Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 4 (8.5.2024-15.5.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P16: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei $\alpha = \sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(1) Bestimme das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.
(2) Bestimme die Primfaktorzerlegung von f in $L[x]$.
(3) Sei K ein echter Zwischenkörper der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ und $g_K \in K[x]$ das Minimalpolynom von α über K. Welche Möglichkeiten gibt es für die Primfaktorzerlegung von g_K in $L[x]$? Was folgt für K?
(4) Bestimme alle echten Zwischenkörper der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$.

Aufgabe P17: Gegeben seien die komplexen Zahlen $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $\beta = \zeta\sqrt[3]{2}$. Aus Aufgabe H7 wissen wir, dass $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = 6$ gilt. Zeige:

(1) Das Minimalpolynom von $\alpha + \beta$ ist $x^3 + 2$.
(2) Das Minimalpolynom von $\alpha - \beta$ ist $x^6 + 108$.
(3) Es gilt $\mathbb{Q}(\alpha + \beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ und $\mathbb{Q}(\alpha - \beta) = \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$. ($\alpha - \beta$ ist also ein primitives Element der Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)|\mathbb{Q}$.)

(Es darf das auf diesem Blatt angegebene Irreduzibilitätskriterium für Polynome des Typs $x^n - a$ verwendet werden.)

Irreduzibilitätskriterium: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a \in K^*$, sodass gilt

- $a \notin \{c^p : c \in K\}$ für alle Primzahlen p mit $p \mid n$,
- $a \notin \{-4c^4 : c \in K\}$, falls $4 \mid n$,

so ist das Polynom $x^n - a \in K[x]$ irreduzibel.

Aufgabe P18: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) K sei ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, $L|K$ sei eine Körpererweiterung vom Grad p^2, es gebe Elemente $u, v \in L$ mit $L = K(u, v)$ und $u^p, v^p \in K$.

(1) Zeige, dass gilt $[K(u)(v) : K(u)] = [K(u) : K] = p$, und folgere, dass $(u^i v^j)_{0\leq i\leq p-1, 0\leq j\leq p-1}$ eine K-Basis von L ist.
(2) Zeige, dass für $\xi \in L \setminus K$ gilt $\xi^p \in K$ und folgere $[K(\xi) : K] = p$. (Insbesondere besitzt die Körpererweiterung $L|K$ kein primitives Element.)
(3) Für $\lambda \in K$ sei ein Zwischenkörper $K \subseteq M_\lambda \subseteq L$ definiert durch

$$M_\lambda = K(u + \lambda v).$$

Datei: kt_u4.tex. Version vom 7.5.2024

Zeige: Für $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$\lambda \neq \mu \quad \Longrightarrow \quad M_\lambda \neq M_\mu.$$

(Ist K unendlich, so gibt es also unendlich viele Zwischenkörper M_λ.)

Aufgabe P19: Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und

$$\beta = 3 + 2\alpha + \alpha^2.$$

(1) Warum ist $1, \alpha, \alpha^2$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K?
(2) Bestimme die β darstellende Matrix $A(\beta)$ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$.
(3) Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_{\beta, K|\mathbb{Q}}(x)$ von β.
(4) Bestimme $\mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$ und $\mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(\beta)$.
(5) Bestimme das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe P20: (Staatsexamensaufgabe) Der Körper K enthalte einen endlichen Teilkörper, der aus den n Elementen $a_1, \ldots, a_n$ bestehe. Man beweise: Für jedes Element $a \in K$ gilt

$$a^n - a = \prod_{i=1}^{n} (a - a_i).$$

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H10: (Teil einer Staatsexamensaufgabe) Man zeige $1+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Aufgabe H11: Sei $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und
$$\beta = 1+\alpha, \quad \gamma = 2+\alpha^2, \quad \delta = 3+\alpha^3.$$

(1) Warum ist $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K?
(2) Bestimme die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ darstellenden Matrizen $A(\alpha), A(\beta), A(\gamma), A(\delta)$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$.
(3) Bestimme die charakteristischen Polynome von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (Hinweis: Die Verwendung geeigneter Software ist zulässig.)
(4) Bestimme die Spuren und Normen
$$\mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha), \quad \mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\beta), \quad \mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\gamma), \quad \mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\delta)$$
und
$$\mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha), \quad \mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(\beta), \quad \mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(\gamma), \quad \mathrm{N}_{K|\mathbb{Q}}(\delta).$$
(5) Bestimme das Minimalpolynom von γ. In welchem Zusammenhang steht es zum charakteristischen Polynom von γ?

Aufgabe H12: Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und x eine Unbestimmte über K. Die Chebyshev-Polynome 1. Art $T_n(x) \in K[x]$ werden rekursiv durch
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ für } n \geq 2$$
definiert.

(1) Berechne $T_n(x)$ für $0 \leq n \leq 9$.
(2) Zeige, dass für $u \in K^*$ und $n \geq 0$ gilt
$$T_n\left(\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})\right) = \frac{1}{2}(u^n + \frac{1}{u^n}).$$
(3) Folgere aus (4) durch geeignete Wahl von u, dass für $K = \mathbb{R}$, $n \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ die Beziehung
$$T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$$
gilt.

(Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\cos\frac{2\pi}{n}$ also Nullstelle des Polynoms $T_n(x) - 1$, insbesondere algebraisch über $\mathbb{Q}$.)

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 15.5.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen