \;, \qquad (T\psi)(x) \;=\; x\; \psi(x) \;.$$

Natürlich ist $x \in \mathbb{R} \mapsto x\; \psi(x)$ für alle ψ eine wohl-definierte Funktion, aber im Allgemeinen ist sie nicht im Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R})$. Außerdem ist $\mathcal{D}(T)$ ein Beispiel für einen so genannten maximalen Definitionsbereich π, d.h.

$$\mathcal{D} \;=\; \{ \psi \in \mathcal{H} \;:\; T\psi \in \mathcal{H} \text{ für Vorschrift } T \} \;.$$

2. Der harmonische Oszillator auf $L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\mathcal{D}(T) \;=\; \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;, \qquad (T\psi)(x) \;=\; -\partial^2 \psi(x) + x^2 \psi(x) \;.$$

Wenn $\varphi_n(x)$ die Hermite-Funktionen sind, dann gilt $T\varphi_n = (2n+1)\varphi_n$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist T unbeschränkt.

Definition 5.4 *Seien T, S Operatoren auf $\mathcal{H}$.*

(i) *Der Graph von T ist der Unterraum $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.*

(ii) *T heißt abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $\Gamma(T)$ abgeschlossener Unterraum in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.*

(iii) *Der Operator S heißt Erweiterung von T, in Kurznotation $T \subset S \Longleftrightarrow \Gamma(S) \supset \Gamma(T)$*

$$\Longleftrightarrow \mathcal{D}(S) \supset \mathcal{D}(T) \text{ und } Tx = Sx \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T) .$$

(iv) *T heißt abschließbar (closable) $\Longleftrightarrow$ es gibt eine abgeschlossene Erweiterung. Die (nach dem unten folgenden Satz eindeutige) kleinste abgeschlossene Erweiterung heißt dann der Abschluss von T und wird mit $\overline{T}$ bezeichnet.*

Eine Möglichkeit, einen Abschluss zu definieren, scheint es zu sein, den Abschluss $\overline{\Gamma(T)}$ in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ zu betrachten. Das Problem hierbei ist, dass $\overline{\Gamma(T)}$ nicht notwendigerweise der Graph eines Operators ist. Aber unter zusätzlichen Voraussetzungen kann dies richtig sein.

Satz 5.5 *T abschließbar $\Longrightarrow \Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.*

Beweis: Sei S eine abgeschlossene Erweiterung von T. Dann gilt $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Dann definieren wir den Operator R durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) &= \Big\{x \in \mathcal{H} : \text{ es gibt } y \in \mathcal{H} \text{ mit } (x, y) \in \overline{\Gamma(T)}\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathcal{H} : \text{es gibt genau ein } y = Sx \text{ mit } (x, y) \in \overline{\Gamma(T)}\Big\} , \end{aligned}$$

und die Vorschrift $Rx = y = Sx$. Somit gilt nach Konstruktion $\Gamma(R) = \overline{\Gamma(T)}$. Also ist R eine abgeschlossene Erweiterung von T. Zudem gilt $R \subset S$ für jede abgeschlossene Erweiterung S von T. Somit $R = \overline{T}$ und $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. □

Definition 5.6 *Sei T ein dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$. Setze*

$$\mathcal{D}(T^*) = \{x \in \mathcal{H} : y \in \mathcal{D}(T) \mapsto \langle x|Ty\rangle \text{ ist ein beschränktes Funktional}\} .$$

Da $\mathcal{D}(T)$ dicht ist, kann dieses Funktional zu einem beschränkten Funktional auf ganz $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert genau ein $z \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle z|y\rangle = \langle x|Ty\rangle .$$

Nun ist der adjungierte Operator T^* mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^*)$ definiert durch

$$T^*x = z , \qquad x \in \mathcal{D}(T^*) .$$

Bemerkungen 5.7

1. Es ist möglich, dass $\mathcal{D}(T^*)$ nicht dicht in $\mathcal{H}$ ist, sogar dass $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ (Übung)!

2. Wenn $T \subset S$, dann gilt $S^* \subset T^*$, weil nämlich die Beschränktheit der oben betrachteten Funktionale restriktiver ist. Zudem, wenn $S, T,\ S + T$ und ST dicht definiert sind, dann gilt

$$S^* + T^* = (S + T)^* , \qquad T^*S^* \subset (ST)^* .$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass die letzte Inklusion im Allgemeinen keine Gleichheit ist. Wähle $T = 0$ und $S = S^*$ mit dichtem $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ (d.h. S selbstadjungiert im Sinne der unten stehenden Definition). Dann ist $ST = 0$ und somit $\mathcal{D}((ST)^*) = \mathcal{H}$. Andererseits $\mathcal{D}(T^*S^*) = \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$.

3. Es gilt:
$$\langle T^*x|y\rangle \;=\; \langle x|Ty\rangle \ , \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(T^*)\ ,\ y \in \mathcal{D}(T)\ .$$
Da $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt außerdem
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T^*) &= \{x \in \mathcal{D}(T^*)\ :\ T^*x = 0\} \\
&= \{x \in \mathcal{D}(T^*)\ :\ \langle T^*x|y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{D}(T)\} \\
&= \{x \in \mathcal{D}(T^*)\ :\ \langle x|Ty\rangle = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{D}(T)\} \\
&= \mathrm{Ran}(T)^\perp\ .
\end{aligned}$$
Dies ist also die gleiche Identität wie für beschränkte Operatoren.

4. Der Graph von T^* kann wie folgt angegeben werden:
$$\begin{aligned}
\Gamma(T^*) &= \{(x, T^*x)\ :\ x \in \mathcal{D}(T^*)\} \\
&= \{(x, T^*x)\ :\ z \in \mathcal{D}(T) \mapsto \langle x|Tz\rangle \text{ beschränkt}\} \\
&= \{(x,y)\ :\ \langle x|Tz\rangle = \langle y|z\rangle \text{ für alle } z \in \mathcal{D}(T)\}\ ,
\end{aligned}$$
wobei in der letzten Gleichung verwandt wurde, dass $\langle x|Tz\rangle = \langle T^*x|z\rangle$ für alle $z \in \mathcal{D}(T)$ und $y \in \mathcal{D}(T^*)$.

Satz 5.8 *Sei T ein dicht definierter Operator. Dann gilt:*

(i) *T^* abgeschlossen.*

(ii) *T abschließbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}(T^*)$ dicht. In diesem Fall ist $\overline{T} = (T^*)^*$ und $(\overline{T})^* = T^*$.*

Beweis: (i) Wir definieren
$$V : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\ , \qquad V(x,y) \;=\; (-y, x)\ .$$
Somit ist V unitär und anti-selbstadjungiert, also gilt für das Spektrum $\sigma(V) \subset \{-i, i\}$. Für jeden Unterraum $U \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ gilt also $V(U)^\perp = V(U^\perp)$, da ja V unitär ist. Jetzt
$$\begin{aligned}
(x,y) \in V(\Gamma(T))^\perp &\Longleftrightarrow \langle (x,y)|(-Tz, z)\rangle = 0 \quad \forall\ z \in \mathcal{D}(T) \\
&\Longleftrightarrow \langle x|Tz\rangle = \langle y|z\rangle \qquad \forall\ z \in \mathcal{D}(T) \\
&\Longleftrightarrow (x,y) \in \Gamma(T^*)\ ,
\end{aligned}$$
Letzteres nach obiger Charakterisierung von $\Gamma(T^*)$. Somit gilt also
$$V\Gamma(T)^\perp \;=\; \Gamma(T^*)\ .$$
Also ist $\Gamma(T^*)$ abgeschlossen als orthogonales Komplement eines Unterraumes.

(ii) Zunächst zur Implikation "$\Longleftarrow$". Da $\Gamma(T)$ ein Unterraum ist, folgt
$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma(T)} &= (\Gamma(T)^\perp)^\perp \qquad \text{(nach Satz 2.11)} \\
&= (V^2\Gamma(T)^\perp)^\perp = (V(V\Gamma(T))^\perp)^\perp \qquad \text{(da } V \text{ unitär)} \\
&= (V\Gamma(T^*))^\perp \qquad \text{(nach dem Beweis von (i))} \\
&= \Gamma(T^{**}), \qquad \text{(nochmals nach dem Beweis von (i))}\ ,
\end{aligned}$$

Letzteres, weil $\mathcal{D}(T^*)$ nach Voraussetzung dicht ist, sodass $(T^*)^*$ definierbar ist. Dies zeigt, dass T abschließbar ist, weil $T^{**} = (T^*)^*$ nach (i) abgeschlossen ist und wegen $\Gamma(T) \subset \Gamma(T^{**})$ eine Erweiterung ist. Außerdem folgt nun mit Satz 5.5, dass $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T^{**})$, sodass $\overline{T} = T^{**}$.

Nun zur Implikation "$\Longrightarrow$". Sei $\mathcal{D}(T^*)$ nicht dicht. Dann existiert ein $x \in \mathcal{D}(T^*)^\perp$, für welches dann auch $(x, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$, da $\langle (x, 0)|(y, T^*y)\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Somit enthält $V(\Gamma(T^*)^\perp)$ den Punkt $(0, x)$, kann also kein Graph eines linearen Operators sein. Da aber $V(\Gamma(T^*)^\perp) = (V\Gamma(T^*))^\perp = \overline{\Gamma(T)}$ nach obigem, folgt, dass T nicht abschließbar ist, weil sonst nach Satz 5.5 $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$ ein Graph wäre. Dies beweist die Implikation "$\Longrightarrow$". Nun zur letzten Identität. Aus $\overline{T} = T^{**}$ und mit (i) folgt:

$$T^* \;=\; \overline{T^*} \;=\; (T^*)^{**} \;=\; (T^{**})^* \;=\; (\overline{T})^* \;.$$

□

Bemerkung 5.9 Im Beweis haben wir unter der Annahme, dass $\mathcal{D}(T)$ und $\mathcal{D}(T^*)$ dicht sind, folgende orthogonalen Zerlegungen bewiesen:

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \;=\; \Gamma(T^*) \oplus \overline{V\Gamma(T)} \;=\; \overline{\Gamma(T)} \oplus V\Gamma(T^*) \;.$$

Satz 5.10 *Sei T dicht definiert und abgeschlossen auf $\mathcal{H}$ sowie injektiv und mit* $\mathrm{Ran}(T)$ *dicht. Dann sind T^* und T^{-1} dicht definiert, abgeschlossen, injektiv, mit dichtem Bild und*

$$(T^*)^{-1} \;=\; (T^{-1})^* \;.$$

Beweis: Wir definieren

$$W : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \;, \qquad W(x, y) \;=\; (y, x) \;.$$

Dann ist W unitär und $W\Gamma(T) = \Gamma(T^{-1})$. Somit folgt aus $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$, dass $\overline{\Gamma(T^{-1})} = \Gamma(T^{-1})$, also ist T^{-1} abgeschlossen. Außerdem ist T^{-1} offensichtlich dicht definiert, hat ein dichtes Bild und ist injektiv. Nach Satz 5.8 ist auch T^* abgeschlossen und dicht definiert (da T abgeschlossen ist). Außerdem gilt nach Bemerkung 5.7.3. $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T)^\perp = \{0\}$, da $\mathrm{Ran}(T)$ dicht ist. Somit ist T^* injektiv. Weil $T = \overline{T}$, besagt Satz 5.8 des Weiteren:

$$\mathrm{Ran}(T^*)^\perp \;=\; \mathrm{Ker}(T^{**}) \;=\; \mathrm{Ker}(T) \;=\; \{0\} \;,$$

sodass T^* ein dichtes Bild hat. Zusammenfassend folgt also, dass $(T^*)^{-1}$ und $(T^{-1})^*$ sinnvoll sind. Mit $V(x, y) = (-y, x)$ definiert wie in Satz 5.8 gilt:

$$\begin{aligned}
VW\Gamma((T^*)^{-1}) \;&=\; V\Gamma(T^*) && \text{(nach Obigem)}\\
&=\; \Gamma(T)^\perp && \text{(nach dem Beweis von Satz 5.8 (i))}\\
&=\; (W\Gamma(T^{-1}))^\perp && \text{(wieder mit Obigem)}\\
&=\; W(\Gamma(T^{-1})^\perp) && \text{(da } W \text{ unitär)}\\
&=\; WV\Gamma((T^{-1})^*) && \text{(nach dem Beweis von Satz 5.8)}\\
&=\; -VW\Gamma((T^{-1})^*) \;,
\end{aligned}$$

da $VW = -WV$. Da aber ein Graph immer ein Unterraum ist (sodass das Vorzeichen keine Rolle spielt) und VW unitär ist, folgt $\Gamma((T^*)^{-1}) = \Gamma((T^{-1})^*)$, d.h. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Definition 5.11 *Sei T ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C}$ in der Resolventen-Menge von $T \iff \lambda\mathbb{1} - T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist eine Bijektion mit beschränktem Inversen.*

Dann heißt $R_\lambda(T) = (\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ die Resolvente von T und $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$ das Spektrum von T.

Ähnlich wie bei beschränkten Operatoren können auch Eigenwerte, Eigenvektoren, Punktspektrum, stetiges Spektrum etc. definiert werden.

Bemerkung 5.12 Das Spektrum $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$ ist nicht notwendigerweise kompakt. Außerdem kann mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen (Satz 4.5) gezeigt werden, dass die Stetigkeit des Inversen (d.h. der Resolvente) automatisch gilt.

Satz 5.13 *Sei T abgeschlossen und dicht definiert. Dann gilt Folgendes:*

(i) *$\rho(T)$ ist offen in $\mathbb{C}$.*

(ii) *$R_\lambda(T)$ ist analytisch in λ in jeder Komponente von $\rho(T)$.*

(iii) *(Resolventenidentität) Für $\lambda, \mu \in \rho(T)$*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) \;=\; (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T) \;=\; (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T) \;.$$

Beweis: Genau wie in Satz 4.13 folgen alle Aussagen aus der Neumann-Reihe. □

Beispiel 5.14 Ein unbeschränkter Operator mit leerem Spektrum ist das Inverse des Volterra'schen Integraloperators $T : L^2([0,1]) \to TL^2([0,1])$ definiert durch

$$(Tf)(x) \;=\; i\int_0^x dy\, f(y) \;.$$

Dieser Operator ist injektiv mit dichtem Bild:

$$\mathcal{D} \;=\; TL^2([0,1]) \;=\; \{\text{absolut stetige Funktion } g \text{ mit } g(0) = 0 \text{ und } g' \in L^2([0,1])\} \;.$$

Es folgt nun aus Ergebnissen der Maßtheorie, dass T^{-1} dicht definiert ist. Außerdem ist T^{-1} abgeschlossen (Übung). Tatsächlich gilt $T^{-1} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} : \mathcal{D} = TL^2([0,1]) \to L^2([0,1])$. Eine weitere Übung ist der Nachweis der Ungleichung $\|T^n\| \leq \frac{1}{(n-1)!}$. Somit erfüllt der Spektralradius $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Also kann man für $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren:

$$(\lambda\mathbb{1} - T^{-1})^{-1} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^{n+1} \;\in\; \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;.$$

Dies folgt, weil wegen $\|T^n\| \leq \frac{1}{(n-1)!}$ eine normkonvergente Reihe vorliegt und somit

$$(\lambda\mathbb{1} - T^{-1})(-1)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^{n+1} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} T^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n \;=\; \mathbb{1} \;.$$

Da auch 0 nicht im Spektrum liegt, folgt $\sigma(T^{-1}) = \emptyset$. Es ist allerdings möglich, den Definitionsbereich von $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ zu vergrößern zu

$$\widetilde{\mathcal{D}} \;=\; \{\text{absolut stetige Funktionen } g \text{ mit } g' \in L^2([0,1])\} \;.$$

Dann ist $e^{i\lambda x} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\left(\lambda \mathbb{1} - \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) e^{i\lambda x} \;=\; 0 \; .$$

Also ist $e^{i\lambda x}$ ein Eigenvektor und es gilt jetzt

$$\sigma\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right) \;=\; \mathbb{C} \; .$$

Bemerkung 5.15 Wie obige Beispiele zeigen, ist das Spektrum (aber auch andere physikalisch relevante Eigenschaften) stark von der Wahl des Definitionsbereiches abhängig. Glücklicherweise gibt es oft eine "richtige" Wahl.

Definition 5.16 *Sei T ein dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$.*

(i) *T symmetrisch* $\iff T \subset T^*$
$\iff \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ *und* $Tx = T^*x$ *für alle* $x \in \mathcal{D}(T)$
$\iff \langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$ *für alle* $x, y \in \mathcal{D}(T)$

(ii) *T selbstadjungiert* $\iff T = T^* \iff T$ *symmetrisch und* $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

(iii) *T wesentlich selbstadjungiert* $\iff T$ *symmetrisch und* $\overline{T}$ *selbstadjungiert.*

(iv) *Sei T abgeschlossen. Dann heißt $I_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}(T)$ ein Eindeutigkeitsbereich von T (auf Englisch core)* $\iff \overline{T\,|_{I_{\mathcal{D}}}} = T$

Bemerkungen 5.17 1. Wenn T symmetrisch ist, so ist T abschließbar und $\overline{T} = (T^*)^*$. Somit ist (iii) immer eine sinnvolle Definition. Außerdem gilt $T \subset T^{**} = \overline{T} \subset T^*$.

In der Tat, T^* ist abgeschlossen nach Satz 5.8, und $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ nach Voraussetzung.

2. Wenn T abgeschlossen und symmetrisch ist, gilt $T = T^{**} \subset T^*$. Insbesondere, wenn T selbstadjungiert ist, so $T = T^{**} = T^* = \overline{T}$.

3. Wenn T wesentlich selbstadjungiert ist, so existiert eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung, gegeben durch $\overline{T}$.

   Begründung: Sei $S = S^*$ eine selbstadjungierte Erweiterung von T, d.h. $T \subset S$. Dann ist S abgeschlossen und somit $T^{**} = \overline{T} \subset S$. Also folgt $S = S^* \subset (T^{**})^* = \overline{T}^* = \overline{T} = T^{**} \subset S$. Somit $S = T^{**} = \overline{T}$. Die Umkehrung gilt auch [RS].

4. T wesentlich selbstadjungiert $\iff T \subset T^{**} = T^*$.

   Dies folgt aus dem vorherigen Punkt.

5. Oft ist in Anwendungen nur ein symmetrischer Operator gegeben (z.B. Differentialoperator auf differenzierbaren Funktionen). Wenn man also die wesentliche Selbstadjungiertheit nachweisen kann, so fixiert dies schon einen eindeutigen selbstadjungierten Operator (daher der Name). Oft gibt es aber auch mehrere selbstadjungierte Erweiterungen.

Satz 5.18 (Kriterien für Selbstadjungiertheit) *Sei T symmetrisch. Äquivalent sind:*

(i) *T selbstadjungiert*

(ii) *T abgeschlossen und* $\mathrm{Ker}(T^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1}) = \mathcal{H}$

(iv) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T) \Longleftrightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$

Bemerkungen 5.19 1. Für jeden abgeschlossenen symmetrischen Operator definiert man die Defektindizes

$$n_\pm(T) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(T^* \pm i\mathbb{1})) \;=\; \dim(\mathrm{Ran}(T \mp i\mathbb{1})^\perp)\ .$$

Für $T = T^*$ gilt also $(n_+(T), n_-(T)) = (0,0)$.

2. Man kann $\pm i$ durch $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\overline{\lambda}$ mit $\Im m(\lambda) \neq 0$ ersetzen in (ii) und (iii).

Beweis: "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" Dass T abgeschlossen ist, folgt, da $\overline{T} = T^{**} = T$. Sei $\Im m(\lambda) \neq 0$. Sei $x \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$, sodass $T^* x = \lambda x$. Dann gilt auch $Tx = \lambda x$ und

$$\overline{\lambda}\,\langle x|x\rangle \;=\; \langle \lambda x|x\rangle \;=\; \langle Tx|x\rangle \;=\; \langle x|T^*x\rangle \;=\; \lambda\,\langle x|x\rangle\ ,$$

also $x = 0$ und $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda\mathbb{1}) = \{0\}$.

"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" Da

$$\{0\} \;=\; \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{1}) \;=\; \mathrm{Ker}((T-\lambda\mathbb{1})^*) \;=\; \mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})^\perp\ ,$$

ist $\mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$ dicht für $\Im m(\lambda) \neq 0$. Wir zeigen zudem, dass $\mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ ist. Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$, dann gilt für alle $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\begin{aligned}
\|(T-\lambda\mathbb{1})x\|^2 &= \langle (T-\alpha)x - i\beta x \mid (T-\alpha)x - i\beta x\rangle \\
&= \|(T-\alpha)x\|^2 + i\beta\,\langle x \mid (T-\alpha)x\rangle - i\beta\,\langle (T-\alpha)x \mid x\rangle + \beta^2\|x\|^2 \\
&= \|(T-\alpha)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2\ .
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Sei $x_n \in \mathcal{D}(T)$ mit $(T-\lambda\mathbb{1})x_n \to y$, somit ist $((T-\lambda\mathbb{1})x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge. Wegen (5.1) folgt, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge und $(Tx_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist. Somit existieren $\lim x_n = x$ und $\lim Tx_n = \widetilde{y}$. Da T abgeschlossen ist, folgt $Tx = \widetilde{y}$ und somit $(T-\lambda\mathbb{1})x = \widetilde{y} + \lambda x = y$, d.h. $y \in \mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$. Also ist $\mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$ abgeschlossen.

"(iii) $\Longrightarrow$ (iv)" Nach (5.1) gilt

$$\|(T-\lambda\mathbb{1})x\| \;\geq\; |\Im m(\lambda)|\|x\|\ , \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)\ .$$

Somit ist $T - \lambda\mathbb{1}$ injektiv, weil $(T-\lambda\mathbb{1})x = (T-\lambda\mathbb{1})y$ impliziert $x - y = 0$. Nach (iii) verwandt für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ folgt, dass $(T-\lambda\mathbb{1}) : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Für beliebiges $y \in \mathcal{H}$ sei nun $x = (T-\lambda\mathbb{1})^{-1}y$. Dann gilt nach Obigem

$$\|(T-\lambda\mathbb{1})^{-1}y\| \;\leq\; \frac{1}{|\Im m(\lambda)|}\,\|y\| \qquad \forall\, y \in \mathcal{H}\ .$$

Somit $\|(T-\lambda\mathbb{1})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im m(\lambda)|}$, d.h. $\lambda \in \rho(T)$.

"(iv) $\Longrightarrow$ (iii)" Dies ist offensichtlich, da $(T-\lambda\mathbb{1})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass

$$\mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1}) \;=\; \mathcal{D}((T-\lambda\mathbb{1})^{-1}) \;=\; \mathcal{H}\ .$$

"(iii) $\Longrightarrow$ (i)" Sei $x \in \mathcal{D}(T^*)$. Da $\mathrm{Ran}(T - i\mathbb{1}) = \mathcal{H}$, existiert ein $y \in \mathcal{D}(T)$ mit $(T^* - i\mathbb{1})x = (T - i\mathbb{1})y$. Nun ist $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$, somit $x - y \in \mathcal{D}(T^*)$ und $(T^* - i\mathbb{1})(x - y) = 0$, da wegen der Symmetrie $T^*y = Ty$ für alle $y \in \mathcal{D}(T)$. Andererseits gilt wieder unter Verwendung der Voraussetzung

$$\mathrm{Ker}(T^* - i\mathbb{1}) \;=\; \mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1})^{\perp} \;=\; \{0\} \;.$$

Somit $x - y = 0$, d.h. $x = y \in \mathcal{D}(T)$. Also gilt $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$. □

Mit gleichem Beweis folgt:

Satz 5.20 *Sei T symmetrisch. Äquivalent sind:*

(i) *T wesentlich selbstadjungiert*

(ii) $\mathrm{Ker}(T^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1})$ *dicht*

Als Nächstes sei daran erinnert, dass die Cayley-Transformation eine spezielle Möbius-Transformation auf Riemann'scher Zahlenkugel ist, welche wie folgt definiert ist

$$\mathcal{C} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \;, \qquad \mathcal{C}(z) \;=\; (z - i)(z + i)^{-1} \;, \qquad \mathcal{C}(\infty) \;=\; 1 \;.$$

Es gilt dann auch $\mathcal{C}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{S}^1$.

Satz 5.21 *Sei T selbstadjungiert. Dann definiert*

$$\mathcal{C}(T) \;=\; (T - i\mathbb{1})(T + i\mathbb{1})^{-1}$$

einen unitären Operator auf $\mathcal{H}$. Es gilt $T = i(\mathbb{1} + \mathcal{C}(T))(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1}$. Außerdem ist $\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \mathcal{C}(\lambda) \in \sigma(\mathcal{C}(T))$, d.h. die spektrale Abbildungseigenschaft $\mathcal{C}(\sigma(T)) = \sigma(\mathcal{C}(T))$.

Beweis: Nach Satz 5.18 sind $T \pm i\mathbb{1} : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ invertierbar. Somit ist $\mathcal{C}(T)$ eine Bijektion, weil es durch eine Hintereinanderausführung von Bijektionen gegeben ist:

$$\mathcal{H} \;\xrightarrow{(T+i\mathbb{1})^{-1}}\; \mathcal{D}(T) \;\xrightarrow{T-i\mathbb{1}}\; \mathcal{H} \;.$$

Nach (5.1) gilt für $y \in \mathcal{D}(T)$:

$$\|(T + i\mathbb{1})y\|^2 \;=\; \|Ty\|^2 + \|y\|^2 \;=\; \|(T - i\mathbb{1})y\|^2 \;.$$

Wir wählen $y = (T + i\mathbb{1})^{-1}x$, dann folgt

$$\|x\|^2 \;=\; \|\mathcal{C}(T)x\|^2 \;,$$

d.h. $\mathcal{C}(T)$ ist unitär (isometrisch und überall definiert). Jetzt gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbb{1} - \mathcal{C}(T) \;&=\; (T + i\mathbb{1})(T + i\mathbb{1})^{-1} - (T - i\mathbb{1})(T + i\mathbb{1})^{-1} \;=\; 2i(T + i\mathbb{1})^{-1} \;, \\ \mathbb{1} + \mathcal{C}(T) \;&=\; 2T(T + i\mathbb{1})^{-1} \;. \end{aligned}$$

Somit

$$i(\mathbb{1} + \mathcal{C}(T))(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1} \;=\; 2iT(T + i\mathbb{1})^{-1}(2i(T + i\mathbb{1})^{-1})^{-1} \;=\; T \;.$$

Außerdem gilt:

$$
\begin{aligned}
\lambda\mathbb{1} - T &= (\lambda(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T)) - i(\mathbb{1} + \mathcal{C}(T)))(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1} \\
&= ((\lambda - i)\mathbb{1} - (\lambda + i)\mathcal{C}(T))(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1} \\
&= (\lambda + i)(\mathcal{C}(\lambda)\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1} \; .
\end{aligned}
$$

Wenn $\mathcal{C}(\lambda) \notin \sigma(\mathcal{C}(T))$, dann existiert

$$
(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1} \; = \; (\lambda + i)^{-1}(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))(\mathcal{C}(\lambda)\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1} \; ,
$$

d.h. $\lambda \notin \sigma(T)$, somit $\mathcal{C}(\sigma(T)) \subset \sigma(\mathcal{C}(T))$. Andererseits sei $\mathcal{C}(\lambda) \in \sigma(\mathcal{C}(T))$. Dann existiert eine Weyl-Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Einheitsvektoren mit $\|(\mathcal{C}(\lambda)\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))x_n\| \to 0$. Wir setzen

$$
y_n \; = \; (\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))x_n \; = \; 2i(T + i\mathbb{1})^{-1}x_n \; \in \; \mathcal{D}(T) \; .
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_n \|y_n\| &= \lim_n \|x_n - \mathcal{C}(T)x_n\| \\
&= \lim_n \|x_n - \mathcal{C}(\lambda)x_n + (\mathcal{C}(\lambda)\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))x_n\| \\
&= |1 - \mathcal{C}(\lambda)| > 0 \; ,
\end{aligned}
$$

Letzteres unter der Annahme $\lambda \neq \infty$. Aber

$$
(\lambda\mathbb{1} - T)y_n \; = \; (\lambda + i)(\mathcal{C}(\lambda)\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))x_n \; \to \; 0 \; ,
$$

somit ist $(\lambda\mathbb{1} - T)^{-1}$ unbeschränkt, d.h. $\lambda \in \sigma(T)$. Der Beweis wird vervollständigt, indem man überprüft, dass $-i \notin \sigma(T)$ und $0 \notin \sigma(\mathcal{C}(T))$. □

Bemerkung 5.22 Wenn x ein Eigenvektor von T zu λ ist, dann ist $(\mathbb{1} - \mathcal{C}(T))^{-1}x$ Eigenvektor von $\mathcal{C}(T)$ zu $\mathcal{C}(\lambda)$. Des Weiteren hat $\mathcal{C}(T)$ nicht 1 zum Eigenwert, weil nämlich $\mathbb{1} - \mathcal{C}(T) = 2i(T + i\mathbb{1})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(T)$ injektiv ist.

5.2 Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren

In diesem Paragraphen wird das Spektralkalkül selbstadjungierter Operatoren unter Verwendung ihrer (unitären) Cayley-Transformierten eingeführt. Dann wird Stone's Theorem für unitäre Zeitentwicklungen diskutiert. Sei T also ein selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann ist seine Cayley-Transformierte $\mathcal{C}(T)$ ein unitärer und somit insbesondere normaler Operator, für den das Spektralkalkül schon verfügbar ist:

$$
\langle x | f(\mathcal{C}(T))x \rangle \; = \; \int \nu_x(d\theta) \; f(\theta) \; , \qquad f \in C(\sigma(\mathcal{C}(T))) \; .
$$

Hierbei ist $\sigma(\mathcal{C}(T)) \subset \mathbb{S}^1$ und ν_x ein Maß auf $\mathbb{S}^1$ mit Träger $\mathrm{supp}(\nu_x) \subset \sigma(\mathcal{C}(T)) = \mathcal{C}(\sigma(T))$. Nun wird ein Maß μ_x auf $\mathbb{R}$ mit Träger $\mathrm{supp}(\mu_x) \subset \sigma(T)$ definiert durch

$$
\mu_x(A) \; = \; \nu_x(\mathcal{C}(A)) \; , \qquad A \subset \mathbb{R} \text{ Borelmenge} \; .
$$

Dieses Maß heißt Spektralmaß von T zu x. Für $F \in C_0(\mathbb{R})$ und $f = F \circ \mathcal{C}^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ gilt dann

$$
\int \mu_x(d\lambda) \; F(\lambda) \; = \; \int \nu_x(d\theta) \; F(\mathcal{C}^{-1}(\theta)) \; = \; \big\langle x | F \circ \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{C}(T))x \big\rangle \; .
$$

Eine alternative Definition von μ_x ist mit dem Satz von Riesz-Markov möglich. Mann betrachtet das positive Funktional

$$F \in C_0(\mathbb{R}) \ \mapsto \ \langle x | F \circ \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{C}(T)) x \rangle \ ,$$

wobei $F \circ \mathcal{C}^{-1} \in C_0(\mathbb{S}^1 \backslash \{1\})$. Dies ist also dargestellt durch ein endliches Radon-Maß μ_x auf $\mathbb{R}$:

$$\big\langle x | F \circ \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{C}(T)) x \big\rangle \ = \ \int \mu_x(dE) \ F(E) \ .$$

Selbstverständlich geben beide Definitionen das gleiche Maß. Bei allem Obigem ist $F \circ \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{C}(T)) \stackrel{\wedge}{=} F(T)$ beschränkt (weil F beschränkt ist). Jetzt wollen wir auch unbeschränkte Funktionen bilden. Also betrachten wir zunächst den Prototyp eines unbeschränkten Operators.

Satz 5.23 *Sei (M, μ) ein endlicher Maßraum und $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine messbare μ-fast sichere endliche Funktion. Ein Operator M_f ist definiert durch*

$$\mathcal{D}(M_f) \ = \ \{\psi \in L^2(M, \mu) \ : \ f\psi \in L^2(M, \mu)\} \ ,$$

und

$$M_f(\psi)(m) \ = \ f(m)\psi(m) \ .$$

Dann ist M_f selbstadjungiert und

$$\sigma(M_f) = \{E \in \mathbb{R} \ : \ \forall \ \epsilon > 0 \ \textit{gilt} \ \mu(B_\epsilon(f^{-1}\{E\})) > 0\} \ .$$

Also ist $\sigma(M_f)$ das μ-essentielle Bild von f.

Beweis: Offensichtlich ist M_f symmetrisch, also gilt $\mathcal{D}(M_f) \subset \mathcal{D}(M_f^*)$. Sei $\psi \in \mathcal{D}(M_f^*)$ und

$$\chi_N(m) \ = \ \chi(|f(m)| \leq N) \ .$$

Dann folgt aus dem Theorem der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \|M_f^* \psi\|_{L^2} \ &= \ \lim_N \|\chi_N M_f^* \psi\| \ = \ \lim_N \left(\sup_{\|\phi\|=1} |\big\langle \phi | \chi_N M_f^* \psi \big\rangle| \right) \\ &= \ \lim_N \left(\sup_{\|\phi\|=1} |\langle M_f \chi_N \phi | \psi \rangle| \right) = \lim_N \left(\sup_{\|\phi\|=1} |\langle \phi | f \chi_N \psi \rangle| \right) \\ &= \ \lim_N \|\chi_N f \psi\| \ , \end{aligned}$$

also $f\psi \in L^2(M, \mu)$, d.h. $\psi \in \mathcal{D}(M_f)$. Somit ist $\mathcal{D}(M_f) = \mathcal{D}(M_f^*)$ und M_f ist selbstadjungiert. Das Spektrum kann mit adäquaten Weyl-Folgen untersucht werden. □

Satz 5.24 (Multiplikations-Operatorversion des Spektralsatzes) *Sei $T = T^*$ ein selbstadjungierter Operator mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Dann existiert ein endlicher Maßraum (M, μ), ein unitärer Operator*

$$U : \mathcal{H} \ \to \ L^2(M, \mu) \ ,$$

und eine μ-fast sichere beschränkte Borel-Funktion $G : M \to \mathbb{R}$ mit

(i) *$x \in \mathcal{D}(T) \iff Ux \in \mathcal{D}(M_G) \iff M_G U x \in L^2(M, \mu)$.*

Anders ausgedrückt, $U\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(M_G)$.

(ii) $UTU^* = M_G$

Beweis: Für $\mathcal{C}(T)$ existiert ein Maßraum (M,μ) und unitärer Operator $U : \mathcal{H} \to L^2(M,\mu)$ und $g : M \to \mathbb{S}^1$ mit

$$U\mathcal{C}(T)U^* \;=\; M_g \;.$$

Es sei kurz daran erinnert, wie all dies konstruiert wird. Falls $\mathcal{C}(T)$ einen zyklischen Vektor x hat und ν_x sein Spektralmaß ist, dann ist die Wahl $L^2(M,\mu) = L^2(\sigma(\mathcal{C}(T)),\nu_x)$ und

$$U\phi(f)x \;=\; f \;, \qquad f \in C(\mathbb{S}^1) \;,$$

möglich, wobei ϕ den Funktionalkalkül von $\mathcal{C}(T)$ bezeichnet. Dann ist U isometrisch und kann auf ganz $\mathcal{H} = \overline{\phi(C(\mathbb{S}^1))x}$ zu einem unitärem Operator festgesetzt werden. Wenn kein zyklischer Vektor vorliegt, verwendet man eine Zerlegung $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 1} \overline{\phi(C(\mathbb{S}^1))x_n}$ in zyklische Komponenten (Nachweis der Existenz mit dem Lemma von Zorn). Dann setz man:

$$(M,\mu) \;=\; \left(\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{S}^1 \;,\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\, \nu_{x_n} \right) \;.$$

Des Weiteren führen wir nun folgende Funktion ein:

$$G \;=\; \mathcal{C}^{-1} \circ g \;=\; -i\, \frac{g+1}{g-1} : M \to \mathbb{R} \;.$$

Es ist hierbei zu beachten, dass beliebig große Werte angenommen werden, aber G μ-f.s. beschränkt ist (weil 1 nicht Eigenwert von $\mathcal{C}(T)$ ist).

Nun zum Beweis der Implikation "$\Longrightarrow$" von (i). Zunächst sei an folgende aus dem Beweis von Satz 5.21 bekannte Äquivalenz erinnert: $x \in \mathcal{D}(T) \Longleftrightarrow x \in \operatorname{Ran}(T+i\mathbb{1})^{-1}$. Also existiert $y \in \mathcal{H}$ mit

$$x \;=\; (T+i\mathbb{1})^{-1}y \;=\; \frac{1}{2i}\, \big((T+i\mathbb{1}) - (T-i\mathbb{1})\big)(T+i\mathbb{1})^{-1}y \;=\; \frac{1}{2i}\, (\mathbb{1}-\mathcal{C})y \;.$$

Somit folgt

$$Ux \;=\; \frac{1}{2i}\, U(\mathbb{1}-\mathcal{C}(T))U^*Uy \;=\; \frac{1}{2i}\, (\mathbb{1}-M_g)Uy \;,$$

und deswegen

$$M_G Ux \;=\; \frac{1}{2i}\, M_G M_{1-g} Uy \;=\; M_{+\frac{1}{2}(g+1)} Uy \;.$$

Da jetzt $M_{\frac{1}{2}(g+1)}$ beschränkt und $Uy \in L^2(M,\mu)$, folgt auch $M_G Ux \in L^2(M,\mu)$. Umgekehrt, sei $M_G Ux \in L^2(M,\mu)$. Dann existiert ein $y \in \mathcal{H}$, sodass

$$Uy \;=\; (M_G + i\mathbb{1})Ux \;=\; M_{-2i\frac{1}{g-1}} Ux \;. \tag{5.2}$$

Also existiert ein $y \in \mathcal{H}$, sodass

$$x \;=\; \frac{-1}{2i}\, U^* M_{g-1} Uy \;=\; \frac{-1}{2i}\, (\mathcal{C}(T) - \mathbb{1})y \;=\; +(T+i\mathbb{1})^{-1}y \;.$$

Also folgt mit Satz 5.18 wieder, dass $x \in \mathcal{D}(T)$.

Nun zu (ii). Hierzu multiplizieren wir (5.2) mit $\frac{1}{2}M_{g+1} = \frac{1}{2}(M_g + \mathbb{1})$, dann folgt für $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\begin{aligned} M_G U x &= \tfrac{1}{2}\,(M_g + \mathbb{1})Uy \;=\; \tfrac{1}{2}\,U(\mathcal{C}(T) + \mathbb{1})y \\ &= \tfrac{1}{2}\,U(\mathcal{C}(T) + \mathbb{1})(T + i\mathbb{1})x \qquad \text{(da } y = (T + i\mathbb{1})x \text{ nach Obigem)} \\ &= \tfrac{1}{2}\,U((T - i\mathbb{1}) + (T + i\mathbb{1}))x \;=\; UTx \;, \end{aligned}$$

was die Formel beweist. □

Bemerkung 5.25 Anstelle der Multiplikationsoperatorversion von $\mathcal{C}(T)$ kann man auch die von dem beschränkten normalen Operator $(T + i\mathbb{1})^{-1}$ zum Beweis verwenden.

Satz 5.26 (Beschränktes Funktionalkalkül eines selbstadjungierten Operators) *Sei T selbstadjungiert und $(\mathcal{B}(\sigma(T)), \|.\|_\infty)$ die *-Banach-Algebra der beschränkten Borelfunktion auf dem Spektrum von T. Dann erfüllt*

$$\widehat{\phi} \;=\; \widehat{\phi}_T : \mathcal{B}(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \;,$$

definiert durch

$$\widehat{\phi}(f) \;=\; U^* f(M_G) U \;=\; U^* M_{f\circ G} U \;, \qquad f \in \mathcal{B}(\sigma(T)) \;,$$

die folgenden Eigenschaften:

(i) *$\widehat{\phi}$ ist ein *-Homomorphismus*

(ii) *$\widehat{\phi}$ ist norm-stetig und $\|\widehat{\phi}(f)\| \leq \|f\|_\infty$*

(iii) *$Tx = \lambda x$ impliziert $\widehat{\phi}(f)x = f(\lambda)x$*

(iv) *$f \geq 0$ impliziert $\widehat{\phi}(f) \geq 0$*

Wiederum verwendet man die Kurzschreibweise $f(T) = \widehat{\phi}(T)$.

Beweis: Alle Aussagen folgen direkt aus obigem Satz. □

Im Vergleich mit dem Spektralkalkül beschränkter Operatoren fehlt noch die Identität $\phi(\mathrm{id}) = T$, weil $\mathrm{id} \notin \mathcal{B}(c(T))$, es sei denn $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Um auch solche unbeschränkte Funktionen zu betrachten, benötigt man folgende Kunstruktion:

Satz 5.27 und Definition *Sei $T = T^*$ selbstadjungiert und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion. Nun setzt man*

$$\mathcal{D}(M_{f\circ G}) \;=\; \{\phi \in L^2(M,\mu) \;:\; f \circ G\;\phi \in L^2(M,\mu)\} \;.$$

Dann ist $M_{f\circ G}$ nach Satz 5.23 ein selbstadjungierter Multiplikationsoperator. Ein selbstadjungierter Operator $f(T)$ auf $\mathcal{H}$ wird dann definiert durch

$$\mathcal{D}(f(T)) \;=\; U^*\mathcal{D}(M_{f\circ G}) \;, \qquad f(T) \;=\; U^* M_{f\circ G} U \;.$$

Bemerkungen 5.28 1. Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so kann man einen normalen unbeschränkten Operator definieren durch $f(T) = (\Re e(f))(T) + i(\Im m(f))(T)$.

2. Wiederum bilden $(P(A))_{A\in\mathcal{B}} = (\chi_A(T))_{A\in\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B} = \{\text{Borelmengen in } \mathbb{R}\}$ ein projektionswertiges Maß ist. Als schwaches Integral kann dann definiert werden

$$f(T) = \int P(d\lambda) f(\lambda) \;, \qquad \mathcal{D}(f(T)) \;=\; \left\{ x \in \mathcal{H} \;:\; \int \langle x|P(d\lambda)x\rangle \, |f(\lambda)|^2 < \infty \right\}$$

und dies stimmt mit Satz 5.27 überein. Außerdem ist $\langle x|P(dE)x\rangle = \mu_x(dE)$ der Zusammenhang zu den Spektralmaßen.

Sei nun T ein selbstadjungierter Operator, der als so genannter Hamilton-Operator ein quantenmechanisches System beschreibt. Er erzeugt eine Dynamik von Zuständen im Hilbert-Raum, die durch die so genannte Schrödinger-Gleichung gegeben ist:

$$-i\,\partial_t \psi(t) \;=\; T\psi(t) \;, \qquad \psi(t) \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \;.$$

Wenn $\|T\| < \infty$, so ist die Lösung gegeben durch

$$\psi(t) \;=\; e^{itT}\psi(0) \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(itT)^n \psi(0) \;.$$

Somit kann die unitäre Zeitentwicklung $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{itT}$ durch eine Reihe definiert werden. Für selbstadjungiertes, aber unbeschränktes T ist dies so nicht möglich, andererseits kann Spektralkalkül verwendet werden, um die Zeitentwicklung zu definieren:

$$U(t) \;=\; e^{itT} \;.$$

In Abhägigkeit von t ist $U(t)$ eine Gruppe, wie wir im folgenden Satz explizit ausschreiben werden. Andere Beispiele für solche Gruppen sind kontinuierliche Symmetrien, z.B. die Translationen auf $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$U(t) \;=\; e^{itP} \;, \qquad P = i\partial_x \;,$$

oder die Rotationen in der j-Richtung in $\mathbb{R}^3$

$$U(t) \;=\; c^{it(X\times P)_j} \;,$$

wobei $d = 3$ und $\times$ das Kreuzprodukt bezeichnet.

Satz 5.29 *Sei T selbstadjungiert und $U(t) = e^{itT}$.*

(i) *Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $U(t)$ unitär und*

$$U(t+s) \;=\; U(t)U(s) \;=\; U(s)U(t) \;.$$

(ii) *Für $x \in \mathcal{H}$ und $t \to t_0$ gilt $U(t)x \to U(t_0)x$, d.h. $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t)$ ist stark stetig.*

(iii) *Für $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt*

$$\mathcal{H} - \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{it} \;=\; Tx \;.$$

(iv) *Wenn $\lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}$ existiert, so ist $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Man nennt $t \in \mathbb{R} \to U(t)$ mit (i) *und* (ii) *eine stark stetige Einparametergruppe unitärer Operatoren.*

Beweis: (i) folgt direkt aus dem Spektralkalkül und der Identität $e^{it\lambda}e^{is\lambda} = e^{i(t+s)\lambda}$. Für (ii),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \|U(t)x - U(t_0)x\|^2 &= \lim_{t\to t_0} \|U(t-t_0)x - x\|^2 \\ &= \lim_{t\to t_0} \int \mu_x(d\lambda)|e^{i(t-t_0)\lambda} - 1|^2 = 0 ,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die majorisierte Konvergenz verwandt wurde. Für den Beweis von (iii) sei daran erinnert, dass $x \in \mathcal{D}(f(T)) \iff \int \mu_x(d\lambda)|f(\lambda)|^2 < \infty$. Insbesondere gilt also $x \in \mathcal{D}(T) \iff \|Tx\|^2 = \int \mu_x(d\lambda)|\lambda|^2 < \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \left\| \frac{U(t)x - x}{t} - iTx \right\|^2 &= \lim_{t\to 0} \int \mu_x(d\lambda) \underbrace{\left| \frac{e^{i\lambda t} - 1}{t} - i\lambda \right|^2}_{\le (a+b|\lambda|)^2 \in L^1(\mu_x),\, \text{da}\, x\in\mathcal{D}(T)} \\ &= \int \mu_x(d\lambda) \lim_{t\to 0} \left| \frac{e^{i\lambda t} - 1}{t} - i\lambda \right|^2 = 0 .\end{aligned}$$

Hierbei wurde in der zweiten Gleichheit verwandt, dass der Integrand nach oben beschränkt ist durch $4(1+|\lambda|)^2$, was eine Funktion in $L^1(\mu_x)$ ist, da $x \in \mathcal{D}(T)$. Somit kann wieder Lebesgue's Satz der majorisierten Konvergenz verwandt werden.

(iv) Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(S) &= \left\{ x \in \mathcal{H} \;\middle|\; \mathcal{H} - \lim_t \frac{U(t)x - x}{it} \text{ existiert} \right\} , \\ Sx &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{i} \frac{U(t)x - x}{t} , \qquad x \in \mathcal{D}(S) .\end{aligned}$$

Nach (iii) ist S eine Erweiterung von T, weil der Limes ja für $x \in \mathcal{D}(T)$ existiert und $Sx = Tx$ für $x \in \mathcal{D}(T)$. Außerdem gilt für $x, y \in \mathcal{D}(S)$

$$\begin{aligned}\langle x|Sy\rangle &= \lim_{t\to 0} \left\langle x \;\middle|\; \frac{U(t)y - y}{it} \right\rangle \\ &= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{U(t)^* - \mathbb{1}}{-it} x \;\middle|\; y \right\rangle = \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{U(-t) - 1}{i(-t)} x \;\middle|\; y \right\rangle \\ &= \langle Sx|y\rangle .\end{aligned}$$

Somit ist S symmetrisch. Also ist S eine symmetrische Erweiterung des selbstadjungierten Operators T, also ist $S = T$. □

Es ist nun ein wichtiges Ergebnis, dass auch die Umkehrung von Satz 5.29 gilt und somit eine Bijektion zwischen selbstadjungierten Operatoren und stark stetigen Einparametergruppen besteht.

Satz 5.30 (Stone 1932) *Sei $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Einparametergruppe von unitären Operatoren. Dann existiert ein selbstadjungiertes T mit $U(t) = e^{itT}$. Der Operator T heißt dann auch Generator von $U(t)$.*

Beweis: Die Strategie ist wie folgt. Man definiert $Tx = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}U(t)x$ für $x \in \mathcal{D}$ ausreichend glatt und zeigt dann, dass T wesentlich selbstadjungiert ist und $e^{i\overline{T}t} = U(t)$ gilt.

Für $x \in \mathcal{H}$ und $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ setzen wir

$$x_\varphi \;=\; \int_{\mathbb{R}} dt\; \varphi(t)\; U(t)x \;\in\; \mathcal{H}\;,$$

wobei das Integral als $\|.\|_{\mathcal{H}}$-konvergentes Riemann-Integral zu verstehen ist, was möglich ist, da $t \mapsto U(t)x \in \mathcal{H}$ stetig ist. Dann setzen wir

$$\mathcal{D} \;=\; \mathrm{span}\,\{x_\varphi \;:\; x \in \mathcal{H},\; \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})\}\;.$$

Behauptung: $\mathcal{D}$ ist dicht.

Begründung: Für $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) = [-1,1]$ setzen wir $\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x_{\varphi_\epsilon} - x\| \;&=\; \left\|\int_{\mathbb{R}} dt\; \varphi_\epsilon(t)(U(t)x - x)\right\| \\
&\leq\; \int dt\; \varphi_\epsilon(t) \sup_{-\epsilon\leq t\leq\epsilon} \|U(t)x - x\| \;\leq\; C \sup_{-\epsilon\leq t\leq\epsilon} \|U(t)x - x\|\;,
\end{aligned}$$

mit $C = \int \varphi$. Wegen der starken Stetigkeit konvergiert letzterer Ausdruck gegen 0 für $\epsilon \to 0$, und dies zeigt die Dichte.

Außerdem kann wie folgt gerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{s}\, x_\varphi \;&=\; \lim_{s\to 0} \int dt\; \varphi(t)\; \frac{U(s+t) - U(t)}{s}\; x \\
&=\; \lim_{s\to 0} \int d\tau\; \frac{\varphi(\tau - s) - \varphi(\tau)}{s}\; U(\tau)x \\
&=\; \int d\tau\; (-\varphi'(\tau))\; U(\tau)x \;=\; x_{-\varphi'}\;,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt der Satz von Lebesgue verwandt wurde. Somit ist folgende Definition möglich und sinnvoll:

$$T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}\;, \qquad T x_\varphi \;=\; \frac{1}{i}\, x_{-\varphi'} \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is}\; x_\varphi\;.$$

Dann gilt

$$U(t) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}\;, \qquad U(t)T \;=\; TU(t) \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}\;.$$

Behauptung: T ist symmetrisch und wesentlich selbstadjungiert.

Begründung: Seien $x_\varphi, x_\xi \in \mathcal{D}$, dann

$$\begin{aligned}
\langle T x_\varphi | x_\xi\rangle \;&=\; \lim_{s\to 0} \left\langle \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is}\; x_\varphi \middle| x_\xi \right\rangle \\
&=\; \lim_{s\to 0} \left\langle x_\varphi \middle| \frac{U(s) - \mathbb{1}}{is}\; x_\xi \right\rangle \;=\; \langle x_\varphi | T x_\xi\rangle\;,
\end{aligned}$$

somit ist T symmetrisch. Weiter gilt nach Satz 5.20, dass

$$\begin{aligned}
T \text{ wesentlich selbstadjungiert} \;&\Longleftrightarrow\; \mathrm{Ker}(T^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow\; (T^* x = \pm i x \text{ mit } x \in \mathcal{D}(T^*) \text{ impliziert } x = 0)\;.
\end{aligned}$$

Sei also $T^*x = ix$. Dann folgt für $y \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle U(t)y|x\rangle &= \lim_{s\to 0} \left\langle \frac{U(t+s)-U(t)}{s}\, y \middle| x \right\rangle \\ &= \langle iTU(t)y|x\rangle \\ &= -i\,\langle U(t)y|T^*x\rangle \\ &= \langle U(t)y|x\rangle\ . \end{aligned}$$

Also erfüllt $f(t) = \langle U(t)y|x\rangle$ die Differentialgleichung $f' = f$, sodass $f'(t) = e^t f(0)$. Da aber $U(t)$ unitär ist, gilt $|\langle U(t)y|x\rangle| \leq \|y\|\|x\| < \infty$ und somit $f(0) = \langle y|x\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ dicht ist, folgt $x = 0$. Ähnlich argumentiert man für $-i$. Also folgt, dass T wesentlich selbstadjungiert ist und sein Abschluss $\overline{T}$ also selbstadjungiert.

Behauptung: $U(t) = e^{it\overline{T}}$

Begründung: Setze $V(t) = e^{it\overline{T}}$. Sei $x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\overline{T})$. Nach Satz 5.27 ist $V(t)x \in \mathcal{D}(\overline{T})$, weil nämlich $[\overline{T}, V(t)] = 0$ und außerdem

$$\frac{d}{dt}\, V(t)x \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{V(s)-\mathbb{1}}{s}\, V(t)\, x \;=\; i\,\overline{T}V(t)x\ .$$

Ähnlich gilt $U(t)x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\overline{T})$. Wir setzen nun

$$w(t) \;=\; U(t)\,x - V(t)\,x\ .$$

Dann ist $w(t)$ stark differenzierbar und, unter Verwendung von $T \subset \overline{T}$,

$$\frac{d}{dt}\, w(t) \;=\; i\,TU(t)\,x - i\,\overline{T}V(t)\,x \;=\; i\,\overline{T}(U(t)\,x - V(t)\,x) \;=\; i\,\overline{T}w(t)\ .$$

Somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\|w(t)\|^2 &= \langle w'(t)|w(t)\rangle \;+\; \langle w(t)|w'(t)\rangle \\ &= -i\left\langle \overline{T}w(t)|w(t)\right\rangle \;+\; i\left\langle w(t)|\overline{T}w(t)\right\rangle \;=\; 0\ . \end{aligned}$$

Da $\|w(0)\| = 0$, folgt $w(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $U(t)x = V(t)x$ für alle $x \in \mathcal{D}$. Da aber $\mathcal{D}$ dicht ist, gilt auch $U(t) = V(t)$. □

Bemerkung 5.31 Es gilt folgende mehrdimensionale Verallgemeinerung. Sei $(U(t))_{t\in\mathbb{R}^n}$ eine stark stetige n-Parametergruppe von Unitären, d.h. eine stetige Darstellung von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann existieren n kommutierende selbstadjungierte Operatoren $T_1, \ldots, T_n$, sodass

$$U(t) \;=\; \exp(it_1T_1)\cdot\ldots\cdot\exp(it_nT_n)\ .$$

Nun sei $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t)$ eine lediglich schwach-stetige Einparametergruppe. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|U(t)x - x\|^2 &= \|U(t)x\|^2 - \langle U(t)x|x\rangle - \langle x|U(t)x\rangle + \|x\|^2 \\ &\to 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 \;=\; 0\ , \qquad \text{für } t\to 0\ . \end{aligned}$$

Somit ist $U(t)$ auch stark stetig. Tatsächlich ist noch weniger notwendig, um dies nachzuweisen.

Satz 5.32 (von Neumann) *Sei $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t)$ eine schwach-messbare Einparametergruppe von Unitären auf einem separablen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann ist $t \in \mathbb{R} \mapsto U(t)$ stark stetig.*

Beweis: Die Voraussetzung besagt, dass $t \mapsto \langle U(t)y|x\rangle$ messbar ist für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Zudem ist diese Funktion offensichtlich beschränkt, also ist

$$x \in \mathcal{H} \mapsto \int_0^a dt\, \langle U(t)y|x\rangle$$

ein stetiges Funktional mit Norm beschränkt durch $a\|y\|$. Nach dem Satz von Riesz existiert also ein $y_a \in \mathcal{H}$ mit $\langle y_a|x\rangle = \int_0^a dt\, \langle U(t)y|x\rangle$. Weiter, für $b < a$,

$$\begin{aligned}
\langle U(b)y_a|x\rangle &= \langle y_a|U(-b)x\rangle = \int_0^a dt\, \langle U(t)y|U(-b)x\rangle \\
&= \int_b^a dt\, \langle U(t+b)y|x\rangle = \int_b^{a+b} dt\, \langle U(t)y|x\rangle \ .
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
|\, \langle U(b)y_a|x\rangle - \langle y_a|x\rangle \,| &= \left| \left(\int_b^{a+b} - \int_0^a \right) dt\, \langle U(t)y|x\rangle \right| \\
&\leq \left| \int_0^b dt\, \langle U(t)y|x\rangle \right| + \left| \int_a^{a+b} dt\, \langle U(t)y|x\rangle \right| \\
&\leq 2b\, \|x\|\|y\| \ .
\end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{b\to 0} \langle U(b)y_a|x\rangle = \langle y_a|x\rangle$, d.h. $U(t)$ ist schwach-stetig auf dem Unterraum $V = \{y_a \ : \ a \in \mathbb{R},\ y \in \mathcal{H}\}$.

Behauptung: V ist dicht in $\mathcal{H}$.

Begründung: Sei $z \in V^\perp$ und $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ eine ONB von $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$0 = \left\langle x_a^{(n)}|z \right\rangle = \int_0^a dt\, \left\langle U(t)x^{(n)}|z \right\rangle .$$

Also ist $\left\langle U(t)x^{(n)}|z \right\rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}\backslash S_n$, wobei S_n Lebesgue-Maß $\lambda(S_n) = 0$ ist. Dann folgt $\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} S_n\right) = 0$. Wir wählen nun ein $t_0 \in \mathbb{R}\backslash \bigcup_{n\geq 1} S_n$, für welches dann

$$\left\langle U(t_0)x^{(n)}|z \right\rangle = 0 \ , \qquad \forall\, n \geq 1 \ ,$$

gilt. Weil $U(t_0)$ unitär ist, sodass $(U(t_0)x^{(n)})_{n\geq 1}$ eine ONB ist, folgt dann $z = 0$ und somit die Behauptung.

Mit der Dichte von V und einem $\frac{\epsilon}{3}$-Argument folgt nun die schwache Stetigkeit, und somit mit der Bemerkung vor dem Satz auch die starke Stetigkeit. □

5.3 Selbstadjungierte Erweiterungen

Ziel dieses Paragraphen ist die Konstruktion selbstadjungierter Operatoren und somit nach dem Satz von Stone auch quantenmechanischer Zeitentwicklungen.

Definition 5.33 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und somit insbesondere mit dichtem Definitionsbereich.*

T heißt halbbeschränkt $\Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $\langle x|Tx\rangle \geq c\|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$.

Satz 5.34 (Friedrichs-Erweiterung 1934) *Sei T ein halbbeschränkter symmetrischer Operator. Dann existiert eine selbstadjungierte Erweiterung T_F von T. Zudem ist T_F halbbeschränkt mit gleicher Konstante c.*

Beweis: Zunächst ersetzen wir T durch $T + (1-c)\mathbb{1}$, sodass $c = 1$ angenommen werden kann. Dann definieren wir die folgende Sesquilinearform auf $\mathcal{D}(T)$:

$$\langle x|y\rangle_F \;=\; \langle Tx|y\rangle \;, \qquad x, y \in \mathcal{D}(T) \;.$$

Es gilt nach Voraussetzung

$$\|x\|_F \;=\; \big(\langle x|x\rangle_F\big)^{\frac{1}{2}} \;=\; \big(\langle Tx|x\rangle\big)^{\frac{1}{2}} \;\geq\; \|x\| \;.$$

Somit ist $(\mathcal{D}(T), \langle .\,|\,.\rangle_F)$ ein Prähilbert-Raum. Seine Vervollständigung ist

$$\mathcal{H}_F \;=\; \{\text{Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in } \mathcal{D}(T) \text{ bez. } \|.\|_F\} \;.$$

Behauptung: $\mathcal{H}_F \subset \mathcal{H}$ ist ein Unterraum und es gibt ein $\widetilde{\mathcal{T}} : \mathcal{H}_F \hookrightarrow \mathcal{H}$, das eine stetige Einbettung ist.

Begründung: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}(T)$ bez. $\|.\|_F$. Setze $x_F = \|.\|_F\text{-}\lim x_n$. Wegen $\|.\| \leq \|.\|_F$ ist $(x_n)_{n\geq 1}$ auch eine Cauchy-Folge bez. $\|.\|$ und somit können wir auch setzen $x = \|.\|\text{-}\lim x_n$. Per Definition gilt dann $\widetilde{\mathcal{T}} x_F = x$. Noch zu zeigen ist, dass $\widetilde{\mathcal{T}}$ injektiv ist. Tatsächlich gilt für alle $y \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle y|x_n\rangle_F \;=\; \langle Ty|x_n\rangle \;.$$

Also folgt im Limes

$$\langle y|x_F\rangle_F \;=\; \langle Ty|x\rangle \;.$$

Da $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_F$ liegt, ist x_F eindeutig durch x festgelegt, denn wenn $(x'_n)_{n\geq 1}$ eine andere Cauchy-Folge bez. $\|.\|_F$ mit $x = \|.\|\text{-}\lim x'_n$ ist, dann ist $x'_F = \|.\|_F\text{-}\lim x'_n = x_F$. Somit folgt mit rein mengentheoretischen Inklusionen

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}_F \;\subset\; \mathcal{H} \;.$$

Zu $z \in \mathcal{H}$ definieren wir nun ein lineares Funktional durch

$$\ell_z : \mathcal{H}_F \to \mathbb{C} \;, \qquad \ell_z(x) \;=\; \langle z|x\rangle \;.$$

Dann ist ℓ_z stetig bez. $\|\ \|_F$, weil $|\ell_z(x)| \leq \|z\|\|x\| \leq \|z\|\|x\|_F$. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $w_z \in \mathcal{H}_F$ mit

$$\ell_z(x) \;=\; \langle z|x\rangle \;=\; \langle w_z|x\rangle_F \;, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}_F \;.$$

Die Zuordnung $z \in \mathcal{H} \mapsto w_z \in \mathcal{H}_F$ ist linear und bijektiv, weil $\mathcal{H}_F \subset \mathcal{H}$ dicht liegt. Nun definieren wir

$$\mathcal{D}(T_F) \;=\; \{w_z \in \mathcal{H}_F \;:\; z \in \mathcal{H}\} \;, \qquad T_F : \mathcal{D}(T_F) \to \mathcal{H} \;,$$
$$T_F w_z \;=\; z \;, \qquad w_z \in \mathcal{D}(T_F) \;.$$

Behauptung: T_F ist eine symmetrische Erweiterung von T, wobei die Symmetrie bez. $\langle .|.\rangle$ gemeint ist.

Begründung: Es gilt wegen $\ell_z(x) = \langle w_z|x\rangle_F = \langle z|x\rangle$ und $z = T_F w$, dass

$$\langle w|x\rangle_F \;=\; \langle T_F w|x\rangle \;, \qquad \forall\; w \in \mathcal{D}(T_F)\;,\; x \in \mathcal{H}_F \;. \tag{5.3}$$

Für $z = Ty$ mit $y \in \mathcal{D}(T)$ gilt also

$$\langle w_z|x\rangle_F \;=\; \langle z|x\rangle \;=\; \langle Ty|x\rangle \;=\; \langle y|x\rangle_F \;=\; \langle T_F w_z|x\rangle \;, \qquad \forall\; x \in \mathcal{H}_F \;.$$

Somit folgt zunächst $w_z = y$ wie auch $Ty = T_F w_z$. Das bedeutet aber $y \in \mathcal{D}(T_F)$, d.h. $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_F)$ und $Ty = T_F y$ für alle $y \in \mathcal{D}(T)$. In Kurzschreibweise haben wir bis jetzt also $T \subset T_F$ gezeigt.

Aus (5.3) für $w, x \in \mathcal{D}(T_F)$ folgt des Weiteren

$$\langle T_F w|x\rangle \;=\; \langle w|x\rangle_F \;=\; \overline{\langle x|w\rangle_F} \;=\; \overline{\langle T_F x|w\rangle} \;=\; \langle w|T_F x\rangle \;,$$

d.h. T_F ist symmetrisch bez. $\langle .|.\rangle$ und dies beendet den Beweis der Behauptung.

Nun kommen wir zum Schluss des Argumentes. Da $T_F : \mathcal{H}_F \to \mathcal{H}$ bijektiv ist, kann man folgende Abbildung definieren:

$$S \;=\; (T_F)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_F \;.$$

Als Inverses eines symmetrischen Operators ist S wieder symmetrisch. Da S überall definiert ist, besagt der Satz von Hellinger-Toeplitz, dass $S = S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator ist. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im m(\lambda) \neq 0$ ist also $(\lambda \mathbb{1} - S)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Aus der Identität (mit S^{-1} zunächst wie üblich formal definiert)

$$\frac{1}{\lambda}\;\mathbb{1} - S^{-1} \;=\; \frac{1}{\lambda}(S - \lambda\mathbb{1})\;\S^{-1}, \quad \text{auf}\;\; \mathcal{D}(S^{-1}) = \mathcal{D}(T_F)\;,$$

folgt

$$\left(\frac{1}{\lambda}\;\mathbb{1} - S^{-1}\right)^{-1} \;=\; \lambda S(S - \lambda\mathbb{1})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\;,$$

d.h. $\frac{1}{\lambda} \in \rho(S^{-1}) = \rho(T_F)$. Somit $\sigma(S^{-1}) = \sigma(T_F) \subset \mathbb{R}$. Nun folgt mit Satz 5.18, dass T_F selbstadjungiert ist. □

Um ein besseres Gefühl für das Erweiterungsproblem zu bekommen, ist es unbedingt notwendig, sich Beispiele im Detail anzusehen.

Beispiele 5.35 1. Als Erstes betrachten wir die Friedrichs-Erweiterung des eindimensionalen Schrödinger-Operators auf einem Intervall $I = (0,1)$. Der Hilbert-Raum ist dann $L^2(I)$ und der Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = C_0^2$ die Menge der zweimal stetigen am Rand verschwindenden Funktionen. Für ein stetiges $q \in C(I, \mathbb{R}),\; q \geq 1$, setzen wir dann

$$T \;=\; -\partial^2 + q(x)\;.$$

Wegen partieller Integration

$$\|\psi\|_F^2 \;=\; \langle \psi|T\psi\rangle_{L^2} \;=\; \int_0^1 dx(|\partial\psi(x)|^2 + q(x)\psi(x)|^2) \;\geq\; (\min_{x\in I} q(x))\|\psi\|_{L^2}^2\;.$$

Somit ist T von unten halbbeschränkt und somit sind T_F und $\mathcal{D}(T_F)$ durch Satz 5.34 gegeben.

Behauptung: Jede Funktion in $\mathcal{D}(T_F)$ ist stetig auf $[0,1]$ und verschwindet an den Rändern. Somit erfüllt T_F Dirichlet-Randbedingungen.

Begründung: Wir zeigen dies für $\mathcal{H}_F$, dann gilt es ja auch für $\mathcal{D}(T_F) \subset \mathcal{H}_F$. Seien $\psi \in C_0^2(I)$ und $0 \leq a < b \leq 1$, dann folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\psi(b) - \psi(a)| &= \left| \int_a^b dx \; \partial\psi(x) \right| \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b dx \; |\partial\psi(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{b-a} \; \|\psi\|_F \; . \end{aligned}$$

Sei nun $(\psi_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C_0^2(I)$, die die Cauchy-Eigenschaft bez. $\|.\|_F$ hat. Dann folgt aus

$$\|\psi_n - \psi_m\|_\infty = \sup_{x\in I} |(\psi_n - \psi_m)(x) - (\psi_n - \psi_m)(0)| \leq \|\psi_n - \psi_m\|_F \; ,$$

dass sie auch die Cauchy-Eigenschaft bez. $\|.\|_\infty$ hat. Somit ist der Limes $\psi = \lim \psi_n$ und verschwindet am Rand, da $|\psi(0)| \leq |\psi(0) - \psi_n(0) + \psi_n(0)| \leq \|\psi - \psi_n\|_\infty \to 0$.

2. Das Beispiel 1. hat folgende Verallgemeinerung. Sei $0 < p \in C^1(I)$ und $\mathcal{H}$ sowie $\mathcal{D}(T)$ wie oben. Dann ist der Sturm-Liouville-Operator definiert durch

$$T = -\partial p \partial + q \; .$$

Wiederum gibt es eine Friedrichs-Erweiterung, die mit Dirichlet-Randbedingungen einhergeht. Falls p Nullstellen am Rand hat, so spricht man von einem singulären Sturm-Liouville-Operator. Die Theorie seiner Erweiterung ist wesentlich komplizierter und geht auf Weyl zurück.

3. Nun betrachten wir ein höher dimensionales Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ und $\mathcal{D}(T) = C_0^2(\Omega)$. Wie oben sei ein positives Potential gegeben:

$$q \in C(\Omega) \; , \qquad q \geq 1 \; .$$

Dann ist der zugehörige Schrödinger-Operator gegeben durch

$$T = -\Delta + q = -\sum_{j=1}^{\alpha} \partial_j^2 + q \; .$$

Wiederum gilt

$$\langle \psi | T\psi \rangle \geq \|\psi\|^2 \; ,$$

und somit existiert die Friedrichs-Erweiterung T_F. Falls der Rand glatt ist, kann man zeigen, dass $\mathcal{D}(T_F) = H_0^2(\Omega)$. Da Funktionen in diesem Sobolev-Raum auf dem Rand im Mittel verschwinden, liegen also wieder Dirichlet-Raumbedingungen vor. Um ein Wasserstoffatom zu beschreiben, muss allerdings ein Coulomb-Potential betrachtet werden:

$$q(x) = -\frac{1}{|x|} \; .$$

Dies ist nicht nach unten beschränkt. Nun können Sobolev-Ungleichungen verwandt werden, um dennoch die wesentliche Selbstadjungiertheit für $\Omega = \mathbb{R}^d$ nachzuweisen.

4. Nun kommen wir zum Spezialfall $T = -\Delta$ auf $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ und zeigen, dass dieser Operator wesentlich selbstadjungiert ist. Intuitiv bedeutet dies, dass das Fehlen eines Randes keine Freiheit bei der Konstruktion der Erweiterung lässt. Zunchst sei erinnert an Kapitel 2.3:

$$\begin{aligned} W^2 &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d), |\alpha| \leq 2\} \,, \qquad \text{(hierbei ist } D^\alpha \text{ schwache Ableitung)} \,, \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, (1+|p|^2)(\mathcal{F}_2 f)(p) \in L^2(\mathbb{R})\} \,. \end{aligned}$$

Zudem gilt $\mathcal{F}_2 D^\alpha \mathcal{F}_2^* = i^{|\alpha|} p^\alpha = i^{|\alpha|} M_{p^\alpha}$ auf $\mathcal{S}$, also $\mathcal{F}_2(-\Delta)\mathcal{F}_2^* = M_{|p|^2}$ auf $\mathcal{S}$.

Nun ist $\mathcal{D}(\overline{M_{|p|^2}}) = \{\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, |p|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\} = \mathcal{F}_2 W^2$ der Definitionsbereich des Abschlusses $\overline{M_{|p|^2}}$ des wesentlich selbstadjungierten Operators $M_{|p|^2} : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^d)$, wobei die wesentliche Selbstadjungiertheit aus der Dichte von $\mathrm{Ran}(M_{|p|^2} \pm i\mathbb{1}) = (M_{|p|^2} \pm i\mathbb{1})\mathcal{S} \supset \mathcal{D}$ in $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ folgt. Somit ist $-\Delta$ wesentlich selbstadjungiert und $\mathcal{D}(\overline{-\Delta}) = \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 W^2 = W^2$. Dies muss also auch die Friedrichserweiterung sein.

Beispiel 5.36 Als nächstes Beispiel betrachten wir den Impuls-Operator $T{=}i\frac{d}{dx}$ in Dimension 1. Wir zeigen Folgendes:
Behauptung 1: T ist wesentlich selbstadjungiert auf $C_K^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Behauptung 2: T ist symmetrisch auf $C_K^1(\mathbb{R}_{>0}) \subset L^2(\mathbb{R}_{>0})$, aber $\overline{T}$ ist nicht selbstadjungiert und es gibt keine selbstadjungierten Erweiterungen.

Behauptung 3: T ist symmetrisch auf $C_K^1(I) \subset L^2(I)$, wobei $I = (0,1)$, aber $\overline{T}$ ist nicht selbstadjungiert. Andererseits gibt es selbstadjungierte Erweiterungen (mehrere!).

Begründung 1: Dass T symmetrisch ist, folgt nach partieller Integration. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ran}(T - \lambda\mathbb{1}) &= \{f \in C_K^0(\mathbb{R}) \,:\, \exists\, g \in C_K^1(\mathbb{R}) \text{ mit } (T-\lambda\mathbb{1})g = f\} \\ &= \{f \in C_K^0(\mathbb{R}) \,:\, \int dx\ f(x) e^{i\lambda x} = 0\} \,. \end{aligned}$$

Um die letzte Gleichung zu beweisen, verwenden wir, dass $(T-\lambda\mathbb{1})g = i\frac{d}{dx}g - \lambda g = f$ umgeschrieben werden kann zu $i\frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda x} g\right) = e^{i\lambda x} f$. Weil g kompakten Träger hat, folgt nach Integration dann

$$0 = \int dx\ e^{i\lambda x} f(x) \,. \tag{5.4}$$

Umgekehrt, für $f \in C_K^0(\mathbb{R})$ mit $\int dx\ e^{i\lambda x} f(x) = 0$ definieren wir

$$g(x) = -i \int_{-\infty}^{x} dy\ e^{i\lambda(y-x)} f(y) \,.$$

Dann hat g eine stetige Ableitung und kompakten Träger $\mathrm{supp}(g)$.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$ dicht ist für $\Im m(\lambda) \neq 0$ und somit T wesentlich selbstadjungiert ist nach Satz 5.20. In der Tat, $C_K^0(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$ und wir zeigen jetzt, dass jedes $F \in C_K^0(\mathbb{R})$ durch $f \in \mathrm{Ran}(T-\lambda\mathbb{1})$ in $\|.\|_2$ beliebig gut approximiert werden kann. Sei $\Im m(\lambda) < 0$ und

$$C = \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{i\lambda x} F(x) \,.$$

Für $\delta > 0$ und $\varphi \in C^\infty((0,2))$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\int \varphi = 1$, setzen wir

$$f_\delta(x) \;=\; F(x) \;-\; Ce^{-i\lambda x}\delta\varphi(\delta x)\;.$$

Dann erfüllt $f_\delta \in C^0_K(\mathbb{R})$ die Gleichung (5.4) und

$$\|f_\delta - F\|^2 \;=\; C^2\delta^2 \int dx\; e^{2i\lambda x}\varphi(\delta x)^2 \le\; C^2\delta^2 \int dx\; \varphi(\delta x)^2 \;\le\; C^2\delta \int d(\delta x)\; \varphi(\delta x) \;\le\; C^2\delta\;.$$

Für $\Im m(\lambda) > 0$ verwendet man $\varphi \in C^\infty((-2,0))$. Dies beendet den Beweis der Selbstadjungiertheit.

Dieser etwas längliche Beweis wurde so geführt, weil die technischen Details weiter unten noch verwandt werden. Der Vollständigkeit halber sei aber auch noch ein viel einfacherer Beweis gegeben. Die Translation um $t \in \mathbb{R}$ ist definiert durch $(U(t)\psi)(x) = \psi(x-t)$. Dies ist offensichtlich eine unitäre Abbildung auf $L^2(\mathbb{R})$. Außerdem gilt die Gruppeneigenschaft $U(t)U(s) = U(t+s)$ und die starke Stetigkeit kann auch überprüft werden. Nach dem Satz von Stone ist T dann als Generator dieser Einparametergruppen selbstadjungiert.

Begründung 2: Auf $C^1_K(\mathbb{R}_{>0})$ gilt mit dem gleichem Argument wie oben, dass

$$\mathrm{Ran}(T - \lambda\mathbb{1}) \;=\; \left\{ f \in C^0_K(\mathbb{R}_{>0}) \;:\; \int dx\, f(x)e^{i\lambda x} = 0 \right\}\;,$$

und dass $\mathrm{Ran}(T - \lambda\mathbb{1})$ dicht liegt für $\Im m(\lambda) < 0$. Aber für $\Im m(\lambda) > 0$ ist $e^{i\lambda x} \in L^2(\mathbb{R}_{>0})$, also folgt, dass

$$\mathrm{Ran}(T - \lambda\mathbb{1}) \;\subset\; (e^{i\lambda x})^\perp$$

nicht dicht liegen kann. Hieraus folgt, dass $\overline{T}$ nicht selbstadjungiert ist.

Sei $T \subset \overline{T} \subset S$ nun eine selbstadjungierte Erweiterung (welche dann $\overline{T}$ erweitern muss). Sei $x \in \mathcal{D}(S)$, aber $x \notin \mathcal{D}(\overline{T})$. Für $\Im m(\lambda) < 0$ ist $\overline{T} - \lambda\mathbb{1} : \mathcal{D}(\overline{T}) \to \mathcal{H}$ dicht, also existiert ein $y \in \mathcal{D}(\overline{T})$ mit

$$(\overline{T} - \lambda\mathbb{1})y \;=\; (S - \lambda\mathbb{1})x \;+\; v\;, \qquad \|v\| = \epsilon.$$

Da $\overline{T} \subset S$, gilt also

$$\|(S - \lambda\mathbb{1})(x-y)\| \;=\; \epsilon\;.$$

Da S symmetrisch ist, gilt somit

$$\epsilon \;=\; \|(S - \lambda\mathbb{1})(x-y)\|^2 \;=\; \|(S - \Re e(\lambda)\mathbb{1})\;(x-y)\|^2 + \Im m(\lambda)^2\|x-y\|^2\;,$$

sodass $\|x - y\| = 0$, d.h. $x = y \in \mathcal{D}(\overline{T})$, im Widerspruch zu Obigem.

Begründung 3: Wiederum gilt

$$\mathrm{Ran}(T - \lambda\mathbb{1}) \;=\; \left\{ f \in C^0_K(I) \;:\; \int dx\, f(x)e^{i\lambda x} = 0 \right\}.$$

Also folgt für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dass

$$\mathrm{Ran}(\overline{T} - \lambda\mathbb{1}) \;=\; (e^{i\lambda x})^\perp\;, \qquad e^{i\lambda x} \in L^2(I)\;.$$

Somit ist $\overline{T}$ nicht selbstadjungiert. Nun kommen wir zur expliziten Konstruktion von selbstadjungierten Erweiterungen. Sei hierzu $\alpha \in (0, 2\pi)$ und

$$\mathcal{D}(T_\alpha) \;=\; \{g \in C(\overline{I}) \,:\, g \in C^1(I),\; g(1) = e^{i\alpha} g(0)\}$$

und $T_\alpha = i\frac{d}{dx}$. Offensichtlich gilt $T \subset T_\alpha$. Zudem ist T_α symmetrisch, denn für $f, g \in \mathcal{D}(T_\alpha)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle f | T_\alpha g \rangle \;&=\; \int_0^1 dx\; \overline{f(x)}\; i\frac{d}{dx}\; g(x) \\
&=\; \int_0^1 dx\; \overline{i\frac{d}{dx} f(x)} g(x) \;+\; \overline{f(x)} g(x)|_0^1 \\
&=\; \langle T_\alpha f | g \rangle \;+\; \overline{f(1)} g(1) \;-\; \overline{f(0)} g(0) \\
&=\; \langle T_\alpha f | g \rangle \;.
\end{aligned}$$

Behauptung: $C(\overline{I}) \subset \mathrm{Ran}(T_\alpha - \mathbb{1}\lambda)$ und somit folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit, weil $C(\overline{I}) \subset L^2(\overline{I})$ dicht ist.
Begründung: Sei $f \in C(\overline{I})$, suche $g \in \mathcal{D}(T_\alpha)$, sodass

$$f \;=\; (T_\alpha - \lambda\mathbb{1}) g \qquad e^{i\lambda x} f \;=\; i\; \frac{d}{dx}\; (e^{i\lambda x} g) \;.$$

Nun integrieren wir diese Gleichung

$$\int_0^x dy\, e^{i\lambda y} f(y) \;=\; i(e^{i\lambda x} g(x) - g(0)) \;,$$

somit $g(x) = e^{-i\lambda x} g(0) - i \int_0^x dy\, e^{i\lambda(y-x)} f(y)$. Insbesondere soll gelten $g(1) = e^{i\alpha} g(0)$, also wählen wir

$$g(0) \;=\; \frac{1}{1 - e^{i(\alpha+\lambda)}}\; i \int_0^1 dy\, e^{i\lambda y -} f(y) \;.$$

Nun soll die Standardtechnik zur Konstruktion von anderen selbstadjungierten Erweiterungen, also z.B. solchen, die nicht Dirichlet-Randbedingungen entsprechen, aufgezeigt werden.

Satz 5.37 und Definition *Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann ist*

$$\lambda \in \mathbb{C} \;\mapsto\; \dim\big(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*)\big) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

konstant in jeweils der oberen und unteren Halbebene. Dies definiert die Defektindizes n_+ und n_-. Zudem definiert man die Defektunterräume als

$$N_\pm \;=\; \mathrm{Ker}(i\mathbb{1} \mp T^*) \;=\; \mathrm{Ran}(i\mathbb{1} \pm T)^\perp \;.$$

Beweis: (Ähnlich wie in Satz 5.18 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)) Da T abgeschlossen und symmetrisch ist, folgt dass $\mathrm{Ran}(\lambda\mathbb{1} - T)$ ein abgeschlossener Unterraum ist, wenn nur $\lambda \notin \mathbb{R}$. Also liegt folgende Zerlegung vor:

$$\mathcal{H} \;=\; \mathrm{Ran}(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T) \oplus \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*) \;, \qquad \lambda \notin \mathbb{R} \;.$$

Außerdem gilt für $\lambda = \nu + i\mu$:

$$\|(\lambda\mathbb{1} - T)z\|^2 \;=\; \|(\nu\mathbb{1} - T)z\|^2 + \mu^2 \|z\|^2 \;\geq\; \mu^2 \|z\|^2 \;. \tag{5.5}$$

Es reicht zu zeigen, dass $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*))$ lokal konstant ist. Sei also $\eta \in \mathbb{C}$ klein.

Behauptung: Wenn $|\eta| < |\mu|$, gilt $\mathrm{Ker}((\lambda+\eta)\mathbb{1} - T^*) \cap \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*)^\perp = \{0\}$.

Begründung: Sei $x \in \mathrm{Ker}((\lambda+\eta)\mathbb{1} - T^*) \cap \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*)^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Dann ist $x \in \mathrm{Ran}(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)$ und es existiert ein z mit $(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)z = x$, und wegen (5.5) gilt $\|x\|^2 \geq \mu^2\|z\|^2$. Andererseits

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \langle((\lambda+\eta)\mathbb{1} - T^*)x|z\rangle \;&=\; \left\langle x|(\overline{\lambda}\mathbb{1} - T)z\right\rangle \;+\; \overline{\eta}\,\langle x|z\rangle \\ &=\; \|x\|^2 \;+\; \overline{\eta}\,\langle x|z\rangle \;, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu $|\overline{\eta}\,\langle x|z\rangle\,| \leq \frac{|\eta|}{|\mu|}\|x\|^2 < 1$ steht. Also ist die Behauptung bewiesen.

Aus obiger Behauptung folgt nun die Gleichheit $\dim \mathrm{Ker}((\lambda+\eta)\mathbb{1} - T^*) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{1} - T^*)$ nach folgendem Lemma. □

Lemma 5.38 *Wenn $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Unterräume eines Hilbert-Raumes sind, mit $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}^\perp = \{0\}$, dann gilt $\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathcal{F})$.*

Beweis: Sei $\dim(\mathcal{E}) > \dim(\mathcal{F})$. Wähle ONB $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathcal{F}$ und ergänze durch einen weiteren orthogonal darauf stehenden Vektor $w \in \mathrm{span}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Dieser Vektor erfüllt $w \in \mathcal{E}$ und $w \perp \mathcal{F}$, im Widerspruch zur Annahme. Analog zeigt man die umgekehrte Ungleichung. □

Bemerkung 5.39 Mit dem gleichem Argument kann gezeigt werden, dass wenn T halbbeschränkt ist, so folgt auch $n_+ = n_-$. Außerdem gilt, wieder mit dem gleichen Argument, dass wenn $S = S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkt ist, so sind die Defektindizes von $T + S$ und T gleich.

Satz 5.40 (von Neumann) *Sei T abgeschlossen und symmetrisch. Dann gilt:*

(i) *T hat eine selbstadjungierte Erweiterung $\Longleftrightarrow n_+ = n_-$, wobei $\infty = \infty$ möglich ist.*

(ii) *Falls $n_+ = n_-$, gibt es eine Bijektion zwischen den unitären Abbildungen $U : N_+ \to N_-$ und den selbstadjungierten Erweiterungen T_U von T. Explizit sind diese gegeben durch*

$$\mathcal{D}(T_U) \;=\; \{x - y + Uy \;:\; x \in \mathcal{D}(T),\; y \in N_+\} \;,$$

$$T_U(x - y + Uy) \;=\; Tx - iy - iUy \;.$$

Bemerkung 5.41 Falls $n_+ \neq n_-$, können wir wie im Beweis maximale abgeschlossene symmetrische Erweiterungen konstruieren bis entweder $n_+ = 0$ oder $n_- = 0$.

Beweis: Wie oben folgt mit Satz 5.18, Implikation (ii) $\Longrightarrow$ (iii), dass $\mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1})$ abgeschlossen ist und es die orthogonale Zerlegungen gibt:

$$\mathcal{H} \;=\; \mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1}) \oplus N_+ \;=\; \mathrm{Ran}(T - i\mathbb{1}) \oplus N_- \;. \tag{5.6}$$

Zudem sind

$$T \pm i\mathbb{1} : \mathcal{D}(T) \;\to\; \mathrm{Ran}(T \pm i\mathbb{1}) \;,$$

bijektiv, wobei die Injektivität aus $\|(T \pm i\mathbb{1})x\|^2 \geq (\pm 1)^2\|x\|^2$ folgt.

Somit kann man die Abbildung

$$\mathcal{C}(T) \;=\; (T - i\mathbb{1})(T + i\mathbb{1})^{-1} : \mathrm{Ran}(T + i\mathbb{1}) \;\to\; \mathrm{Ran}(T - i\mathbb{1})$$

definieren. Wiederum ist $\mathcal{C}(T)$ isometrisch, weil ja für alle $y \in \mathcal{D}(T)$

$$\|(T+i\mathbb{1})y\|^2 \;=\; \|Ty\|^2 + \|y\|^2 \;=\; \|(T-i\mathbb{1})y\|^2 \;,$$

sodass Einsetzen von $y = (T+i\mathbb{1})^{-1}x$ mit $x \in \operatorname{Ran}(T+i\mathbb{1})$ zu

$$\|x\|^2 \;=\; \|\mathcal{C}(T)x\|^2$$

führt. Jetzt vervollständigen wir $\mathcal{C}(T)$ zu einem unitären Operator (überall definierte Isometrie):

$$V \;=\; \mathcal{C}(T) \oplus U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \;,$$

wobei die direkte Summe gemäß der ersten Zerlegung in (5.6) zu verstehen ist. Nun wird die Erweiterung definiert durch

$$T_U \;=\; \mathcal{C}^{-1}(V) \;=\; -i(\mathcal{C}(T) \oplus U + \mathbb{1})(\mathcal{C}(T) \oplus U - \mathbb{1})^{-1} \;.$$

Behauptung: T_U ist wohldefiniert auf $\mathcal{D}(T_U)$, selbstadjungiert und eine Erweiterung von T.

Begründung: Seien $z \in \operatorname{Ran}(T+i\mathbb{1})$ und $y \in N_+$. Dann gilt $\langle z|y\rangle = 0$ und

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}(T) \oplus U - \mathbb{1})(z+y) \;&=\; \mathcal{C}(T)z - z + Uy - y \\
&=\; x + Uy - y
\end{aligned}$$

wobei

$$x \;=\; (\mathcal{C}(T) - \mathbb{1})z \;=\; ((T-i\mathbb{1}) - (T+i\mathbb{1}))(T+i\mathbb{1})^{-1}z \;=\; -2i(T+i\mathbb{1})^{-1}z \in \mathcal{D}(T) \;.$$

Somit folgt gemäß der Definition von $\mathcal{D}(T_U)$, dass

$$(\mathcal{C}(T) \oplus U - \mathbb{1})^{-1} : \mathcal{D}(T_U) = \operatorname{Ran}(\mathcal{C}(T) \oplus U - \mathbb{1}) \to \operatorname{Ran}(T+i\mathbb{1}) \oplus N_+ \;=\; \mathcal{H} \;.$$

Hieraus folgt auch für $x + Uy - y \in \mathcal{D}(T_U)$, dass

$$\begin{aligned}
T_U(x - y + Uy) \;&=\; -i(\mathcal{C}(T) \oplus U + \mathbb{1})(\mathcal{C}(T) \oplus U - \mathbb{1})^{-1}(x - y + Uy) \\
&=\; -i(\mathcal{C}(T) \oplus U + \mathbb{1})(z+y) \\
&=\; -i(\mathcal{C}(T) \oplus U + \mathbb{1}) \left(\frac{i}{2}\,(T+i\mathbb{1})x + y \right) \;, \qquad \text{weil } z = \frac{i}{2}(T+\mathbb{1})x \\
&=\; -i(\mathcal{C}(T) + \mathbb{1})\,\frac{i}{2}\,(T+i\mathbb{1})x - i(U+\mathbb{1})y \;, \qquad \text{weil } \langle y|(T+i\mathbb{1})x\rangle = 0 \\
&=\; Tx - iUy - iy \;.
\end{aligned}$$

Somit ist die definierende Formel geklärt, sowie die Tatsache, dass T_U eine Erweiterung von T ist. Nun überprüfen wir zunächst, dass T_U symmetrisch ist:

$$\begin{aligned}
\langle T_U z|z'\rangle \;&=\; i\left\langle (V-\mathbb{1})^{-1}(V+\mathbb{1})z|z'\right\rangle \\
&=\; i\left\langle z|(V^*+\mathbb{1})(V^*-\mathbb{1})^{-1}z'\right\rangle \\
&=\; i\left\langle z|(V^{-1}+\mathbb{1})VV^{-1}(V^{-1}-\mathbb{1})^{-1}z'\right\rangle \\
&=\; i\left\langle z|(\mathbb{1}+V)(\mathbb{1}-V)^{-1}z'\right\rangle \;=\; \langle z|T_U z'\rangle \;.
\end{aligned}$$

Gemäß Satz 5.40 ist jetzt T_U selbstadjungiert, falls $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \notin \sigma(T_U)$. Somit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\lambda\mathbb{1} - T_U &= \lambda\mathbb{1} - i(V+\mathbb{1})(V-\mathbb{1})^{-1} \\
&= (\lambda(V-\mathbb{1}) - i(V+\mathbb{1}))(V-\mathbb{1})^{-1} \\
&= -(\lambda - i)\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i} - V\right)(V-\mathbb{1})^{-1},
\end{aligned}$$

sodass $\frac{\lambda+i}{\lambda-i} = \mathcal{C}^{-1}(\lambda) \notin \mathbb{S}^1$ und

$$(\lambda\mathbb{1} - T_U)^{-1} \;=\; \frac{-1}{\lambda - i}\,(V-\mathbb{1})(\mathcal{C}^{-1}(\lambda) - V)^{-1}$$

existiert in der Tat. □

Beispiel 5.42 Wie oben sei $T = i\frac{d}{dx}$ auf $C^1_K(I) \subset L^2(I)$ für $I = (0,1)$. Dann ist

$$N_\pm \;=\; \operatorname{Ker}(i \mp i\partial_x) \;=\; \operatorname{span}\{e^{\pm x}\}\ , \qquad n_+ = n_- = 1\ .$$

Somit wird $U : N_+ \to N_-$ gegeben durch

$$Ue^x = e^{i\beta}e^{1-x}\ , \qquad \beta \in [0, 2\pi)\ .$$

Dann ist der Definitionsberich gegeben durch

$$g(x) \;=\; f(x) + c(-e^x + e^{i\beta}e^{1-x})\ , \qquad f \in C^1_K(I)\ ,\ \ c \in \mathbb{M}\ .$$

Es gilt für $c = 1$

$$g(1) \;=\; -e + e^{i\beta} \;=\; -\,e^{i\beta}\frac{-1+e^{-i\beta}e}{-1+e^{i\beta}e}\,(-1+e^{i\beta}e) \;=\; -\,e^{i\beta}\frac{-1+e^{-i\beta}e}{-1+e^{i\beta}e}\,g(0)\ .$$

Setzt man also

$$e^{i\alpha} \;=\; -\,e^{i\beta}\frac{-1+e^{-i\beta}e}{-1+e^{i\beta}e}\ ,$$

dann erhält man den Definitionsbereich obiger expliziter Konstruktion.

Bemerkung 5.43 Falls $n_+ = n_-$, kann die Wahl das Definitionsbereiches auch verstanden werden als die Wahle einer Lagrange'schen Ebene in $L \subset N_+ \oplus N_-$ versehen mit dem indefinite Skalarprodukt induziert durch $J = -iT^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$. Diese Lagrange'sche Ebene L ist beschrieben durch U mittels

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ Uy \end{pmatrix} \;:\; y \in N_+ \right\}\ .$$

Nun ist $\mathcal{D}(T_U) = \mathcal{D}(T) + L$ und $T_U = T^*|_{\mathcal{D}(T_U)}$, was wegen

$$T^*\begin{pmatrix} -y \\ Uy \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -iy \\ -iUy \end{pmatrix}\ ,$$

mit obigem übereinstimmt.

Literatur

[Gro] S. Großmann, *Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik*, (Aula-Verlag, 1988).

[HS] P. R. Halmos, V. S. Sunder, *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*, (Springer, Berlin, 1978).

[Kat] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, (Springer, Berlin, 1980).

[Lax] P. Lax, *Functional analysis*, (Wiley, New York, 2002).

[MOA] A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, 2nd Edition, (Springer, New York, 2011).

[RS] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, Vol. I-IV*, (Academic Press, New York, 1972-1978).

[Wer] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 5. Auflage, (Springer, Berlin, 2009).