Analysis 3

Hermann Schulz-Baldes, Dept. Mathematik

Vertretung: Andreas Knauf, Raum 02.321, knauf@math.fau.de

Assistenz: Daniel Oeh, Dept. Mathematik

Vorlesung, Wintersemester 2017

Termine

Vorlesungstermine

Mo 10:15 – 12:00 Uhr	Raum: H12	Schulz-Baldes, Knauf
Fr 12:15 – 14:00 Uhr	Raum: H12	Schulz-Baldes, Knauf

Übungstermine

Großübung	Di 16:15 –18:00	Raum: H12	Oeh
Gruppe 1	Mo 12:15 – 13:45	Raum: Ü2 Cauerstr. 11	
Gruppe 2	Di 10:15 – 11:45	Raum: Ü2 Cauerstr. 11	
Gruppe 3	Do 12:15 – 13:45	Raum: Ü2 Cauerstr. 11	
Gruppe 4	Fr 10:15 – 11:45	Raum: Ü2 Cauerstr. 11	

Regeln

Anmeldung

- Melden Sie sich in Studon zu Veranstaltung und Übungen an
  Beachten Sie Anmeldefristen für Klausur

Übungen

- Die Übungsblätter werden montags auf Studon bereitgestellt
- Die Abgabe bis Montag 11:00 in Übungskasten (Cauerstr. 11) oder in der Vorlesung
- Es werden nur leserliche und ordentliche Abgaben akzeptiert
- Es sind Zweierabgaben gestattet, solange beide die gleiche Übungsgruppe besuchen
- Zu Semesterende sind 50% der Gesamtpunktzahl vorzuweisen

Klausur

- Die Klausur findet am 12.2.2018 um 8:00 in H12, H13 statt
- Einsicht in den Tagen danach
- Nachklausur 10.4.2018 um 17:30 in H13
- Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Überblick

1. Lebesgue-Maß
2. Lebesgue-Integral
3. Integrationstechniken
4. Topologische Grundlagen
5. Maß und Integral auf abstrakten Räumen
6. Banach- und Hilberträume von Funktionen
7. Fourier-Reihen und Fouriertransformation
8. Tensoren und Grassmann-Algebra
9. Mannigfaltigkeiten
10. Tangentialräume und Differentialformen
11. Orientierung und Integration auf Mannigfaltigkeiten

Literatur

Qual der Wahl: jedes Buch oder Skript zu obigen Themen!

J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*

H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*

D. Werner: *Einführung in die höhere Analysis*

A. Deitmar: *Analysis*

... Folien auf Studon

1 Lebesgue-Maß

Definition 1.1

Seien $a = (a_1, \dots, a_d),\ b = (b_1, \dots, b_d)$ Punkte im $\mathbb{R}^d$. Definiere:

(i) $a \leqslant b \Longleftrightarrow a_j \leqslant b_j \quad \forall\, j = 1, \dots, d$ Analog: $a < b$, $a > b$

(ii) Offene, halboffene und abgeschlossene Quader sind

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x < b\} \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x \leqslant b\} \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leqslant x \leqslant b\} \end{aligned}$$

(iii) Maß bzw. d-dimensionale Volumen halboffenen Quaders

$$\mu((a,b]) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) \in [0, \infty)$$

Bemerkung 1.2 (Volumenbegriffe von Riemann und Lebesgue)

Zu $A \subset \mathbb{R}^d$ betrachte Ober- und Untersummen:

$$\begin{aligned} O(A) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) \;\middle|\; Q_n \text{ disjunkte Quader},\ A \subset \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\dots,N} Q_n \right\} \\ U(A) &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) \;\middle|\; Q_n \text{ disjunkte Quader},\ A \supset \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\dots,N} Q_n \right\} \end{aligned}$$

Dann: A Riemann-messbar $\Longleftrightarrow O(A) = U(A)$

Fakt: nur relativ wenige Mengen sind Riemann-messbar

Alternative Vorgehensweise beim Lebesgue'schen Maßbegriff: Setze

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \;\middle|\; A \subset \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1}^{\infty} Q_n,\ Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader} \right\}$$

A Lebesgue-messbar $\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists$ offenes $U \supset A$ mit $\mu^*(U \backslash A) < \varepsilon$

Ziel: Konstruktion und Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Satz 1.3 (Der von halboffenen Quadern erzeugte Ring)

Betrachte folgende Teilmenge $\mathcal{R}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\dots,N} Q_n \,\middle|\, Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader im } \mathbb{R}^d,\ N < \infty \right\}$$

Dann:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \backslash B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$

Definition 1.4 (Ring)

Für beliebige Menge X heißt Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subset X\}$ mit Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz 1.3 ein Ring auf X

Beweis (i) offensichtlich, da $(a, a] = \emptyset$.

Für (ii):

$$\begin{aligned} A \backslash B &= \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\dots,M} Q_n \backslash \left(\mathop{\dot{\bigcup}}_{m=1,\dots,M} Q'_m \right) \\ &= \mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\dots,M} (\cdots ((Q_n \backslash Q'_1) \backslash Q'_2) \cdots \backslash Q'_M) \end{aligned}$$

Aber $Q_n \backslash Q'_1 = \dot{\bigcup}_\ell Q''_\ell$ disjunkte Vereinigung halboffener Quadern (Bild)

Dann auch $(Q_n \backslash Q'_1) \backslash Q'_2 = (\dot{\bigcup}_\ell Q''_\ell) \backslash Q'_2 = \dot{\bigcup}_\ell (Q''_\ell \backslash Q'_2) = \dot{\bigcup}_k Q_k^{(3)}$

disjunkte Vereinigung von geeignet gewälten Quadern $Q_k^{(3)}$

Nach Iteration folgt also $A \backslash B \in \mathcal{R}$

(ii) impliziert (iii), weil $A \cup B = (A \backslash B) \dot{\cup} B$ disjunkte Vereinigung

(ii) impliziert auch (iv) da $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ $\square$

Nun wird μ, bisher nur auf Quadern definiert, zunächst auf $\mathcal{R}$ erweitert.

Definition 1.5

Sei

$$A = \dot{\bigcup_{n=1,\dots,N}} Q_n \in \mathcal{R}$$

Dann definiere Maß von A als

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) \in [0, \infty)$$

Satz 1.6

Definition unabhängig von Wahl der Zerlegung von A in Quader

Beweis: Sei $A = \mathring{\bigcup}_{m=1,\dots,M} Q'_m$ eine weitere Zerlegung von $A \in \mathcal{R}$

Betrachte

$$Q''_{n,m} \;=\; Q_n \cap Q'_m \qquad , \qquad 1 \leqslant n \leqslant N \quad , \quad 1 \leqslant m \leqslant M$$

Dies sind halboffene Quader, einige evtl. leer! Dann

$$Q_n = \mathring{\bigcup_{m=1,\dots,M}} Q''_{n,m} \qquad , \qquad Q'_m = \mathring{\bigcup_{n=1,\dots,N}} Q''_{n,m}$$

Somit gilt offensichtlich

$$\mu(Q_n) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \mu(Q''_{n,m}) \qquad , \qquad \mu(Q'_m) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \mu(Q''_{n,m})$$

Also

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \mu(Q''_{n,m}) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mu(Q''_{n,m}) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \mu(Q'_m)$$

$\square$

Satz 1.7

Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ *erfüllt Folgendes:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) *(endliche Additivität)* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$ *disjunkt, dann*

$$\mu\Big(\mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\ldots,N} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

(iii) *(Monotonie)* $A, B \in \mathcal{R}\,,\quad A \subset B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \implies \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(v) *(endliche Subadditivität) Für beliebige* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$ *gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n \Big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

(vi) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunkte Folge in* $\mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$, *sodass* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(B)$

Beweis: (i) klar

(ii) $A_n = \dot\bigcup_{m=1,\ldots,M_n} Q_{n,m} \in \mathcal{R}$ disjunkte Zerlegung in halboffene Quader

Dann hat $A = \dot\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n$ disjunkte Zerlegung

$$A = \dot\bigcup_{n=1,\ldots,n} \; \dot\bigcup_{m=1,\ldots,M_n} Q_{n,m}$$

und nach Satz 1.6 gilt

$$\mu(A) = \mu\left(\dot\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M_n} \mu(Q_{n,m}) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

Zu (iii): $\mu(B) = \mu(A \cup (B \backslash A)) \overset{\text{(ii)}}{=} \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$

Zu (iv):

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &\overset{\text{(ii)}}{=} \mu(A) + \mu(B \backslash A) + \mu(B \cap A) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

Zu (v): Wegen (iv) gilt: $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$

Somit folgt iterativ:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N) &\leqslant \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1}) + \mu(A_N) \\ &\leqslant \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_N) \end{aligned}$$

Zu (vi): Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathring{\bigcup}_{n=1,\ldots,N} A_n \subset B$

Somit

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \overset{\text{(ii)}}{=} \mu\left(\mathring{\bigcup_{n=1,\ldots,N}} A_n \right) \overset{\text{(iii)}}{\leqslant} \mu(B)$$

Im Limes $N \to \infty$ folgt die Behauptung $\square$

Definition 1.8

Wenn $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ Ring auf Menge X und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Eigenschaften (i), (ii) in Satz 1.7 erfüllt, nämlich $\mu(\emptyset) = 0$ und endliche Additivität, so heißt μ Inhalt

Nun erste wichtige Aussage:

Satz 1.9 (Lebesgue 1905)

Seien Q und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halboffene Quader mit $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Dann

$$\mu(Q) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n)$$

Beweisidee: Q wenig verkleinern, Q_n wenig vergößern

Kompaktheitsargument $\Longrightarrow$ endlich viele Q_n und somit Satz 1.7(v)

Beweis: Zunächst gelte ohne Einschränkung (sonst trivial)

$$\mu(Q) > 0 \quad , \quad \mu(Q_n) > 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) < \infty$$

Sei $Q = (a, b]$ und $Q_n = (a_n, b_n]$, und $\varepsilon > 0$ beliebig

Wähle a', b' mit $a < a' < b' < b$, so dass für $Q' = (a', b']$

$$\mu(Q) - \varepsilon < \mu(Q') < \mu(Q)$$

und ähnlich a_n', b_n' mit $a_n' < a_n \leqslant b_n < b_n'$, so dass für $Q_n' = (a_n', b_n']$

$$\mu(Q_n) < \mu(Q_n') < \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Jetzt: $\overline{Q} = [a, b]$ Abschluss und $Q^\circ = (Q)^\circ = (a, b)$ (offenes) Innere

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n')^\circ$$

Also: $((Q_n')^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung der kompakten Menge $\overline{Q'}$

Nach Satz von Heine-Borel existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset \bigcup_{n=1}^{N} (Q'_n)^\circ \subset \bigcup_{n=1}^{N} Q'_n$$

Deswegen mit Satz 1.7(v):

$$\begin{aligned}
\mu(Q) - \varepsilon &< \mu(Q') \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(Q'_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q'_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n)\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 1.10

Äußeres Lebesgue'sches Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\mu^*(A) \;=\; \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \;\middle|\; Q_n \text{ halboffene Quader mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$$

Satz 1.11

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) *(Monotonie)* $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$

(iii) *(σ-Subadditivität) Für Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$:*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;\leqslant\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

(iv) *Für jeden halboffenen Quader Q gilt $\mu^*(Q) = \mu(Q)$*

(v) *Für jedes $E \subset \mathbb{R}^d$ und jeden halboffenen Quader Q gilt*

$$\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q)$$

Beweis: (i) offensichtlich

(ii) gilt, da jede Überdeckung von B auch Überdeckung von A

(iii) Ohne Einschränkung gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$ (sonst trivial)

Sei $\varepsilon > 0$. Per Definition: zu A_n $\exists$ Folge $(Q_{n,m})_{m \geqslant 1}$ von Quadern mit

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{n,m} \qquad , \qquad \mu^*(A_n) \geqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \right) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Dann: $(Q_{n,m})_{n,m \geqslant 1}$ Quaderüberdeckung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und somit

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon \end{aligned}$$

(iv) $\mu^*(Q) \leqslant \mu(Q)$ trivial, und $\mu^*(Q) \geqslant \mu(Q)$ folgt aus Satz 1.9

(v) Zunächst E halboffener Quader $\implies$ $E \cap Q$ ebenso (Satz 1.3)

Wähle disjunkte Quaderzerlegung $E = \bigcup^{\circ}_{n=1,\dots,N} Q_n$ mit $Q_1 = E \cap Q$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\overset{\text{(iv)}}{=} \mu(E) \overset{\text{Satz 1.5}}{=} \sum_{n=1}^{N} \mu(Q_n) \overset{\text{(iv)}}{=} \mu(E \cap Q) + \sum_{n=2}^{N} \mu^*(Q_n) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\geqslant} \mu(E \cap Q) + \mu^*(E \setminus Q) \qquad \text{da } E \setminus Q \subset \bigcup_{n=2,\dots,N} Q_n \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \mu^*(E \cap Q) + \mu^*(E \setminus Q) \overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \mu^*(E)
\end{aligned}$$

Somit Gleichheit. Nun E beliebig mit Quaderüberdeckung $(Q_n)_{n \geqslant 1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) &\overset{\text{oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(Q_n \setminus Q) + \mu^*(Q_n \cap Q) \Big) \\
&\overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q) \overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \mu^*(E)
\end{aligned}$$

Übergang zum Infimum über alle Quaderüberdeckungen zeigt

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q) \geqslant \mu^*(E)$$

□

Allgemeiner: Mengensystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ ersetzt halboffene Quader

Satz 1.12

Gegeben: Menge X, Ring $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ und Inhalt $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$

Definiere $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ wie in Definition 1.10

Dann gelten (i), (ii) und (iii) aus Satz 1.11

Eine solche Mengenfunktion μ^* heißt äußeres Maß auf X

Konstruktion von μ^* geht auf Carathéodory (1917) zurück

Ebenso folgende zentrale Definition

Definition 1.13

Gegeben äußeres Maß μ^* auf X, Menge $A \subset X$ heißt messbar $\iff$

$$\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \forall\, E \subset X$$

Jetzt weiter mit konkreter Situation:

Definition 1.14

$A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \cap A) \,+\, \mu^*(E \backslash A)$$

Notation für die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen:

$$\mathcal{A} \;=\; \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ Lebesgue-messbar}\}$$

Lebesgue-Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ messbarer Mengen definiert durch

$$\mu(A) \;=\; \mu^*(A)$$

Bemerkung 1.15

Satz 1.11(iii): Ungleichung $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A)$ gilt immer

Nach Satz 1.11(v) ist jeder halboffene Quader Lebesgue-messbar

Nach Satz 1.11(iv) ist Lebesgue-Maß μ Erweiterung von Definition 1.1

Satz 1.16 (Maßerweiterungssatz)

$\mathcal{A}$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies$ *Komplementärmenge* $A^c = \mathbb{R}^d \backslash A \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in* $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Zudem $\mu(\emptyset) = 0$ *und es gilt so-genannte* σ*-Additivität:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

wobei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunkte Folge in* $\mathcal{A}$

Also im Sinne folgender allgemeiner Definition 5.6:

Lebesgue-messbaren Mengen bilden σ-Algebra

und Lebesgue Maß ist ein Maß

Definition 1.17

Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ Mengensystem mit

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies$ Komplementärmenge $A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Dann heißt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X

Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-additiv falls

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für alle disjunkten Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$

Eine σ-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt ein Maß

Mehr hierzu in Kapitel 5. Jetzt zum Beweis von Satz 1.16

Beweis: (i) klar und (ii) weil $E \cap A^c = E \backslash A$ und $E \backslash A^c = E \cap A$

Behauptung 1: $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B \in \mathcal{A}$

Begründung: Für beliebiges $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt, weil $A, B \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \backslash A) + \mu^*(E \cap A) \\ &= \mu^*((E \backslash A) \backslash B) + \mu^*((E \backslash A) \cap B) + \mu^*(E \cap A) \\ &= \mu^*(E \backslash (A \cup B)) + \mu^*((E \cap (A \cup B)) \backslash A) + \mu^*((E \cap (A \cup B) \cap A) \\ &= \mu^*(E \backslash (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)) \end{aligned}$$

Somit $A \cup B \in \mathcal{A}$. Außerdem, mit (ii):

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A} \quad , \quad A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A} \qquad \diamond$$

Behauptung 2: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkte Folge in $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ und $\forall\ E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

σ-Additivität ist Spezialfall $E = \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$ in Behauptung 2 (dann $\mu^* = \mu$)

Begründung: Zunächst, da $A_1 \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \backslash A_1) + \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) \\ &= \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1)\end{aligned}$$

so dass nach Iteration

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E \cap A_n)$$

Nun $A \supset \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ und nach Monotonie des äußeren Maßes μ^*:

$$\mu^*(E \cap A) \geqslant \mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E \cap A_n) \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

also

$$\mu^*(E \cap A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

Umgekehrt gilt nach der σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^*:

$$\mu^*(E \cap A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

also Gleichheit. Verbleibt $A \in \mathcal{A}$. Behauptung 1 zeigt $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*\Big(E \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) + \mu^*\Big(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \text{(wegen Monotonie)} \end{aligned}$$

Also im Limes $N \to \infty$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \text{(nach obiger Gleichung)} \\ &\geqslant \mu^*(E) \qquad \text{(nach Subadditivität)} \end{aligned}$$

Es gilt also Gleichheit und somit $A \in \mathcal{A}$ $\diamond$

Behauptung 3 = (iii): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
Begründung: Definiere iterativ

$$B_1 = A_1 \quad , \quad B_n = A_n \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})$$

Dann sind B_n disjunkt und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$
Nach Behauptung 1 gilt $B_n \in \mathcal{A}$
Nach Behauptung 2 also auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ $\diamond$
Somit ist Satz 1.16 bewiesen $\square$

Bemerkung 1.18

Beweis von Satz 1.16 gilt für jedes äußeren Maß μ^* auf Menge X
versehen mit Ring $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ und Inhalt $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$
d.h. die zugehörigen μ^*-messbare Mengen bilden σ-Algebra
Zusammen mit Satz 1.12 folgt so allgemeiner Maßerweiterungssatz
Details später

Definition 1.19

$N \subset \mathbb{R}^d$ Nullmenge $\iff \mu^*(N) = 0$

Satz 1.20

(i) *Jede Nullmenge ist Lebesgue-messbar mit* $\mu(N) = 0$

(ii) $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Nullmengen* $\implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ *Nullmenge*

(iii) *Abzählbare Mengen sind Nullmengen*

(iv) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen*

Beweis: (i) Für alle $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt nach Monotonie

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \setminus N) \quad , \quad \mu^*(N) \geqslant \mu^*(N \cap E)$$

Somit folgt Messbarkeit von N aus

$$\mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(N) \geqslant \mu^*(E \setminus N) + \mu^*(N \cap E)$$

(ii) gilt da wegen σ-Subadditivität $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu^*(N_n) = 0$

(iii)+(iv) sind Übung $\square$

Erinnerung Topologie: offene Mengen = Vereinigungen offene Kugeln
abgeschlossene Mengen sind Komplemente offener Mengen

Satz 1.21

Offene und abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^d$ sind Lebesgue-messbar

Beweis: Sei U offen und $x \in U$

$\implies \exists\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^d$, so dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$

$\implies \exists$ rationale $a, b \in \mathbb{Q}^d$, so dass $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$

Somit $x \in (a, b] \subset U$, und:

$$U = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}^d, (a,b] \subset U} (a, b]$$

Also: U abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern

Nach Satz 1.16 ist U messbar

Abgeschlossene Mengen als Komplement offener auch messbar $\square$

Nun weitere Eigenschaften Lebesgue-messbarer Mengen:

Satz 1.22 (Regularität des Lebesgue-Maßes)

$A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Dann:

(i) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *offenes U mit $A \subset U$ und $\mu(U \backslash A) < \varepsilon$*

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *abgeschlossenes F mit $A \supset F$ und $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$*

Also: Lebesgue-Maß von außen und innen regulär im Sinne von:
(Vorgriff auf Kapitel zu abstrakter Maßtheorie)

Definition 1.23 (Regularität von Maßen)

μ Maß auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$

(i) μ von außen regulär $\iff$ zu jeder messbaren Menge A und $\epsilon > 0$
$\exists$ offenes U mit $A \subset U$ und $\mu(U \backslash A) < \varepsilon$

(ii) μ von innen regulär $\iff$ $\forall$ messbaren A und $\forall\, \varepsilon > 0$
$\exists$ abgeschlossenes $F \subset A$ mit $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$

Beweis: (i) Sei zunächst $\mu(A) = \mu^*(A) < \infty$
Dann existiert halboffene Quaderüberdeckung $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \ < \ \mu(A) \ + \ \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle offene Quader Q_n' mit $Q_n \subset Q_n'$ und $\mu(Q_n') \leqslant \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$
Setze $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n'$ (das ist offen!). Dann

$$\begin{aligned} \mu(A) &> \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(Q_n') - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geqslant \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad (\sigma\text{-Subadditivität}) \\ &= \mu(U \cap A) + \mu(U \setminus A) - \varepsilon \end{aligned}$$

Da $U \cap A = A$, folgt $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Jetzt sei $\mu(A) = \infty$

Dann setze $A_m = A \cap B_m(0)$, wobei $B_m(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < m\}$

Da $\mu(A_m) < \infty$ kann Obiges angewandt werden

$\implies \exists$ offenes U_m mit $A_m \subset U_m$ und $\mu(U_m \setminus A_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$

Setze $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$

Dann $A \subset U$ und $U \setminus A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \setminus A_m$, sodass

$$\mu(U \setminus A) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(U_m \setminus A_m) < \varepsilon$$

(ii) Wende (i) auf messbares A^c an: $\exists$ offenes $U \supset A^c$ mit $\mu(U \setminus A^c) < \epsilon$

Setze $F = U^c$ was also abgeschlossen ist und $F \subset A$. Somit

$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap U) = \mu(U \setminus A^c) < \epsilon$$

$\square$

Korollar 1.24

Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\left\{\mu(U) \mid U \text{ offen mit } U \supset A\right\}\\ &= \sup\left\{\mu(F) \mid F \text{ abgeschlossen mit } F \subset A\right\}\\ &= \sup\left\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt mit } K \subset A\right\}\end{aligned}$$

Beweis: Erste beide Gleichheiten nach Satz 1.22. Also noch letzte
Sei $(F_n)_{n\geqslant 1}$ Folge abgeschlossener Teilmengen mit $\mu(F_n) \to \mu(A)$
Dann $K_n = F_n \cap [-n,n]^d$ kompakt mit $\mu(K_n) \to \mu(A)$ □

Satz 1.25 (Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen)

$A \subset \mathbb{R}^d$ *Lebesgue-messbar*

$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *offenes* U *und abgeschlossenes* F *mit* $F \subset A \subset U$ *und* $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$

$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *offenes* U *mit* $A \subset U$ *und* $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Beweis: Erster "$\Longrightarrow$" beide Punkte in Satz 1.22 mit $\frac{\epsilon}{2}$

Zweiter "$\Longrightarrow$" da $\mu(U \backslash A) \leqslant \mu(U \backslash F) < \epsilon$

Rückrichtung "$\Longleftarrow$" Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Da U messbar:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \backslash U) + \mu^*(E \cap U) \\ &\geqslant \mu^*(E \backslash A) - \mu^*(U \backslash A) + \mu^*(E \cap U) \end{aligned}$$

Letzteres wegen

$$E \backslash A = (E \backslash U) \cup ((U \backslash A) \cap E) \subset (E \backslash U) \cup (U \backslash A)$$

so dass mit Subadditivität

$$\mu^*(E \backslash A) \leqslant \mu^*(E \backslash U) + \mu^*(U \backslash A)$$

Nach $\mu(U \backslash A) < \epsilon$ und Monotonie, und dann wieder Subadditivität:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geqslant \mu^*(E \backslash A) - \varepsilon + \mu^*(E \cap A) \\ &\geqslant \mu^*(E) - \varepsilon \end{aligned}$$

Da ε beliebig, folgt Gleichheit und Messbarkeit von A $\square$

Satz von Steinhaus

Satz 1.26 (Steinhaus 1920)

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ *messbar mit* $\mu(A) > 0$

$\implies A - A = \{x - y \mid x \in A,\ y \in A\}$ *Umgebung von* 0

d.h. $\exists\, \delta > 0$ *mit* $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < \delta\} \subset A - A$

Beweis. Nach Korrolar 1.24 reicht es $A = K$ kompakt zu betrachten

Nach Satz 1.22 $\exists$ offenes $U \supset K$ mit $\mu(U) < 2\,\mu(K)$

$\delta = \inf\left\{\|x - y\| \mid x \in K,\, y \in U^c\right\} > 0$ weil U^c abgesch., $K \cap U^c = \emptyset$

Für $t \in B_\delta$ und $x \in K$ gilt $x + t \in U$, d.h. $K + t \subset U$

(weil sonst $x + t \in U^c$ und $\|x - (x + t)\| < \delta$ ↯)

$K + t = \{x + t \mid x \in K\}$ kompakt und $\mu(K + t) = \mu(K)$ nach Definition

Zudem $K \cup (K + t) \subset U$

Sei $K \cap (K + t) = \emptyset \implies \mu(U) \geqslant \mu(K) + \mu(K + t) = 2\,\mu(K)$ ↯

Also $K \cap (K + t) \neq \emptyset$ für alle $t \in B_\delta \implies B_\delta \subset K - K$ $\square$

Satz 1.27

Sei X Menge und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ Mengensystem. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{C}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra, genannt die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra

Beweis: Zu zeigen: $\sigma(\mathcal{C})$ enthält X, ist stabil unter Komplementbildung,

und stabil unter abzählbaren Vereinigungen

Aber $X \in \sigma(\mathcal{C})$, weil X in jeder σ-Algebra

Wenn $A \in \sigma(\mathcal{C})$, so auch in allen $\mathcal{A} \implies A^c$ in allen $\mathcal{A} \implies A^c \in \sigma(\mathcal{C})$

Analog für abzälbare Vereinigungen $\square$

Definition 1.28

Auf topologischem Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt $\sigma(\mathcal{O})$ die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$

Bemerkung 1.29

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}) = \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen}\})$

Letzteres da σ-Algebren stabil unter Komplementbildung

Nach Satz 1.21: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue-messbar}\}$

Unterschied zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ kann explizit angegeben werden:

Satz 1.30

$A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar, d.h. $A \in \mathcal{A}$

$\iff \exists\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und Nullmenge N mit $A = B \mathbin{\mathring{\cup}} N$

Beweis: "$\Longleftarrow$" klar nach Satz 1.20

"$\Longrightarrow$" Da $A^c \in \mathcal{A}$ $\exists$ absteigende offener $U_n \supset A^c$ mit $\mu(U_n \backslash A^c) < \frac{1}{n}$

(wegen Satz 1.22) Da $U_n \backslash A^c = A \backslash U_n^c$ gilt auch $\mu(A \backslash U_n^c) < \frac{1}{n}$

Setze $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c$ und $N = A \backslash B$. Dann $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $B \subset A$ und

$\mu(N) = \mu(A \backslash B) = \mu\left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c\right) \leqslant \inf_n \mu(A \backslash U_n^c) = 0$ $\square$

Nun Verhalten des Lebesgue-Maßes unter Wirkung der affinen Gruppe

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \;=\; \mathbb{R}^d \times \mathrm{Gl}(\mathbb{R}, d)$$

auf $\mathbb{R}^d$ gegeben durch Drehen/Stauchen und dann Verschieben:

$$(a, M) \cdot x \;=\; a + Mx \qquad , \qquad (a, M) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Dann gilt für $(a', M') \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$

$$(a, M) \cdot \big((a', M') \cdot x\big) \;=\; a \,+\, M\,a' \,+\, MM'x$$

Also sollte die Gruppenoperation auf $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$ definiert werden durch

$$(a, M) \cdot (a', M') \;=\; (a + Ma', MM')$$

Dies gibt tatsächlich Gruppenstruktur (semidirektes Produkt). Es gilt:

$$\big((a, M) \cdot (a', M')\big) \cdot x \;=\; (a, M) \cdot \big((a', M') \cdot x\big)$$

Für Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ defniere $MA + a = \{Mx + a \mid x \in A\}$

Satz 1.31 (Translationsinvarianz des äußeren Lebesgue Maßes)

$\forall\, A \subset \mathbb{R}^d$ und $a \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\mu^*(A+a) = \mu^*(A)$

Außerdem: A messbar $\iff$ $A+a$ messbar

Beweis: Wenn Q Quader, dann auch $Q+a$ und $\mu^*(Q) = \mu^*(Q+a)$

Sei $A \subset \bigcup_{n\geqslant 1} Q_n$, dann auch $A+a \subset \bigcup_{n\geqslant 1}(Q_n+a)$ und

$$\mu^*(A+a) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu^*(Q_n+a) = \sum_{n\geqslant 1} \mu^*(Q_n)$$

Durch Übergang zum Infimum folgt $\mu^*(A+a) \leqslant \mu^*(A)$

Da dies für jedes a, also auch $-a$ gilt, folgt Gleichheit aus:

$$\mu^*(A) = \mu^*((A+a)-a) \leqslant \mu^*(A+a) \leqslant \mu^*(A)$$

Jetzt sei A messbar. Für $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt nun

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E-a) = \mu^*((E-a)\backslash A) + \mu^*((E-a)\cap A) \\ &= \mu^*(E\backslash(A+a)) + \mu^*(E\cap(A+a))\end{aligned}$$

Somit $A+a$ auch messbar $\square$

Satz 1.32 (Verhalten unter linearen Transformationen)

Für jede Matrix $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ *und jedes* $A \subset \mathbb{R}^d$ *gilt*

$$\mu^*(MA) \;=\; |\det(M)|\, \mu^*(A)$$

Zudem: A messbar $\iff$ *MA messbar*

Außerdem: μ^* *und* μ *unter Wirkung der orthogonalen Gruppe invariant*

Beweis: $\det(M) = 0 \implies \mathrm{Ker}(M) \neq \{0\} \implies$ *MA* liegt in Hyperfläche $\implies \mu^*(MA) = 0$ Also jetzt $\det(M) \neq 0$

Erinnerung: Nach Gauss-Algorithmus:

$$M \;=\; S_1 \cdot \ldots \cdot S_n\, D\, S_1' \cdot \ldots \cdot S_{n'}'$$

mit D diagonal und S_k, S_k' Scherungen der Form $S = \mathbf{1} + \lambda |i\rangle\langle j|$

Behauptung 1: Es reicht, für $M = D$ und $M = S$ zu zeigen:

$$\mu^*(MA) \;\leqslant\; |\det(M)|\, \mu^*(A) \tag{1.1}$$

Begründung: Wegen $\det(MM') = \det(M)\det(M')$, gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mu^*(MA) &= \mu^*(S_1 \cdot \ldots \cdot S_n\, D\, S'_1 \cdot \ldots \cdot S'_{n'} A) \\
&\leqslant |\det(S_1)| \mu^*(S_2 \cdot \ldots \cdot S_n\, D\, S'_1 \cdot \ldots \cdot S'_{n'} A) \\
&\leqslant |\det(S_1) \cdot \ldots \cdot \det(D) \cdot \ldots \cdot \det(S'_{n'})|\, \mu^*(A) \\
&= |\det(M)|\, \mu^*(A)
\end{aligned}$$

$\diamond$

Behauptung 2: Es reicht, (1.1) für Quader Q zu zeigen

Begründung: $A \subset \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$ Quaderüberdeck. $\Longrightarrow MA \subset \bigcup_{n \geqslant 1} MQ_n$
Nach σ-Subadditivität von μ^* gilt mit Voraussetzung

$$\mu^*(MA) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(MQ_n) \leqslant |\det(M)| \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n)$$

Übergang zum Infimum zeigt

$$\mu^*(MA) \leqslant |\det(M)|\, \mu^*(A)$$

Nun $\mu^*(A) = \mu^*(M^{-1}MA) \leqslant |\det(M^{-1})|\, \mu^*(MA) = \frac{1}{|\det M|}\, \mu^*(MA)$ $\diamond$

Behauptung 3: (1.1) gilt für Quader und Diagonalmatrizen

Begründung: DQ ist Quader mit Seitenlängen gegeben durch Produkte der Seitenlängen von Q mit den Diagonaleinträgen von D

$\implies \mu(DQ) = |\det(D)|\,\mu(Q)$ $\diamond$

Behauptung 4: (1.1) gilt für Quader und Scherungen

Begründung: Es reicht Scherung in der $(1,2)$-Ebene zu betrachten:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Translationsinvarianz von μ^*: es reicht $Q = (0, b]$ zu betrachten

Faktorisierung ergibt (mit d-dimensionale Lebesgue-Maß μ_d)

$$\begin{aligned} Q &= ((0,0),(b_1,b_2)] \times Q' \\ \mu_d(Q) &= \mu_2((0,0),(b_1,b_2)]) \cdot \mu_{d-2}(Q') \\ SQ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ((0,0),(b_1,b_2)]) \times Q' \;=\; P \times Q' \end{aligned}$$

mit P Parallelogramm mit Ecken $(0,0),(b_1,0),(\lambda b_2,b_2),(b_1+\lambda b_2,b_2)$
Elementargeometrie oder Limes von Quaderüberdeckungen:

$$\mu_2(P) \;=\; \mu_2((0,0),(b_1,b_2)])$$

Somit

$$\mu(SQ) \;=\; \mu(Q) \;=\; |\det(S)|\,\mu(Q)$$

$\diamond$

Messbarkeit wie in Satz 1.31 überprüfen $\square$

Existenz nichtmessbarer Mengen

Auf $\mathbb{R}^d$ definiere Äquivalenzrelation (!):

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q}^d$$

Auswahlaxiom: wähle aus jeder Klasse $[x]_\sim$ einen Repräsentanten x

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid [x]_\sim \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d\}$$

Satz 1.33 (Vitali 1905)

Kein Vertretersystem M von $\mathbb{R}^d/\sim$ ist Lebesgue-messbar

Beweis: Gegenannahme M messbar

$\mu(M) > 0 \implies M - M$ Umgebung von 0 (Satz 1.26 von Steinhaus)

$\implies \exists\, r \in M - M$ mit $r \in \mathbb{Q}^d$ und $r \neq 0$ Widerspruch zur Wahl von M $\lightning$

Somit $\mu(M) = 0$, also auch $\mu(M + r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}^d$

Dann: $\mathbb{R}^d = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^d} (M + r)$ abzählbare Vereinigung von Nullmengen

$\implies \mathbb{R}^d$ selbst Lebesgue'sche Nullmenge. Wieder Widerspruch $\lightning$ $\square$

2 Lebesgue-Integral

Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit weiteren offenen Mengen $[-\infty, a)$ und $(b, \infty]$

Dies heißt auch die Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$

Definition 2.1

$D \subset \mathbb{R}^d$ Borel-messbar, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktion

(i) f Borel-messbar $\iff f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\iff \forall\, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\iff \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind $f^{-1}(B),\ f^{-1}(\{-\infty\}),\ f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

(ii) f Lebesgue-messbar

$\iff \forall\, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar$\}$

(iii) f Treppenfunktion (oder Elementarfunktion)

$\iff \exists\, N \in \mathbb{N}$ und $A_n \in \mathcal{A}$ und $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n}$

wobei χ_A die Indikatorfunktion auf A ist, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Bemerkung 2.2

Treppenfunktionen und Borel-messbare Abbildungen sind Lebesgue-messbar

Satz 2.3

Stetige Abbildungen sind Borel-messbar

Beweis: Seien $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$ Topologien

Dann Borel-Algebren $\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Erinnerung: f stetig $\iff f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$

Somit $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}))) \subset \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Satz folgt also aus folgendem Lemma für Fall $\mathcal{C} = \mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$ $\square$

Lemma 2.4

$f : X' \to X$ Abbildung, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gilt für erzeugte σ-Algebren:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

Beweis: $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ ist tatsächlich σ-Algebra

weil: $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ und $\bigcup_n f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)$

Also: Inklusion "$\supset$" folgt aus $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \supset f^{-1}(\mathcal{C})$

Für "$\subset$" setze:

$$\mathcal{D} \;=\; \{D \subset X \;|\; f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$$

Dies ist eine σ-Algebra

Offensichtlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, so dass $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Also

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) &\subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{D})) \\ &= \{f^{-1}(D) \mid f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\} \\ &= \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{aligned}$$

was den Beweis vervollständigt $\square$

Korollar 2.5

$f : D \subset \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel messbar

$\iff \forall\, c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{f < c\} = \{x \in D \mid f(x) < c\}$ Borel messbar

Gleiches gilt für Lebesgue-Messbarkeit

Beweis: Offenen Intervalle und somit gesamte Topologie wird von $\mathcal{C} = \{[-\infty, c) \mid c \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erzeugt (endliche Schnitte, Vereinigungen)

Somit auch $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Da $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ nach Lemma 2.4, ist Borel-Messbarkeit von f gegeben falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, oder gleichbedeutend falls $f^{-1}([-\infty, c)) = \{f < c\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $c \in \mathbb{R}$

Analog für Lebesgue-Messbarkeit $\square$

Messbarkeit von Funktionen nun etwas allgemeiner

Dies erlaubt z.B. auch vektorwertige Funktionen zu betrachten

Definition 2.6

$(X', \mathcal{A}'),\ (X, \mathcal{A})$ Mengen mit σ-Algebren

$f : X' \to X$ messbar $\iff f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}'$

Bemerkung 2.7

Hintereinanderausführungen messbarer Funktionen sind messbar

Satz 2.8

Summen, Produkte, Quotienten, Maxima und Minima endlich vieler $\mathbb{R}$-wertiger messbarer Funktionen sind messbar (entweder jeweils im Sinne von Borel oder Lebesgue)

Beweis: Z.B. Produkt messbarer $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, N$

Dann ist $F = (f_1, \ldots, f_N) : D \to \mathbb{R}^N$ messbar (Details: Übung)

Definiere $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ durch $G(x_1, \ldots, x_N) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_N$

Dies ist messbar, also ist auch $G \circ F(x) = \prod_{n=1}^N f_n(x)$ messbar $\square$

Satz 2.9

$f_n : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Folge messbarer Funktionen

$\Longrightarrow \inf(f_n),\ \sup(f_n),\ \liminf(f_n),\ \limsup(f_n)$ *messbar*

Beweis: Für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$\{\inf(f_n) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < c\}$$

messbar als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen

Nach Korollar 2.5 ist also $\inf(f_n)$ messbar

Analog $\sup(f_n)$. Dann $\limsup(f_n) = \inf_n \sup_{k \geqslant n}(f_n)$ $\square$

Satz 2.10

$f : D \subset \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ Lebesgue-messbar
$\implies \exists$ monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$f_n|_{D^c} = 0 \qquad \textit{und} \qquad f_n \uparrow f$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$

Beweis: Definiere Treppenfunktionen

$$f_n(x) \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n}\, \chi_{\{k2^{-n} \leqslant f < (k+1)2^{-n}\}} \right) \;+\; n\, \chi_{\{f \geqslant n\}}$$

Nun sind Mengen $\{k2^{-n} \leqslant f < (k+1)2^{-n}\}$ und $\{f \geqslant n\}$ messbar

Also f_n nach Satz 2.8 messbar

Außerdem $f_n \uparrow f$ $\square$

Definition des Lebesgue Integrals

Definition 2.11

(i) Lebesgue-Integral positiver Treppenfunktion zu $\alpha_n \geqslant 0$ und $A_n \in \mathcal{A}$

$$\int \mu(dx)\, f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, \mu(A_n) \qquad , \qquad f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n}$$

(ii) Sei $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar und positiv
Sei $(f_n)_{n>1}$ monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $f_n \geqslant 0$, $f_n|_{D^c} = 0$ und $f_n \uparrow f$ (z.B. wie im Satz 2.10)
Dann ist Lebesgue-Integral von f definiert als

$$\int_D \mu(dx)\, f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int \mu(dx)\, f_n(x) \;=\; \sup_n \int \mu(dx)\, f_n(x) \;\in\; [0,\infty]$$

Weitere Notationen: $\int_D dx\, f(x) = \int_D f(x)\, dx = \mu(f\chi_D)$

Letzteres betont, dass das Integrieren ein lineares Funktional ist

Bis jetzt nur Integral nicht-negativer Funktionen (andere später)

Satz 2.12

Integral ist wohl-definiert

(Wert unabhängig von Wahl der Folge f_n)

Es ist positiv-linear und monoton, d.h. für messbare $f, g \geqslant 0$ und $\lambda \geqslant 0$:

$$\int \mu(dx)\big(f(x) + \lambda g(x)\big) = \Big(\int \mu(dx)\, f(x)\Big) + \lambda\Big(\int \mu(dx)\, g(x)\Big)$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int \mu(dx)\, f(x) \leqslant \int \mu(dx)\, g(x)$$

bzw. kurz

$$\mu(f + \lambda g) = \mu(f) + \lambda\mu(g)$$
$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \mu(f) \leqslant \mu(g)$$

Beweis:

Behauptung 1: Integral linear und monoton auf Treppenfunktionen

Begründung: Seien $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n}$ und $g = \sum_{k=1}^{k} \beta_n \chi_{B_n}$
Hierbei seien $(A_n)_{n=1,\ldots,N}$ und $(B_k)_{k=1,\ldots,K}$ jeweils disjunkt. Setze

$$A_0 = \Big(\mathop{\dot{\bigcup}}_n A_n \Big)^c \qquad B_0 = \Big(\mathop{\dot{\bigcup}}_k B_k \Big)^c$$

und $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Dann ist $f + \lambda g = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} (\alpha_n + \lambda \beta_k) \chi_{A_n \cap B_k}$
Treppenfunktion und

$$\begin{aligned}
\mu(f + \lambda g) &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} (\alpha_n + \lambda \beta_k) \mu(A_n \cap B_k) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left(\sum_{k=0}^{K} \mu(A_n \cap B_k) \right) + \lambda \sum_{k=0}^{K} \beta_k \left(\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n \cap B_k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu(A_n) + \lambda \sum_{k=1}^{K} \beta_k \mu(B_k) \; = \; \mu(f) + \lambda \mu(g)
\end{aligned}$$

Monotonie folgt analog $\diamond$

Behauptung 2: Für Treppenfunktionen f_n, h mit $f_n \uparrow f$ und $0 \leqslant h \leqslant f$:

$$\mu(h) \leqslant \lim_n \mu(f_n)$$

Begründung: Sei $h = \sum_{\ell=1}^{L} \gamma_\ell \chi_{C_\ell}$ mit messbaren disjunkten C_ℓ

Für $\varepsilon > 0$, setze

$$C_{\ell,n} = \{x \in C_\ell \mid f_n(x) \geqslant \gamma_\ell(1-\varepsilon)\}$$

Dann

$$C_{\ell,n} \subset C_{\ell,n+1} \subset C_\ell$$

Da $f_n \uparrow f \geqslant h$, gilt

$$C_\ell = \bigcup_{n\geqslant 1} C_{\ell,n} = C_{\ell,1} \mathbin{\dot\cup} \Big(\dot{\bigcup_{n\geqslant 2}} C_{\ell,n} \backslash C_{\ell,n-1} \Big)$$

und somit nach σ-Additivität

$$\mu(C_\ell) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mu(C_{\ell,1}) + \sum_{k=2}^{n} \mu(C_{\ell,k} \backslash C_{\ell,k-1}) \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_{\ell,k})$$

Nun unter Verwendung von Behauptung 1:

$$\begin{aligned}
\mu(f_n) &\geqslant \mu\left(\sum_{\ell=1}^{L} f_n \chi_{C_{\ell,n}}\right), \qquad \text{da } f_n \geqslant \sum_{\ell=1}^{L} f_n \chi_{C_{\ell,n}} \text{ Treppenfunktion} \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \mu\left(f_n \chi_{C_{\ell,n}}\right) \\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{L} \gamma_\ell (1-\varepsilon)\mu(C_{\ell,n}) \qquad \text{nach Definition von } C_{\ell,n} \text{ und Beh. 1}
\end{aligned}$$

Also im Limes

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{\ell=1}^{L} \gamma_\ell \lim_{n\to\infty} \mu(C_{\ell,n}) = (1-\varepsilon)\mu(h)$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt Behauptung 2 $\diamond$

Behauptung 3: Für Treppenfunktionen f_n, g_m mit $f_n \uparrow f$ und $g_m \uparrow f$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(g_m)$$

Begründung: Da $g_m \leqslant f$, folgt nach Behauptung 2

$$\mu(g_m) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(f_n)$$

Also $\lim_{m\to\infty} \mu(g_m) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(f_n)$. Dann vertausche die Rollen $\diamond$

Jetzt Linearität und Monotonie für messbare Funktionen

Seien $f_n \uparrow f,\ g_n \uparrow g$, dann $f_n + \lambda g_n \uparrow f + \lambda g$ und somit

$$\mu(f + \lambda g) \overset{\text{Beh.3}}{=} \lim \mu(f_n + \lambda g_n) \overset{\text{Beh.1}}{=} \lim \mu(f_n) + \lambda\mu(g_n) = \mu(f) + \lambda\mu(g)$$

Für die Monotonie sei zudem $f \leqslant g$. Setze

$$\tilde{f}_n = \min\{f_n, g_n\} \qquad \tilde{g}_n = \max\{f_n, g_n\}$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_n \leqslant \tilde{g}_n \quad \text{und} \quad \lim \tilde{f}_n = f \qquad \lim \tilde{g}_n = g$$

so dass

$$\mu(f) = \lim \mu(\tilde{f}_n) \overset{\text{Beh.1}}{\leqslant} \lim \mu(\tilde{g}_n) = \mu(g) \qquad \square$$

Satz 2.13 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)

$0 \leqslant f_n, f$ *messbar und* $f_n \uparrow f$, *d.h.* $f_n \leqslant f_{n+1}$ *und* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$
$\implies \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Satz 2.10 Folge von Treppenfunktionen $(g_{n,k})_{k\geqslant 1}$ mit $g_{n,k} \uparrow f_n$. Setze

$$h_{n,k} \;=\; \max\{g_{1,k}, \ldots, g_{n,k}\}$$

Dann: $h_{n,k}$ Treppenfunktion, monoton wachsend in n und k
Da $h_{n,k} \leqslant f_n \leqslant f$ und anschließend $h_{n,k}$ monoton in n:

$$f \;\geqslant\; \lim_{k\to\infty} h_{k,k} \;\geqslant\; \lim_{k\to\infty} h_{n,k} \;=\; f_n$$

Somit

$$f \;=\; \lim_{k\to\infty} h_{k,k}$$

und unter zweifacher Verwendung von Satz 2.12

$$\mu(f) \;=\; \lim_{k\to\infty} \mu(h_{k,k}) \;\leqslant\; \lim_{k\to\infty} \mu(f_k) \;\leqslant\; \lim_{k\to\infty} \mu(f) \;=\; \mu(f)$$

□

Später wird gezeigt, dass Voraussetzung $f_n \geqslant 0$ nicht notwendig ist
Durch Anwendung von Satz 2.13 auf Teilsummen:

Korollar 2.14

$f_n \geqslant 0 \implies \mu\Big(\sum_{n\geqslant 1} f_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(f_n)$

Satz 2.15 (Lemma von Fatou)

$f_n \geqslant 0$ *messbar* $\implies \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) \geqslant \mu(\liminf_{n\to\infty} f_n)$

Beweis: Für $m \geqslant n$ gilt: $f_m \geqslant \inf_{k\geqslant n} f_k$
Somit nach der Monotonie: $\mu(f_m) \geqslant \mu\big(\inf_{k\geqslant n} f_k\big)$
Also: $\inf_{m\geqslant n} \mu(f_m) \geqslant \mu\big(\inf_{k\geqslant n} f_k\big)$ und somit:

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geqslant n} \mu(f_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\inf_{k\geqslant n} f_k\Big) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k\Big) = \mu\Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)$$

wobei im vorletzten Schritt Satz 2.13 verwandt wurde $\square$

Definition 2.16

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar

(falls auf messbarem $D \subset \mathbb{R}^d$ definiert, durch 0 fortsetzen)

f (Lebesgue-) integrierbar $\iff \mu(|f|) < \infty$

Falls f integrierbar ist, definiere positive integrierbare Funktionen

$$f_+ \;=\; \max\{f, 0\} \qquad , \qquad f_- \;=\; \max\{-f, 0\}$$

so dass $f = f_+ - f_-$, und definiere das Lebesgue-Integral als

$$\mu(f) \;=\; \mu(f_+) - \mu(f_-)$$

Alternative Schreibweisen: $\mu(f) = \int \mu(dx)\, f(x) = \int f(x)\, dx \ldots$

Satz 2.17

Integral ist monoton und linear auf integrierbaren Funktionen

Beweis: Monotonie: $f \leqslant g$. Dann $0 \leqslant f_+ \leqslant g_+,\; 0 \leqslant g_- \leqslant f_-$
Somit nach der Monotonie für positive Funktionen

$$\mu(f_+) \;\leqslant\; \mu(g_+) \qquad \mu(g_-) \;\leqslant\; \mu(f_-)$$

und

$$\mu(f) \;=\; \mu(f_+) - \mu(f_-) \;\leqslant\; \mu(g_+) - \mu(g_-) \;=\; \mu(g)$$

Für Linearität beachte zunächst, dass wegen

$$|f + \lambda g| \;\leqslant\; |f| + |\lambda||g|$$

auch $f + \lambda g$ integrierbar ist. Für $\lambda \geqslant 0$ (analog $\lambda < 0$) gilt

$$(f + \lambda g)_+ - (f + \lambda g)_- \;=\; f + \lambda g \;=\; f_+ + \lambda g_+ - f_- - \lambda g_-$$

d.h.

$$(f + \lambda g)_+ + f_- + \lambda g_- \;=\; (f + \lambda g)_- + f_+ + \lambda g_+$$

Wegen Linearität für positive Funktionen gilt

$$\mu((f + \lambda g)_+) + \mu(f_-) + \lambda\mu(g_-) \;=\; \mu((f + \lambda g)_-) + \mu(f_+) + \lambda\mu(g_+)$$

Umordnung und Definition des Integrals ergeben Beweis $\square$

Satz 2.18 (Lebesgue's Theorem der majorisierten Konvergenz)

$f_n, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar, $|f_n| \leqslant g,\ \mu(g) < \infty$, und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existiere
Dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) \ = \ \mu\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) \ = \ \mu(f)$$

Beweis: Es gilt $g + f_n \geqslant 0$ und $g - f_n \geqslant 0$
Nach Linearität und gemäß des Lemmas von Fatou folgt

$$\mu(g) + \liminf \mu(\pm f_n) \ = \ \liminf \mu(g \pm f_n) \overset{\text{Fatou}}{\geqslant} \mu(g \pm f) \ = \ \mu(g) \pm \mu(f)$$

Somit nach Subtraktion von $\mu(g)$:

$$\mu(f) \ \leqslant \ \liminf \mu(f_n) \quad \text{und} \quad -\mu(f) \ \leqslant \ \liminf \mu(-f_n) \ = \ -\limsup \mu(f_n)$$

und zusammen ergibt sich

$$\mu(f) \ \leqslant \ \liminf \mu(f_n) \ \leqslant \ \limsup \mu(f_n) \ \leqslant \ \mu(f)$$

□

Beispiel 2.19

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \mu(dx) \frac{n}{x^8 + n}$$

Vertauschung von Limes und Integral erlaubt

weil: entweder monotone Konvergenz da $\partial_n \frac{n}{x^8+n} = \frac{x^8}{(x^8+n)^2} > 0$

oder majorisierte Konvergenz da $\frac{n}{x^8+n} \leqslant 1$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^8+n} = 1$, folgt $I = 2$

Beispiel 2.20

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \mu(dx)\, n(1 + x^2 n^2)^{-1}$$

für $a > 0$

Da $\frac{n}{1+x^2n^2} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{n}+x^2n} \leqslant \frac{1}{x^2n} \leqslant \frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ integrierbar auf $[a, \infty)$ ist,

greift majorisierte Konvergenz. Es folgt $I = 0$

Beispiel 2.21

Sei $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$. Dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int \mu(dx)\, f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} 1 \;>\; 0 \;=\; \int \mu(dx) \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Tatsächlich ist Folge f_n nicht durch integrierbare Funktion majorisiert

In der Tat, kleinste obere Schranke $g(x) = \sup_n f_n(x)$ erfüllt $\forall\; N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \mu(dx)\, g(x) \;\geqslant\; \int_{\frac{1}{N}}^1 \mu(dx)\, g(x) \;=\; \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \mu(dx)\, n \;=\; \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1}$$

Im Limes $N \to \infty$ divergiert rechte Seite (harmonische Reihe)

Außerdem: f_n nicht monoton, also auch keine monotonen Konvergenz

Definition 2.22

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar

$f = g$ (im Sinne von Lebesgue) fast sicher

$\Longleftrightarrow \exists$ Nullmenge N mit $f(x) = g(x) \; \forall \; x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

Genauso: $f \leqslant g, \; f < g, \ldots$ fast sicher

Satz 2.23

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar und $f \geqslant 0$

(i) $f = 0$ *fast sicher* $\Longleftrightarrow \; \mu(f) = 0$

(ii) $\mu(f) < \infty \;\; \Longrightarrow \;\; f < \infty$ *fast sicher*

(iii) $f \leqslant g$ *fast sicher* $\Longrightarrow \; \mu(f) \leqslant \mu(g)$

(iv) $f = g$ *fast sicher* $\Longrightarrow \; \mu(f) = \mu(g)$

Beweis: (i) Behauptung offensichtlich richtig für Treppenfunktionen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone Folge positiver Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$

$$\begin{aligned}
f = 0 \text{ fast sicher} &\iff f_n = 0 \text{ fast sicher } \forall\, n \in \mathbb{N} && \text{(Monotonie)}\\
&\iff \mu(f_n) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} && \text{(Treppenfunktionen)}\\
&\iff \lim \mu(f_n) = 0 && \text{(da } \mu(f_n) \text{ monoton)}\\
&\iff \mu(f) = 0 && \text{(nach Definition des Integrals)}
\end{aligned}$$

(ii) Falls $\mu(\{f = \infty\}) > 0$ folgt $\mu(f) = \infty$

(iii) Sei $N = \{f > g\}$. Dann $\mu(N) = 0$ nach Voraussetzung und

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \mu(\chi_N f) + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(Linearität)}\\
&= 0 + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(nach (i), da } \chi_N f = 0 \text{ fast sicher)}\\
&\leqslant \mu(\chi_{N^c} g) && \text{(nach Definition von } N\text{)}\\
&\leqslant \mu(g)
\end{aligned}$$

(iv) folgt durch doppelte Anwendung von (iii) $\square$

Erinnerung an Konstruktion des Riemann Integrals:

Seien Z_N Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$

Zudem sei Z_N Verfeinerung von Z_{N-1}

Dazu sind Untersumme und Obersumme von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert

$$
\begin{aligned}
U_{Z_N}(f) &= \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1}) \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x) \\
O_{Z_N}(f) &= \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1}) \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)
\end{aligned}
$$

Dann: $U(f) = \lim_{N\to\infty} U_{Z_N}(f)$ nach $O(f) = \lim_{N\to\infty} O_{Z_N}(f)$

f Riemann-integrierbar $\iff U(f) = O(f)$

Dann ist das Riemann-Integral $R\text{-}\int_a^b dx\, f(x) = U(f) = O(f)$

Satz 2.24

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und messbar

$\implies f$ Lebesgue-integrierbar und $\mu(f) = R\text{-}\int_a^b dx\, f(x)$

Beweis:

$|f|$ beschränkt (sonst Ober- oder Untersumme ∞ oder $-\infty$)

Somit f Lebesgue-integrierbar (da $\mu([a,b]) < \infty$)

Definiere

$$\begin{aligned} u_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\inf_{[x_{n-1},x_n]} f \right) \chi_{[x_{n-1},x_n]} \\ o_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sup_{[x_{n-1},x_n]} f \right) \chi_{[x_{n-1},x_n]} \end{aligned}$$

Dann: u_N bzw. o_N monoton wachsend bzw. fallend in N, und

$$U_{Z_N}(f) = \mu(u_N) \qquad , \qquad O_{Z_N}(f) = \mu(o_N)$$

Also $0 \leqslant o_N - u_N$ monoton fallend und somit auch konvergent:

$$0 \leqslant \lim_N (o_N - u_N) = \lim_N o_N - \lim_N u_N$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \mu\left(\lim_N (o_N - u_N)\right) && \text{(Monotonie)} \\
&\leqslant \liminf_N \mu(o_N - u_N) && \text{(Fatou)} \\
&= \liminf_N \mu(o_N) - \mu(u_N) && \text{(Linearität)} \\
&= \liminf_N O_{Z_N}(f) - U_{Z_N}(f) \\
&= 0 && \text{(nach Voraussetzung)}
\end{aligned}
$$

Somit $\mu\left(\lim_N (o_N - u_N)\right) = 0$ und nach Satz 2.23 folgt

$$
\lim_N o_N = \lim_N u_N \qquad \text{fast sicher}
$$

Da $u_N \leqslant f \leqslant o_N$, folgt $f = \lim_N u_N$ fast sicher und f Lebesgue meßbar

Nach dem Satz für monotone Konvergenz

$$
\mu(f) = \mu(\lim_N u_N) = \lim_N \mu(u_N) = \lim_N U_{Z_N}(f) = R\text{-}\int_a^b dx\, f(x) \qquad \square
$$

3 Integrationstechniken

Erstes Ziel: Satz von Fubini

Zweites Ziel: Jacobi'sche Transformationsformel

Gegeben $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{d+k} \to \overline{\mathbb{R}}$

Zu $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ definiere:

$$f_x : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}} \qquad , \qquad f_y : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$f_x(y) = f(x,y) \qquad , \qquad f_y(x) = f(x,y)$$

Satz von Fubini: folgende Formel sinnvoll und richtig

$$\mu_{d+k}(f) = \int \mu_d(dx)\, \mu_k(f_x) = \int \mu_k(dy)\, \mu_d(f_y) \tag{3.1}$$

wobei μ_d das d-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet

Integrationstechnik für höher dimensionale Integrale

(deren Rückführung auf eindimensionale Integrale)

Definition 3.1

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt doppelintegrierbar

$\iff$ für fast alle x und y sind $f_x : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f_y : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar

und Funktionen $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(f_x)$ und $y \in \mathbb{R}^k \mapsto \mu_d(f_y)$ integrierbar

Für f doppelintegrierbare sind Doppelintegrale definiert durch

$$\mu_d(\mu_k(f)) = \int \mu_d(dx)\, \mu_k(f_x) \qquad \text{und} \qquad \mu_k(\mu_d(f)) = \int \mu_k(dy)\, \mu(f_y)$$

Bemerkung 3.2

Wert $\mu_k(f_x)$ auf Nullmenge, wo f_x nicht integrierbar, ist unwichtig

für Integrierbarkeit *und* Integral von $x \mapsto \mu_k(f_x)$ (nach Satz 2.23)

Analoges gilt für f_y

Lemma 3.3

(i) *Doppelintegrierbare Funktionen bilden Vektorraum V_D*
Doppelintegrale sind linear, d.h. für $f, g \in V_D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mu_d(\mu_k(f + \lambda g)) &= \mu_d(\mu_k(f)) + \lambda\, \mu_d(\mu_k(g)) \\ \mu_k(\mu_d(f + \lambda g)) &= \mu_k(\mu_d(f)) + \lambda\, \mu_k(\mu_d(g))\end{aligned}$$

(ii) *Seien $f_n \geqslant 0$ doppelintegrierbar mit $f_n \uparrow f$ und $\exists \ C < \infty$ mit*

$$\mu_d(\mu_k(f_n)) \leqslant C \qquad , \qquad \mu_k(\mu_d(f_n)) \leqslant C$$

$\Longrightarrow$ *f doppelintegrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_d(\mu_k(f_n)) = \mu_d(\mu_k(f)) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mu_k(\mu_d(f_n)) = \mu_k(\mu_d(f))$$

(iii) *$f_n \geqslant 0$ doppelintegrierbar und $f_n \downarrow f$*
Dann gelten gleichen Folgerungen wie in (ii)

Beweis: (i) folgt nach doppelter Anwendung von Satz 2.17 (integrierbare Funktionen bilden Vektorraum und Integral linear)

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ Nullmenge $N_n \subset \mathbb{R}^d$ mit $(f_n)_x$ integrierbar $\forall\ x \notin N_n$

Dann ist $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ eine Nullmenge. Setze

$$F_n(x) \;=\; \begin{cases} \mu_k((f_n)_x)\ , & x \in \mathbb{R}^d \backslash N \\ 0\ , & x \in N \end{cases}$$

Dann F_n integrierbar (insbesondere messbar)

Wegen Monotonie des μ_k-Integrals gilt $F_n \uparrow F$

Nach Voraussetzung und Satz der monotonen Konvergenz folgt

$$C \;\geqslant\; \lim_{n\to\infty} \mu_d(F_n) \;=\; \mu_d(F)$$

d.h. Limesfunktion F ist μ_d-integrierbar

Zudem gilt für fast alle x:

$$\infty \;>\; F(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_k((f_n)_x) \;=\; \mu_k(f_x)$$

Letzteres nach Satz der monotonen Konvergenz

Somit: f_x fast sicher integrierbar und $x \mapsto \mu_k(f_x)$ integrierbar (da F integrierbar)

Da Gleiches auch für $\mu_d((f_n)_y)$ gilt: f doppelintegrierbar

Außerdem

$$\begin{aligned}
\mu_d(\mu_k(f)) &= \int \mu_d(dx)\mu_k(f_x) \\
&\overset{\text{oben}}{=} \int \mu_d(dx) \lim_{n\to\infty} \mu_k((f_n)_x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \mu_d\,(dx)\,\mu_k((f_n)_x) \qquad \text{(monotone Konvergenz)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_d(\mu_k(f_n))
\end{aligned}$$

(iii) folgt, wenn (ii) auf $f_1 - f_n$ angewandt wird $\square$

Satz 3.4 (Prinzip von Cavalieri 1635)

$A \subset \mathbb{R}^{d+k}$ messbar mit $\mu_{d+k}(A) < \infty$

$\Longrightarrow$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Menge

$$A_x \;=\; \{y \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}$$

messbar mit endlichem Maß $\mu_k(A_x)$

Zudem: Funktion $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(A_x)$ ist messbar und

$$\mu_{d+k}(A) \;=\; \int \mu_d\,(dx)\,\mu_k(A_x)$$

Analoges gilt nach Vertauschung der Rollen von $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^k$

Bemerkung 3.5

Satz besagt: charakteristische Funktion χ_A doppelintegrierbar und

$$\mu_{d+k}(\chi_A) \;=\; \mu_d(\mu_k(\chi_A)) \;=\; \mu_k(\mu_d(\chi_A))$$

Beweis:

Behauptung 1: Satz gilt für halboffene Quader $A = Q$

Anders gesagt: χ_Q doppeltintegrierbar für jeden halboffenen Quader

Begründung:

Zerlege $Q = Q' \times Q''$ in halboffene Quader $Q' \subset \mathbb{R}^d$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^k$

Dann $\mu_{d+k}(Q) = \mu_d(Q')\mu_k(Q'')$ und $\chi_Q(x, y) = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}(y)$

Zudem $(\chi_Q)_x = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}$

Daher ist $(\chi_Q)_x$ integrierbar für alle x und $\mu_k((\chi_Q)_x) = \chi_{Q'}(x)\,\mu_k(Q'')$

Diese Funktion in x ist μ_d-integrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_Q)) \;=\; \mu_d(Q')\,\mu_k(Q'') \;=\; \mu_{d+k}(Q) \;=\; \mu_{d+k}(\chi_Q)$$

Gleiches gilt für die umgekehrte Reihenfolge $\diamond$

Behauptung 2:

Satz gilt für endliche Vereinigung $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$ von Quadern

Begründung: Ohne Einschränkung sind Q_n paarweise disjunkt

Dann $\chi_A = \chi_{Q_1} + \ldots + \chi_{Q_N}$

Behauptung 1: χ_{Q_n} doppelintegrierbar

Nach Lemma 3.3 (i) auch χ_A doppelintegrierbar mit Doppelintegral

$$\begin{aligned} \mu_d(\mu_k(\chi_A)) &= \sum_{n=1}^{N} \mu_d(\mu_k(\chi_{Q_n})) \\ &\overset{\text{Beh.1}}{=} \sum_{n=1}^{N} \mu_{d+k}(\chi_{Q_n}) \\ &= \mu_{d+k}(\chi_A) \end{aligned}$$

◇

Behauptung 3: Satz gilt für offene Mengen A

Anders gesagt: χ_A doppeltintegrierbar für jede offene Menge A

Begründung: $A = \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$ ist abzählbare Vereinigung von Quadern

(jeder Punkt in A liegt in halboffenem Quader mit rationalen Ecken)

Setze $A_N = \bigcup_{n=1}^{N} Q_n$. Dann gilt $\chi_{A_N} \uparrow \chi_A$

Zudem sind Doppelintegrale gleichmäßig beschränkt:

$$\mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) \overset{\text{Beh.2}}{=} \mu_{d+k}(A_N) \leqslant \mu_{d+k}(A) = C < \infty$$

Also nach Lemma 3.3(ii) auch χ_A doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \lim_N \mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) = \lim_N \mu_{d+k}(A_N) = \mu_{d+k}(A)$$

Analoges gilt für das andere Doppelintegral $\diamond$

Behauptung 4: Satz gilt für jedes messbare A mit $\mu_{d+k}(A) < \infty$

Begründung:

Nach äußerer Regularität: $\forall\ n\ \exists\ U_n \supset A$ mit $\mu_{d+k}(U_n \backslash A) < \frac{1}{n}$

Ohne Einschränkung $U_n \supset U_{n+1}$. Setze $U = \bigcap_{n \geqslant 1} U_n$

Dann: $\mu_{d+k}(U) = \mu_{d+k}(A)$ und $U \supset A$

Da $\chi_{U_n} \downarrow \chi_U$ und χ_{U_n} nach Behauptung 3 doppelintegrierbar,

folgt nach Lemma 3.3 (iii), dass χ_U doppelinterierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_U)) \ = \ \lim_n \mu_d(\mu_k(\chi_{U_n})) \overset{\text{Beh.3}}{=} \lim_n \mu_{d+k}(U_n) \ = \ \mu_{d+k}(U) \ = \ \mu_{d+k}(A)$$

und analog für $\mu_k(\mu_d(\chi_U))$

Nun: disjunkte Zerlegung $\chi_A = \chi_U - \chi_N$ mit $N = U \backslash A$ Nullmenge

Wir zeigen:

χ_N doppelintegrierbar, $\mu_d(\mu_k(\chi_N)) = 0$ sowie $(\chi_N)_x = 0$ für fast alle x

Dann $(\chi_A)_x = (\chi_U)_x$ fast sicher und $\mu_k(\chi_A)_x) = \mu_k((\chi_U)_x)$ fast sicher

Kombiniert mit Lemma 3.3(i) folgt Behauptung 4

Es verbleibt: Aussagen über Nullmenge N nachweisen

Wie oben, konstruiere $W \supset N$ mit $\mu_{d+k}(W) = \mu_{d+k}(N) = 0$

Ebenso wie oben: χ_W doppelintegrierbar und $\mu_d(\mu_k(\chi_W)) = 0$

Nach Satz 2.23 zudem: $(\chi_W)_x = 0$ für fast alle x

Da $\chi_N \leqslant \chi_W$, ist $(\chi_N)_x = 0$ fast sicher

Somit χ_N insbesondere doppelintegrierbar $\diamond$

Damit ist der Beweis von Cavalieri beendet $\square$

Beispiel 3.6 (Kugelvolumina)

Gegeben d-dimensionale Kugel bez. der euklidischen Metrik:

$$B_r^d \;=\; \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leqslant r\} \qquad , \qquad \|x\|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{d} (x_j)^2$$

Behauptung:

$$\mu_d(B_r^d) \;=\; r^d \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}!}\,, & d \text{ gerade} \\ \frac{2\cdot(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot d}\,, & d \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis durch Induktion über d

Zunächst Induktionsanfang: $\mu_1(B_r^1) = 2r$ und $\mu_2(B_r^2) = \pi r^2$ klar

Außerdem nach Prinzip von Cavalieri:

$$\mu_d(B_r^d) \;=\; \int_{-r}^{r} \mu_1(dx)\, \mu_{d-1}((B_r^d)_x)$$

wobei $(B_r^d)_x = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|(x,y)\| < r\} = B^{d-1}_{\sqrt{r^2-x^2}}$

Beispiel (Fortsetzung Kugelvolumina)

Durch Iteration zeigt dies:

$$\mu_d(B_r^d) \;=\; \beta_d r^d$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\beta_d > 0$, welche erfüllen:

$$\begin{aligned}
\beta_d r^d \;&=\; \int_{-r}^{r} \mu_1(dx)\, \beta_{d-1}(r^2 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} \\
&=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, r\cos(\theta)\, \beta_{d-1} r^{d-1} \cos(\theta)^{d-1} \\
&=\; r^d\, \beta_{d-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \cos(\theta)^d
\end{aligned}$$

mit Substitution $x = r\sin(\theta)$. Also setze

$$I_d \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \cos(\theta)^d \;=\; \frac{\beta_d}{\beta_{d-1}}$$

Beispiel (Fortsetzung Kugelvolumina)

$$I_d \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \cos(\theta)^d \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \cos(\theta)\,(\cos\theta)^{d-1}$$

$$= \sin(\theta)\,(\cos(\theta))^{d-1}\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \sin(\theta)(d-1)\cos(\theta)^{d-2}(-\sin(\theta))$$

$$\overset{d\geqq 1}{=}\; (d-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,(1-\cos^2(\theta))\,\cos(\theta)^{d-2}$$

$$=\;(d-1)(I_{d-2}-I_d) \;=\; \frac{d-1}{d} I_{d-2}$$

Somit nach Multiplikation mit dI_{d-1}, Iteration und Evaluation:

$$dI_{d-1}I_d \;=\; (d-1)I_{d-2}I_{d-1} \;=\ldots=\; 2\,I_1 I_2 \;=\; 2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; 2\pi$$

Wegen $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = \pi$ folgt somit Ergebnis iterativ aus

$$\beta_d \;=\; I_d\beta_{d-1} \;=\; I_d I_{d-1}\,\beta_{d-2} \;=\; \frac{2\pi}{d}\,\beta_{d-2}$$

Satz 3.7 (Satz von Fubini-Tonelli)

$f : \mathbb{R}^{d+k} \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbar* $\implies$ f *doppelintegrierbar und*

$$\mu_{d+k}(f) \;=\; \mu_d(\mu_k(f)) \;=\; \mu_k(\mu_d(f))$$

Beweis: Für $f = \chi_A$ klar nach Cavalieri

Treppenfunktion $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n}$: Lemma 3.3(i) und Linearität

Jetzt $f \geqslant 0$ integrierbar und Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$. Dann:

$$\mu_k(\mu_d(f_n)) \;=\; \mu_d(\mu_k(f_n)) \;=\; \mu_{d+k}(f_n) \;\leqslant\; \mu_{d+k}(f) \;<\; \infty$$

Somit Lemma 3.3(ii) anwendbar, also f doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(f)) = \lim_n \mu_d(\mu_k(f_n)) \overset{\text{Treppe}}{=} \lim_n \mu_{d+k}(f_n) \overset{\text{Beppo}}{=} \mu_{d+k}(f) \overset{\text{analog}}{=} \mu_k(\mu_d(f))$$

Falls f beliebig, zerlege $f = f_+ - f_-$ für die separat Obiges gilt

Mit Lemma 3.3 (i) folgt der Satz dann auch für f $\square$

Beispiel 3.8

Sei $D = [0,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y,z) \ = \ z\sin(x+y)$$

Dann

$$\begin{aligned}
\mu_3(f\chi_D) &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\pi} dx\, z\sin(x+y) \\
&= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \ -z\cos(x+y)\big|_0^{\pi} \\
&= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy\, 2z\cos(y) \\
&= \int_0^1 dz\, 2z\sin(y)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \int_0^1 dz\, 4z \ = \ 2
\end{aligned}$$

Umkehrung unter Zusatzvoraussetzung:

Satz 3.9

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ doppelintegrierbar und $f \geqslant 0 \implies f$ integrierbar

Beweis: Wähle positive Treppenfunktionen $f_n \uparrow f$

Schränke f_n auf Kugel B_n mit Radius n um 0 ein

Dann ist $g_n = f_n \chi_{B_n}$ integrierbar und $g_n \uparrow f$

Nach Satz von Fubini ist g_n doppelintegrierbar und

$$\begin{aligned}
\mu_{d+k}(f) &= \lim_{n\to\infty} \mu_{d+k}(g_n) && \text{(monotone Konvergenz)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_d(\mu_k(g_n)) && \text{(Fubini)}\\
&= \mu_d(\mu_k(f)) && \text{(monotone nach Lemma 3.3)}\\
&< \infty
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.10 (Voraussetzung $f \geqslant 0$ in Satz 3.9 notwendig!)

$\exists$ doppelintegrierbare Funktionen mit verschiedenen Doppelintegralen:

$$g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \quad \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \qquad , \qquad x \in [0,1]$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_n(x) - g_{n+1}(x)\big) g_n(y) \qquad , \qquad x, y \in [0,1]$$

Summe konvergent, da Träger der Summanden disjunkt

Da für jedes y nur ein Summand und $\mu_1(g_n) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, f(x,y) &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_n(x) - g_{n+1}(x)\big) g_n(y) \\ &= \int_0^1 dy (1-1) g_n(y) = 0\end{aligned}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, f(x,y) = \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_n(x) - g_{n+1}(x)\big) = \int_0^1 dx\, g_1(x) = 1$$

Satz 3.11 (Jacobi'sche Transformationsformel)

$U, U' \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : U \to U' = \phi(U)$ ist C^1-Diffeomorphismus (d.h. ϕ invertierbar und ϕ, ϕ^{-1} differenzierbar mit stetiger Ableitung)

Zudem: $f : U' \to \mathbb{R}$ integrierbar

$\implies f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx') f(x') = \int_U \mu(dx)(f \circ \phi)(x) |\det(\phi'(x))|$$

Hierbei heißt $\det(\phi'(x))$ die Jacobi-Determinante

Erinnerung:

ϕ' Linearisierung von ϕ

Somit $\phi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ invertierbare $d \times d$ Matrix

Also nach Voraussetzung $|\det(\phi'(x))| > 0$ stetig

Beweis:

Behauptung 1: Es reicht zu zeigen, dass

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx')\, f(x') \leqslant \int_U \mu(dx)\,(f\circ\phi)(x)\,|\det(\phi'(x))| \tag{3.2}$$

Begründung: Für $\phi^{-1} : U' \to U$ und $g = (f\circ\phi)|\det(\phi')|$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_U \mu(dx)\,(f\circ\phi)(x)\,|\det(\phi'(x))| &= \int_{\phi^{-1}(U')} \mu(dx)\, g(x) \\
&\leqslant \int_{U'} \mu(dx')\,(g\circ\phi^{-1})(x')|\det((\phi^{-1})'(x'))| \\
&= \int_{U'} \mu(dx')\,(f\circ\phi\circ\phi^{-1})(x')|\det(\phi'(\phi^{-1}(x)))||\det((\phi^{-1})'(x'))| \\
&= \int_{U'} \mu(dx')\, f(x')
\end{aligned}$$

Letzteres wegen Kettenregel $\mathbf{1} = (\phi\circ\phi^{-1})' = (\phi'\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})'$ $\diamond$

Behauptung 2: Es reicht, (3.2) für Indikatorfunktionen zu zeigen

Begründung: (inzwischen Standard)

Linearität des Integrals: (3.2) dann auch für Treppenfunktionen

Monotone Konvergenz: auch für positive integrierbare Funktionen

(da aus $f_n \uparrow f$ auch $(f_n \circ \phi)|\det(\phi')| \uparrow (f \circ \phi)|\det(\phi')|$ folgt)

Beliebige integrierbare Funktion zerlege in Positiv- und Negativteil $\diamond$

Noch zu zeigen: für jedes messbare $A \subset U$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt

$$\mu(\phi(A)) \leqslant \int_A \mu(dx)\,|\det(\phi'(x))| \tag{3.3}$$

Falls ϕ linear ist, d.h. $\phi'(x) = \phi$ für alle $x \in U$,

folgt (3.3) aus Satz 2.23, der sogar Gleichheit liefert

Grundidee: approximiere ϕ lokal durch affine Abbildungen

Behauptung 3: Hinreichend (3.3) unter der zusätzlichen Annahme: ϕ hat Erweiterung auf Kompaktum $K \supset U$ als C^1-Diffeomorpismus

Begründung: Betrachte, für $k \in \mathbb{N}$,

$$U_k \;=\; \left\{ x \in U \;\middle|\; \|x\| < k \text{ und } d(x, \mathbb{R}^d \backslash U) > \frac{1}{k} \right\}$$

Dann: $\overline{U}_k \subset U$ kompakt und $\bigcup_k U_k = U$

Wenn also (3.3) für U_k mit $A_k = A \cap U_k$ gilt, dann (monotone Konv.):

$$\mu(\phi(A)) = \lim_k \mu(\phi(A_k)) \leqslant \lim_k \int_{A_k} \mu(dx)\,|\det \phi'(x)| = \int_A \mu(dx)\,|\det \phi'(x)|$$

$\diamond$

Also: ϕ' und $(\phi^{-1})'$ gleichmäßig stetig und uniform beschränkt auf U

$$M \;=\; \sup_{x \in U} \max \left\{ \|\phi'(x)\|\,,\; \|(\phi^{-1})^{-1}(\phi(x))\|\,,\; |\det(\phi'(x))| \right\} \;<\; \infty$$

Behauptung 4: (3.3) gilt für Quader $A = Q$

Beweis: Wegen gleichmäßiger Stetigkeit von Φ auf $\overline{Q}$:

Zu $\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ mit $\|\phi'(x) - \phi'(y)\| \leqslant \varepsilon \ \ \forall\ x, y \in Q$ mit $d(x, y) < \delta$

Zerlege disjunkt $Q = \bigcup_n Q_n$ in Quader mit Seitenlänge $\leqslant \delta$

Sei $q_n \in Q_n$ der Mittelpunkt

$\phi(Q_n)$ zwar kein Paralleliped, aber vergleichbar mit Paralleliped

$$P_n \ = \ \phi(q_n) \ + \ \phi'(q_n)(Q_n - q_n)$$

In der Tat, für $x \in Q_n$

$$\begin{aligned} &\|\phi(x) - (\phi(q_n) + \phi'(q_n)(x - q_n))\| \\ &\qquad\qquad = \left\| \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\phi(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)(x - q_n) \right\| \\ &\qquad\qquad \leqslant \ \int_0^1 dt\, \|\phi'(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)\| \|x - q_n\| \ \leqslant \ \varepsilon\delta \end{aligned}$$

Somit: $\phi(Q_n)$ enthalten in Paralleliped P_n' gegeben durch Streckung der Seiten von P_n um Faktor $1+\varepsilon$. Also

$$\mu(\phi(Q_n)) \leqslant \mu(P_n') \leqslant (1+\varepsilon)^d \mu(P_n) = (1+\varepsilon)^d |\det(\phi'(q_n))|\, \mu(Q_n)$$

Letzteres nach Satz 2.23

Zudem $\phi(Q) = (\phi^{-1})^{-1}(Q)$ Borelmenge (da ϕ^{-1} stetig)

Es gilt:

$$\mu(\phi(Q)) = \sum_n \mu(\phi(Q_n)) \leqslant (1+\varepsilon)^d \sum_n |\det(\phi'(q_n))|\, \mu(Q_n)$$

Treppenfunktion $\sum_n |\det(\phi'(q_n))|\chi_{Q_n}$ konvergieren gegen $|\det(\phi')|\chi_Q$ für $\delta \downarrow 0$. Alles beschränkt durch $M\chi_Q$

Somit nach Satz von Lebesgue

$$\mu(\phi(Q)) \leqslant (1+\varepsilon)^d \int_Q \mu(dx)\, |\det(\phi'(x))|$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt Behauptung $\diamond$

Behauptung 5: (3.3) gilt für jede messbare Menge A

Beweis: $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Quaderüberd. von A mit $\mu^*\left(\bigcup_n Q_n \setminus A\right) < \varepsilon$

$\Longrightarrow (\phi(Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Überdeckung von $\phi(A)$ mit Borelmengen. Mit Beh. 4

$$\begin{aligned} \mu^*(\phi(A)) &\leqslant \sum_n \mu^*(\phi(Q_n)) \leqslant \sum_n \int_{Q_n} \mu(dx)\,|\det(\phi'(x))| \\ &= \int_{\bigcup_n Q_n} \mu(dx)\,|\det(\phi'(x))| \leqslant \varepsilon \cdot M + \int_A \mu(dx)\,|\det(\phi'(x))| \end{aligned}$$

d.h.

$$\mu^*(\phi(A)) \leqslant \int_A \mu(dx)\,|\det(\phi'(x))| \tag{3.4}$$

Nun zerlege $A = B \mathbin{\mathring{\cup}} N$ in Borelmenge B und Nullmenge N

Dann zeigt (3.4), dass $\phi(N)$ auch Nullmenge ist

$\phi(B)$ Borelmenge $\Longrightarrow \mu^*(\phi(A)) = \mu^*(\phi(B)) = \mu(\phi(B)) = \mu(\phi(A))$

Eingesetzen in (3.4) zeigt Behauptung $\diamond\ \square$

Beispiel 3.12 (Gauss-Integral)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-x^2} e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx)\, e^{-|x|^2}$$

nach Fubini. Nun Polarkoordinaten

$$\phi(r,\psi) = (r\cos(\psi), r\sin(\psi)) \quad , \quad \phi'(r,\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -r\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & r\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

wobei $\phi : \mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) \mid x \geqslant 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ Diffeomorph.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_{\geqslant 0}} \mu(dx)\, e^{-|x|^2} &= \int_{\mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi)} \mu(dr, d\psi)\, e^{-r^2} |\det(\phi'(\psi, r))| \\ &= \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Somit ist Gauss'sche Integral berechnet: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-|x|^2} = \sqrt{\pi}$

Beispiel 3.13 (Kugelkoordinaten als zweites Standardbeispiel)

Kugelkoordinaten für rotationssymmetrische Integrale im $\mathbb{R}^3$:

$$\phi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus S$$

wobei

$$S \;=\; \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \leqslant 0\,, \quad x_2 = 0 \right\}$$

und

$$\phi(r, \varphi, \theta) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Dann

$$\phi'(r, \varphi, \theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und somit nach kurzer Rechnung:

$$\det(\phi'(r, \varphi, \theta)) \;=\; r^2\cos(\theta) \;>\; 0$$

Beispiel (Kugelkoordinaten Fortsetzung)

Also für Integral über Kugel $B_R(0)$ mit Radius R:

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx)\, f(x) \;=\; \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, r^2 \cos(\theta)\, f(\phi(r,\varphi,\theta))$$

Insbesondere, wenn f rotationssymmetrisch ist und $f \circ \phi(r,\varphi,\theta) = \tilde{f}(r)$,

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx)\, f(x) \;=\; 4\pi \int_0^R dr\, r^2\, \tilde{f}(r)$$

Z.B. (vergleiche Beispiel 3.6):

$$\mathrm{Vol}(B_R(0)) \;=\; \int_{B_R(0)} \mu_3(dx) \;=\; 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \;=\; \frac{4\pi}{3}\, R^3$$

Beispiel 3.14 (Matrixintegrale)

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ Menge reeller symmetrischer $n \times n$ Matrizen

Als Menge mit $\mathbb{R}^d$ identisch wobei $d = \frac{n(n+1)}{2}$

Somit gibt es Lebesgue-Maß μ_d auf $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$

Ein Matrixintegral einer integrierbaren Funktionen $f : \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist

$$\int \mu_d(dX)\, f(X)$$

Zu gegebenen invertierbaren $A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ betrachte

$$\phi : \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \quad , \quad \phi(X) \;=\; AXA^T$$

Abbildung ϕ linear in X und invertierbar mit $\phi^{-1}(X) = A^{-1}X(A^{-1})^T$

Behauptung: Für alle $X \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ gilt $\det(\phi'(X)) = \det(A)^{n+1}$

Also sehr hilfreiche Transformationsformel für $\mathcal{U} \subset \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$:

$$\int_{A\mathcal{U}A^T} \mu_d(dX)\, f(X) \;=\; |\det(A)|^{n+1} \int_{\mathcal{U}} \mu_d(dX)\, f(AXA^T)$$

Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Begründung: Nach erweiterten Gauss-Algorithmus ist

$$A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_J,$$

wobei die E_j Matrizen der folgenden Gestalt sind (BraKet-Notation):

$$E \ = \ \mathbf{1} + |\ell\rangle\langle k| \qquad , \qquad \tilde{E} \ = \ \mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|$$

mit $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq \ell$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$. Dann

$$\phi(X) \ = \ E_1 \cdot \ldots \cdot E_J X E_J^T \cdot \ldots \cdot E_1^T$$

Also nur Behauptung für E und $\tilde{E}$ zu zeigen, denn dann

$$\det(\phi') \ = \ |\det(E_1)|^{n+1} \cdot \ldots \cdot |\det(E_J)|^{n+1} \ = \ |\det(A)|^{n+1}$$

Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Sei $Y = EXE^T$ mit E wie oben und $X = (x_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Dann

$$\begin{aligned} Y &= (\mathbf{1} + |\ell\rangle\langle k|)X(\mathbf{1} + |k\rangle\langle\ell|) \\ &= \left(x_{i,j} + \delta_{\ell,i}x_{k,j} + x_{i,k}\delta_{\ell,j} + \delta_{i,\ell}\delta_{\ell,j}x_{k,k}\right)_{i,j=1,\dots,n} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Schreibe X als Vektor mit den Einträgen auf und über Diagonale:

$$\vec{X} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, x_{3,3}, \dots, x_{n-1,n-1}, x_{n-1,n}, x_{n,n})^T \in \mathbb{R}^d$$

Somit Einträge in lexikographischer Ordnung. Analog defniere $\vec{Y}$
Dann definiere “Superoperator” $M \in \mathrm{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ durch $\vec{Y} = M\vec{X}$
Gemäß (3.5) ist $M = \mathbf{1} + S$
Fakt: S obere (untere) Dreiecksmatrix für $k > \ell$ (für $k < \ell$),
jeweils ohne Eintrag auf der Diagonalen

Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Begründung: Einträge von (3.5) für $k > \ell$ und $i \leqslant j$:

- Term $x_{i,k}\delta_{\ell,j}$:

  da $k > \ell = j \geqslant i$ ist Eintrag $x_{i,k}$ unterhalb von $x_{i,j}$ im Vektor $\vec{X}$
- Term $\delta_{i,\ell}\delta_{\ell,j}x_{k,k}$:

  da $k > \ell = i = j$ ist Eintrag $x_{k,k}$ unterhalb von $x_{i,j} = x_{i,i}$ in $\vec{X}$
- Term $\delta_{\ell,i}x_{k,j} = \delta_{\ell,i}x_{j,k}$:

  da $k > \ell = i \leqslant j$ ist, falls $k \leqslant j$, der Eintrag $x_{k,j}$ unterhalb $x_{i,j}$ in $\vec{X}$ (da $k > i$), und falls $k < j$ der Term $x_{j,k}$ ebenfalls (offensichtlich für $j > i$ und falls $i = j$ ist $k > j$) $\diamond$

Aus Fakt folgt Behauptung für $A = E$:

$$\det(\phi') = \det(M) = 1 = \det E = (\det(E))^{n+1}$$

Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Nun zu $\tilde{E}$ und $\tilde{Y} = \tilde{E}X\tilde{E}^T$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \big(\mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|\big)X\big(\mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|\big)\\ &= \Big(x_{i,j}\delta_{i\neq k}\delta_{j\neq k} + \lambda x_{i,j}(\delta_{i\neq k}\delta_{j,k} + \delta_{i,k}\delta_{j\neq k}) + \lambda^2 x_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k}\Big)_{i,j=1,\dots,n}\end{aligned}$$

Definiere $\tilde{M}$ wieder durch $\vec{\tilde{Y}} = \tilde{M}\vec{X}$

$\tilde{M}$ diagonal mit einem Eintrag λ^2 und $(n-1)$ Einträgen λ

Somit Behauptung für $\tilde{E}$:

$$\det(\phi') = \det(M) = \lambda^2 \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1} = \det(\tilde{E})^{n+1}$$

Zusammen ist also Jacobi-Determinante für alle A berechnet

d.h. Behauptung $\det(\phi'(X)) = \det(A)^{n+1}$ für $\phi(X) = AXA^T$ ist überprüft

4 Topologische Grundlagen

Schlagwörter: Metrische, topologische, kompakte Räume, Stetigkeit

Definition 4.1

$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} = [0, \infty)$ heißt Metrik (oder Abstand) auf Menge X, falls $\forall\; x, y, z \in X$ gilt, dass

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Nichtentartung)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt (X, d) metrischer Raum

Beispiel 4.2

$X = \mathbb{C}^N$ versehen mit euklidischer Metrik

$$d(x, y) \;=\; \|x - y\| \;=\; \Big(\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Dies ist ein Spezialfall von Folgendem:

Satz 4.3

Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$ *ist ein metrischer Raum mit induzierter Metrik*

$$d(x, y) \;=\; \|x - y\|$$

Beweis: Erinnerung an Definition: $\|.\| : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ Norm, wenn

(i) $\|\lambda v\| \;=\; |\lambda|\;\|v\| \qquad \text{(Homogenität)}$

(ii) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$

(iii) $\|v\| = 0 \implies v = 0 \qquad \text{(Nicht-Entartung)}$

Dann $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

Symmetrie klar nach Homogenität und Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|x - z + z - y\| \\ &\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 4.4

$X = C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetige Funktion}\}$

reeller Vektorraum der Dimension ∞ mit Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Die induzierte Metrik ist also

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Beispiel 4.5

Beispiel ganz anderer Natur: Für Menge X setze

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Dies ist eine Metrik

Definition 4.6

(X, d) metrischer Raum, $x \in X,\ r > 0,\ A \subset X$ Teilmenge

(i) Die (offene) Kugel mit Radius r und Mittelpunkt x ist

$$B_r(x) \ = \ \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

(ii) A offen $\iff \ \forall\, a \in A\, \exists\, r > 0$ mit $B_r(a) \subset A$

Satz 4.7

(X, d) metrischer Raum, $r > 0,\ x \in X$

(i) *$(A_i)_{i \in I}$, I Indexmenge, $A_i \subset X$ offen*
$\implies \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i$ für ein $i \in I\}$ ist offen

(ii) *$B_r(x)$ offen*

(iii) *$A \subset X$ offen $\iff$ A ist Vereinigung von Kugeln*

(iv) *$A, B \subset X$ offen $\implies$ $A \cap B$ offen*

Beweis:

(i) Setze $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Sei $a \in A$

$\implies \exists\, i \in I$ mit $a \in A_i$

$\implies \exists\, r > 0$ mit $B_r(a) \subset A_i$ (weil A_i offen)

$\implies B_r(a) \subset A$, somit A offen

(ii) Sei $a \in B_r(x)$. Sei $\delta = d(a, x) < r$. Dann $B_{r-\delta}(a) \subset B_r(x)$

(iii) "$\Longleftarrow$" klar nach (i) und (ii)

"$\Longrightarrow$" Zu $a \in A$ wähle $r_a > 0$ mit $B_{r_a}(a) \subset A$.

Dann $A = \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ (hier ist A Indexmenge!)

(iv) $a \in A \cap B$. Da sowohl A als auch B offen

$\implies \exists\, r_A > 0$ und $r_B > 0$ mit $B_{r_A}(a) \subset A$ und $B_{r_B}(a) \subset B$

Setze $r = \min\{r_A, r_B\}$. Dann $B_r(a) \subset A \cap B$. Somit $A \cap B$ offen $\square$

Beispiel 4.8

1. Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind Vereinigungen offener Intervalle (a, b).
2. Offene Mengen in $\mathbb{R}^d$ sind Vereinigungen offener Kugeln

Verallgemeinerung des metrischen Raumes: topologischer Raum

Notation: $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ Potenzmenge von X

Definition 4.9

X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ Mengensystem von Teilmengen von X

Dann heißt $\mathcal{O}$ Topologie auf X, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}, \; X \in \mathcal{O}$

(ii) $(A_i)_{i \in I}, \; A_i \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ vereinigungsstabil)

(iii) Für $N \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{O} \implies \bigcap_{i=1}^{N} A \in \mathcal{O}$
($\mathcal{O}$ endlich durchschnittsstabil)

Dann heißt $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und Elemente von $\mathcal{O}$ offen

Bemerkung 4.10

(X, d) metrischer Raum. Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{\text{beliebige Vereinigungen von Kugeln in } X\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \,\middle|\, r_i > 0,\ x_i \in X,\ i \in I \right\} \cup \{\emptyset\}\end{aligned}$$

Nach Satz 4.7 ist dies Topologie, genannt induzierte Topologie

Beispiel 4.11

Aber: nicht jede Topologie wird von einer Metrik induziert!

X habe $\geqslant 2$ Punkte. Betrachte "Klumpentopologie" $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$

Annahme: $\exists$ Metrik d auf X, welche $\mathcal{O}$ induziert

$\Longrightarrow$ einzige Kugel ist $X \Longrightarrow \forall\, r > 0$ gilt $d(x, y) < r \quad \forall\, x, y \in X$

$\Longrightarrow d(x, y) = 0 \quad \forall\, x, y \in X$ Widerspruch zur Definition von d $\lightning$

Bemerkung 4.12

Metriken d und d' auf X können gleiche Topologie erzeugen

Dies gilt insbesondere, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{C}\, d(x,y) \;\leqslant\; d'(x,y) \;\leqslant\; C\, d(x,y) \qquad \forall\, x, y \in X$$

weil dann (mit der Bezeichnung $B'_r(x)$ für Kugeln bezüglich d')

$$B_{\frac{r}{C}}(x) \;\subset\; B'_r(x) \;\subset\; B_{Cr}(x)$$

Also $B_r(x) = \bigcup_{y \in B_r(x)} B_{r_y}(y) = \bigcup_{y \in B_r(x)} B'_{\frac{r_y}{C}}(y)$ offen in Topologie zu d'

Beispiel 4.13

$\mathbb{R}^d$ mit euklidischer Metrik d und Maximumsmetrik $d' = d_\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \max_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i| \;\leqslant\; \left(\sum_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Konstruktion neuer topologischer Räume aus bekannten:

Definition 4.14

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$

$\mathcal{O}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{O}\}$ Unterraumtopologie auf A

$(A, \mathcal{O}_A)$ heißt topologischer Unterraum von $(X, \mathcal{O})$

Satz 4.15

$\mathcal{O}_A$ Topologie auf A

Beweis: Nachweis der Eigenschaften aus Definition 4.9:

(i) $\emptyset, A \in \mathcal{O}_A$

(ii) $C_i \in \mathcal{O}_A \implies \exists\ B_i \in \mathcal{O}$ mit
$C_i = A \cap B_i \implies \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{i \in I} B_i \cap A = \bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{O}_A$

(iii) Übung

$\square$

Notation: $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\} = X \backslash A$ Komplement von $A \subset X$ in X

Definition 4.16

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$. Dann:

A abgeschlossen $\iff$ A^c offen

Satz 4.17

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum

(i) *$\emptyset, X$ abgeschlossen*

(ii) *$(A_i)_{i \in I}$ Familie abgeschlossener Mengen $\implies$ $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschl.*

(iii) *$A_1, \ldots, A_N$ abgeschlossen $\implies$ $\bigcup_{i=1}^N A_i$ abgeschlossen*

Beweis: (i) $(\emptyset)^c = X$ und$X^c = \emptyset$ offen

(ii) Mengentheoretische Identität:

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &= \left\{x \in X \mid x \notin \bigcap_{i\in I} A_i\right\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A_i \text{ für ein } i \in I\} \\ &= \bigcup_{i\in I}\{x \in X \mid x \notin A_i\} = \bigcup_{i\in I} A_i^c\end{aligned}$$

Nun ist A_i^c offen $\forall\ i \in I$

$\implies \bigcup_{i\in I} A_i^c$ offen (nach Definition 4.9) $\implies \bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen

(iii) $\left(\bigcup_{i=1,\dots,N} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^N A_i^c$ offen weil A_i^c offen und Definition 4.9 $\square$

Definition 4.18

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\quad x \in X\,,\quad U \subset X$

$U = U(x)$ heißt Umgebung von $x \iff \exists\, A \in \mathcal{O}$ mit $x \in A \subset U$

Bemerkung 4.19

In (X, d) ist U Umgebung von $x \iff \exists$ Kugel $B_r(x) \subset U$

Beispiel 4.20

$a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$
2. $[a, b)$ weder offen noch abgeschlossen
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen

   Begründung $\quad q \in \mathbb{Q}$, dann ist kein $B_r(q) \subset \mathbb{Q}$ wenn $r > 0$
4. $[a, b)$ Umgebung von allen $x \in (a, b)$, aber nicht von a und b
5. $\bigcap_{n \geqslant 1} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1]$ nicht offen (unendlicher Durchschnitt)

Satz 4.21

$(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum,* $A \subset X$

A *offen* $\iff$ A *Umgebung all seiner Punkte*

Beweis:

"$\Longrightarrow$" $x \in A \implies x \in A \subset A$ mit A offen $\implies A$ Umgebung von x

"$\Longleftarrow$" A Umgebung von $x \ \forall\, x \in A$

$\implies \forall\ x \in A\ \exists$ offenes B_x mit $x \in B_x \subset A$

$\implies \bigcup_{x \in A} B_x = A$ offen, nach Vereinigungsstabilität $\square$

Definition 4.22

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $x \in X$ und $A \subset X$

(i) x Berührungspunkt (BP) von A

$\iff \forall$ Umgebungen U von x gilt $U \cap A \neq \emptyset$

(ii) x Häufungspunkt (HP) von A

$\iff \forall$ Umgebungen U von x gilt $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Bemerkung 4.23

$A \subset X$ eines topologischen Raums und $x \in X$

1. $x \in A \implies x$ BP von A, aber nicht immer HP von A
   Zum Beispiel ist 1 BP von $A = \{1\} \subset \mathbb{R}$, aber 1 nicht HP von A
2. Jeder HP von A ist auch BP von A (nicht umgekehrt!)
3. $A \subset \mathbb{R}$ von oben beschränkt $\implies a = \sup(A)$ BP von A

   Sonst gäbe es $r > 0$ mit $B_r(a) \cap A = \varnothing$

   und $a - \frac{r}{2}$ wäre kleinere obere Schranke. Widerspruch $\lightning$

Satz 4.24

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$
Äquivalent sind:

(i) *A abgeschlossen*
(ii) *Jeder BP von A gehört zu A*
(iii) *Jeder HP von A gehört zu A*

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): A abgeschlossen, $x \notin A$
$\Longrightarrow \quad x \in A^c$ offen $\quad \Longrightarrow \quad A^c$ Umgebung von x (nach Satz 4.21)
Da aber $A^c \cap A = \emptyset$, ist x nicht BP von A
Somit Negation: x BP von $A \implies x \in A$
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): klar nach Bemerkung 4.23
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Jeder HP von A ist in A, also ist $x \in A^c$ nicht HP von A
$\Longrightarrow \exists$ offene Umgebung $U(x)$ mit $A \cap (U(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$, d.h. $U(x) \subset A^c$
Somit $A^c = \bigcup_{x \in A^c} U(x)$ offen $\Longrightarrow$ A abgeschlossen $\square$

Definition 4.25

Topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt Hausdorff-Raum

$\iff \forall \ x \neq y \in X \ \exists$ Umgebungen $U(x), \ U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \varnothing$

Man sagt auch, es gilt die Trennungseigenschaft T_2 in X

Satz 4.26

Jeder metrische Raum (X, d) ist ein Hausdorff-Raum

(wenn versehen mit der induzierten Topologie)

Beweis: $x, y \in X$, $x \neq y \implies r = d(x, y) > 0$ (Nichtentartung)

Wähle $U(x) = B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $U(y) = B_{\frac{r}{2}}(y)$. $\square$

Satz 4.27

$(X, \mathcal{O})$ Hausdorff und x Häufungspunkt von $A \subset X$
$\Longrightarrow$ in jeder Umgebung U von x liegen unendlich viele Punkte von A

Beweis:

U Umgebung von x

$\Longrightarrow \ \exists \, x_1 \in A \cap U \backslash \{x\}$, $x_1 \neq x$

$\Longrightarrow \ \exists$ Umgebungen $U_1(x) \subset U(x)$ und $V_1(x_1)$ mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$

$\Longrightarrow \ \exists \, x_2 \in U_1(x) \backslash \{x\} \cap A$ und $x_2 \neq x_1$ sowie $x_2 \neq x$

Dann iteriere. $\square$

Definition 4.28

Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Hausdorff Raum $(X, \mathcal{O})$ konvergiert gegen $x \in X$

$\iff$ zu jeder Umgebung U von x $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U \quad \forall\, n \geqslant N$

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_n x_n = x$

Bemerkung 4.29

(X, d) metrischer Raum. Dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \Big(\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \text{ mit } x_n \in B_\epsilon(x) \quad \forall\, n \geqslant N \Big)$$

Für $X = \mathbb{R}^d$ oder $X = \mathbb{C}^d$ stimmt Konvergenzbegriff mit Ana 1 überein!

Definition 4.30

$x \in X$ Häufungspunkt (HP) von Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Hausdorff $(X, \mathcal{O})$

$\iff$ zu jeder Umgebung U von x $\exists$ unendlich viele n mit $x_n \in U$

Achtung! HP von Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \implies$ HP von Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

aber Umkehrung falsch (z.B. konstante Folgen)

Satz 4.31

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{O})$

$x = \lim_{n\to\infty} x_n \implies x$ *einziger HP von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(Grenzwert eindeutig)*

Beweis: Sei y zweiter HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y \neq x$

$\implies \exists$ Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \varnothing$

Nach Definition der Konvergenz $\exists\, N$ mit $x_n \in U(x) \;\; \forall\, n \geqslant N$

$\implies$ nur endlich viele x_n in $U(y)$. Widerspruch $\lightning$ $\square$

Satz 4.32

(X, d) *metrischer Raum und* $x \in X$ *HP von Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X

$\implies \exists$ *Teilfolge, die gegen* x *konvergiert.*

Beweis: Bestimme iterativ $n_k > n_{k-1}$, so dass $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$

Dann $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. $\square$

Metrische Räume sind natürlicher Kontext für folgende Begriffe.

Definition 4.33

(X, d) metrischer Raum

(i) $A \subset X$ beschränkt $\iff \exists\, C \in \mathbb{R}$ mit $d(x, y) \leqslant C \quad \forall\, x, y \in A$

(ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X

$\iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N$ mit $d(x_n, x_m) \leqslant \epsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N$

(iii) (X, d) vollständig $\iff$ jede Cauchy-Folge in X konvergent

Also: X vollständig $\Longrightarrow$ X metrisch $\Longrightarrow$ X Hausdorff $\Longrightarrow$ X topologisch

Definition 4.34

$(V, \|\,.\,\|)$ normierter Vektorraum, also auch metrischer Raum

V vollständig $\quad \iff \quad V$ Banachraum

Definition 4.35

$(V, \langle\,|\,\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, also auch metrischer Raum

V vollständig $\quad \iff \quad V$ Hilbertraum

Satz 4.36

(X,d) *metrischer Raum*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge* $\Longrightarrow$ $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ *beschränkt*

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent* $\Longrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge*

Beweis: (analog zu $\mathbb{R}$)

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

$\Longrightarrow\ \exists\ N$ mit $d(x_n,x_m)\leqslant 1\quad \forall\ n,m\geqslant N$

Setze $r=\max\{d(x_1,x_N),\ldots,d(x_{N-1},x_N)\}+1$.

Dann $x_k\in B_r(x_N)\quad\forall\ k\in\mathbb{N}$.

(ii) $\lim_n x_n = x$. Sei $\epsilon>0$. Bestimme N, so dass

$$d(x,x_n)\ <\ \frac{\epsilon}{2}\qquad \forall\ n\geqslant N$$

Dann $\forall\ n,m\geqslant N$

$$d(x_n,x_m)\ \leqslant\ d(x_n,x)\ +\ d(x,x_m)\ \leqslant\ \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\ =\ \epsilon \qquad \square$$

Beispiele vollständiger Räume

Beispiel 4.37

$\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$ sind vollständig (Ana 1)

Beispiel 4.38

$C([a,b])$ versehen mit der Norm $\|\,.\,\|_\infty$ (Beispiel 4.4) ist wegen folgendem Resultat vollständig

Satz 4.39 (Uniforme Limites stetiger Funktionen sind stetig)

$f_n \in C([a,b])$ *und* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$
$\Longrightarrow \quad g \in C([a,b])$

Bemerkung 4.40

Also ist $(C([a,b]), \|\,.\,\|_\infty)$ ein Banachraum
Die von $\|\,.\,\|_\infty$ induzierte Metrik heißt auch die Metrik der uniformen Konvergenz, manchmal auch der gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis von Satz 4.39: Sei $x \in [a, b]$ und $\epsilon > 0$

$\implies \exists\, N$ mit $\|f_n - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n \geqslant N$

f_N stetig bei $x \implies \exists$ Umgebung $\delta > 0$, so dass

$$|f_N(x) - f_N(x')| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, x' \in B_\delta(x)$$

Somit für $x' \in B_\delta(x)$ gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &\leqslant |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')| + |f_N(x') - g(x')| \\ &< \|g - f_N\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} + \|f_N - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel 4.41

$L^2([a, b])$ Menge der Äquivalenzklassen quadrat-integrierbaren Funktionen mit Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b dx\, \overline{f(x)}\, g(x)$$

ist vollständig, also Hilbert-Raum (Riesz-Fischer, Beweis später)

Fakt: Es gibt unvollständige metrische Räume,

aber jeder metrische Raum (X, d) kann vervollständigt werden:

Setze $Y = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $X\}$ und $\tilde{X} = Y/\sim$, wobei

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Definiere $\quad \tilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ (Limes existiert!)

Einbettung: $I : X \to \tilde{X} \qquad I(x) = (x)_{n\in\mathbb{N}}$ konstante Folge

Satz 4.42

$(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig und $X \subset \tilde{X}$ dicht,

d.h. zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$ existiert $x \in X$ mit $x \in \tilde{U}$

Ohne detaillierten Beweis, aber im Prinzip genauso wie bei $\mathbb{R}$

Beispiel 4.43

Zu $X = \mathbb{Q}$ ist $\tilde{X} = \mathbb{R}$

Ein weitere wichtiger Klasse topologischer Räume

(für die Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie):

Definition 4.44

Ein polnischer Raum ist ein separabler, vollständig metrisierbarer topologischer Raum

Hierbei wurden folgende Begriffe für topologischen Raum X verwandt:

X separabel $\iff \exists$ abzählbare und dichte Teilmenge

X metrisierbar $\iff \exists$ Metrik, die die Topologie induziert

X dann vollständig metrisierbar $\iff X$ vollständig bzgl. dieser Metrik

Beispiel 4.45

Polnisch sind: separable Banachräume, kompakte metrische Räume

Satz 4.46 (Fixpunktsatz von Banach)

(X, d) *vollständiger metrischer Raum*

$f : X \to X$ *Lipshitz-stetig mit Lipshitzkonstante* $L < 1$*, d.h.*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant L\, d(x, y)$$

$\Longrightarrow$ f *hat genau einen Fixpunkt* $x \in X$*, d.h.* $f(x) = x$

Beweis: Sei $x_n = f(x_{n-1})$ Orbit von beliebigem Startpunkt $x_0 \in X$

$$d(x_n, x_{n+1}) \; = \; d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \; \leqslant \; L\, d(x_{n-1}, x_n) \; \leqslant \ldots \leqslant \; L^n\, d(x_0, x_1)$$

Zudem nach der Dreiecksungleichung für $n \leqslant m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) \; &\leqslant \; d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leqslant \; L^n \left(\sum_{k=0}^{m-n} L^k \right) d(x_0, x_1) \; \leqslant \; L^n \frac{1}{1-L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Somit ist $(x_n)_{n \geqslant 0}$ eine Cauchy-Folge in X.

Wegen Vollständigkeit von X existiert Limespunkt $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

Nun ist $\lim_{n\to\infty} d(f(x), f(x_n)) \leqslant \lim_{n\to\infty} L\, d(x, x_n) = 0$ und somit

$$f(x) \; = \; \lim_{n\to\infty} f(x_n) \; = \; \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \; = \; x$$

Also ist x Fixpunkt. Sei x' ein zweiter Fixpunkt. Dann

$$d(x, x') \; = \; d(f(x), f(x')) \; \leqslant \; L\, d(x, x')$$

was wegen $L < 1$ impliziert, dass $d(x, x') = 0$, d.h. $x = x'$ ist $\square$

Definition 4.47

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum

(i) $(A_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \iff A_i \in \mathcal{O}$ und $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

(ii) $(A_i)_{i \in I_0}$ Teilüberdeckung von $(A_i)_{i \in I} \iff I_0 \subset I$ und $X = \bigcup_{i \in I_0} A_i$

(iii) X kompakt $\iff X$ Hausdorff und jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung

(iv) $K \subset X$ kompakt $\iff K$ kompakt bez. Unterraumtopologie

$\iff \forall\ (B_i)_{i \in I}$ offen in Hausdorff X und $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$

$\exists$ endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I_0} B_i$

Beispiel 4.48

1. $(0, 1)$ nicht kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$
   weil: $(0, 1) = \bigcup_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ ohne endliche Teilüberdeckung
2. Später: Satz von Heine-Borel zeigt $[0, 1]$ kompakt
3. Endliche Mengen sind immer kompakt

Satz 4.49

$(X, \mathcal{O})$ Hausdorff und $K \subset X$ kompakt. Dann

(i) *K abgeschlossen*

(ii) *$A \subset K$ abgeschlossen in $K \implies A$ kompakt*

Beweis: (i) Sei $y \in K^c$. Verwende die Trennungseigenschaft

Zu jedem $x \in K$ bestimme offene Umgebungen

$U(x)$ von x und $V_x(y)$ von y mit $U(x) \cap V_x(y) = \emptyset$

$\implies \bigcup_{x \in K} U(x)$ offene Überdeckung von kompakter Menge K

$\implies \exists$ endliche Teilüberdeckung $(U(x_n))_{n=1,\ldots,N}$ von K

$\implies \bigcap_{n=1}^{N} V_{x_n}(y)$ offene Umgebung von y mit $\bigcap_{n=1}^{N} V_{x_n}(y) \subset K^c$

Somit ist K^c Umgebung all seiner Punkte

$\implies K^c$ offen nach Satz 4.21

$\implies K$ abgeschlossen

(ii) $(A_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von A

$\Longrightarrow\ \forall\ i \in I\ \exists\ B_i \subset K$ offen in K mit $A_i = B_i \cap K$

$\Longrightarrow\ ((B_i)_{i\in I}, A^c = K\backslash A)$ offene Überdeckung von K (weil A^c offen!)

$\Longrightarrow\ \exists$ endliche Teilüberdeckung $(B_{i_1}, \dots, B_{i_N}, A^c)$ von K

$\Longrightarrow\ (A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ endliche Teilüberdeckung von A $\square$

Satz 4.50

(X, d) metrischer Raum , $K \subset X$ kompakt

$\Longrightarrow$ K beschränkt, d.h. $\operatorname{diam}(K) = \sup_{x,y\in K} d(x, y) < \infty$

Beweis: $x \in K$, $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von K

$\Longrightarrow\ \exists$ endliche Teilüberdeckung $(B_{n_i}(x))_{i=1,\dots,N}$ mit $n_i < n_{i+1}$

$\Longrightarrow\ K \subset B_{n_N}(x)$

$\Longrightarrow\ \operatorname{diam} K < n_N < \infty$ $\square$

Definition 4.51

$(X, \mathcal{O})$ Hausdorff-Raum , $A \subset X$

(i) X folgenkompakt $\iff$ jede Folge in X besitzt konvergente Teilfolge

(ii) A folgenkompakt

$\iff$ A versehen mit Unterraumtopologie folgenkompakt

Satz 4.52

(X, d) metrischer Raum. Äquivalent sind

(i) *X kompakt*

(ii) *X folgenkompakt*

Bemerkung 4.53

Es gibt Hausdorf-Räume bei denen (i)$\Rightarrow$(ii) nicht gilt

Lemma 4.54 (Lebesguesches Überdeckungslemma)

(X, d) *folgenkompakt,* $(A_i)_{i\in I}$ *offene Überdeckung von* X
$\Longrightarrow$ $\exists$ *Lebesgue'sche Zahl* $\delta > 0$*, so dass* $\forall\, x \in X \;\exists\, i \in I$ *mit* $B_\delta(x) \subset A_i$

Beweis: Gegenannahme: $\nexists$ solches $\delta > 0$

$\Longrightarrow \forall\, n \geqslant 1 \;\exists\, x_n \in X$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset A_i \quad \forall\, i \in I$

Sei x_0 HP von $(x_n)_{n\geqslant 1}$ (nach Voraussetzung)

Sei $i_0 \in I$, so dass $x_0 \in A_{i_0}$ (Überdeckung).

Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ (A_{i_0} offen)

Wähle $k \geqslant \frac{2}{\epsilon}$ mit $x_k \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_0)$ (x_0 ist HP)

$\Longrightarrow B_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_k) \overset{\text{Dreieck}}{\subset} B_\epsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ Widerspruch $\lightning$ $\square$

Lemma 4.55

(X, d) *folgenkompakt*
$\implies \forall\, \delta > 0\; \exists$ *endlich viele* $x_1, \ldots, x_r$ *mit* $X = \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$

Beweis: Gegenannahme:
$\exists\, \delta > 0$ mit $X \neq \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$ für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_r$ und $r \in \mathbb{N}$
Sei y_0 beliebig $\implies \exists\, y_1$ mit $d(y_1, y_0) \geqslant \delta$ (Aussage für Fall $r = 1$)
$\implies \exists\, y_2$ mit $d(y_2, y_1) \geqslant \delta$ und $d(y_2, y_0) \geqslant \delta$ (Fall $r = 2$)
Iteration: $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\exists\, y_n \;\text{ mit }\; d(y_k, y_n) \geqslant \delta \qquad \forall\, k < n$$

Diese Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also $d(y_n, y_m) \geqslant \delta \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$
Also kann diese Folge keinen HP oder konvergente Teilfolge haben
Widerspruch zur Folgenkompaktheit $\lightning$ $\square$

Beweis von Satz 4.52:

(ii)$\Longrightarrow$(i), d.h. folgenkompakt $\Longrightarrow$ kompakt (schwierigerer Teil)

Sei $(A_i)_{i\in I}$ gegebene offene Überdeckung

Sei $\delta > 0$ zugehörige Lebesguezahl

Nach Lemma 4.55 wähle $x_1, \ldots, x_r$ mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$

Da $B_\delta(x_j) \subset A_{i_j}$ für geeignetes i_j nach Lemma 4.55 gilt $X = \bigcup_{j=1}^r A_{i_j}$

d.h. es gibt endliche Teilüberdeckung

(i)$\Longrightarrow$(ii), d.h. kompakt $\Longrightarrow$ folgenkompakt

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folge in X. Ziel: Konstruktion von HP

Setze
$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in X \mid \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, k \geqslant n \text{ mit } x_k \in B_\epsilon(x)\} \\ &= \{x \in X \mid x \text{ BP von } \{x_k \mid k \geqslant n\}\,\} \ \subset\ A_{n-1} \end{aligned}$$

A_n abgeschlossen nach Satz 4.24 (alle BP enthalten)

Behauptung: $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n \neq \varnothing$

Begründung: Sonst wäre $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n^c = X$ offene Überdeckung

$\overset{X \text{ komp.}}{\Longrightarrow}\ \bigcup_{n=1}^N A_n^c = X$ endliche Teilüberdeckung

$\Longrightarrow\ \ \varnothing = \bigcap_{n=1}^N A_n = A_N$, aber $A_N \neq \varnothing$. Widerspruch $\lightning$

Also $\exists\, x \in \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$, d.h. x BP von $\{x_k \mid k \geqslant n\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow\ \ x$ HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad(\forall\, \epsilon > 0\ \exists$ unendlich viele n mit $d(x, x_n) < \epsilon)$

Nach Satz 4.32 existiert zu diesem HP eine konvergente Teilfolge $\square$

Satz 4.56 (Satz von Heine-Borel)

Sei $\mathbb{R}^d$ versehen mit der euklidische Metrik und $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann:

A kompakt $\iff$ A beschränkt und abgeschlossen

Beweis:

"$\Longrightarrow$" Satz 4.49 und Satz 4.50

"$\Longleftarrow$"

Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt einen HP

Also hat Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A einen HP x, der auch BP von A ist

(entweder $x = x_n$ für unendlich viele n, oder x HP von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

Jetzt:

A abgeschlossen $\implies$ $x \in A$ nach Satz 4.24

Somit hat jede Folge in A einen HP in A

$\implies$ A kompakt nach Satz 4.52 da $\mathbb{R}^d$ metrisch

□

Stetige Funktionen

Definition 4.57 (Grenzwerte von Funktionen)

Seien X, Y Hausdorff-Räume, $\emptyset \neq A \subset X$ und $a \in X$ BP von A

Für eine Funktion $f : A \to Y$ und $b \in Y$ sei definiert:

$\lim_{x \to a} f(x) = b$

$\iff$ $\forall$ Umgebungen $V(b)$ $\exists$ Umgebung $U(a)$ mit $f(U(a) \cap A) \subset V(b)$

Lemma 4.58

Grenzwerte von Funktionen sind eindeutig

Beweis: (wie Satz 4.31) Seien $b_1 \neq b_2 \in Y$ zwei Grenzwerte

$\Longrightarrow$ $\exists$ Umgebungen $V(b_1)$, $V(b_2)$ mit $V(b_1) \cap V(b_2) = \emptyset$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umgebungen $U_1(a)$, $U_2(a)$ mit $f(U_j(a) \cap A) \subset V(b_j)$, $j = 1, 2$

$\Longrightarrow$ $f(U_1(a) \cap U_2(a) \cap A) \subset \bigcap_{j=1,2} f(U_j(a) \cap A) \subset V(b_1) \cap V(b_2) = \emptyset$

$\Longrightarrow$ $U_1(a) \cap U_2(a) \cap A = \emptyset$, aber $U_1(a) \cap U_2(a)$ Umgebung von a

$\Longrightarrow$ a nicht BP von A. Widerspruch $\lightning$ $\square$

Satz 4.59

(X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : A \subset X \to Y$ und a BP von A. Äquivalent sind:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$

(ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *mit* $f(B_\delta(a) \cap A) \subset B'_\epsilon(b)$

(iii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$*, so dass für* $x \in A$ *mit* $d(x, a) < \delta$ *gilt* $d'(f(x), b) < \epsilon$

(iv) $\forall$ *Folgen* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* A *mit* $\lim_n x_n = a$ *gilt* $\lim_n f(x_n) = b$

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii) Sei $\epsilon > 0$. Dann $B'_\epsilon(b)$ Umgebung von b

$\Longrightarrow\ \exists$ Umgebung $U(a)$ mit $f(U(a) \cap A) \subset B'_\epsilon(b)$

$\Longrightarrow\ \exists\, \delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U(a)$ (da $U(a)$ Umgebung von a)

Somit $f(B_\delta(a) \cap A) \subset f(U(a) \cap A) \subset B'_\epsilon(b)$

(i)$\Longleftarrow$(ii) Sei $V(b)$ Umgebung von b

$\Longrightarrow\ \exists\, \epsilon > 0$ mit $B'_\epsilon(b) \subset V(b)$

$\overset{\text{Voraus.}}{\Longrightarrow}\ \exists\, \delta > 0$ mit $f(B_\delta(a) \cap A) \subset B'_\epsilon(b) \subset V(b)$

Zudem ist $B_\delta(a)$ Umgebung von a, so dass (i) gilt.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) ist lediglich Umformulierung

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $\lim_n x_n = a$

Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in (iii)

$\Longrightarrow \ \exists\, N$ mit $d(x_n, a) < \delta \quad \forall\, n \geqslant N$

$\overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \ d'(f(x_n), b) < \epsilon \quad \forall\, n \geqslant N$

Somit $\lim_n f(x_n) = b$

(iv)$\Longrightarrow$(iii) Gelte Negation von (iii)

$\Longrightarrow \ \exists\, \epsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in A$ mit $d(x, a) < \delta$, so dass $d'(f(x), b) \geqslant \epsilon$

Insbesondere für $\delta = \frac{1}{n}\ \exists\, x_n \in A$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $d'(f(x_n), b) \geqslant \epsilon$

Also $\lim_n x_n = a$, aber $\lim_n f(x_n) \neq b$, d.h. Negation von (iv) $\square$

Beispiel 4.60

$X = Y = \mathbb{C}$ mit euklidischer Metrik $d(z, z') = |z - z'|$
Wir zeigen:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Beachte $\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ nicht definiert, aber 0 BP des Definitionsbereiches!
In der Tat, für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$d\left(\frac{e^z - 1}{z}, 1\right) = \left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| = \left|\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!} z^{n-1}\right|$$
$$\leqslant \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!} |z| = c\,|z| = c\,d(z, 0)$$

wobei $c = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!}$
Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Dann: $d(z, 0) < \delta$ gibt $d(f(z), 1) < \epsilon$

Satz 4.61 (Cauchy-Kriterium)

(X, d), (Y, d') *metrische Räume und sei* (Y, d') *vollständig*
Ferner sei a BP von $A \subset X$ *und* $f : A \to Y$ *Abbildung. Dann:*
$\lim_{x\to a} f(x)$ *existiert* $\iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, *so dass für* $x, x' \in A$ *mit* $d(x, a) < \delta,\ d(x', a) < \delta$ *gilt* $d'(f(x),\ f(x')) < \epsilon$

Bemerkung 4.62

Beachte, dass Grenzwert $b = \lim_{x\to 0} f(x)$ hier nicht benötigt wird, um Konvergenz zu untersuchen (aber auch nicht berechnet wird)

Beweis: "$\Longrightarrow$" (ohne Vollständigkeit von Y)

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

$\Longrightarrow\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit $d(x, a) < \delta$ gilt $d'(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$

$\Longrightarrow\ \forall\, x, x' \in A$ mit $d(x, a) < \delta,\ d(x', a) < \delta$ gilt

$$d'(f(x), f(x')) \leqslant d'(f(x), b) + d'(f(x'), b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

"$\Longleftarrow$" Verwende Kriterium (iv) von Satz 4.59

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $\lim x_n = a$.

Wir zeigen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (Y, d')

In der Tat, sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß Voraussetzung

Nach Konvergenz $\lim x_n = a \; \exists \; N$ mit $d(x_n, a) < \delta \quad \forall \; n \geqslant N$

also nach Vorausetzung $d'(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \quad \forall \; n, m \geqslant N$, d.h. Cauchy

Weiter: Y vollständig $\Longrightarrow$ $\lim f(x_n) = b$ existiert

Gegeben andere Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim x'_n = a$ und $\lim f(x'_n) = b'$.

Wir zeigen $b = b'$, was dann den Beweis beendet

In der Tat, betrachte $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x'_0, x_1, x'_1, \ldots)$

Dann $\lim x''_1 = a$ und auch $\lim f(x''_n) = b''$ existiert

Aber $b'' = b'$ und $b'' = b$. $\square$

Beispiel 4.63 (Funktionen ohne Grenzwerte)

Zu $X, Y = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ betrachte $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in A$

$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht

In der Tat, zu $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ gilt $f(x_n) = 1$

aber zu $x_n' = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \to 0$ gilt $f(x_n') = -1$

Tatsächlich:

$\forall\ b \in [-1, 1]\ \exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = 0$ und $\lim f(x_n) = b$

Beispiel 4.64

$$X, Y \in \mathbb{R} \text{ und } f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht

Hier ist jedoch Limes von rechts und links sinnvoll

Satz 4.65 (Regeln für Limites komplexwertiger Funktionen)

(X, d) metrischer Raum, a BP von $A \subset X$, $f, g : A \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
Jeweils wenn rechte Seiten existieren, gilt:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + \lambda g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) + \lambda(\lim_{x\to a} g(x))$

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *falls* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Falls $X = \mathbb{R}$, gilt alles auch für einseitige und uneigentliche Limites
Die Linearität in (i) gilt auch für vektorwertige Funktionen

Beweis: Mit Satz 4.59(iv) übertragen sich die Regeln für konvergente Zahlenfolgen (Ana 1) □

Jetzt: Im Allgemeinen hat der Grenzwert $b = \lim_{x\to a} f(x)$ nichts mit dem Funktionswert $f(a)$ zu tun (falls a im Definitionsbereich)

Definition 4.66

X, Y Hausdorff-Raum, $f : X \to Y$ Abbildung und $x_0 \in X$

(i) f stetig in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(auf der rechten Seite: Limes existiert und gleich $f(x_0)$)

(ii) f stetig (im Großen) $\iff$ f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$

Satz 4.67

Äquivalent sind

(i) *f stetig in x_0*

(ii) *$\forall$ Umgebungen V von $f(x_0)$ $\exists$ Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$*

(iii) *$\forall$ Umgebungen V von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0*

Beweis:

(i)$\iff$(ii) nach Definition des Grenzwertes (iii)$\Longrightarrow$(ii) klar

(ii)$\Longrightarrow$(iii) $f(U) \subset V \implies U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$

Da U Umgebung von x_0 ist, ist auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0. $\square$

Satz 4.68

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Hausdorff-Räume und $f : X \to Y$. Äquivalent sind:

(i) *f stetig*

(ii) *Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. $\forall\ A \in \mathcal{O}_Y$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X$*

(iii) *Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen*

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii) $A \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}(A)$

$\Longrightarrow$ $f(x) \in A$, d.h. A offene Umgebung von $f(x)$

$\Longrightarrow$ $f^{-1}(A)$ Umgebung von x nach Satz 4.67. Dies gilt $\forall\ x \in X$

$\Longrightarrow$ $f^{-1}(A)$ Umgebung all seiner Punkte, also offen (Satz 4.21)

(ii)$\Longrightarrow$(i) V Umgebung von $f(x)$

$\Longrightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $V' \subset V$ von $f(x)$

$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(V')$ offene Umgebung von $x \in f^{-1}(V')$ mit $f(f^{-1}(V')) \subset V$

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) $A \subset Y$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ Komplement A^c in Y offen

$\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ offen $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(A)$ abgeschlossen $\square$

Satz 4.69 (Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen)

$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

$\implies g \circ f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

Beweis: $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{O}_X$ da $g^{-1}(A) \in \mathcal{O}_Y$ für $A \in \mathcal{O}_Z$ $\square$

Satz 4.70 (Hölder-Kriterium für Stetigkeit)

(X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : (X, d) \to (Y, d')$ Hölder-stetig, d.h. es existiere Hölder-Exponent $\alpha > 0$ und $L \in \mathbb{R}$ mit

$$d'(f(x), f(x')) \leqslant L\, d(x, x')^\alpha \qquad \forall\, x, x' \in X$$

$\implies f$ stetig

Beweis: Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$. Setze $\delta = (\frac{\epsilon}{L})^{\frac{1}{\alpha}}$

Dann für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$

$$d'(f(x), f(x_0)) \leqslant L\, d(x, x_0)^\alpha < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

Somit $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ \ \forall\, x_0 \in X$ $\square$

Nun zu strukturerhaltenden Abbildungen der Topologie

Definition 4.71

Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt Homöomorphismus

$\iff \quad f$ bijektiv und f sowie f^{-1} stetig

Falls so eine Abbildung existiert sind X und Y homöomorph

Beispiel 4.72

Seien $I = (0, 1)$, $J = (0, \infty)$ versehen mit Unterraumtopologoie von $\mathbb{R}$

Dann sind I und J homöomorph

Ein Homöomorphismus ist $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$

Bemerkung 4.73

Homöomorphe Räume sind mit Mitteln der Topologie ununterscheidbar

Natürlich haben I und J unterschiedliche Länge,

aber dies ist eine metrische Eigenschaft

Satz 4.74 (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt)

$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *stetig zwischen Hausdorff Räumen*

$K \subset X$ *kompakt* $\Longrightarrow$ $f(K)$ *kompakt*

Beweis: $(B_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} B_i$. Also

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(B_i)}_{\text{offen, da } f \text{ stetig}} \qquad \text{offene Überdeckung}$$

$\Longrightarrow \exists$ endliches $I_0 \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(B_i)$

$\Longrightarrow$ $f(K) \subset f\left(\bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(B_i)\right) = \bigcup_{i\in I_0} B_i$

also $f(K)$ kompakt $\square$

Satz 4.75 (Extrema stetiger Funktion auf Kompaktum)

K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig

$\implies \exists\, x_0 \in K$ *mit* $f(x_0) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$

Beweis: $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt nach Satz 4.74

$\implies f(K)$ beschränkt und abgeschlossen (nach Heine-Borel)

Sei $M = \sup f(K)$, dann M Berührungspunkt von $f(K)$

Da $f(K)$ abgeschlossen, ist $M \in f(K)$

$\implies \exists\, x_0 \in K$ mit $f(x_0) = M$ $\square$

Achtung: x_0 im Allgemeinen nicht eindeutig!

Eine Anwendung von Satz 4.75 ist Beweis von

Theorem 4.76 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ *mit* $a_n \in \mathbb{C},\ a_N \neq 0$
Dann existieren $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ *(eventuell gleich), so dass*

$$P(z) = a_N(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass eine Nullstelle z_N existiert (danach betrachte das Polynom $\frac{P(z)}{z-z_N}$)

Setze $\mu = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$

Für $|z| = R \in \mathbb{R}$ gilt

$$|P(z)| \geqslant R^N \left(|a_N| - |a_{N-1}| \frac{1}{R} - \dots - |a_0| \frac{1}{R^N} \right)$$

Somit existiert ein R_c, so dass

$$|P(z)| > \mu \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant R_c$$

Auf dem Kompaktum $\overline{B_{R_c}(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R_c\}$ nimmt stetige Funktion $|P|$ ihr Infimum an (Satz 4.75), d.h. $\exists\, z_N \in \overline{B_{R_c}(0)}$ mit

$$|P(z_N)| = \mu$$

Behauptung: $\mu = 0$

Gegenannahme $\mu > 0$. Definiere Polynom $Q(z) = \frac{P(z+z_N)}{P(z_N)}$

Q ist nicht konstant und erfüllt $Q(0) = 1$ und $|Q(z)| \geqslant 1$

Somit existiert $k \in \{1, \ldots, N\}$, so dass

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \ldots + b_N z^N \quad \text{mit} \quad b_k \neq 0\,, \quad b_n \in \mathbb{C}$$

Sei $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{k}\right)$ definiert durch $e^{ik\theta} = -\frac{|b_k|}{b_k}$

Für $r > 0$ und $r^k|b_k| < 1$ folgt $|1 + b_k(re^{i\theta})^k| = 1 - r^k|b_k|$ und somit

$$\begin{aligned} |Q(re^{i\theta})| &\leqslant 1 - r^k|b_k| + r^{k+1}|b_{k+1}| + \ldots + r^N|b_N| \\ &= 1 - r^k(|b_k| - r|b_{k+1}| - \ldots - r^{N-k}|b_N|) \\ &\leqslant 1 - r^k|b_k| \cdot \tfrac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Letzteres für r ausreichend klein. Widerspruch ↯ $\square$

Satz 4.77 (Stetige Funktion auf Kompaktum)

X kompakt und $f : (X, d) \to (Y, d')$ stetig

$\Longrightarrow$ *f gleichmäßig stetig auf X, d.h.* $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *mit*

$$d(x, x') < \delta \quad \Longrightarrow \quad d'(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Beweis: Gegenannahme: $\exists\, \epsilon > 0 : \forall\, n \geqslant 1\ \exists\, x_n, x_n'$ mit

$$d(x_n, x_n') \;<\; \frac{1}{n} \qquad d'(f(x_n), f(x_n')) \;\geqslant\; \epsilon$$

X kompakt $\Longrightarrow$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge und $x = \lim x_{n_k}$

Dann

$$d(x, x_{n_k}') \;\leqslant\; d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k}') \;\leqslant\; d(x, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Somit: $\lim x_{n_k}' = x = \lim x_{n_k}$

f stetig $\Longrightarrow$ $y = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}')$

Aber $\epsilon \leqslant d'(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')) \leqslant d'(f(x_{n_k}), y) + d'(y, f(x_{n_k})) \to 0$

Widerspruch $\lightning$ $\square$

Definition 4.78

$(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum und (Y, d') metrischer Raum

$\mathcal{F}(X, Y) = \{f : X \to Y \text{ beschränkte Abbildung}\}$

$C_b(X, Y) = \{f : X \to Y \text{ beschränkte stetige Abbildung}\} \subset \mathcal{F}(X, Y)$

Auf $\mathcal{F}(X, Y)$ definiere

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x))$$

Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}(X, Y)$ bez. Metrik D heißt uniforme oder gleichmäßige Konvergenz **auf** X

Bezeichnung: $g = \text{u-lim}\, f_n$.

Bemerkung 4.79

Spezialfall $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$

ergibt $(C([a, b]), \|\,.\,\|_\infty)$, wobei $D(f, g) = \|f - g\|_\infty$

Satz 4.39 über Vollständigkeit wird nun verallgemeinert:

Satz 4.80 (Uniforme Limites stetiger Funktionen sind stetig)

X Hausdorff-Raum und (Y, d') metrischer Raum

$f_n \in C_b(X, Y)$ und $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ mit $\lim_{n\to\infty} D(f_n, g) = 0$

$\implies g \in C_b(X, Y)$

Beweis: (Genau wie Satz 4.39) Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$

$\implies \exists\, N$ mit $D(g, f_n) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n \geqslant N$

f_N stetig bei $x \implies \exists$ Umgebung U von x, so dass

$$d'(f_N(x), f_N(x')) < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, x' \in U$$

Somit für $x' \in U$ gilt

$$\begin{aligned} d'(g(x), g(x')) &\leqslant d'(g(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x')) + d'(f_N(x'), g(x')) \\ &\leqslant D(g, f_N) + \frac{\epsilon}{3} + D(f_N, g) < \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

Satz 4.81 (Cauchy-Kriterium für uniforme Konvergenz)

(Y, d') vollständig und $f_n : X \to Y$ stetig und beschränkt. Dann:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform konvergent auf $X \iff (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bez. D

Also $(C_b(X, Y), D)$ vollständig

Beweis: Rechte Seite: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N$ mit $D(f_n, f_m) < \epsilon \quad \forall\ n, m \geqslant N$

"$\Longrightarrow$" klar nach Satz 4.36

"$\Longleftarrow$" $\forall\ x \in X$ gilt $d'(f_n(x), f_m(x)) \leqslant D(f_n, f_m)$

$\Longrightarrow \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in Y

$\Longrightarrow \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$ (da Y vollständig)

Noch zu zeigen: Konvergenz uniform (dann g stetig nach Satz 4.80)

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N = N(\epsilon)$, so dass

$$d'(f_n(x), f_m(x)) \; < \; \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\ n, m \geqslant N \qquad \forall\ x \in X$$

Außerdem wähle $m = m(x) \geqslant N$, so dass

$$d'(g(x), f_{m(x)}(x)) \; < \; \frac{\epsilon}{2}$$

Dann für $n > N$:

$$\begin{aligned} D(f_n, g) &= \sup_{x \in X} d'(f_n(x), g(x)) \\ &\leqslant \sup_{x \in X} d'(f_n(x), f_{m(x)}(x)) + \sup_{x \in X} d'(f_{m(x)}(x), g(x)) \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \; = \; \epsilon \end{aligned}$$

□

5 Maß und Integral auf abstrakten Räumen

Bisher: Lebesgue'sche Integrationstheorie auf $\mathbb{R}^d$

Ziel: Konstruktion von Maß und Integral auf beliebiger Menge X

Oft: X topologischer Raum

Viele Techniken lassen sich direkt vom Lebesgue Maß übertragen

Somit: wenige Details

Definition 5.1 (Ring, vgl. Satz 1.3 und Definition 1.4)

Für beliebige Menge X heißt Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften ein Ring auf X

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \backslash B \in \mathcal{R}$

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Dann gilt auch wie in Satz 1.3: $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$

Definition 5.2 (Inhalt auf Ring)

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ Ring auf X. Dann heißt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ Inhalt falls

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) (endliche Additivität) $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$ disjunkt, dann

$$\mu\Big(\mathop{\dot{\bigcup}}_{n=1,\ldots,N} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

Nach gleichen Argumenten wie in Satz 1.7 gilt dann:

Satz 5.3 (Monotonie, endliche Subadditivität von Inhalt)

(iii) $A, B \in \mathcal{R}\,, \quad A \subset B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \implies \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(v) *Für beliebige* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{R}$ *gilt* $\mu\Big(\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$

(vi) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunkte Folge in* $\mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$, *sodass* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(B)$

Definition 5.4 (Äußeres Maß, Carathéodory 1917)

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß falls

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \implies \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$

(iii) Für Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von X:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Nun gilt nach gleichen Beweisen wie in Satz 1.11

Satz 5.5 (Äußeres Maß eines Inhaltes)

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ Ring auf X und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Inhalt

Dann ist ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \;\middle|\; Q_n \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$$

Definition 5.6 (σ-Algebra)

Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra auf X falls

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies$ Komplementärmenge $A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Definition 5.7 (Maß)

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-additiv falls für disjunkte Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Eine σ-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt ein Maß

Definition 5.8 (σ-Endlichkeit eines Maßes)

μ σ-endlich $\iff \exists\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$

Maßerweiterung nach Caratheodory

Definition 5.9

Gegeben äußeres Maß μ^* auf X (z.B. von σ-additiver Inhalt auf Ring)

Menge $A \subset X$ heißt μ^*-messbar $\iff$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A) \qquad \forall\, E \subset X$$

Dann definiere:

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \;\; \mu^*\text{-messbar}\}$$

Satz 5.10 (Maßerweiterungssatz)

$\mathcal{A}$ ist σ-Algebra

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch $\mu(A) = \mu^*(A)$ ist Maß

Beweis wieder identisch zum Beweis von Satz 1.16

Achtung: σ-Additivität des Inhalts notwending für Erweiterung

Definition 5.11 (Endlichkeit eines Massraumes)

Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt endlich falls $\mu(X) < \infty$

Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum falls $\mu(X) = 1$

Definition 5.12 (Nullmengen)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und μ^* zugehöriges äußeres Maß

Dann heißt $N \subset X$ μ-Nullmenge falls $\mu^*(N) = 0$

Satz 5.13 (Vervollständigung eines Maßraumes)

Zu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist neuer Maßraum $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ N \text{ Nullmenge}\} \qquad \tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

$(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ ist vollständig,

d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge $N \in \tilde{\mathcal{A}}$ ist in $\tilde{\mathcal{A}}$

Beispiel: Hausdorff Maß

(Euklidischer) Diameter einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist

$$\mathrm{diam}(A) \;=\; \sup_{x,y\in A} |x-y|$$

Für $\gamma \geqslant 0$, $\delta > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ setze

$$H^\gamma_\delta(A) \;=\; \inf\left\{ \sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(U_i)^\gamma \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^\infty U_i \supset A,\ \mathrm{diam}(U_i) < \delta \right\}$$

wobei Infinum über abzählbare δ-Überdeckungen

Nun ist $H^\gamma_\delta(A)$ monoton wachsend in δ. Also existiert (in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$H^\gamma(A) \;=\; \sup_{\delta>0} H^\gamma_\delta(A) \;=\; \lim_{\delta\to 0} H^\gamma_\delta(A)$$

Satz 5.14

H^γ ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$

Beweis: Überprüfe Eigenschaften in Definition 5.4

(i) $H^\gamma(\emptyset) = 0$ klar weil leere Überdeckung möglich

(ii) Monotonie $A \subset B \implies H^\gamma(A) \leqslant H^\gamma(B)$ klar

(iii) σ-Subadditivität: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}^d$

Sei $(U_{n,i})_i$ abzählbare δ-Überdeckung von A_n

Dann ist $(U_{n,i})_{i,n}$ abzählbare δ-Überdeckung von $\bigcup_n A_n$, und

$$\sum_{i,n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_{n,i})^\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_{n,i})^\gamma$$

Somit

$$H_\delta^\gamma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^\gamma(A_n)$$

Analoges gilt also im Limes $\delta \to 0$ $\square$

Definition 5.15 (Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^d$)

Nach dem Maßerweiterungssatz 5.10 gibt es ein zugehöriges Maß

Es wird auch mit H^γ bezeichnet und heißt γ-Hausdorff-Maß

Noch nicht klar, was meßbare Mengen gemäß Definition 5.9 sind!

Satz 5.16

Borel-Mengen sind H^γ-meßbar

Beweis: Es reicht dies für abgeschlossene Mengen A zu zeigen, d.h.

$$H^\gamma(E) \geqslant H^\gamma(E \cap A) + H^\gamma(E \backslash A) \qquad \forall\, E \subset \mathbb{R}^d$$

denn die andere Ungleichung folgt aus der Subadditivität

Verwende: H^γ ist ein sogenanntes metrisches äußeres Maß ist,

d.h. für $B, C \subset \mathbb{R}^d$ mit $d(B, C) = \inf_{x \in B, y \in C} |x - y| > 0$ gilt

$$H^\gamma(B \cup C) = H^\gamma(B) + H^\gamma(C)$$

Sei nun $B_n = \{x \in E\backslash A \mid d(x, A) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Dann, weil $d(E \cap A, B_n) > \frac{1}{n}$,

$H^\gamma(E) \;=\; H^\gamma(E \cap A \cup E\backslash A) \;\geqslant\; H^\gamma((E \cap A) \cup B_n) \;=\; H^\gamma(E \cap A) + H^\gamma(B_n)$

Also noch zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} H^\gamma(B_n) \geqslant H^\gamma(E\backslash A)$ falls Limes endlich

Setze $C_n = B_{n+1}\backslash B_n$ so dass $E\backslash A = B_n \cup \bigcup_{k\geqslant n} C_k$ (da A abgeschl.)

Also mit Subadditivität

$$H^\gamma(E\backslash A) \;\leqslant\; H^\gamma(B_n) \;+\; \sum_{k\geqslant n} H^\gamma(C_k)$$

Wieder haben C_n und C_{n+2} positiven Abstand, und somit für $n \geqslant 1$

$$\infty \;>\; H^\gamma(B_{2n}) \;\geqslant\; H^\gamma(\bigcup_{k=1,\dots,n} C_{2k}) \;=\; \sum_{k=1,\dots,n} H^\gamma(C_{2k})$$

Analog für ungerade Indizes, so dass zusammen

$$H^\gamma(\bigcup_{k\geqslant 1} C_k) \;<\; \infty$$

und nun kann der Limes oben genommen werden $\square$

Definition 5.17 (Hausdorff-Dimension)

Für $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die Hausdorff-Dimension

$$\dim_H(A) \;=\; \inf\left\{\gamma > 0 \,\middle|\, H^\gamma(A) < \infty\right\}$$

Hier ist H^γ das äußere Maß und A nicht notwendig H^γ-meßbar

Beispiel 5.18

Für diskrete Menge A gilt $\dim_H(A) = 0$ und $H^0(A) = \#A$

Beispiel 5.19

Für offene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\dim_H(A) = d$ und $H^d(A)$ Lebesgue Maß

Definition 5.20 (Fraktale)

Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $\dim_H(A) \in (0, d)$ heißen fraktal

Nur sehr grobe Definition!

Fraktale: in dynamischen Systemen oder als selbstähnliche Mengen

Konstruktion von Integral:

Definition 5.21 (Meßbare Funktionen, vgl. Korollar 2.5)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\iff f^{-1}([-\infty, c)) \in \mathcal{A}$ für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$

Satz 5.22 (Beweis wie von Satz 2.10)

$f : X \to [0, \infty]$ *messbar*

$\implies \exists$ *monotone Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Treppenfunktionen mit* $f_n \uparrow f$

Definition 5.23

Für nicht-negative Treppenfunktion $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ setze

$$\int \mu(dx)\, f(x) \; = \; \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \mu(A_n)$$

Für meßbares $f \geqslant 0$ und Treppenfunktionen f_n mit $f_n \uparrow f$

$$\int \mu(dx)\, f(x) \; = \; \lim \int \mu(dx)\, f_n(x)$$

Satz 5.24 (wie Satz 2.12)

Integral wohldefiniert, linear, monoton auf positiven, messbaren Fktn

Alternative Schreibweise:

$$\int \mu(dx)\, f(x) \;=\; \int_X \mu(dx)\, f(x) \;=\; \mu(f)$$

sowie für $A \in \mathcal{A}$:

$$\int_A \mu(dx)\, f(x) \;=\; \int_X \mu(dx)\, f(x)\, \chi_A(x) \;=\; \mu(f\chi_A)$$

Mit gleichem Beweis wie Satz 2.13 und Satz 2.15 :

Satz 5.25 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)

$0 \leqslant f_n, f$ *messbar und* $f_n \uparrow f$, *d.h.* $f_n \leqslant f_{n+1}$ *und* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

$\Longrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$

Satz 5.26 (Lemma von Fatou)

$f_n \geqslant 0$ *messbar* $\Longrightarrow\; \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) \geqslant \mu(\liminf_{n\to\infty} f_n)$

Definition 5.27 (vgl. Definition 2.16)

Meßbares $f : X \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar $\iff \mu(|f|) < \infty$

Falls f integrierbar ist, definiere positive integrierbare Funktionen

$$f_+ = \max\{f, 0\} \qquad , \qquad f_- = \max\{-f, 0\}$$

so dass $f = f_+ - f_-$, und dann das Integral durch

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-)$$

Satz 5.28 (vgl. 2.17)

Integral ist monoton und linear auf integrierbaren Funktionen

Bedingung $f_n, f \geqslant 0$ in Beppo Levi und Fatou nicht notwending

Wieder mit gleichem Beweis wie Satz 2.18

Satz 5.29 (Theorem der majorisierten Konvergenz)

$f_n, g : X \to \mathbb{R}$ messbar

Sei $|f_n| \leqslant g$ mit integrierbarem g

Zudem existiere $f = \lim_{n\to\infty} f_n$

Dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) \;=\; \mu\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) \;=\; \mu(f)$$

Des Weiteren: Begriff von μ-fast sicher, etc., analog zu Definition 2.22

Dann gilt auch Analog zu Satz 2.23

Borel-Maße auf topologischen Räumen

Erinnerung an Definition 1.28:

Definition 5.30 (Borelsche σ-Algebra)

Die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ auf einem topologischem Raum $(X, \mathcal{O})$ ist die kleinste σ-Algebra auf X, die die Topologie enthält:

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra},\ \mathcal{O}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Alternativ: $\mathcal{B}(X)$ ist die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra

Definition 5.31 (Lokale Endlichkeit eines Maßes)

Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ auf topologischen Raum ist lokal endlich
$\iff$ zu jedem Punkt gibt es eine Umgebung mit endlichen Maß

Beispiel 5.32

Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ ist lokal endlich, H^γ für $\gamma < d$ nicht

Definition 5.33 (Borel-Maß)

Ein lokal endliches Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ auf der Borelschen σ-Algebra eines topologischen Raumes X heißt Borel-Maß

Satz 5.14: Borel-Maßraum $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ kann vervollständigt werden

Definition 5.34 (Regularität von Maßen, vgl. Definition 1.23)

μ Maß auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ mit $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$

(i) μ von außen regulär $\iff$ zu jeder messbaren Menge A und $\epsilon > 0$ $\exists$ offenes U mit $A \subset U$ und $\mu(U \backslash A) < \varepsilon$

(ii) μ von innen regulär $\iff$ $\forall$ messbaren A und $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ abgeschlossenes $F \subset A$ mit $\mu(A \backslash F) < \varepsilon$

Satz 1.22: Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^d$ ist von innen und außen regulär

Radon-Maße auf topologischen Räumen

Definition 5.35

Ein Radon-Maß ist ein Borel-Maß auf einem Hausdorff-Raum,

das lokal endlich und von innen regulär ist

Viele Maß sind Radon-Maße:

Satz 5.36 (siehe Buch von Elstrodt)

X polnischer Raum (Def. 4.44: separabel, vollständig metrisierbar)

$\Longrightarrow$ jedes Borel-Maß auf X ist regulär

Zudem wichtiger Zusammenhang mit linearen Funktionalen:

Sei $(X, \mathcal{O})$ lokal-kompakter Hausdorff-Raum

Nicht kompakt $\rightharpoonup$ Alexandroff'sche Einpunktkompaktifizierung $X \cup \{\infty\}$

Betrachte im Unendlichen verschwindende stetige Funktionen:

$$C_0(X) \; = \; \{f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig} \mid \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}$$

Zu Radon-Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ definiere:

$$I_\mu : C_0(X) \to \mathbb{R} \qquad , \qquad I_\mu(f) \;=\; \int \mu(dx)\, f(x)$$

Dann ist I_μ linear und positiv:

$$I_\mu(f + \lambda g) \;=\; I_\mu(f) + \lambda I_\mu(g) \qquad , \qquad I_\mu(|f|) \;\geqslant\; 0$$

Satz 5.37 (Riesz-Markov'scher Darstellungssatz)

X lokal-kompakt Hausdorff-Raum
und $I : C_0(X) \to \mathbb{R}$ positives lineares Funktional
$\Longrightarrow$ $\exists$ *genau ein endliches Radon-Maß μ auf X mit $I = I_\mu$*

Langer Beweis im Buch von Elstrodt
Für $X = \mathbb{R}$ gibt es kürzere Beweise mit Hahn-Banach
Varianten: I auf beschränkten oder kompakt getragenen $f \in C(X)$

6 Banach- und Hilberträume von Funktionen

Erinnerung: Banachraum ist vollständiger normierter Vektorraum

In Hilbertraum stammt Norm von Skalarprodukt $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$

Hier L^p-Räume: $L^p(X,\mu)$ für allgemeinen Maßraum (X,μ)

z.B. $X \subset \mathbb{R}^d$ messbar und μ Lebesgue Maß

Für messbares $f : X \to \mathbb{C}$, setze für $1 \leqslant p < \infty$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_X \mu(dx)|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \|f\|_\infty &= \mu\text{-}\operatorname{ess\,sup}|f(x)| \\ &= \inf_{N\subset X,\, \mu(N)=0} \ \sup_{x\in X\setminus N} |f(x)| \end{aligned}$$

Jetzt definiere Äquivalenzrelation (überprüfe Eigenschaften!):

$$\begin{aligned} f \sim g \quad &\Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-fast sicher} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, N \subset X,\ \mu(N) = 0\ : \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X \setminus N \end{aligned}$$

Dann $\|f\|_p = \|g\|_p$. Letztendlich

$$L^p(X, \mu) \ = \ \{[f]_\sim \mid \|f\|_p < \infty\} \qquad , \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

Satz 6.1

Seien $p, q, r \geqslant 1$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

(i) (Hölder Ungleichung) $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

(ii) (Minkowski Ungleichung) $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

(iii) (Riesz-Fischer) $(L^p(X, \mu), \|.\|_p)$ *Banachraum, d.h. vollständig*

Beweis: (i) Wir betrachten nur Fall $r = 1$ (Verallgemeinerung Übung)

Für $p = \infty$ und $q = 1$ ist Ungleichung Standard-Integralabschätzung

Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ folgt $f = 0$ bzw. $g = 0$ μ-fast sicher

$\implies$ $f \cdot g = 0$ μ-fast sicher (wobei "$0 \cdot \infty := 0$") $\implies$ $\mu(|fg|) = 0$

Also nun $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ mit $p, q > 1$

Wegen Konvexität von $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$ gilt für $a, b > 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p} p \log(a) + \frac{1}{q} q \log(b)\right) \leqslant \frac{1}{p} \exp\left(p \log(a)\right) + \frac{1}{q} \exp\left(q \log(b)\right) =$$

Ungleichung auch für $a = 0$ oder $b = 0$. Für $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ und $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\left(\|f\|_p\right)^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\left(\|g\|_q\right)^q}$$

Integration bezüglich μ gibt

$$\frac{\mu(|fg|)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(ii) Zunächst ist $f + g \in L^p$:

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant 2^p \max\left\{|f|^p, |g|^p\right\} \leqslant 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right)$$

somit

$$\mu\left(|f+g|^p\right) \leqslant 2^p \mu\left(|f|^p + |g|^p\right) = 2^p \left(\mu(|f|^p) + \mu(|g|^p)\right) < \infty$$

Weiter für $p > 1$ (Fall $p = 1$ trivial) unter Verwendung von $q = \frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned} \mu\left(|f+g|^p\right) &\leqslant \mu\left(|f| \cdot |f+g|^{p-1}\right) + \mu\left(|g| \cdot |f+g|^{p-1}\right) \\ &\leqslant \|f\|_p \, \mu\left(|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \, \mu\left(|f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \mu\left(|f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Hölder Ungleichung verwandt wurde

Hieraus folgt Bahauptung

(iii) Für $f, g \in L^p$ ist auch $f + \lambda g \in L^p$, da

$$\|f + \lambda g\|_p \leqslant \|f\|_p + |\lambda| \, \|g\|_p$$

Außerdem ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm, denn $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$,
Dreiecksungleichung ist genau Minkowski-Ungleichung und zudem

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast sicher} \iff [f]_\sim = [0]_\sim = \vec{0}$$

Nun zur Vollständigkeit: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in L^p
d.h. $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; N = N(\epsilon)$, sodass

$$\|f_n - f_k\|_p < \epsilon \qquad , \qquad \forall \; n, k \geqslant N$$

Wähle Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\sum_{k\geqslant 1} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < \infty$$

Es folgt:

$$\Big\| \sum_{k\geqslant 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \Big\|_p = \mu\Big(\lim_{K\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{K} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \mapsto x^p \text{ stetig})$$

$$= \lim_{K\to\infty} \mu\Big(\Big(\sum_{k=1}^{K} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(Beppo)}$$

$$\leqslant \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \Big\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \Big\|_p < \infty \qquad \text{(Minkowski)}$$

Somit ist $F(x) = \sum_{k\geqslant 1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$ μ-fast sicher in x

Also existiert

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

μ-fast sicher. Es gilt

$$\|f\|_p \leqslant \| |f_{n_1}| + F \|_p \leqslant \|f_{n_1}\|_p + \|F\|_p < \infty$$

also $f \in L^p$. Noch zu zeigen $f_n \to f$ in L^p

Tatsächlich:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \mu\left(|f_n - f|^p\right) \\
&= \mu\left(\liminf_k |f_n - f_{n_k}|^p\right) \\
&\leqslant \liminf_k \mu\left(|f_n - f_{n_k}|^p\right) \qquad \text{(Fatou)} \\
&\leqslant \sup_{m \geqslant n} \|f_n - f_m\|_p^p \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{für } n \to \infty
\end{aligned}$$

Letzteres weil Cauchy-Folge vorliegt □

Bemerkung 6.2 (Singularitäten)

Wenn $X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, dann $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$ für $p \geqslant q$
(weil lokale Singularitäten ”integrierbarer” werden. Beweis?)
Wenn $X = \mathbb{R}^d$, weder $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$ noch $L^p(X, \mu) \supset L^q(X, \mu)$

Weitere Ungleichungen

Satz 6.3 (Lyapunov Ungleichung)

Sei $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$. *Für* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ *setzen wir*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}$$

Dann gilt:

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\gamma} \, \|f\|_{L^{p_1}}^{\gamma} \qquad \forall \; f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$$

Beweis schwierig. Verallgemeinerung: Riesz-Thorin Interpolation

Satz 6.4 (Jensen Ungleichung)

Sei $0 \leqslant \rho \in L^1(X, \mu)$ *mit* $\mu(\rho) = 1$, *d.h.* ρ *Wahrscheinlichkeitsdichte*
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex:* $\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$ *für* $t \in [0, 1]$

$$\varphi\Big(\int \mu(dx)\, \rho(x)\, g(x)\Big) \leqslant \int \mu(dx)\, \rho(x)\, \varphi(g(x)) \qquad g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$$

Beweis: Sei $x_0 = \int \mu(dx)\,\rho(x)\,g(x)$
Wähle Tangente an konvexes φ bei x_0:

$$\varphi(x_0) \;=\; ax_0 + b \qquad , \qquad \varphi(x) \;\geqslant\; ax + b$$

für alle x, insbesondere also:

$$\varphi(g(x)) \;\geqslant\; ag(x) + b$$

Multiplikation mit positiven ρ und Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int \mu(dx)\,\rho(x)\,\varphi(g(x)) \;&\geqslant\; \int \mu(dx)\,\rho(x)\big(ag(x) + b\big) \\
&=\; ax_0 + b \\
&=\; \varphi(x_0) \\
&=\; \varphi\Big(\int \mu(dx)\,\rho(x)\,g(x)\Big)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.5

Nur Konvexität auf Bild $g(X)$ benötigt

Satz 6.6 (Dichte der stetigen Funktion in L^p-Räumen)

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ offen und $p \in [1, \infty)$ (beachte: nicht $p = \infty$)
Dann $C_0(X) = \{f \text{ stetig und im Unendlichen } 0\}$ dicht in $L^p(X, \mu)$
d.h. $\forall\ f \in L^p(X, \mu)$ existiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_0(X)$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Wichtige Folgerung:

Korollar 6.7

Für $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(X, \mu)$ separabel ($\exists$ abzählbare dichte Teilmenge)

Begründung für Spezialfall $X \subset \mathbb{R}$ Intervall basierend auf:
Weierstraß: stetige Funktion durch Polynom approximierbar bez. $\|.\|_\infty$
Es reichen Polynome mit rationalen Koeffizienten. Dann Satz 6.6 $\square$

Beweisskizze (Satz 6.6): Erst $f = \chi_A$ mit A beschränkte Borelmenge

Zu $\delta > 0$ $\exists$ nach Regularität (Satz 1.22) kompaktes K & offenes U mit

$$K \subset A \subset U \quad , \quad \mu(U \backslash K) < \delta$$

Fakt (ohne Beweis): $\exists$ stetige sogenannte Urysohn-Funktion φ mit

$$\varphi(x) \in [0,1] \quad , \quad \varphi|_K = 1 \quad , \quad \varphi|_{U^c} = 0$$

Dann $\|\varphi - f\|_p \leqslant \mu(U \backslash K)^{\frac{1}{p}} = \delta^{\frac{1}{p}}$ beliebig klein

Für beliebige Borelmenge A setze $A_n = A \cap B_n(0)$

Nach Beppo: $\lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n} - \chi_A\|_p = 0$ also auch χ_A approximierbar

Für Treppenfunktion $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$ wähle Urysohn Funktionen φ_n

Verwende stetige Funktion $\varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$. Mit Minkovski

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \, \|\chi_{A_n} - \varphi_n\|_p \leqslant \left(\sum_{n=1}^N |\alpha_n| \right) \delta^{\frac{1}{p}}$$

Wieder wird dies beliebig klein

Zuletzt approximiere beliebiges f durch Treppenfunktion $\square$

Hilbert-Raum quadratintegrierbarer Funktionen

Der Satz von Riesz-Fischer zeigt:

Satz 6.8

Sei (X, μ) *Maßraum*

Dann ist $L^2(X, \mu)$ *ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt*

$$\langle f|g\rangle = \int_X \mu(dx)\,\overline{f(x)}\,g(x) \qquad , \qquad f, g \in L^2(X, \mu)$$

Somit Hilbert-Raum Techniken verwendbar bzw.

verallgemeinerbar. Z.B. (ohne Beweise):

Orthogonale Komplemente von Unterraum $V \subset L^2$:

$$V^{\perp} = \left\{ f \in L^2 \mid \langle f|g\rangle = 0 \;\; \forall\, g \in V \right\}$$

Fakt: $V^{\perp}$ ist abgeschlossen (Cauchy-Folgen konv. in $V^{\perp}$)

Bijektion: Projektionen $P = P^2 = P^* \iff \exists$ abgeschlossene UR V:

$$V = \mathrm{Ran}(P)$$

Unendlich dimensionale Version des Riesz'schen Darstellungssatz:

Satz 6.9 (Riesz Lemma, Funktionalanalysis)

Sei $\mathcal{L} : L^2 \to \mathbb{C}$ stetiges lineares Funktional $\implies \exists g \in L^2$ mit

$$\mathcal{L}(f) \;=\; \langle g|f\rangle \qquad \forall\, f \in L^2$$

Insbesondere ist Skalarprodukt stetig in beiden Argumenten

Weiter: Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen (ONB)

Korollar 6.7 (für allgemeine Maßräume): ONB immer abzählbar $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dann $\forall\; f \in L^2$:

$$f \;=\; \sum_{n\geqslant 1}\langle b_n|f\rangle\, b_n \;=\; \sum_{n\geqslant 1}|b_n\rangle\langle b_n|f\rangle \;=\; \Big(\sum_{n\geqslant 1}|b_n\rangle\langle b_n|\Big)|f\rangle$$

genauer:

$$\lim_{N\to\infty}\Big\| f - \sum_{n=1}^{N}\langle b_n|f\rangle\, b_n\Big\| \;=\; 0$$

7 Fourier-Reihen und Fouriertransformation

Sei $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong [-\pi, \pi)$. Für Funktion $f \in L^1\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$ sind

$$f_n \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\; e^{-in\theta} f(\theta) \;=\; \left\langle e^{in\theta} | f \right\rangle_{L^2}$$

die Fourierkoeffizienten (Fourier 1811)

Zentrale Frage: Für welche Funktionen f konvergiert die Fourier-Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{in\theta}$$

gegen f und in welchem Sinne liegt Konvergenz vor

Klassisches hinreichendes Kriterium:

Satz 7.1 (Dirichlet 1828)

$f \in C^1(\mathbb{S}^1) \implies$ *Fourierreihe konvergiert uniform,*
d.h. Partialsummen $S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} f_n\, e^{in\theta}$ *erfüllen*

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|_\infty \;=\; 0$$

Beweis: Zunächst Berechnung der Partialsummen:

$$\begin{aligned} S_N(\theta) &= \left(\sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, f(\varphi)\, e^{-in\varphi} \right) e^{in\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, f(\varphi) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\varphi)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, f(\theta+\varphi) \sum_{n=-N}^{N} e^{-in\varphi} \end{aligned}$$

Also ist es sinnvoll für $\varphi \neq 0$ den Dirichletkern einzuführen:

$$\begin{aligned} D_N(\varphi) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{-in\varphi} = e^{-iN\varphi} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\varphi} \\ &= e^{-iN\varphi}\, \frac{e^{i(2N+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} \\ &= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \end{aligned}$$

Er besitzt eine stetige Fortsetzung bei $\varphi = 0$:

$$D_N(0) \;=\; 2N + 1$$

Außerdem ist $D_N(\varphi)$ gerade und erfüllt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, D_N(\varphi) \;=\; 1$$

Für $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ spalten wir nun wie folgt auf:

$$\begin{aligned} |S_N(\theta) - f(\theta)| \;&=\; \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, (f(\theta+\varphi) - f(\theta))\, D_N(\varphi) \right| \\ &\leqslant\; \left| \int_{-\pi}^{-\delta} d\varphi\, \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} d\varphi\, \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} d\varphi\, \Delta(\varphi) \right| \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta(\varphi) \;=\; \frac{1}{2\pi}(f(\theta+\varphi) - f(\theta)) D_N(\varphi)$$

Für den mittleren Teil gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{\delta} d\varphi\, \Delta(\varphi)\right| &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi}\, \frac{|f(\theta+\varphi)-f(\theta)|}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|} \cdot \left|\sin\left((N+\tfrac{1}{2})\varphi\right)\right| \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi}\, \frac{\|f'\|_\infty \cdot |\varphi|}{\sin(\frac{|\varphi|}{2})} \cdot 1 \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi}\, \frac{\|f'\|_\infty |\varphi|}{\frac{|\varphi|}{2}\cdot\frac{2}{\pi}} \\
&\leqslant \delta\, \|f'\|_\infty
\end{aligned}$$

wegen Ungleichung

$$\sin(\tfrac{|\varphi|}{2}) \geqslant \frac{|\varphi|}{2}\,\frac{2}{\pi}$$

Für rechten Term partielle Integration:

$$\int_\delta^\pi d\varphi\ \Delta(\varphi) = \int_\delta^\pi d\varphi\ \underbrace{\frac{f(\theta+\varphi)-f(\theta)}{2\pi\sin(\frac{\varphi}{2})}}_{F(\varphi)} \cdot \sin\left((N+\tfrac{1}{2})\varphi\right)$$

$$= \left[F(\varphi)\,\frac{-1}{N+\frac{1}{2}}\ \cos\left((N+\tfrac{1}{2})\varphi\right)\right]_\delta^\pi$$

$$+\int_\delta^\pi d\varphi\ F'(\varphi)\,\frac{1}{N+\frac{1}{2}}\ \cos\left((N+\tfrac{1}{2})\varphi\right)$$

Nun gilt für δ-abhängige Konstante C_δ (welche unabhängig von N ist)

$$\sup_{\delta\leqslant\varphi\leqslant\pi} \max\{|F(\varphi)|, |F'(\varphi)|\} \leqslant C_\delta < \infty$$

Also:

$$\left|\int_\delta^\pi d\varphi\ \Delta(\varphi)\right| \leqslant \frac{(2+\pi)C_\delta}{N+\frac{1}{2}}$$

Erstes Integral über $[-\pi,-\delta]$ kann analog abgeschätzt werden

Zusammen:

$$|S_N(\theta) - f(\theta)| \leqslant \|f'\|\,\delta + 2\,\frac{2+\pi}{N+\frac{1}{2}}\,C_\delta \leqslant \epsilon$$

Letzteres für $\delta = \frac{\epsilon}{2\|f'\|}$ und $N = N(\epsilon)$ ausreichend groß □

Bemerkung 7.2 (Fejer 1900)

Wenn f nur stetig, dann konvergieren Cesaro-Mittel $C_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n$ uniform gegen f

Beweisidee: Modifiziere Obiges unter Verwendung des Fejer-Kerns:

$$F_N(\varphi) = \frac{\sin^2((N+1)\frac{\varphi}{2})}{(N+1)\sin^2(\frac{\varphi}{2})}$$

□

Bemerkung 7.3 (Offene Frage:)

Charakterisierung von Funktionen mit konvergenter Fourier-Reihe in $\|.\|_\infty$ (hinreichendes und notwendiges Kriterium)

Aber mit Konvergenzbegriff bez. $\|.\|_2$ im Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{S}^1)$ einfach

Offensichtlich $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ orthonormale Familie: $\langle e^{in\theta}|e^{im\theta}\rangle_{L^2} = \delta_{n,m}$

Wenn ONB vorliegt, dann gilt für jede Funktion $f \in L^2 = L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$:

$$f(\theta) \;=\; \sum_n f_n \, e^{in\theta} \qquad \text{Konvergenz Partialsummen in } L^2$$

Satz 7.4

$(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ONB von $L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$

Beweis: Orthogonalität folgt aus

$$\langle e^{in\theta}|e^{im\theta}\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(m-n)\theta} \;=\; \delta_{n,m}$$

weiter: $C^1(\mathbb{S}^1)$ dicht in $\left(L^2\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right), \|.\|_2\right)$ wegen Satz 6.6

oder: Treppenfktn dicht in L^2 und Glättung mit $\|.\|_2$-Fehler möglich

Jetzt: $g \in (\mathrm{span}\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\})^{\perp}$, d.h. $\left\langle g|e^{in\theta}\right\rangle = 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Zeige $g = 0$

Für $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ ist Fourier-Reihe nach Satz 7.1 uniform konvergent

$\Longrightarrow$ Konvergenz auch bez. $\|.\|_2$

Also folgt aus Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\langle f|g\rangle \;=\; \langle \lim_N \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{in\theta}|g\rangle \;=\; \lim_N \sum_{n=-N}^{N} f_n \left\langle e^{in\theta}|g\right\rangle \;=\; 0$$

Für beliebiges $f \in L^2$, sei nun $\tilde{f} \in C^1$, sodass $\|f - \tilde{f}\|_{L^2} \leqslant \epsilon$. Dann

$$\langle f|g\rangle \;=\; \langle f - \tilde{f}|g\rangle + \langle \tilde{f}|g\rangle \;\leqslant\; \|f - \tilde{f}\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \;\leqslant\; \epsilon\|g\|_{L^2}$$

Somit gilt $\langle f|g\rangle = 0$ für alle $f \in L^2$. Also $g = 0$ $\square$

Bemerkung 7.5 (Satz von Carleson 1966)

Für jedes $f \in L^2$ konvergiert die Fourier-Reihe fast sicher

Satz 7.6 (Abfallen der Fourier-Koeffizienten für diffbare Fktn)

$f \in C^k(\mathbb{S}^1) \cong \{f \in C^k(\mathbb{R}) \mid f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Dann existiert Konstante $C = C_f$, so dass $f_n = \left\langle e^{in\theta} \mid f \right\rangle$ erfüllt

$$|f_n| \leqslant \frac{C}{n^k}$$

Beweis: Dies folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} 2\pi f_n &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ e^{-in\theta} f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \tfrac{i}{n}\, (\partial e^{-in\theta}) f(\theta) \\ &= \tfrac{i}{n}\ e^{-in\theta} f(\theta)\big|_{-\pi}^{\pi} - \tfrac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ e^{-in\theta} \partial f(\theta) \\ &= \tfrac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ e^{-in\theta} \partial f(\theta) = \ldots = \tfrac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ e^{-in\theta} (\partial^k f)(\theta) \end{aligned}$$

Nun schließe mit Standardintegralabschätzung $\square$

Satz 7.7 (Parseval Gleichung)

Diskrete Fouriertransformation ist eine unitäre lineare Abbildung

$$\mathcal{F} \,:\, L^2(\mathbb{S}^1, \tfrac{d\theta}{2\pi}) \;\to\; \ell^2(\mathbb{Z})$$

definiert durch

$$\mathcal{F}(f) \;=\; (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \qquad , \qquad f_n \;=\; \langle e^{in\theta} | f \rangle_{L^2}$$

Beweis: $f, g \in L^2$ nach ONB $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ entwickeln

$$f \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, b_n \qquad g \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\, b_n$$

Also (Parseval Gleichung):

$$\langle f|g\rangle_{L^2} \;=\; \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle f_m\, b_m | g_n\, b_n\rangle \;=\; \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \overline{f_m} g_n \langle b_m | b_n\rangle \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_n} g_n \;=\; \langle \mathcal{F} f | \mathcal{F} g\rangle_{\ell^2}$$

$\square$

Basiswechsel zu reeller Basis

Von $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ durch Rotation um $\frac{\pi}{4}$ zu ONB $(c_0, c_n, s_n)_{n>0}$ mit

$$c_0 = b_0 \quad , \quad c_n = \frac{b_n+b_{-n}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\cos(n\theta) \quad , \quad s_n = \frac{b_n-b_{-n}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\sin(n\theta)$$

so dass $\|c_n\|^2 = \|s_n\|^2 = 1$. Dann Fourier-Reihe von $f \in L^2$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f_0 + \sqrt{2}\sum_{n\geqslant 1}\big(f_{c,n}\cos(n\theta) + f_{s,n}\sin(n\theta)\big) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} f_{c,n}\,c_n + \sum_{n\geqslant 1} f_{s,n}\,s_n \end{aligned}$$

mit $f_{c,n} = \langle c_n|f\rangle$ und $f_{s,n} = \langle s_n|f\rangle$

Parseval: $\|f\|^2 = |f_{c,0}|^2 + \sum_{n\geqslant 1}(|f_{c,n}|^2 + |f_{s,n}|^2)$

Vorteile:

- für f reell, sind Fourier-Koeffizienten $f_{c,n}$ und $f_{s,n}$ reell
- c_n gerade und s_n ungerade $\implies$ $f_{s,n} = 0$ wenn f gerade und ....

Satz 7.8

Sei f integrierbar und folgende Grenzwerte existieren:

$$f(\theta-) \;=\; \lim_{\delta\downarrow 0} f(\theta-\delta) \qquad , \qquad f(\theta+) \;=\; \lim_{\delta\downarrow 0} f(\theta+\delta)$$

Außerdem sei Funktion

$$g(\delta) \;=\; \frac{(f(\theta-\delta)-f(\theta-)) + (f(\theta+\delta)-f(\theta+))}{\delta}$$

auf Intervall $[0,\varepsilon]$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *integrierbar (Dini–Bedingung)*

Dann konvergiert die Fourier–Reihe von f in θ *und*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n\, e^{in\theta} \;=\; \frac{f(\theta-)+f(\theta+)}{2}$$

Beweis: Wir verwenden wieder den Dirichletkern $D_N(\theta) = \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

mit $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{in\theta} = 1$ und $D_N(\theta) = D_N(-\theta)$

$$
\begin{aligned}
S_N(f)(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi}\, D_N(\theta-\delta)\, f(\delta) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi}\, D_N(\delta)\, f(\theta+\delta) && (f \text{ und } D_N \text{ periodisch}) \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi}\, D_N(\delta)\, \big(f(\theta+\delta)+f(\theta-\delta)\big) && (D_N \text{ gerade})
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& S_N(f)(\theta) - \frac{f(\theta-)+f(\theta+)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi}\, D_N(\delta)\, \big(f(\theta+\delta)+f(\theta-\delta)-f(\theta+)-f(\theta-)\big) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi}\, \underbrace{\sin\left((2N+1)\tfrac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}}_{\text{stetige Funktion } s \text{ auf } [0,\varepsilon]}\, g(\delta)
\end{aligned}
$$

Nun spalte Integral auf:

$$S_N(f)(\theta) - \frac{f(\theta-) + f(\theta+)}{2} = \int_0^{\varepsilon} \frac{d\delta}{2\pi} s(\delta) g(\delta) + \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} \sin((2N+1)\tfrac{\delta}{2}) \frac{\delta g(\delta)}{\sin(\frac{\delta}{2})}$$

Wegen Dini–Bedingung ist Intgral $\int_0^{\varepsilon}$ kleiner als $C\varepsilon$

Zudem ist folgende Funktion integrierbar:

$$\delta \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\delta g(\delta)}{\sin \frac{\delta}{2}} \chi(\delta \geqslant \varepsilon)$$

Somit konvergieren seine Fourier–Koeffizienten gegen 0 (Parseval)

Also $\exists$ N_0, so dass Beitrag $\int_{\varepsilon}^{\pi} < \varepsilon$

Also insgesamt $\leqslant (C+1)\epsilon$ für $N \geqslant N_0$ $\square$

Beispiel 7.9

$f(\theta) = \theta\chi_{[-\pi,\pi)}(\theta)$ nicht stetig, aber in L^2

Dann $f_0 = 0$ und für $n \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
f_n &= \langle e^{in\theta} \mid f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-in\theta}\theta \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{1}{-in}\, (\partial e^{-in\theta})\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-in}\, e^{-in\theta}\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-in\theta} \;=\; \frac{(-1)^n}{-in} + 0
\end{aligned}
$$

Somit nach dem Satz von Dini:

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0} \frac{(-1)^n}{-in}\, e^{in\theta} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\theta) \;=\; \begin{cases} \theta & , \quad \theta \neq -\pi \\ \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0 & , \quad \theta = -\pi \end{cases}
$$

Insbesondere, für $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; \frac{\pi}{4}
$$

Beispiel 7.10 (Gibbs-Phänomen)

Sei $f(\theta) = \mathrm{sgn}(\theta) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leqslant \theta < \pi \\ -1 & , \quad -\pi \leqslant \theta < 0 \end{cases}$

Diese Funktion ist ungerade, also $f_{c,n} = 0$. Zudem

$$
\begin{aligned}
f_{s,n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}\pi} \ \sin(n\theta)\ \mathrm{sgn}(\theta) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} d\theta \ \sin(n\theta) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \ \frac{-1}{n} \ \cos(n\theta)\ \Big|_0^{\pi} \\
&= \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{n\pi} & , \quad n \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Also im L^2-Sinne:

$$
\mathrm{sgn}(\theta) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\theta)
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Zudem

$$S_{2N}(f)(\theta) \;=\; \sum_{m=0}^{N} \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2m+1}\;\sin((2m+1)\theta)$$

und $S_N(f)(0) = 0$ (was im Limes $N \to \infty$ mit Satz 7.8 übereinstimmt)

Punktweise Konvergenz, sicher keine uniforme Konvergenz. Zudem

$$S_{2N}(f)\left(\tfrac{\pi}{2N+1}\right) = \frac{4}{2\pi}\sum_{m=0}^{N}\frac{2\pi}{2N+1}\,\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2N+1}\right)}{\frac{(2m+1)\pi}{2N+1}}$$

$$\xrightarrow{N\to\infty}\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\sin(\theta)}{\theta} \;\approx\; \frac{2}{\pi}\,1.85 \;>\; 1$$

Somit für alle $N \geqslant 1$:

$$\sup_{\theta>0}\big(S_{2N}(f)(\theta) - f(\theta)\big) \;\geqslant\; \tfrac{1}{\pi}\,1.85 - 1 \;>\; 0.4 \;>\; 0$$

Dies ist ein typisches Beispiel für das so genannte Gibbs-Phänomen

Vorbereitungen für Fouriertransformation

Zunächst Standardnotationen: für $x, p \in \mathbb{R}^d$

$$x \cdot p = \sum_{j=1}^{d} x_j p_j \quad , \quad x^2 = x \cdot x \quad , \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Ableitungen und Polynome zu Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \quad , \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

Definition 7.11

Testfunktionen und Schwartzfunktionen auf offenem $X \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{D}(X) = C_K^\infty(X) = \{\varphi \in C^\infty(X) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \subset X \text{ kompakt}\}$$

$$\mathcal{S}(X) = \{f \in C^\infty(X) \mid \lim_{|x|\to\infty,\, x\in X} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$$

wobei $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{\varphi \neq 0\}}$ Träger von φ

Weitere Notation: $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Offensichtlich gilt $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{S}(X)$

Beispiel 7.12

$\varphi(x) = c\, e^{-\frac{1}{1-x^2}} \chi_{\{|x| \leqslant 1\}}(x)$ ist in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, aber nicht analytisch bei ± 1

Konstante c so dass $\int \mu(dx)\, \varphi(x) = 1$

Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, aber nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Definition 7.13

Lokalkonvexe Topologien auf $\mathcal{D}$ und $\mathcal{S}$ gegeben durch Halbnormen

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_x (1 + |x|^m) |\partial^\alpha f(x)| \qquad , \qquad m \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d$$

(positive homogen, Dreiecksungleichung, aber keine Nichtentartung)

Dann: $f_n \to f$ in $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{S} \iff \|f - f_n\|_{m,\alpha} \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$

Satz 7.14

(i) $\mathcal{D}(X)$ *ist dicht in* $L^p(X, dx)$ *für* $1 \leqslant p < \infty$ *und* $X \subset \mathbb{R}^d$ *offen*

(ii) $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ *dicht*

Für Beweis benötigt ist Glättung durch Konvolution:

$$(\varphi * f)(x) \;=\; \int \mu(dy)\, \varphi(x-y)\, f(y)$$

was Sinn macht z.B. wenn $\varphi \in L^1$ oder $f \in L^1$

Wahl von φ: glatt, positiv, kleiner Träger, Integral gleich 1

Dann ist auch die "Verschmierung" $\varphi * f$ glatt

Hilfsmittel:

Satz 7.15 (Young'sche Ungleichung, Spezialfall)

$$\|\varphi * f\|_p \;\leqslant\; \|\varphi\|_1 \, \|f\|_p \qquad , \qquad p \geqslant 1$$

Beweis der Young'schen Ungleichung: sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned}
|(\varphi * f)(x)| &\leqslant \int \mu(dy)\, |\varphi(x-y)|\, |f(y)| \\
&= \int \mu(dy)\, |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{q}} \left(|f(y)|^p |\varphi(x-y)|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int \mu(dy) |\varphi(x-y)| \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int \mu(dy) |f(y)|^p |\varphi(x-y)| \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

nach Hölder Ungleichung. Also mit Translationsinvarianz und Fubini

$$\begin{aligned}
\|\varphi * f\|_p^p &\leqslant \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dx) \int \mu(dy)\, |f(y)|^p |\varphi(x-y)| \\
&= \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dy)\, \|\varphi\|_1 |f(y)|^p \\
&= \|\varphi\|_1^{1+\frac{p}{q}}\, \|f\|_p^p = \left(\|\varphi\|_1 \|f\|_p\right)^p
\end{aligned}$$

was die Ungleichung beweist $\square$

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) weil $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ nach Hölder Ungleichung

Für (i) sei $\varphi(x) = c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \chi_{\{|x| \leqslant 1\}}$ wie in Beispiel 7.12

Setze $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ was Integral 1 und Träger $[-\epsilon, \epsilon]$ hat

Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachte nun kompakte Menge

$$K_n \;=\; \left\{ x \in X \;\middle|\; |x| \leqslant n,\; d(x, \partial X) \geqslant \tfrac{2}{n} \right\}$$

Für jedes $f \in L^p(X)$ definieren wir jetzt

$$\begin{aligned} f_n(x) \;&=\; \big(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f \chi_{K_n})\big)(x) \\ &=\; \int dy \; \varphi_{\frac{1}{n}}(x-y)\; f(y)\; \chi_{K_n}(y) \\ &=\; \int_{K_n} dy \; \varphi_{\frac{1}{n}}(x-y)\; f(y) \end{aligned}$$

Da Integral mit ∂_x vertauscht, ist $f_n \in \mathcal{D}(X)$ Glättung von f

Behauptung: $\lim_n f_n = f$ in L^p, woraus dann (i) folgt

Begründung: Mit Young'sche Ungleichung und $\int dy\ \varphi_{\frac{1}{n}}(y) = 1$

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p &\leqslant \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f(\chi_{K_n} - 1)\|_p \ + \ \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f - f\|_p \\ &\leqslant \|\varphi_{\frac{1}{n}}\|_1 \|f(\chi_{K_n} - 1)\|_p + \left(\int dx \left|\int dy\ \varphi_{\frac{1}{n}}(y)(f(x-y) - f(x))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Nun impliziert Jensen-Ungleichung für konvexe Funktion $x \mapsto x^p$:

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p &\leqslant 1 \cdot \|f(1 - \chi_{K_n})\|_p + \left(\int dx \int dy\ \varphi_{\frac{1}{n}}(y)\ |f(x-y) - f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \epsilon \ + \ \left(\int dy\ \varphi_{\frac{1}{n}}(y)\ \|S_y f - f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

wobei $n \geqslant N(\epsilon)$ ausreichend groß und $S_y f(x) = f(x+y)$ Translation

Der Satz folgt nun aus dem folgendem Fakt $\square$

Satz 7.16

Die Abbildung $y \in \mathbb{R}^d \mapsto S_y f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *ist stetig für* $1 \leqslant p < \infty$

Beweis: Zu $f \in L^p$ und $\epsilon > 0$ wähle (Satz 6.6) $g \in C_K(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|f - g\|_p \leqslant \epsilon$$

Da g gleichmäßig stetig auf $\operatorname{supp}(g) \subset [-c, c]^d$, $\exists\, \delta > 0$ mit:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{(2(c+\delta))^{d/p}} \qquad , \qquad |x - y| \leqslant \delta$$

Dann folgt für $\delta' < \delta$

$$\|S_{\delta'} g - g\|_p^p \leqslant \int_{[-c-\delta, c+\delta]^d} dx\, |g(x + \delta') - g(x)|^p \leqslant \epsilon^p$$

Also, weiterhin für $\delta' < \delta$,

$$\|S_{\delta'} f - f\|_p \leqslant \|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p + \|S_{\delta'} g - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant 3\epsilon$$

wegen $\|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p = \|f - g\|_p$ $\square$

Definition 7.17

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fourier-Transformation definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(p) \;=\; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ip\cdot x}\, f(x)$$

Wichtigste Eigenschaft: $\mathcal{F}$ ist Bijektion auf $\mathcal{S}$ (siehe Satz 7.19 unten)

Offensichtlich: $\mathcal{F}$ wohl-definiert (weil $f \in L^1$) und

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \;\leqslant\; \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \|f\|_{L^1}$$

Präzisierung ist klassisches Resultat über Fouriertransformation:

Satz 7.18 (Riemann-Lebesgue Lemma)

Es gilt $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$

Beweis: Stetigkeit für kompakt getragenes f folgt aus:

$$|(\mathcal{F}f)(p)-(\mathcal{F}f)(p')| \leqslant \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\,|1-e^{i(p-p')x}|\,|f(x)| \leqslant c\,|p-p'|\,\|f\|_{L^1}$$

mit geeigneter Konstanter $c > 0$

Da kompakt getragene Funktionen dicht in $L^1(\mathbb{R})$, erlaubt ein 3ϵ-Argument Stetigkeit für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen

Nun zum Verschwinden im Unendlichen für $f \in \mathcal{D}$

(hinreichend weil $\mathcal{D} \subset L^1$ dicht und $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_\infty \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|f-g\|_1$)

Partielle Integration (ohne Randterme) ergibt für $j = 1, \ldots, d$:

$$|(\mathcal{F}f)(p)| = \left|-\int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\,\partial_j f(x)\,\frac{1}{-ip_j}\,e^{-ip\cdot x}\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\,\|\partial_j f\|_{L^1}\,\frac{1}{|p_j|}$$

Da $\partial_j f \in L^1$ für $f \in \mathcal{D}$, folgt, dass $(\mathcal{F}f)(p) \to 0$ für $|p| \to \infty$ $\square$

Satz 7.19

Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt Folgendes:

(i) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *ist eine Bijektion mit Inversem*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} \, f(p) \, e^{ix \cdot p}$$

(ii) *(Parseval)* $\langle \mathcal{F} f \mid \mathcal{F} g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f \mid g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

(iii) $\partial_p^\alpha (\mathcal{F} f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$ *wobei* $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$

(iv) $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) = i^{|\alpha|} p^\alpha \mathcal{F} f$

(v) $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F} f) * (\mathcal{F} g)$

(vi) $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} (\mathcal{F} f) \cdot (\mathcal{F} g)$

Beweis: Zunächst zeigen wir (iii) durch folgende Rechnung:

$$\partial_p^\alpha(\mathcal{F}f)(p) \;=\; \partial_p^\alpha \int \frac{dx}{(\sqrt{2\pi})^d}\, e^{-ip\cdot x}\, f(x) \;=\; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\, (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ip\cdot x}$$

mit Satz von Lebesgue, da $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S} \subset L^1$

Nun zu (iv). Nach partieller Integration ohne Randterme folgt in der Tat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) &= \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ip\cdot x}\, \partial_x^\alpha f(x) \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\, (\partial_x^\alpha e^{-ip\cdot x}) f(x) \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-ip)^\alpha (\mathcal{F}f)(p)
\end{aligned}$$

Weiter zu (i). Zunächst zeigen wir $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Hierzu

$$p^\alpha \partial_p^\beta (\mathcal{F}f)(p) \overset{\text{(iii)}}{=} (-i)^{|\beta|} p^\alpha (\mathcal{F}(x^\beta f))(p) \overset{\text{(iv)}}{=} (-i)^{|\beta|} (-i)^{-|\alpha|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha (x^\beta f))(p)$$

Da nun $\partial_x^\alpha (x^\beta f) \in \mathcal{S}$ folgt mit Satz 7.18 $p^\alpha \partial_p^\beta \mathcal{F}f(p) \to 0$ für $|p| \to \infty$

Behauptung 1: (und Beispiel für Berechnung einer Fouriertrafo)

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a^2x^2}{2}})(p) \;=\; \frac{1}{a^d}\, e^{-\frac{p^2}{2a^2}} \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Begründung:

Ausreichend $d = 1$ wegen Faktorisierung der Exponentialfunktion

Zudem Skalierung (Variablenwechsel) führt zu $a = 1$

Für $p = 0$ ist Aussage genau das Gauß'sche Integral (Beispiel 3.12)

Des Weiteren zeigt eine Rechnung (partielle Integration):

$$\begin{aligned}
\partial_p\big(e^{\frac{p^2}{2}}\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(p)\big) \;&=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,(p - ix)e^{\frac{p^2}{2}-ipx}\; e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&=\; \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{p^2}{2}-ipx}\,(p + i\partial_x)e^{-\frac{x^2}{2}} \;=\; 0
\end{aligned}$$

$\diamond$

Behauptung 2:

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) \;=\; f(-x) \qquad , \qquad f \in \mathcal{S}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Begründung: Zunächst $\mathcal{F}\mathcal{F}f$ wohl definiert, weil $\mathcal{F}f \in \mathcal{S} \subset L^1$

Mit $\lim_{a\to 0} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} = 1$ und Lebesgue, Fubini, Beh. 1 folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) &= \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ix\cdot p} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ip\cdot y} f(y) \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ixp} e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-ip\cdot y} f(y) \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{-i(x+y)p}\, e^{-\frac{a^2p^2}{2}} \right) f(y) \\
&= \lim_{a\to 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}}\, \frac{1}{a^d}\, e^{-\frac{(x+y)^2}{2a^2}} f(y) \\
&= \left(\lim_{a\to 0} \int dy\, \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d}\, e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\, (f(y-x) - f(-x)) \right) + f(-x)
\end{aligned}
$$

Letzteres nach Variablentrafo und weil Wahrscheinlichkeitsdichte

Nun zerlege $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d_y = B_{\sqrt{a}}(0) \mathbin{\mathring{\cup}} R$. Auf R ist $f(y-x) - f(-x)$ klein, auf $B_{\sqrt{a}}(0)$ ist Gauss-Glocke klein. Also Integral 0 im Limes $a \to 0$ $\diamond$

Aus $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$ folgt $\mathcal{F}^4 = \mathbf{1}$, also $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$ und

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) \;=\; (\mathcal{F}^2\mathcal{F}f)(x) \;=\; (\mathcal{F}f)(-x) \;=\; \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\, f(p)e^{ip\cdot x}$$

Somit (i) bewiesen. Ähnlich nun für (ii):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g\rangle_{L^2} \;&=\; \int dp \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{ix\cdot p}\, \overline{f(x)}(\mathcal{F}g)(p) \\
&=\; \int dx\, \overline{f(x)} \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{ix\cdot p}\, (\mathcal{F}g)(p) \\
&=\; \int dx\, \overline{f(x)}(\mathcal{F}^2 g)(-x) \;=\; \int dx\, \overline{f(x)}\, g(x)
\end{aligned}$$

Beachte, dass Rechnung formal auf folgende Identität reduziert:

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^{d}}\, e^{ip\cdot(x-y)} \;=\; \delta(x-y)$$

Hierzu später mehr

Zuletzt zu (v) und (vi):

Da $f \in \mathcal{S}$, ist auch $e^{ipx} \cdot \overline{f(x)} \in \mathcal{S}$

Also

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(f \cdot g)(p) &= \int dx\; e^{-ipx} f(x)\; g(x) \\
&= \left\langle e^{ipx}\;\bar{f} \mid g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \left\langle \mathcal{F}(e^{ipx}\bar{f}) | \mathcal{F}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \int dq\; \overline{\int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}\; e^{-iqx}\; e^{ipx}\; \overline{f(x)}}\; (\mathcal{F}g)(q) \\
&= \int dq\; (\mathcal{F}f)(p-q)\; (\mathcal{F}g)(q) \\
&= (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(p)
\end{aligned}$$

was den Beweis von (v) beendet. (vi) analog □

Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $(f_n)_{n\geqslant 1}$ Folge in $\mathcal{S}$ mit $\lim \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$

Satz 7.19 impliziert $\|\mathcal{F} f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ für $f_n \in \mathcal{S}$

Daher $(\mathcal{F} f_n)_{n\geqslant 1}$ Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^d)$, also konvergent. Definiere

$$\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \qquad , \qquad \mathcal{F}_2 f \; = \; L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{F} f_n$$

Dann $\mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ und es gilt die Plancherel-Identität

$$\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle \; = \; \langle g | f \rangle \qquad , \qquad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Weil $e^{-ipx} f(x)$ nicht integrierbar gilt aber im Allgemeinen **nicht**, dass

$$(\mathcal{F}_2 f)(p) \; = \; \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; e^{-ip\cdot x} f(x) \, , \qquad \forall \; f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Aber für Kompaktum $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant R\}$ gilt $L^2(B_R) \subset L^1(B_R)$

Satz 7.20

(i) $(\mathcal{F}_2 f)(p) = L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; e^{-ipx} f(x)$ *für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

(ii) $(\mathcal{F}_2 f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \; e^{-ipx} f(x)$ *fast sicher in* $p \; \forall \; f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

Beweis: (ii) Nach Satz 7.14 existiert Folge $(f_k)_{k \geqslant 1}$ in $\mathcal{S}$ mit

$$\|f - f_k\|_1 \to 0 \qquad \text{und} \qquad \|f - f_k\|_2 \to 0$$

(da f_k explizit durch Glättung gegeben und somit $f_k \in L^1$ und $f_k \in L^2$)
Wohldefiniert sind sowohl $\mathcal{F} f_k$ als auch $\mathcal{F} f$ (da $f_k, f \in L^1$)
Nach Satz 7.18: $\mathcal{F} f_k \to \mathcal{F} f$ in $(C_0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ und $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to C_0} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$
Somit gilt für alle $R > 0$

$$\int_{B_R} dp \, |\mathcal{F} f_k(p) - \mathcal{F} f(p)|^2 \leqslant \mathrm{Vol}(B_R) \cdot \frac{1}{(2\pi)^d} \|f_k - f\|_{L^1}^2$$

$$\begin{aligned} \int_{B_R} dp \, |\mathcal{F} f_k(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2 &\leqslant \|\mathcal{F} f_k - \mathcal{F}_2 f\|_2^2 \\ &= \|\mathcal{F}_2 (f_k - f)\|_2^2 \qquad (\text{da } \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{S} = \mathcal{F}) \\ &= \|f_k - f\|_2^2 \qquad (\text{nach Plancherel}) \end{aligned}$$

Beides verschwindet im Limes $k \to \infty$

Aus $|\mathcal{F}f(p)-\mathcal{F}_2 f(p)|^2 \leqslant |\mathcal{F}f(p)-\mathcal{F}f_k(p)|^2 + |\mathcal{F}f_k(p)-\mathcal{F}_2 f(p)|^2$ folgt

$$\int_{B_R} dp\, |\mathcal{F}f(p)-\mathcal{F}_2 f(p)|^2 \;=\; 0$$

Deswegen $\mathcal{F}f(p)=\mathcal{F}_2 f(p)$ fast sicher bez. des Lebesgue-Maßes

Nun zu (i): Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\chi_{B_R} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Nach (ii) gilt also fast sicher $\mathcal{F}(\chi_{B_R} f) = \mathcal{F}_2(\chi_{B_R} f)$

Außerdem mit Satz von Lebesgue $\chi_{B_R} f \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ für $R \to \infty$

Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{F}_2$ gilt also:

$$\mathcal{F}_2 f \;=\; L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}_2(\chi_{B_R} f) \;=\; L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}(\chi_{B_R} f)$$

Nun ist aber letzterer Ausdruck genau die gewünschte Formel $\square$

Distributionen

Definition 7.13: Lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

induziert von Halbnormen

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_x (1 + |x|^m)|\partial^\alpha f(x)| \qquad , \qquad m \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d$$

Dann: $f_n \to f$ in $\mathcal{D} \iff \|f - f_n\|_{m,\alpha} \to 0$ für alle m, α

Definition 7.21

Distributionen auf $\mathbb{R}^d$ sind stetige lineare Funktionale auf $\mathcal{D}$,

also genau die Elemente des topologischen Dualraumes $\mathcal{D}'$

Analog: Dualraum $\mathcal{S}'$ sind temperierte oder Schwartz-Distributionen

Bemerkung 7.22

Lineares Funktional $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ ist stetig (bez. lokalkonvexer Topo.)

$\iff T(f_n) \to 0$ für alle f_n mit $\|f_n\|_{m,\alpha} \to 0$ für alle m, α

Beispiel 7.23

Jedes $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert Distribution $T_g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ durch:

$$T_g(f) \;=\; \int dx\, g(x)\, f(x) \qquad , \qquad f \in \mathcal{D}$$

Beispiel 7.24

Dirac Distribution $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definert durch:

$$\delta(f) \;=\; f(0) \qquad , \qquad f \in \mathcal{D}$$

Alternative (formale) Schreibweise:

$$\delta(f) \;=\; \int dx\, \delta(x)\, f(x)$$

Dies suggeriert, dass δ eine Funktion ist, was nicht stimmt!

Beispiel 7.25

Sei $d = 1$. Die Ableitung $\delta' : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ der Dirac Distribution ist

$$\delta'(f) \;=\; -f'(0) \qquad , \qquad f \in \mathcal{D}$$

Dem zugrunde liegt partielle Integration ohne Randterme

$$\delta'(f) \;=\; \int dx\; \delta'(x)\, f(x) \;=\; -\int dx\; \delta(x)\, f'(x) \;=\; \int dx\; \delta(x)\, (-f')(x)$$

Allgemeiner:

Definition 7.26

(Schwache) Ableitung $\partial_j T \in \mathcal{D}'$ einer Distribution $T \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ist

$$(\partial_j T)(f) \;=\; -T(\partial_j f)$$

Bemerkung 7.27

Distributionen sind immer beliebig oft (schwach) differenzierbar

Approximation der Eins

Im Beweis von Satz 7.19 wurde gezeigt:

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \delta(x)$$

in dem Sinne, dass für jede "Testfunktion" $f \in \mathcal{D}$ gilt

$$\lim_{a\to 0} \int dx\, \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, f(x) = f(0) = \delta(f)$$

Definition 7.28

Eine Approximation der Eins ist Folge von Funktionen $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int dx\, g_n(x)\, f(x) = \delta(f)$$

Oben erstes Beispiel, ein zweites (nicht stetiges) Beispiel ist:

$$g_n(x) = n\, \chi(|x| \leqslant \tfrac{1}{2n})$$

Beachte, dass immer $\mu(g_n) = 1$

Weitere Identitäten

Im Beweis von Satz 7.19 wurde gezeigt:

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d}\; e^{ip\cdot x} \;=\; \delta(x)$$

wieder im Sinne (Limesprozess außen):

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d} \int dx\, e^{ip\cdot x}\, f(x) \;=\; f(0) \qquad , \qquad \forall\, f \in \mathcal{D}$$

Diskrete Version hiervon auf $\mathbb{S}^1$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} \;=\; 2\pi\,\delta(\theta)$$

d.h.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{in\theta}\, f(\theta) \;=\; 2\pi\, f(\theta) \qquad , \qquad f \in \mathcal{D}(\mathbb{S}^1) \;=\; C^{\infty}(\mathbb{S}^1)$$

8 Tensoren und Grassmann-Algebra

$V, W, V_1, \ldots, V_K$ endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ analog)

Definition 8.1

Dualraum zu V ist definiert als $V^* = \{T : V \to \mathbb{R} \mid T \text{ linear}\}$

Vektorraumstruktur auf V^*:

$$(T + \lambda T')(v) \;=\; T(v) + \lambda\, T'(v) \qquad , \qquad v \in V$$

Definition 8.2

Wenn $b_1, \ldots, b_N$ Basis von V, so bilden $b^1, \ldots, b^N \in V^*$ definiert durch

$$b^j(b_i) \;=\; \delta_{i,j} \;=\; \delta_i^j$$

sogenannte duale Basis von V^*. Insbesondere: $\dim(V^*) = \dim(V)$

Konstruktion von dualer Basis mit nicht-entarteter Bilinearform (später)

Satz 8.3

$(V^*)^* \cong V$ mit Isomorphismus bez. Identifikation $v(T) = T(v)$

Definition 8.4 (Erinnerung Lineare Algebra)

$$F : V_1 \times \ldots \times V_K \to W$$

heißt multilinear $\Longleftrightarrow$ linear in jedem Argument ist, d.h.

$$v_k \in V_k \mapsto F(v_1, \ldots, v_K) \in W \quad \text{linear} \quad \forall\, k = 1, \ldots, K$$

und $v_m \in V_m$ für $m \neq k$ festgehalten

Definition 8.5 (Tensorprodukt endl. dimen. Vektorräume)

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_K \;=\; \{F : V_1^* \times \ldots \times V_K^* \to \mathbb{R} \text{ multilinear}\}$$

Beachte: es gibt auch $V^* \otimes W^*$, $V^* \otimes W$, $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_K^*$, etc.
K-fach kontravariante und L-fach kovariante Tensoren über V:

$$T_L^K(V) \;=\; \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{K \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{L \text{ Faktoren}} \qquad \text{Tensoren } (K, L)\text{ter Stufe}$$

Beispiel 8.6

Vektoren sind Tensoren der Stufe $(1, 0)$

Entwicklung nach Basis $b_1, \ldots, b_N$:

$$v \;=\; \sum_{n=1}^{N} v^n b_n \;=\; v^n b_n$$

Einstein'sche Summenkonvention:

über doppelt (oben und unten) auftretende Indizes wird summiert

Beispiel 8.7

Bilineare Abbildungen $T : V \times V \to \mathbb{R}$ sind Tensoren der Stufe $(0, 2)$

$$T \;=\; \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} T_{n,m}\, b^n \otimes b^m \;=\; T_{n,m}\, b^n \otimes b^m$$

Beispiel 8.8

Lineare Abbildung $A : V \to V$ ist ein Tensor der Stufe $(1, 1)$ über V:

$$A(v^*, v) \;=\; v^*(Av)$$

Bez. Basis $b_1, \ldots, b_N$ und Dualbasis $b^1, \ldots, b^N$:

$$A \;=\; \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} A^m{}_n \, b_m \otimes b^n \;=\; A^m{}_n \, b_m \otimes b^n$$

Also: Matrix hat einen Index oben und einen unten (anders als früher)

Reihenfolge der Indizes entsprechend dem Auftreten der Vektoren

Koeffizienten sind $A^m{}_n = b^m(Ab_n)$

Verallgemeinerung: $A : V \to W$ und $e_1, \ldots, e_M$ Basis von W

$$A \;=\; A^m{}_n \, e_m \otimes b^n \;\in\; W \otimes V^*$$

Wenn A invertierbar, $A^{-1} = (A^{-1})^n{}_m \, b_n \otimes e^m \in V \otimes W^*$

Beispiel 8.9

Für $v \in V$ und $w \in W$ ist $v \otimes w$ definiert durch

$$(v \otimes w)(v^*, w^*) \;=\; v^*(v)\, w^*(w) \,\in\, \mathbb{R} \qquad , \qquad v^* \in V^*\,,\quad w^* \in W^*$$

Beachte: rechte Seite wirklich multilineare Abbildung

Satz 8.10

$\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$

Beweis: $b_1, \ldots, b_N$ Basis von V, und $e_1, \ldots, e_M$ Basis von W
Dann $\{b_n \otimes e_m \,|\, n = 1, \ldots, N,\; m = 1, \ldots, M\}$ Basis von $V \otimes W$
In der Tat, seien $v = \sum_{n=1}^N v^n b_n = v^n b_n$ und $w = \sum_{m=1}^M w^m e_m = w^m e_m$
Dann

$$v \otimes w \;=\; \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v^n w^m\, b_n \otimes e_m \;=\; v^n w^m\, b_n \otimes e_m$$

wobei $b_n \otimes e_m$ wie in Beispiel 8.9 $\square$

Korollar 8.11

$\dim(V_1 \otimes \ldots \otimes V_K) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_K)$

Korollar 8.12

$\dim(T^K_L(V)) = \dim(V)^{K+L}$

Wenn $b_1, \ldots, b_N$ Basis von V, dann Basis von $T^K_L(V)$:

$$b_{n_1} \otimes \ldots \otimes b_{n_K} \otimes b^{m_1} \otimes \ldots \otimes b^{m_L}$$

wobei $n_1, \ldots, n_K, m_1, \ldots, m_L \in \{1, \ldots, N\}$

Einstein'sche Summenkonvention für $T \in T^K_L(V)$ bez. dieser Basis:

$$T \;=\; T^{n_1,\ldots,n_K}{}_{m_1,\ldots,m_L}\, b_{n_1} \otimes \ldots \otimes b_{n_K} \otimes b^{m_1} \otimes \ldots \otimes b^{m_L}$$

Somit $T^{n_1,\ldots,n_K}{}_{m_1,\ldots,m_L} = T(b^{n_1}, \ldots, b^{n_K}, b_{m_1}, \ldots, b_{m_L})$

Bemerkung 8.13

$T^K_L(V) = T^L_K(V^*)$ wegen Satz 8.3

Rechenregeln

Tensorprodukt ist linear in jedem Argument, z.B.:

$$
\begin{aligned}
(v + \lambda v') \otimes w &= v \otimes w + \lambda\, v' \otimes w \\
v \otimes (w + \lambda w') &= v \otimes w + \lambda\, v \otimes w'
\end{aligned}
$$

Also insbesondere $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$. In der Tat:

$$
\begin{aligned}
(v + \lambda v') \otimes w(v^*, w^*) &= v^*(v + \lambda v') w^*(w) \\
&= (v^*(v) + \lambda v^*(v')) w^*(w) \\
&= v^*(v) w^*(w) + \lambda v^*(v') w^*(w) \\
&= v \otimes w(v^*, w^*) + \lambda\, v' \otimes w(v^*, w^*)
\end{aligned}
$$

Definition 8.14

Elementartensoren von Gestalt $v_1 \otimes \ldots \otimes v_K$ (ohne Linearkombin.)

Beispiel 8.15

$v \otimes w + v' \otimes w'$ Elementartensor nur wenn $v = \lambda v'$ oder $w = \lambda' w'$

Universelle Eigenschaft

Tensorprodukt $Z = V \otimes W$ eindeutig bestimmter Vektorraum Z mit:

$\exists$ bilineare Abbildung $T : V \times W \to Z$ so dass
jede bilineare Abbildung $S : V \times W \to X$ faktorisiert:

$$S = \widetilde{S} \circ T$$

für geeignetes lineares $\widetilde{S} : Z \to X$. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & Z \arrow[d, "\widetilde{S}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Begründung: Seien Z' und $T' : V \times W \to Z'$ auch wie oben
Dann wähle $X = Z'$ in Diagramm für Z: $\exists\, \widetilde{S} : Z \to Z'$ mit $T' = \widetilde{S} \circ T$
und wähle $X = Z$ in Diagramm für Z': $\exists\, \widetilde{S}' : Z' \to Z$ mit $T = \widetilde{S}' \circ T'$
Also $\widetilde{S}$ und $\widetilde{S}'$ bijektiv und somit $Z \cong Z'$ $\square$

Multilineare Abbildung sind konkrete Realisierung

D.h. $Z \cong V \otimes W$ wobei $V \otimes W = \{T : V^* \times W^* \to \mathbb{R} \text{ bilinear}\}$

Hierfür sei $T : V \times W \to V \otimes W$ gegeben durch $T(v, w) = v \otimes w$

wobei $v \otimes w$ bilineare Abbildung aus Beispiel 8.9

Sei $S : V \times W \to X$ gegeben. Dann ist $\widetilde{S} : V \otimes W \to X$ definiert durch

$$\widetilde{S}(v \otimes w) \;=\; S(v, w)$$

und durch lineare Fortsetzung auf Nicht-Elementartensoren

In der Tat, dann gilt $\widetilde{S} \circ T = S$ und $\widetilde{S}$ ist linear da

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}(v \otimes w + \lambda(v' \otimes w')) &= \widetilde{S}(v \otimes w) + \widetilde{S}(\lambda v' \otimes w') \\
&= \widetilde{S}(v \otimes w) + \widetilde{S}((\lambda v') \otimes w') \\
&= S(v, w) + S(\lambda v', w') \\
&= S(v, w) + \lambda S(v', w') \\
&= \widetilde{S}(v \otimes w) + \lambda \widetilde{S}(v' \otimes w')
\end{aligned}$$

Tensorprodukt von Tensoren

Zu $T \in T_L^K(V)$ und $T' \in T_{L'}^{K'}(V)$ definiere $T \otimes T'$ durch

$$\begin{aligned} & T \otimes T'(v_1^*, \ldots, v_K^*, v_1, \ldots, v_L, v_{K+1}^*, \ldots, v_{K+K'}^*, v_{L+1}, \ldots, v_{L+L'}) \\ & \quad = \; T(v_1^*, \ldots, v_K^*, v_1, \ldots, v_L) T'(v_{K+1}^*, \ldots, v_{K+K'}^*, v_{L+1}, \ldots, v_{L+L'}) \end{aligned}$$

Dann ist $T \otimes T'$ der Stufe $(K + K', L + L')$

Da $V \otimes W$ isomorph zu $W \times V$ ist (universelle Eigenschaft, Übung)

kann $T \otimes T'$ aufgefasst werden als Element in $T_{L+L'}^{K+K'}(V)$

Somit wird $T(V) = \oplus_{L \geqslant 0} \oplus_{K \geqslant 0} T_L^K(V)$ zu einer (Tensor)-Algebra

Beachte hierbei:

in direkter Summe werden nur Tensoren von gleicher Stufe addiert

Das Tensorprodukt erhöht jedoch die Stufe

Beispiel 8.16

Lineare Abbildungen $A, B : V \to V$ Tensoren der Stufe $(1,1)$ über V
Bez. Basis $b_1, \ldots, b_N$ und Dualbasis $b^1, \ldots, b^N$:

$$A \;=\; A^m{}_n\, b_m \otimes b^n \qquad , \qquad B \;=\; B^m{}_n\, b_m \otimes b^n$$

Dann $A \otimes B \in V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \cong T^2_2(V)$ gegeben durch

$$A \otimes B \;=\; A^{m_1}{}_{n_1} B^{m_2}{}_{n_2}\, b_{m_1} \otimes b^{n_1} \otimes b_{m_2} \otimes b^{n_2}$$

Die Koeffizienten von $A \otimes B$ sind also

$$A \otimes B^{m_1}{}_{n_1}{}^{m_2}{}_{n_2} \;=\; A^{m_1}{}_{n_1} B^{m_2}{}_{n_2}$$

oder nach Umordnung

$$A \otimes B^{m_1, m_2}{}_{n_1, n_2} \;=\; A^{m_1}{}_{n_1} B^{m_2}{}_{n_2}$$

Kontraktion von Tensoren

Definition 8.17

Kontraktion $C^i_j : T^{K+1}_{L+1}(V) \to T^K_L(V)$ für $1 \leqslant i \leqslant K+1$ und $1 \leqslant j \leqslant L+1$

$$(C^i_j T)^{n_1,\dots,n_K}{}_{m_1,\dots,m_L} = T^{n_1,\dots,n_{i-1},n,n_i,\dots n_K}{}_{m_1,\dots,m_{j-1},n,m_j,\dots,m_L}$$

wobei gemäß Einstein-Konvention über n summiert wird

Kontraktion ggf. auch bei Tensorprodukten verschiedener VR

Beispiel 8.18

Sei $A : V \to W$ aufgefasst als $A \in W \otimes V^*$ und $v \in V$

Dann $A \otimes v \in W \otimes V^* \otimes V$ und $Av \in W$. Es gilt $C^2_1 A \otimes v = Av$

Beispiel 8.19

Seien $A, B : V \to V$ wie in Beispiel 8.16. Dann $AB = C^2_1 A \otimes B$

Transformationsverhalten

Sei $A : V \to W$ linear und invertierbar (auch $W = V$ interessant)

Basen $b_1, \ldots, b_N$ von V und $e_1, \ldots, e_N$ von W

Vektoren, d.h. Tensoren der Stufe $(1, 0)$, transformieren wie

$$Av = C_1^2 A \otimes v = C_1^2 A^m{}_n e_m \otimes b^n \otimes v^k b_k = A^m{}_n e_m \, v^k \, \delta_k^n = A^m{}_n v^n e_m$$

also

$$(Av)^m = A^m{}_n v^n$$

Allgemeiner: aus Tensor $T \in T_0^K(V)$ der Stufe $(K, 0)$ wird mit A transformierter Tensor $A \cdot T \in T_0^K(W)$

Hierbei: Koeffzienten von

$$T = T^{n_1, \ldots, n_K} b_{n_1} \otimes \ldots \otimes b_{n_K}$$

transformieren "kontravariant":

$$(A \cdot T)^{m_1, \ldots, m_K} = A^{m_1}{}_{n_1} \cdots A^{m_K}{}_{n_K} T^{n_1, \ldots, n_K}$$

Nun Transformation von Kovektoren $v^* \in T^0_1(V)$

Hierzu verwende **nicht** $A^* : W^* \to V^*$ definiert durch

$$A^*(w^*)(v) \;=\; w^*(Av)$$

sondern $A^{-1} : W \to V$ bez. $(A^{-1})^* : V^* \to W^*$

Denn: aus $v^* : V \to \mathbb{R}$ wird transformiertes $A \cdot v^* : W \to \mathbb{R}$ mittels

$$(A \cdot v^*)(w) \;=\; v^*(A^{-1}w) \;=\; v_k b^k\left((A^{-1})^n{}_m w^m\, b_n\right) \;=\; v_n\,(A^{-1})^n{}_m w^m$$

Tensor $T \in T^0_L(V)$ der Stufe $(0, L)$ transformiert "kovariant":

$$(A \cdot T)_{m_1,\dots,m_L} \;=\; (A^{-1})^{n_1}{}_{m_1} \cdots (A^{-1})^{n_L}{}_{m_L}\, T_{n_1,\dots,n_L}$$

Also: Transformationsverhalten von $T \in T^K_L(V)$ der Stufe (K, L):

$$(A \cdot T)^{n_1,\dots,n_K}{}_{m_1,\dots,m_L} = A^{n_1}{}_{k_1} \cdots A^{n_K}{}_{k_K}(A^{-1})^{l_1}{}_{m_1} \cdots (A^{-1})^{l_L}{}_{m_L}\, T^{k_1,\dots,k_K}{}_{l_1,\dots,l_L}$$

Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Tensoren der Stufe $(K, 0)$ und $(0, L)$ sind multilineare Abbildungen

Also übertragen sich Symmetrie und Antisymmetrie aus Linearer Algebra

Definition 8.20

$T \in T_0^K(V)$ symmetrisch $\Longleftrightarrow \forall\ v_1^*, \ldots, v_K^* \in V^* \ \ \forall\ \sigma \in S_K$ Permutation

$$T(v_1^*, \ldots, v_K^*) \ = \ T(v_{\sigma(1)}^*, \ldots, v_{\sigma(K)}^*)$$

Definition 8.21

$T \in T_0^K(V)$ antisymmetrisch $\Longleftrightarrow \forall\ v_1^*, \ldots, v_K^* \in V^* \ \ \forall\ \sigma \in S_K$

$$T(v_1^*, \ldots, v_K^*) \ = \ \mathrm{sgn}(\sigma)\ T(v_{\sigma(1)}^*, \ldots, v_{\sigma(K)}^*)$$

Definition 8.22

Analog: (anti)symmetrische Tensoren der Stufe $(0, L)$

Beispiel 8.23

Ein Skalarprodukt $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ auf V definiert $g \in T_2^0(V)$ durch

$$g(v,w) \;=\; \langle v|w\rangle$$

Dies ist ein symmetrischer Tensor der Stufe $(0,2)$ weil hier $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Zu g gibt es kanonischen Isomorphismus $I : V \to V^*$ durch

$$I(v)(w) \;=\; g(v,w)$$

Dies ist endlich-dimensionales Riesz' Lemma in Hilbert-Räumen

Wenn $g = g_{n,m} b^n \otimes b^m$ und $v = v^n b_n$, so $I(v) = C_2^1 g \otimes v = g_{n,m} v^n b^m$

Allgemeiner: $I : T_0^K(V) \to T_K^0(V)$ auf $T = T^{m_1,\ldots,m_K} b_{m_1} \otimes \ldots \otimes b_{m_K}$ durch

$$I(T) \;=\; g_{n_1,m_1} \cdots g_{n_K,m_K} T^{m_1,\ldots,m_K} b^{n_1} \otimes \ldots \otimes b^{n_K}$$

Somit isomorpher Tensor durch “Runterziehen der Indizes”

Beispiel (Fortsetzung)

Analog gibt es auch ein “Raufziehen der Indizes”

Hierzu verwende Inverses $I^{-1} : V^* \to V$ zu $I : V \to V^*$

In Koordinaten ist diese Abbildung (per Definition von $g^{k,m}$)

$$I^{-1}(v^*) \;=\; I^{-1}(v_n b^n) \;=\; v_n \, I^{-1}(b^n) \;=\; g^{k,n} \, v_n \, b_k$$

Da $v = I^{-1} I(v) = I^{-1}(g_{n,m} v^n b^m) = g^{k,m} g_{n,m} v^n b_k$ und $g_{n,m} = g_{m,n}$ gilt

$$g^{k,m} g_{m,n} \;=\; \delta^k_n$$

Also Matrixinverse, und somit auch $g^{k,m} = g^{m,k}$

Allgemeiner: $I^{-1} : T^0_L(V) \to T^L_0(V)$ auf $T = T_{m_1,\ldots,m_L} b^{m_1} \otimes \ldots \otimes b^{m_L}$ durch

$$I^{-1}(T) \;=\; g^{n_1,m_1} \cdots g^{n_L,m_L} \, T_{m_1,\ldots,m_L} b_{n_1} \otimes \ldots \otimes b_{n_L}$$

Bemerkung 8.24

g muss nur symmetrisch, nicht positiv sein (z.B. Lorentzmetrik)

Projektionen auf (anti)symmetrische Tensoren

Mengen der (anti)symmetrischen Tensoren bilden Vekorraum, z.B.

$$\Lambda_L(V) = \{\omega \in T^0_L(V) \,|\, \omega \text{ antisymmetrisch}\}$$

Die sogenannte fermionische Projection $\Pi_- : T^0_L(V) \to \Lambda_L(V)$ ist

$$(\Pi_- T)(v_1, \ldots, v_L) = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \operatorname{sgn}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(L)})$$

Dann ist Π_- linear und $(\Pi_-)^2 = \Pi_-$ (auch hermitisch bez. Skalarprod.)

Analog: (bosonischer) Projektor Π_+ auf symmetrische Tensoren

(wie oben, nur ohne $\operatorname{sgn}(\sigma)$)

Bemerkung 8.25

Symmetrische Tensorprodukte beschreiben identische Bosonen
antisymmetrische Tensorprodukte identische Fermionen (in QM)

Grassmann-Algebra

Behauptung: wenn $L > \dim(V) = N$, dann $\Lambda_L(V) = \{0\}$

Begründung: wegen folgendem Resultat aus der LA:

Wenn Argumente linear abhängig, antisymmetrische Abbildung null $\diamond$

Behauptung: Für $L \leqslant N$ ist $\Lambda_L(V)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Definiere: $\Lambda(V) = \oplus_{L=0}^N \Lambda_L(V)$ mit $\Lambda_0(V) = \mathbb{R}$ (Vakuumsektor)

Das sogenannte äußere Produkt $\wedge : \Lambda_L(V) \times \Lambda_K(V) \to \Lambda_{L+K}(V)$ ist

$$\omega \wedge \eta \;=\; \frac{(L+K)!}{L!K!}\,\Pi_-\left(\omega \otimes \eta\right)$$

Allgemeiner für $\omega_i \in \Lambda_{L_i}(V)$:

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r \;=\; \frac{(L_1 + \ldots + L_r)!}{L_1! \cdots L_r!}\,\Pi_-\left(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_r\right)$$

Folgender Satz: $(\Lambda(V), +, \cdot, \wedge)$ Algebra (die Grassmann Algebra)

Satz 8.26

$\wedge$ *assoziativ, bilinear, antikommutativ:*

Für $\omega, \omega' \in \Lambda_L(V)$, $\eta \in \Lambda_K(V)$ *und* $\tau \in \Lambda_N(V)$*:*

(i) $(\omega \wedge \eta) \wedge \tau = \omega \wedge (\eta \wedge \tau)$

(ii) $(\omega + \lambda \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \lambda \omega' \wedge \eta$ *und analog in 2. Argument*

(iii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{KL} \eta \wedge \omega$

Beweis: (i) hier wird Vorfaktor benötigt:

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) \wedge \tau &= \frac{(L+K)!}{L!K!} \Pi_- \big(\omega \otimes \eta\big) \wedge \tau \\
&= \frac{(L+K+N)!}{(L+K)!N!} \, \frac{(L+K)!}{L!K!} \Pi_- \big(\Pi_- \big(\omega \otimes \eta\big) \otimes \tau\big) \\
&= \frac{(L+K+N)!}{L!K!N!} \Pi_- \big(\omega \otimes \eta \otimes \tau\big) \\
&= \omega \wedge (\eta \wedge \tau)
\end{aligned}$$

wobei letzter Schritt analog. (ii) und (iii) Übung $\square$

Satz 8.27

Wenn $N = \dim(V)$, *dann* $\dim(\Lambda_L(V)) = \binom{N}{L}$ *und* $\dim(\Lambda(V)) = 2^N$

Beweis: Wenn $b^1, \ldots, b^N$ Basis von V^*, dann bilden

$$b^{n_1} \wedge \ldots \wedge b^{n_L}$$

mit $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_L \leqslant N$ eine Basis von $\Lambda_L(V)$

In der Tat: Vektoren linear unabhängig und spannen $\Lambda_L(V)$ auf

Also ist $\binom{N}{L}$ Dimension von $\Lambda_L(V)$

Letzte Behauptung wegen binomischer Formel $\sum_{L=0}^{N} \binom{N}{L} = (1+1)^N$ $\square$

Bemerkung 8.28

Bei Entwicklung nach allgemeiner Basis gilt:

$$\omega \;=\; \omega_{n_1,\ldots,n_L} b^{n_1} \otimes \ldots \otimes b^{n_L} \;\in\; \Lambda_L(V) \quad \text{antisymmetrisch}$$

$\iff$ $\omega_{n_1,\ldots,n_L}$ antisymmetrisch in den Indizes, d.h.

$$\omega_{n_{\sigma(1)},\ldots,n_{\sigma(L)}} \;=\; \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega_{n_1,\ldots,n_L} \qquad , \qquad \forall\ \sigma \in S_L$$

Satz 8.29

Seien $\omega_1, \ldots, \omega_L \in V^*$ *und* $v_1, \ldots, v_L \in V$
Dann ist $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_L \in \Lambda_L(V)$ *gegeben durch*

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_L(v_1, \ldots, v_L) \;=\; \det_L \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_L(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(v_L) & \cdots & \omega_L(v_L) \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_L(v_1, \ldots, v_L) &= \left(\tfrac{L!}{1!\cdots 1!} \Pi_- \, \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_L\right)(v_1, \ldots, v_L) \\ &= L! \, \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \operatorname{sgn}(\sigma) \, (\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_L)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(L)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_L} \operatorname{sgn}(\sigma) \, \omega_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega_L(v_{\sigma(L)}) \end{aligned}$$

$\square$

Definition 8.30 (Pullback von Grassmann Algebra)

Sei $A : V \to W$ linear und definiere $A^* : \Lambda_L(W) \to \Lambda_L(V)$ durch

$$A^*\omega(v_1, \dots, v_L) \;=\; \omega(Av_1, \dots, Av_L)$$

Satz 8.31

Sei $A : V \to V$ und $L = N = \dim(V)$. Dann

$$A^*\omega \;=\; \det(A)\,\omega \qquad , \qquad \omega \in \Lambda_N(V)$$

Beweis: Da $\omega = b^1 \wedge \dots \wedge b^N$ bis auf Konstante

$$A^*\omega(v_1, \dots, v_N) \;=\; \omega(Av_1, \dots, Av_N) \;=\; \det \begin{pmatrix} b^1(Av_1) & \cdots & b^1(Av_N) \\ \vdots & & \vdots \\ b^N(Av_1) & \cdots & b^N(Av_N) \end{pmatrix}$$

$$= \det\big((b_1, \dots, b_N)^*\, A\,(v_1, \dots, v_N)\big)$$

$$= \det(A)\,\det\big((b_1, \dots, b_N)^*(v_1, \dots, v_N)\big) \;=\; \det(A)\,\omega(v_1, \dots, v_N) \qquad \square$$

9 Mannigfaltigkeiten

Hier Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raumes

Hierfür längere Wiederholung von Konzepten aus Ana 2: mehrdimensionale Ableitungen

Da Ableitung = Linearisierung, auch lineare Abbildungen

Sätze der lokalen Umkehrbarkeit und für implizite Funktionen

Seien $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Index an der Norm wird unterdrückt (aus Zusammenhang meist klar)

Definition 9.1 (Erinnerung)

Abbildung $T : V \to W$ heißt $\mathbb{K}$-linear oder $\mathbb{K}$-linearer Operator

$\iff \forall\ v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $T(v + \lambda w) = T(v) + \lambda T(w)$

Notation: $\mathcal{L}(V, W)$ = Menge linearer Abbildungen von V nach W

Zudem $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$

Satz 9.2

Für eine lineare Abbildung $T : (V, \|.\|) \to (W, \|.\|)$ *sind äquivalent*

(i) T *stetig in* 0

(ii) T *stetig*

(iii) T *gleichmäßig stetig*

(iv) T *beschränkt, d.h.* $\exists\, L > 0$ *mit* $\|Tv\| \leqslant L\|v\| \; \forall\, v \in V$

Definition 9.3

Für stetiges $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ist Operatornorm definiert als

$$\|T\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|$$

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (iv) Gegenannahme: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ v_n \in V$ mit $\|Tv_n\| > n\|v_n\|$

Setze $w_n = \frac{v_n}{n\|v_n\|}$. Dann $\|w_n\| = \frac{1}{n}$ und $\lim_{n\to\infty} w_n = 0 \in V$

Aber $\|Tw_n\| = \frac{\|Tv_n\|}{n\|v_n\|} > 1$, d.h. Tw_n konvergiert **nicht** gegen $0 \in W$

Also wäre T unstetig bei 0 $\lightning$

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Nach Linearität gilt

$$\|Tv - Tw\| \ = \ \|T(v - w)\| \ \leqslant \ L\|v - w\|$$

Somit T global Lipshitz-stetig mit Lipshitz-Konstante L

Insbesondere also ist T gleichmäßig stetig.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) klar $\square$

Satz 9.4

Seien $(V, \|.\|)$ *und* $(W, \|.\|)$ *normierte Vektorräume*
Definiere Menge der linearen und beschränkten Operatoren:

$$\mathcal{B}(V, W) \;=\; \{T \in \mathcal{L}(V, W) \mid \|T\| < \infty\}$$

$(\mathcal{B}(V, W), \|.\|)$ *ist ein normierter Vektorraum, wobei*
$\|.\| : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ *Opertornorm und* $(T + \lambda S)(v) = Tv + \lambda Sv$

Beweis: Wenn T und S linear sind, dann auch $T + \lambda S$. Zudem

$$\|(T + \lambda S)v\| \;\leqslant\; \|Tv\| + |\lambda|\|Sv\| \;\leqslant\; (\|T\| + |\lambda|\|S\|)\|v\|$$

so dass $T + \lambda S \in \mathcal{B}(V, W)$. Insbesondere also

$$\|T + S\| \;\leqslant\; \|T\| + \|S\| \qquad \|\lambda T\| \;=\; |\lambda|\|T\|$$

Außerdem $\|T\| = 0 \iff T = 0$. Also $\|\,.\,\|$ Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$ □

Definition 9.5 (Vergleiche Definition 4.34)

Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum

Satz 9.6

$(V, \|\,.\,\|)$ *normierter Raum und* $(W, \|\,.\,\|)$ *Banachraum*
$\Longrightarrow$ $(\mathcal{B}(V, W), \|\,.\,\|)$ *Banachraum*

Beweis: Nach Satz 9.4 bleibt noch die Vollständigkeit zu zeigen

Sei also $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(V, W)$

Für jedes $v \in V$ ist dann

$$\|T_n v - T_m v\| \;=\; \|(T_n - T_m)v\| \;\leqslant\; \|T_n - T_m\|\|v\|$$

d.h. $(T_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in W

Nach Vollständigkeit von W wird $T : V \to W$ definiert durch

$$Tv \;=\; \lim_{n\to\infty} T_n v$$

Zu zeigen: $T \in \mathcal{B}(v, w)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen T

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, N$ mit $\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall\, n, m \geqslant N$
Zudem: $\forall\, v \in V \;\exists\, m \geqslant N$ mit $\|Tv - T_m v\| < \frac{\varepsilon}{2}\|v\|$
Weiter

$$\|(T - T_n)v\| \;\leqslant\; \|(T - T_m)v\| \;+\; \|(T_m - T_n)v\| \;\leqslant\; \left(\tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\|v\| \;=\; \varepsilon\,\|v\|$$

$\implies\;\; \|T - T_n\| \leqslant \varepsilon \;\forall\, n \geqslant N$
$\implies\;\; (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen T. Weiter, weil T_n linear,

$$\begin{aligned}
&\|T(v + \lambda w) - Tv - \lambda Tw\| \\
&\;= \;\|(T - T_n)(v + \lambda w) - (T - T_n)v - \lambda(T - T_n)w\| \\
&\;\leqslant\; \|T - T_n\|(\|v + \lambda w\| + \|v\| + |\lambda|\|w\|) \;+\; 0 \;\;\xrightarrow{n\to\infty}\;\; 0
\end{aligned}$$

d.h. T linear. Zuletzt für n ausreichend groß,
$\|T\| \leqslant \|T - T_n\| + \|T_n\| \leqslant \varepsilon + \|T_n\| < \infty$, also T beschränkt $\square$

Satz 9.7

Seien U, V, W normierte Vektorräume und $T \in \mathcal{B}(U, V)$, $S \in \mathcal{B}(V, W)$
Dann ist $ST = S \circ T \in \mathcal{B}(U, W)$ und $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$

Beweis: Linearität von ST klar, und $\forall\, u \in U$ gilt

$$\|STu\| \leqslant \|S\|\|Tu\| \leqslant \|S\|\|T\|\|u\|$$

Somit

$$\|ST\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|STu\|}{\|u\|} \leqslant \|S\|\|T\|$$

□

Definition 9.8

V normierter Vektorraum und sei $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(V, V)$
$(\mathcal{B}(V), +, \cdot, \circ, \|\,.\,\|)$ ist eine normierte Algebra
Falls V vollständig, so auch $\mathcal{B}(V)$ vollständig (nach Satz 9.7)
und dann ist $\mathcal{B}(V)$ eine so genannte Banachalgebra

Definition 9.9

Linearer Operator $T : V \to W$ invertierbar $\iff$ $T : V \to W$ bijektiv
Dann existiert Inverses $T^{-1} : W \to V$

Bemerkung 9.10 (Tiefliegender Satz der inversen Abbildung)

Inverses eines beschränkten invertierbaren Operators ist beschränkt

Satz 9.11

V ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(V)$ Kontraktion, d.h. $\|T\| < 1$
$\implies \mathbf{1} - T$ invertierbar mit Inversen gegeben durch konvergente Neumann Reihe (bez. Operatornorm):

$$(\mathbf{1} - T)^{-1} \; = \; \sum_{n \geqslant 0} T^n$$

Zudem

$$\|(\mathbf{1} - T)^{-1}\| \; \leqslant \; \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Beweis: Nach Satz 9.7 gilt $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$. Somit

$$\|\sum_{n=0}^{N} T^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}$$

und $\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bez. Operatornorm
Nach Satz 9.7 konvergiert Reihe also gegen einen Operator $S \in \mathcal{B}(V)$
Es gilt:

$$(\mathbf{1}-T)S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = \mathbf{1}$$

und analog $S(\mathbf{1}-T) = \mathbf{1}$. Also $S = (\mathbf{1}-T)^{-1}$. $\square$

Satz 9.12

Seien V, W Banachräume und $T \in \mathcal{B}(V, W)$ invertierbar
Dann sind alle Elemente der offenen Kugel um T mit Radius $r = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$

$$B_r(T) \;=\; \{S \in \mathcal{B}(V, W) \mid \|T - S\| < r\}$$

invertierbar. Zudem gilt für $S \in B_r(T)$

$$\|S^{-1}\| \;\leqslant\; \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}$$

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \;\leqslant\; \frac{\|T^{-1}\|^2\|T - S\|}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}$$

Bemerkung 9.13

Sprachgebrauch: Invertierbarkeit ist eine offene Bedingung

Beweis: Da $S = T - (T - S) = T(\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))$ und

$$\|T^{-1}(T - S)\| \leqslant \|T^{-1}\|\|T - S\| < 1 \qquad \text{für } S \in B_{\frac{1}{\|T^{-1}\|}}(T)$$

folgt konvergente Neumann-Reihe (Satz 9.11)

$$(\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T - S))^n \in \mathcal{B}(V)$$

und

$$\|\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}$$

$\Longrightarrow S^{-1} = (\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1} T^{-1}$ existiert und Schranke an $\|S^{-1}\|$

Weiter

$$\begin{aligned} S^{-1} - T^{-1} &= \left((\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1} - \mathbf{1}\right) T^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - (\mathbf{1} - T^{-1}(T - S)))(\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1} T^{-1} \\ &= T^{-1}(T - S)(\mathbf{1} - T^{-1}(T - S))^{-1} T^{-1} \end{aligned}$$

so dass $\|S^{-1} - T^{-1}\| \leqslant \|T^{-1}\|\|T - S\| \frac{1}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|} \|T^{-1}\|$ □

Definition 9.14

V, W normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$, z.B. $V = \mathbb{R}^N$ und $W = \mathbb{R}^M$

Sei $D \subset V$ offene Teilmenge und $x_0 \in D$

Abbildung $f : D \to W$ heißt (Fréchet) differenzierbar in Punkt x_0

$\iff \exists\ T \in \mathcal{B}(V, W)$, so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \;=\; 0$$

$\iff \exists\ T \in \mathcal{B}(V, W)$, so dass $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ mit

$$\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\| \;<\; \varepsilon\|x - x_0\| \qquad \forall\ x \neq x_0 \ \text{ mit } \ \|x - x_0\| < \delta$$

Dann heißt T Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet

Alternative Notationen: $\partial f(x_0)$, $Df(x_0)$, $df(x_0)$, $\nabla f(x_0)$ ...

Bemerkung 9.15

1. Im Fall $V = \mathbb{R}^N$ und $W = \mathbb{R}^M$ ist $f'(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ linear, also gegeben durch Matrix aus $\mathrm{Mat}(M \times N, \mathbb{R})$
2. Im Fall $V = W = \mathbb{R}$ stimmt die Definition mit Ana 1 überein
   In der Tat: lineares $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Multiplikation mit reeller Zahl, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.
3. Definition 9.14 überträgt sich auch auf komplexe Vektorräume, wenn $\mathcal{B}(V, W) = \{\text{komplex lineare Abbildungen}\}$
   Differenzierbare Funktionen heißen dann holomorph
   Für $V = W = \mathbb{C}$ (vgl. Funktionentheorie) ist $f'(z_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$

Lemma 9.16

Wenn Ableitung existiert, dann ist sie eindeutig

Beweis:

Seien T, T' zwei Ableitungen

Für alle $\varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ (für T, T' gleichzeitig gewählt), so dass

$\forall \; x \neq x_0, \; \|x - x_0\| < \delta$ gilt

$$\frac{\|(T - T')(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leqslant \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|f(x) - f(x_0) - T'(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

Beispiel 9.17

(i) $f = w$ konstant $\Longrightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall\, x_0 \in D$

(ii) $f : V \to V,\; f = \mathrm{id}_V \;\Longrightarrow\; f'(x_0) = \mathrm{id}_V$

(iii) $f : V \to W$ linear, d.h. $f \in \mathcal{B}(V, W)$. Dann $f'(x_0) = f \;\; \forall\, x_0 \in V$, weil

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{0}{\|x - x_0\|} = 0$$

Lemma 9.18

f differenzierbar in $x_0 \Longrightarrow f$ stetig in x_0

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für $\|x - x_0\| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0)\| &\leqslant \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\| \\
&\leqslant \varepsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)\|\|x - x_0\|
\end{aligned}$$

Also ist f stetig in x_0 $\square$

Satz 9.19 (Linearität, Produktregel, Kettenregel)

V, W, U normierte Vektorräume und $D \subset V$ offen

$f, g : D \to W$ differenzierbar in $x_0 \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) *$f + \lambda g : D \to W$ differenzierbar in x_0 und*

$$(f + \lambda g)'(x_0) \;=\; f'(x_0) + \lambda g'(x_0)$$

(ii) *Sei zudem W normierte Algebra (z.B. $W = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$)*
Dann ist $f \cdot g : D \to W$ in x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(iii) *$h : f(D) \subset W \to U$ differenzierbar in $f(x_0)$*
Dann ist $h \circ f$ differenzierbar in x_0 und

$$(h \circ f)'(x_0) \;=\; h'(f(x_0))f'(x_0)$$

Beweis:

(i) Nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\|(f+\lambda g)(x)-(f+\lambda g)(x_0)-(f'(x_0)+\lambda g'(x_0))(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\
&= \frac{\|f(x)+\lambda g(x)-f(x_0)-\lambda g(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\lambda g'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\
&\leqslant \frac{1}{\|x-x_0\|}\Big[\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\| \\
&\qquad + |\lambda|\,\|g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)\|\Big] \\
&\xrightarrow{x\to x_0} 0
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\
&\leqslant \frac{1}{\|x-x_0\|}\Big[\|f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - f'(x_0)(x-x_0)g(x)\| \\
&\qquad + \|f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)(x-x_0)\| \\
&\qquad + \|f'(x_0)(x-x_0)(g(x)-g(x_0))\|\Big] \\
&\leqslant \frac{1}{\|x-x_0\|}\Big[\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\|\|g(x)\| \\
&\qquad + \|f(x_0)\|\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x-x_0)\| \\
&\qquad + \|f'(x_0)\|\|x-x_0\|\|g(x)-g(x_0)\|\Big] \\
&\xrightarrow{x\to x_0} 0
\end{aligned}
$$

weil g stetig in x_0, siehe Lemma 9.18

Hierbei wurde Operatorungleichung $\|TS\| \leqslant \|T\|\|S\|$ verwandt

(iii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|x-x_0\|}\,\|h\circ f(x)-h\circ f(x_0)-h'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)\| \\
&\leqslant \frac{\|h(f(x))-h(f(x_0))-h'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}\,\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|f(x)-f(x_0)\|} \\
&\quad + \frac{\|h'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|} \\
&\leqslant \frac{\|h(f(x))-h(f(x_0))-h'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|}\cdot \\
&\quad \cdot\left(\frac{\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\frac{\|f'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\right) \\
&\quad + \frac{\|h'(f(x_0))\|\cdot\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\
&\xrightarrow{x\to x_0} 0\cdot C+C\cdot 0 \;=\; 0
\end{aligned}
$$

□

Satz 9.20 (Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen)

V normierter Vektorraum und $D \subset V$ offen

$f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf ganz D

Ferner $x, y \in D$, so dass Intervall $[x, y] = \{(1-t)\,x + ty \mid t \in [0,1]\}$ in D

$\Longrightarrow \exists\, t \in (0,1)$ mit

$$f(y) \;=\; f(x) \;+\; f'((1-t)\,x + ty)(y-x)$$

Beweis: Definiere $\gamma : [0,1] \to V$ durch $\gamma(t) = (1-t)x + ty$

Dann ist $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(0,1)$

Nach eindimensionalem Mittelwertsatz $f \circ \gamma(1) = f \circ \gamma(0) + (f \circ \gamma)'(t)$

Nach Kettenregel gilt $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(\gamma(t))(y-x)$ $\square$

Bemerkung 9.21

$f'(x_0) : V \to \mathbb{R}$ ist lineare und stetige Abbildung

Falls $V = \mathbb{R}^N$ ist sie durch Skalarprodukt mit Vektor gegeben, der mit $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet wird, d.h.

$$f'(x_0)(x - y) \; = \; \langle \nabla f(x_0) \mid x - y \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

Bemerkung 9.22

Für Funktionen, die nicht reellwertig sind, gilt der MWS nicht!

Dies zeigt schon folgendes zweidimensionale Beispiel:

$$f : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad f(x) = e^{2\pi ix}$$

$$f(0) = f(1) = 1 \qquad f'(x) = 2\pi i e^{2\pi ix} \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Aber $f(1) \neq f(0) + f'(t) \cdot (1 - 0) \quad \forall\, t \in [0,1]$

In vielen Situationen ist folgender Satz ein guter Ersatz:

Satz 9.23 (Schrankensatz)

$f : D \to W$ differenzierbar auf offenem $D \subset V$ in normiertem Vektorr. Ferner $x, y \in D$, so dass $[x, y] \subset D$. Setze

$$L = \sup_{t\in[0,1]} \|f'((1-t)x+ty)\| = \sup_{x'\in[x,y]} \|f'(x')\|$$

Dann

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x-y\|$$

Beweis: Gegenannahme: $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \geqslant (L+\varepsilon)\|x-y\|$

Unterteile $[x, y] = [x, x_0] \cup [x_0, y]$ mit Mittelpunkt $x_0 = \frac{x+y}{2}$. Nun:

$\|f(x) - f(x_0)\| \geqslant (L+\varepsilon)\|x-x_0\|$ oder $\|f(x_0) - f(y)\| \geqslant (L+\varepsilon)\|x_0-y\|$

weil sonst Widerspruch zur Gegenannahme

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leqslant \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y)\| \\ &< (L+\varepsilon)(\|x-x_0\| + \|x_0-y\|) \\ &= (L+\varepsilon)\|x-y\| \qquad \text{(weil } x, x_0, y \text{ auf Gerade liegen)} \end{aligned}$$

Sei $[x_1, y_1]$ Intervall mit $\geqslant$ (entweder $[x, x_0]$ oder $[x_0, y]$)
Iteration dieser Konstruktion gibt Folge $[x_n, y_n] \subset [x_{n-1}, y_{n-1}]$ mit

$$\|x_n - y_n\| = \frac{\|x - y\|}{2^n} \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant (L + \varepsilon)\|x_n - y_n\|$$

Nun existiert $x' = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$
Wiederum Ungleichung $\geqslant$ auf einem Teil von $[x_n, y_n] = [x_n, x'] \cup [x', y_n]$
Ohne Einschränkung für unendlich viele x_n. Dann

$$\begin{aligned}
\|f'(x')\| &\geqslant \frac{\|f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \\
&\geqslant \frac{\|f(x_n) - f(x')\|}{\|x_n - x'\|} - \frac{\|f(x_n) - f(x') - f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \\
&\geqslant (L + \varepsilon) - \frac{\|f(x_n) - f(x') - f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \xrightarrow{n\to\infty} (L + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Widerspruch zur Voraussetzung $\lightning$ $\square$

Erinnerung:

$V_1 \times V_2$ kartesisches Produkt zweier normierter Vektorräume V_1, V_2

Vektorraumstruktur: $(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2) = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)$

(Eine) Norm: $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$

Definition 9.24 (Partielle Ableitungen)

$D \subset V_1 \times V_2$ offen und $f : D \to W$

f heißt partiell differenzierbar in $(x_1, x_2) \in D$

$\Longleftrightarrow x \in V_1 \mapsto f(x, x_2)$ differenzierbar in x_1 und

$\quad x \in V_2 \mapsto f(x_1, x)$ differenzierbar in x_2

Zugehörige lineare Abbildungen $\partial_{x_1} f(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(V_1, W)$ und $\partial_{x_2} f(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(V_2, W)$ heißen partielle Ableitungen

Gilt dies allen Punkten von D, heißt f partiell differenzierbar auf D

Analog $\partial_{x_n} f$ für $f : D \subset V_1 \times \ldots \times V_N \to W$ und $n = 1, \ldots, N$

Wichtigster Spezialfall:

$V = \mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^M = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit Komponentenfunktion $f_\ell : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Für $n = 1, \ldots, N$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ ist $\partial_{x_n} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ lineare Abbildung

Diese partiellen Ableitungen existieren

$\iff$ alle $f_\ell : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nach x_n eindimensional differenzierbar

$\partial_{x_n} f_\ell(x)$ Ableitung von $y \in \mathbb{R} \mapsto f_\ell(\ldots, x_{n-1}, y, x_{n+1}, \ldots) \in \mathbb{R}$ bei $y = x_n$

Lineare Abbildung $\partial_{x_n} f(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M) \cong \mathbb{R}^M$ ist ein Vektor

$$\partial_{x_n} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_n} f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f_M(x) \end{pmatrix}$$

Definition 9.25 (Jacobi Matrix)

$f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ partiell differenzierbar

Jacobi Matrix $\partial f : D \to \mathrm{Mat}(M \times N, \mathbb{R})$ ist definiert als

$$\partial f = (\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_N} f) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_N} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_M & \cdots & \partial_{x_N} f_M \end{pmatrix}$$

Im Fall $M = 1$ ist $\partial f(x)$ Zeilenvektor $=$ Vektor des Dualraums

Dieser Vektor $\nabla f(x) = (\partial f(x))^T \in \mathbb{R}^N$ wird der Gradient genannt. Dann

$$f'(x)v = \langle \nabla f(x) | v \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

$\nabla f(x)$ ist dann ein Vektorfeld im Sinne folgender Definition:

Definition 9.26 (Vektorfeld)

Ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^N$ ist eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}^N$

g heißt Gradientenfeld $\iff \exists\ f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $g = \nabla f(x)$

Weitere Begriffsbildungen aus partiellen Ableitungen:

Zu partiell differenzierbarem Vektorfeld $g : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist Divergenz

$$\operatorname{div}(g) = \nabla \cdot g : D \to \mathbb{R} \qquad \operatorname{div}(g) = \partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \ldots + \partial_{x_N} g_N$$

Falls $N = 3$ ist Rotation des Vektorfeldes ein neues Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(g) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2 \\ \partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3 \\ \partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 \end{pmatrix}$$

Zuletzt sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar,
d.h. $\nabla f : D \to \mathbb{R}^N$ sei auch partiell differenzierbar
Dann ist Laplaceoperator Δ angewandt auf f definiert durch

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \nabla \cdot \nabla f = \partial_{x_1}^2 f + \ldots + \partial_{x_N}^2 f \; : \; D \to \mathbb{R}$$

Satz 9.27 (Darstellung der Ableitung durch partielle Ableitung)

$f : D \subset V_1 \times V_2 \to W$ differenzierbar in $x = (x_1, x_2) \in D$
$\Longrightarrow f$ partiell differenzierbar in x und für $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$

$$f'(x)(v_1, v_2) \;=\; \partial_{x_1} f(x) v_1 \;+\; \partial_{x_2} f(x) v_2 \;=\; (\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x)) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Lemma 9.28

Abbildung $\varphi : \mathcal{B}(V_1, W) \times \mathcal{B}(V_2, W) \to \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$ gegeben durch

$$\varphi(T_1, T_2)(x_1, x_2) \;=\; T_1 x_1 + T_2 x_2$$

ist linear, stetig und bijektiv mit stetigem Inversen φ^{-1}

Hierbei ist $\mathcal{B}(V_1, W) \times \mathcal{B}(V_2, W)$ wieder ein kartesisches Produkt versehen mit Norm $\|(T_1, T_2)\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

Beweis: Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = ((\varphi^{-1})_1, (\varphi^{-1})_2)$ ist

$$(\varphi^{-1})_1(T)(x_1) = T(x_1, 0) \qquad (\varphi^{-1})_2(T)(x_2) = T(0, x_2)$$

wobei $T \in \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$

Linearität von φ offensichtlich, Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(T_1, T_2)\| &= \sup_{\|(x_1,x_2)\|=1} \|\varphi(T_1, T_2)(x_1, x_2)\| \\ &= \sup_{\|x_1\|+\|x_2\|=1} \|T_1 x_1 + T_2 x_2\| \\ &\leqslant \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

und Stetigkeit von φ^{-1} aus

$$\begin{aligned} \|\varphi^{-1}(T)\| &= \|(\varphi^{-1})_1(T)\| + \|(\varphi^{-1})_2(T)\| \\ &= \sup_{\|x_1\|=1} \|T(x_1, 0)\| + \sup_{\|x_2\|=1} \|T(0, x_2)\| \\ &\leqslant \|T\| + \|T\| = 2\|T\| \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 9.27:

Sei $T = f'(x) \in \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$

Setze $T_1 = (\varphi^{-1})_1(T) \in \mathcal{B}(V_1, W)$ und $T_2 = (\varphi^{-1})_2(T) \in \mathcal{B}(V_2, W)$

Nach Lemma 9.28 sind T_1 und T_2 linear und stetig. Außerdem

$$\begin{aligned} &\frac{\|f(y, x_2) - f(x_1, x_2) - T_1(y - x_1)\|}{\|y - x_1\|} \\ &\quad = \frac{\|f(y, x_2) - f(x_1, x_2) - T(y - x_1, 0)\|}{\|y - x_1\|} \\ &\quad = \frac{\|f(y, x_2) - f(x_1, x_2) - T((y, x_2) - (x_1, x_2))\|}{\|(y, x_2) - (x_1, x_2)\|} \\ &\quad \xrightarrow{y \to x_1} 0 \end{aligned}$$

Letzteres nach Differenzierbarkeit von f in (x_1, x_2)

Somit gilt $\partial_{x_1} f(x) = T_1$

Analog erhält man $\partial_{x_2} f(x) = T_2$ $\square$

Beispiel 9.29 (Umkehrung von Satz 9.27 gilt nicht)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

f besitzt partielle Ableitungen (nachrechnen!)

$$\partial_x f(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

Aber

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;=\; \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \;=\; \sin(2\varphi)$$

so dass $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ nicht existiert

f also nicht stetig ist bei 0 und somit auch nicht differenzierbar

Definition 9.30

V, W normierte Vektorräume und $D \subset V$ offen

$f : D \to W$ stetig differenzierbar auf D

$\iff \forall\, x_0 \in D$ ist f differenzierbar in x_0

und Abbildung $x \in D \mapsto f'(x) \in \mathcal{B}(V, W)$ ist stetig

Für stetig differenzierbare Funktionen gilt Umkehrung von Satz 9.27:

Satz 9.31

$f : D \subset V_1 \times V_2 \to W$ partiell differenzierbar. Äquivalent sind:

(i) $\partial_{x_1} f : D \to \mathcal{B}(V_1, W)$ *und* $\partial_{x_2} f : D \to \mathcal{B}(V_2, W)$ *stetig*

(ii) *f auf D stetig differenzierbar*

Dann gilt $f' = \varphi(\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f)$, wobei φ die Abbildung aus Lemma 9.28 ist

Analoges gilt für Abbildungen $f : D \subset V_1 \times \ldots \times V_N \to W$

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i) Da $f' : D \subset V_1 \times V_2 \to \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$ stetig und

$$\partial_{x_j} f \;=\; (\varphi^{-1})_j \circ f' : D \to \mathcal{B}(V_j, W) \qquad j = 1, 2$$

folgt nach Lemma 9.28 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Wir zeigen, dass für $(x_1, x_2) \in D$ gilt

$$f'(x_1, x_2)(y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \partial_{x_1} f(x_1, x_2)(y_1 - x_1) + \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2)$$

Die Stetigkeit folgt dann wieder aus Lemma 9.28. Tatsächlich $\forall\, \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\|f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x_1, x_2)(y_1 - x_1) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2)\| \\
\leqslant \|f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) - \partial_{x_1} f(x_1, y_2)(y_1 - x_1)\| \\
+ \|[\partial_{x_1} f(x_1, y_2) - \partial_{x_1} f(x_1, x_2)](y_1 - x_1)\| \\
+ \|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2)\| \\
\leqslant \varepsilon \|y_1 - x_1\| + \varepsilon \|y_1 - x_1\| + \varepsilon \|y_2 - x_2\|
\end{aligned}$$

für $\|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| < \delta$, nach Def. & Stetigkeit partieller Ableitungen

Da ε beliebig klein, ist die Ableitung berechnet $\square$

Bemerkung 9.32

Wenn $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ differenzierbar, so ist $f'(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ durch Jacobi Matrix $\partial f = (\partial_{x_i} f_j)_{j=1,\dots,M,\ i=1,\dots,N}$ gegeben (Satz 9.27), d.h. für $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^N$

$$f'(x)v \;=\; \partial f\, v \;=\; \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} f_1 v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} f_M v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1 \mid v \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ \vdots \\ \langle \nabla f_M \mid v \rangle_{\mathbb{R}^N} \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt im Fall $M = 1$, d.h. $f : D = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dass

$$f'(x)v \;=\; \langle \nabla f(x) | v \rangle_{\mathbb{R}^N} \qquad v \in \mathbb{R}^N$$

Umgekehrt (Satz 9.31), wenn Jacobi Matrix existiert und *stetige* Einträge hat, so stellt sie die Ableitung dar.

Beispiel 9.33 (Differenzierbare Abbildung, die nicht stetig partiell differenzierbar ist)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} 2xy \sin\left(\frac{1}{x}\right) - y\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Letzteres, weil $\forall\ y \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(\varepsilon, y) - f(0,y) - 0 \cdot (\varepsilon - 0)}{\varepsilon} = \varepsilon y \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Außerdem

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Jetzt ist $\partial_y f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$, aber $\partial_x f$ ist unstetig auf $S = \{(0,y) \mid y \neq 0\}$

Beispiel (Fortsetzung)

Dennoch ist f differenzierbar!

f' nach Satz 9.27 dann durch partiellen Ableitungen gegeben

In der Tat gilt für $y \neq 0$ und $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \neq (0,0)$

$$\frac{|f(\varepsilon_x, y+\varepsilon_y) - f(0,y) - \partial_x f(0,y)\varepsilon_x - \partial_y f(0,y)\varepsilon_y|}{\|(\varepsilon_x,\varepsilon_y)\|}$$

$$= \frac{|f(\varepsilon_x, y+\varepsilon_y)|}{|\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|} = \frac{1}{|\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|} \begin{cases} \left|\varepsilon_x^2 (y+\varepsilon_y) \sin\left(\frac{1}{\varepsilon_x}\right)\right| & \varepsilon_x \neq 0 \\ 0 & \varepsilon_x = 0 \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} |\varepsilon_x||y+\varepsilon_y| \left|\sin\left(\frac{1}{\varepsilon_x}\right)\right| & \varepsilon_x \neq 0 \\ 0 & \varepsilon_x = 0 \end{cases} \xrightarrow{(\varepsilon_x,\varepsilon_y)\to 0} 0$$

Definition 9.34 (Zweite Ableitung)

V, W normierte Vektorräume und $D \subset V$

$f : D \to W$ zweimal in $x \in D$ differenzierbar

$\iff f$ differenzierbar auf D und

$\quad f' : D \to \mathcal{B}(V, W)$ differenzierbar in x

(wobei Vektorraum $\mathcal{B}(V, W)$ mit der Operatornorm versehen ist)

Zweite Ableitung ist dann $f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$

Satz 9.35 (Satz von Schwarz)

f zweimal in $x \in D$ differenzierbar

$\Longrightarrow f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ *ist symmetrisch, d.h.* $\forall\ u, v \in V$

$$(f''(x)u)v \;=\; (f''(x)v)u$$

Beweis: Für $u, v \in V$ ausreichend klein, definiere $g : [0,1] \to W$ durch

$$g(t) = f(x + tu + v) - f(x + tu)$$

Nach der Kettenregel ist g differenzierbar und

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x + tu + v)u - f'(x + tu)u \\ &= (f'(x + tu + v) - f'(x))u - (f'(x + tu) - f'(x))u \end{aligned}$$

Weil f' differenzierbar ist, existiert $\forall\, \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f'(x + tu + v) - f'(x) - f''(x)(tu + v)\| \leqslant \varepsilon\|tu + v\|$$

und

$$\|f'(x + tu) - f'(x) - f''(x)(tu)\| \leqslant \varepsilon\,\|tu\|$$

für $\|tu + v\| < \delta$ und $\|tu\| < \delta$. Somit

$$\begin{aligned} \|g'(t) - (f''(x)v)u\| &\leqslant \|(f'(x + tu + v) - f'(x) - f''(x)(tu + v))u\| \\ &\quad + \|(f'(x + tu) - f'(x) - f''(x)(tu))u\| \\ &\leqslant \varepsilon\|tu + v\|\|u\| + \varepsilon\|tu\|\|u\| \leqslant \varepsilon\|u\|(2\|u\| + \|v\|) \end{aligned}$$

Nun wenden wir Schrankensatz auf $t \in [0,1] \mapsto g(t) - t(f''(x)v)u$ an:

$$\|g(1)-(f''(x)v)u-g(0)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \|g'(t)-(f''(x)v)u\| \leqslant \varepsilon\,\|u\|(2\|u\|+\|v\|)$$

Da

$$g(1) - g(0) = f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x)$$

symmetrisch in u und v ist, gilt ebenso

$$\|g(1) - g(0) - (f''(x)u)v\| \leqslant \varepsilon\|v\|(2\|v\| + \|u\|)$$

Somit folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\|(f''(x)v)u - (f''(x)u)v\| \leqslant \varepsilon\,2(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|\|v\|)$$

Da ε beliebig klein, folgt $(f''(x)v)u = (f''(x)u)v$ zunächst für kleine u, v
Wegen der Linearität folgt es dann aber für alle u, v $\square$

Bemerkung 9.36

Zweite Ableitung $T = f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ kann als bilineare Abbildung $\widetilde{T} : V \times V \to W$ aufgefasst werden, indem man definiert:

$$\widetilde{T}(v, w) = T(v)w \qquad , \qquad v, w \in V$$

In der Tat, gilt dann

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(v + \lambda v', w) &= \widetilde{T}(v, w) + \lambda \widetilde{T}(v', w) \\ \widetilde{T}(v, w + \lambda w') &= \widetilde{T}(v, w) + \lambda \widetilde{T}(v, w') \end{aligned}$$

Satz von Schwarz besagt, dass $\widetilde{T}$ symmetrisch ist, d.h.

$$\widetilde{T}(v, w) = \widetilde{T}(w, v)$$

Bezeichnung $\mathcal{B}(V, V; W) \cong \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ mit Norm

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} \|\widetilde{T}(v, w)\|$$

Meist: T und $\widetilde{T}$ identifiziert, d.h. auch $f''(x) = \widetilde{f''(x)} \in \mathcal{B}(V, V; W)$

Multilineare Abbildungen: (vergleiche Definition 8.4)

Analog wird

$$T \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, \ldots, \mathcal{B}(V, W)) \ldots)$$

mit k Argumenten aus V mit k-multilinearer Abbildung identifiziert

$$\widetilde{T} \in \mathcal{B}(V, \ldots, V; W) \;=\; \mathcal{B}(V^{\times k}; W)$$

Diese erfüllt dann für $\ell = 1, \ldots, k$:

$$\widetilde{T}(v_1, \ldots, v_\ell + \lambda w_\ell, \ldots, v_k) \;=\; \widetilde{T}(v_1, \ldots, v_k) + \lambda \widetilde{T}(v_1, \ldots, w_\ell, \ldots, v_k)$$

Die Norm auf den k-linearen Abbildungen ist wie oben definiert:

$$\|\widetilde{T}\| \;=\; \sup_{\|v_1\|=1} \cdots \sup_{\|v_k\|=1} \|\widetilde{T}(v_1, \ldots, v_k)\|$$

Dies ist wieder gleich der Norm $\|T\|$

Zuletzt: auch Symmetrie von $\widetilde{T}$ analog definiert

(ähnlich wie alternierend, nur ohne Vorzeichen)

Definition 9.37 (Höhere Ableitungen)

V, W Vektorräume und $D \subset V$ offen

Höhere Ableitungen von $f : D \to W$ sind iterativ definiert durch:

f ist k-mal auf D differenzierbar mit k-ten Ableitungen gegeben durch k-lineare Abbildungen $f^{(k)} : D \to \mathcal{B}(V, \dots, V; W) = \mathcal{B}(V^{\times k}; W)$

$\iff$ f $(k-1)$-mal differenzierbar und $f^{(k-1)} : D \to \mathcal{B}(V^{\times k-1}; W)$ ist differenzierbar mit Ableitung $\left(f^{(k-1)}\right)' = f^{(k)}$

Falls $f^{(k)} : D \to \mathcal{B}(V^{\times k}; W)$ stetig, heißt f k-mal stetig differenzierbar

Die Menge dieser Funktionen wird mit $C^k(D, W)$ bezeichnet

Korollar 9.38

(i) $f \in C^k(D, W) \iff$ *alle k-ten partiellen Ableitungen sind stetig*

(ii) *Die k-multilineare Abbildung $f^{(k)}(x)$ ist symmetrisch, d.h. für jede Permutation $\sigma \in S_k$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt*

$$f^{(k)}(x)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = f^{(k)}(x)(v_1, \ldots, v_k)$$

Beweis: (i) und (ii) folgen aus der iterativen Anwendung von Satz 9.31 und Satz 9.35 respektive. □

Satz 9.39 (Satz von Taylor)

V, W normierte Vektorräume und $D \subset V$ offen

Zudem $x \in D$ und f k-mal differenzierbar auf D

Dann gilt für $v \in V$ mit $x + v \in D$ die Taylor Formel

$$f(x+v) \;=\; \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) v^n \;+\; o(\|v\|^k) \qquad \text{für } \|v\| \to 0$$

Erläuterung: Hierbei ist $f^{(n)}(x)v^n = f^{(n)}(x)(v, \ldots, v)$

Erinnerung: $g(v) = o(\|v\|^k)$ für $\|v\| \to 0$ heißt $\lim_{v\to 0} \frac{\|g(v)\|}{\|v\|^k} = 0$

Beweis: Durch Induktion über k

Für $k = 1$ ist die Aussage genau die Definition der Ableitung

Für den Schritt von $k - 1$ nach k betrachte den Rest

$$g(v) \;=\; f(x+v) \;-\; \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) v^n$$

Um die Ableitung zu berechnen, verwende

Behauptung: Zu $T \in \mathcal{B}(V^{\times n}; W)$ n-multilinear und symmetrisch, sei

$$h : V \to W \qquad h(v) \;=\; Tv^n$$

$$\implies \quad h'(v) = nTv^{n-1} \in \mathcal{B}(V, W)$$

Begründung: Für $\varepsilon \in V$ gilt nach Multilinearität und Symmetrie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\varepsilon\|}\|h(v+\varepsilon) - h(v) - h'(v)\varepsilon\| \;&=\; \frac{1}{\|\varepsilon\|}\|T(v+\varepsilon)^n - Tv^n - nT(v^{n-1}, \varepsilon)\| \\ &\leqslant\; \frac{1}{\|\varepsilon\|}\|T\| \sum_{\ell=2}^{n} \binom{n}{\ell} \|\varepsilon\|^{\ell} \;\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\; 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung

Also:

$$g'(v) \;=\; f'(x+v) \;-\; \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x) v^{n-1}$$

Jetzt gilt nach dem Schrankensatz

$$\begin{aligned} \|g(v)\| &= \|g(v) - g(0)\| \\ &\leqslant \|v\| \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|g'(tv)\| \\ &\leqslant \|v\| \; o(\|v\|^{k-1}) \end{aligned}$$

Letzteres nach Induktionsannahme angewandt auf die $(k-1)$-mal differenzierbare Funktion $t \in [0,1] \mapsto g'(tv) \in W$

Da $\|v\| o(\|v\|^{k-1}) \;=\; o(\|v\|^k)$, folgt der Satz $\square$

Nächstes Hauptziel:

Satz 9.40 (Lokale inverse Funktion bzw. lokale Umkehrbarkeit)

V, W Banachräume und $D \subset V$ offen

$f : D \to W$ stetig differenzierbar

Bei $x_0 \in D$ sei $f'(x_0) \in \mathcal{B}(V, W)$ invertierbar mit $f'(x_0)^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$

$\Longrightarrow$ $\exists$ offene Kugel $B_\delta(x_0) = \{y \in D \mid \|y - x_0\| < \delta\}$, so dass

$$f : B_\delta(x_0) \to f(B_\delta(x_0))$$

invertierbar ist mit inverser Abbildung $f^{-1} : f(B_{x_0}(x_0)) \to B_\delta(x_0)$, deren Ableitung stetig ist und gegeben durch

$$(f^{-1})'(y) \;=\; [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Falls $f \in C^k(D, W)$, so ist auch f^{-1} k-mal stetig differenzierbar

Bemerkung 9.41

1. Voraussetzung an nur einen Punkt, Aussage lokal
2. Seien $V = \mathbb{R}^N$ und $W = \mathbb{R}^M$

   $f'(x_0)$ invertierbar $\implies N = M$
3. $\dim(V) = \infty$ und $f'(x_0)$ invertierbar $\implies \dim(W) = \infty$
4. $\dim(W) = \infty$ und $f'(x_0)$ invertierbar $\implies \dim(V) = \infty$
5. Im Fall $V = W = \mathbb{R}$ ist sogar globale Aussage möglich (Ana I):

   $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in I \subset \mathbb{R} \implies f$ invertierbar auf I

   Dies ist im Höherdimensionalen nicht möglich
6. Wesentliches Beweiselement:

   Banachscher Fixpunktsatz (Satz 4.46)

Beispiel 9.42 (Notwendigkeit der C^1-Voraussetzung)

Voraussetzung stetiger Differenzierbarkeit kann nicht abgeschwächt werden zur Differenzierbarkeit: Die Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar und

$$f'(0) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\left(1 + x\sin\frac{1}{x}\right) \;=\; 1 \;>\; 0$$

Aber $f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, so dass f' nicht stetig

In der Tat hat f' positive und negative Werte in jeder Umgebung von 0 da $f''(x) = 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x}$ für $x = \frac{1}{2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$ und $f'(x) = 0$ für diese x, so dass Vorzeichen von f' hier wechselt

Also f nicht lokal monoton und somit nicht lokal umkehrbar bei 0

Beweis von Satz 9.40: Es reicht zu zeigen, dass Funktion

$$g \;:\; B_\delta(0) \subset V \to V \qquad , \qquad g(x) \;=\; f'(x_0)^{-1}\big(f(x_0+x) - f(x_0)\big)$$

für δ ausreichend klein invertierbar (dann auch f invertierbar). Nun:

$$g(0) \;=\; 0 \qquad , \qquad g'(0) \;=\; \mathbf{1}_V$$

Somit nur Fall:

$$W = V\,, \quad x_0 = 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f'(0) = \mathbf{1}_V$$

Da f stetig differenzierbar, $\exists\ \varepsilon > 0$ mit

$$\|f'(x) - \mathbf{1}_V\| \;\leqslant\; \tfrac{1}{2} \qquad \forall\ x \in \overline{B_\varepsilon(0)} \;=\; \{y \in V \mid \|y\| \leqslant \varepsilon\}$$

Für $y \in V$ betrachte die Funktion

$$F_y(x) \;=\; x + y - f(x) \qquad , \qquad x \in \overline{B_\varepsilon(0)}$$

Idee hierbei: eindeutiger Fixpunkt x von $F_y(x) = x$ löst $f(x) = y$

Schrankensatz für $F_y(x) = x + y - f(x)$ und $x, x' \in \overline{B_\varepsilon(0)}$:

$$\begin{aligned} \|F_y(x) - F_y(x')\| &= \|x - f(x) - (x' - f(x'))\| \\ &\leqslant \|x - x'\| \sup_{t\in[0,1]} \|\mathbf{1}_V - f'(tx' + (1-t)x)\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\|x - x'\| \end{aligned}$$

Also F_y Lipshitz-stetig mit Konstante $L \leqslant \frac{1}{2} < 1$. Spezialfall $x' = 0$:

$$\|F_y(x) - y\| = \|F_y(x) - F_y(0)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x\| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

d.h. $F_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \to \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)}$

Zudem $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)} \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ für $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$

$\implies F_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \to \overline{B_\varepsilon(0)}$ Lipshitz-stetig

$\overline{B_\varepsilon(0)}$ vollständig, weil abgeschlossen in vollständigem Raum V

$\implies$ Banachscher Fixpunktsatz kann auf F_y angewandt werden

$\Longrightarrow\ \forall\ y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}\ \ \exists$ eindeutiger Fixpunkt $x \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ von F_y:

$$x \;=\; F_y(x) \;=\; x + y - f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)$$

Für $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ hat Gleichung $y = f(x)$ also genau eine Lösung und

$$f\ :\ \{x \in B_\varepsilon(0) \mid f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\} \;=\; f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)) \longrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

ist also invertierbar

Da f stetig, ist $f^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\right)$ offen,

enthält somit eine offene Kugel $B_\delta(0)$, wie im Satz 9.40 behauptet

Verbleibt: f^{-1} auf $f(B_\delta(0)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ stetig differenzierbar

Hierfür folgender Zusatz zu Satz 9.12:

Satz 9.43 (vergleiche Satz 9.12)

Seien V, W Banachräume und $T \in \mathcal{B}(V, W)$ invertierbar
Dann sind alle Elemente der offenen Kugel um T mit Radius $r = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$

$$B_r(T) \;=\; \{S \in \mathcal{B}(V, W) \mid \|T - S\| < r\}$$

invertierbar
Definiere $\varphi : B_r(T) \subset \mathcal{B}(V, W) \to \mathcal{B}(W, V)$ durch $\varphi(S) = S^{-1}$
$\Longrightarrow$ *φ differenzierbar und $\varphi'(S)R = -S^{-1}RS^{-1}$ für $R \in \mathcal{B}(V, W)$*

Beweis: Erster Teil schon in Satz 9.12. Für letzte Aussage:

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(S+R) - \varphi(S) - \varphi'(S)R\| \\
&\quad = \; \|(S+R)^{-1} - S^{-1} + S^{-1}RS^{-1}\| \\
&\quad \leqslant \; \|(S+R)^{-1}\|\|S - (S+R) + (S+R)S^{-1}R\|\|S^{-1}\| \\
&\quad \leqslant \; \|(S+R)^{-1}\|\|S^{-1}\|^2\|R\|^2 \;=\; o(\|R\|)
\end{aligned}$$

□

Weiter im Beweis von Satz 9.40:

Zu zeigen: f^{-1} auf $f(B_\delta(0)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ stetig differenzierbar

Zunächst: $\|f'(x) - \mathbf{1}\| < \frac{1}{2}$ für $x \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$

Also $f'(x)$ invertierbar (Neumann Reihe)

Da $x \mapsto f'(x)$ stetig, ist $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \mapsto f'(x)^{-1} \in \mathcal{B}(V)$ stetig (Satz 9.43)

Außerdem: f^{-1} Lipshitz-stetig mit Lipshitz-Konstanten 2 auf $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$,

da für $x, x' \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ gilt, wegen Lipschitz-Konstante $\frac{1}{2}$ von F_0,

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|f(x) - f(x') - F_0(x) + F_0(x')\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(x')\| + \tfrac{1}{2}\|x - x'\| \\ \iff \|x - x'\| &\leqslant 2\,\|f(x) - f(x')\| \\ \iff \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| &\leqslant 2\,\|y - y'\| \end{aligned}$$

Somit auch Abbildung $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \mapsto (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$ stetig

Nun zeigen wir, dass $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$ Ableitung ist:

$$\begin{aligned}
&\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y)(y'-y)\| \\
&= \|x' - x - (f'(x))^{-1}(f(x') - f(x))\| \\
&\leqslant \|f'(x)^{-1}\| \|f'(x)(x'-x) - f(x') - f(x)\| \\
&\leqslant \|f'(x)^{-1}\| \, \eta \, \|x'-x\| \qquad (\eta = \eta(x) > 0 \text{ nach Def. von } f'(x)) \\
&\leqslant \|f'(x)^{-1}\| \, \eta \, 2 \, \|y'-y\| \qquad (\text{nach Lipshitz-Stetigkeit})
\end{aligned}$$

Zuletzt verbleibt Aussage über k-fache Differenzierbarkeit. Hierzu

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1} \qquad x = f^{-1}(y)$$

iterativ unter Verwendung von Satz 9.43 ableiten, z.B.

$$(f^{-1})''(y) = -(f'(x))^{-1} f''(x)(f^{-1})'(y)(f'(x))^{-1}$$

etc. $\square$

Beispiel 9.44

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (x^2 + xy + y^2 + x + y + 1, x + y)^T$

$$\partial f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 & 2y + x + 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist stetig und

$$\det(\partial f(x,y)) = (2x + y + 1) - (2y + x + 1) = x - y$$

Also f lokal invertierbar in (x,y) falls $x \neq y$

Satz 9.40 ist eine lokale Aussage. Folgende Definition ist global:

Definition 9.45

V, W Banachräume, $D \subset V$ offen und $f : D \to W$

f ist C^k-Diffeomorphismus $\iff f : D \to f(D)$ bijektiv

und f sowie $f^{-1} : f(D) \to D$ sind k-mal stetig differenzierbar

Satz 9.46 (Satz über die implizite Funktion)

Seien V, W *Banachräume und* $D \subset V \times W$ *offen*

$F : D \to W$ *k-mal stetig differenzierbar für* $k \geqslant 1$

Sei $(x_0, y_0) \in D$, *so dass* $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{B}(W)$ *invertierbar*

$\Longrightarrow\ \exists\, \varepsilon > 0$ *und eindeutiges* $G : B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(F(x_0, y_0)) \subset V \times W \to W$ *mit*

$$F(x, G(x, y)) \;=\; y$$

Insbesondere gilt für $g(x) = G(x, F(x_0, y_0))\,,\; g : B_\varepsilon(x_0) \to W$,

$$F(x, g(x)) \;=\; F(x_0, y_0) \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_0)$$

Dann heißt g implizite Funktion zu F durch $(x_0, y_0) = (x_0, g(x_0))$

(Oft wird F so normiert, dass $F(x_0, y_0) = 0$*)*

Zudem sind G und g k-mal stetig differenzierbar und

$$g'(x) \;=\; -\left(\partial_y F(x, g(x))\right)^{-1} \partial_x F(x, g(x))$$

Beweis Betrachte $f : D \subset V \times W \to V \times W$ definiert durch

$$f(x, y) = (x, F(x, y))^T$$

Dann

$$\partial f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_V & 0 \\ \partial_x F(x, y) & \partial_y F(x, y) \end{pmatrix}$$

Nun ist $\partial_y F(x_0, y_0)$ invertierbar. Also (wie für 2×2-Matrizen)

$$(\partial f(x_0, y_0))^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_V & 0 \\ -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \partial_x F(x_0, y_0) & (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \end{pmatrix}$$

Nach Satz 9.40 existiert somit $\delta > 0$, so dass f ein lokales Inverses hat

$$f^{-1} : f(B_\delta(x_0, y_0)) \to B_\delta(x_0, y_0) \subset V \times W$$

welches zudem k-mal stetig differenzierbar ist

Dieses Inverse muss von folgender Gestalt sein (ohne Transponieren):

$$f^{-1}(x,y) \;=\; (x, G(x,y)) \qquad (x,y) \in f(B_\delta(x_0,y_0))$$

Somit

$$(x,y) \;=\; f(f^{-1}(x,y)) \;=\; (x, F(x, G(x,y)))$$

d.h.

$$y \;=\; F(x, G(x,y)) \qquad \forall\,(x,y) \in f(B_\delta(x_0,y_0))$$

Nun $f(B_\delta(x_0,y_0)) = (f^{-1})^{-1}(B_\delta(x_0,y_0))$ offen (da f^{-1} stetig)

Zudem $(x_0, F(x_0,y_0)) \in f(B_\delta(x_0,y_0))$

Somit existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(F(x_0,y_0)) \subset f(B_\delta(x_0,y_0))$

Die erste Aussage folgt. Zur letzten:

$$0 \;=\; \partial_x F(x, g(x)) \;=\; \partial_x F(x,g(x)) + \partial_y F(x,g(x))g'(x) \qquad \square$$

Beispiel 9.47

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = y^2 - 2y - x^2$

$$F(x, y) = 0 \iff (y-1)^2 = 1 + x^2 \iff y = g(x) = 1 \pm \sqrt{1 + x^2}$$

Zwei glatte Lösungen. In der Tat $\partial_y F(x, y) = 2(y - 1) \neq 0 \ \forall \ y \neq 1$

Beispiel 9.48

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = y^2 - 2xy - x^4$

$$F(x, y) = 0 \iff (y - x)^2 = x^4 + x^2 \iff y = x \pm x\sqrt{1 + x^2}$$

wieder zwei Lösungen, aber nicht mehr getrennt

Bei $(0, 0)$ gilt $\partial_y F(0, 0) = 0$, also keine Eindeutigkeit nach Satz 9.46

Beispiel 9.49

Nun $F(x, y) = y^2 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$

Keine Lösungsfunktion, sondern Punkt. In der Tat wieder $\partial_y F(0, 0) = 0$

Definition 9.50 (Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\varnothing \neq \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{N+M}$

$\mathcal{M}$ C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{N+M}$ der Dimension M

$\iff$ $\forall$ Punkte $p \in \mathcal{M}$ $\exists$ offene Umgebung $U = B_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R}^{N+M}$ und

k-mal stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}^N$,

so dass F' auf U Maximalrang N hat und

$$\mathcal{M} \cap U \; = \; \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

Bemerkung 9.51

Wenn $F'(p)$ Maximalrang, so heißt p ein regulärer Punkt von F,

andernfalls ein singulärer oder kritischer Punkt

In Definition 9.50 tauchen nur reguläre Punkte auf

Beispiel 9.52

Sei $\mathcal{M} = \mathbb{S}^M = \{x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid \|x\| = 1\}$ M-Sphäre (bez. euklid. Norm)
Sie ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{M+1}$ die Dimension M
Hier globale Funktion $F : \mathbb{R}^{M+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \|x\| - 1$
Dann $\mathbb{S}^M = \{x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid F(x) = 0\}$

Bemerkung 9.53

Lokal ist Untermannigfaltigkeit also simultane Niveaufläche
der Komponentenfunktion F_j von F, d.h.

$$\mathcal{M} \cap U = \bigcap_{j=1}^{N} \{x \in U \mid F_j(x) = 0\}$$

Jede Niveau-Fläche $\{x \in U \mid F_j(x) = 0\}$ von Kodimension 1 im $\mathbb{R}^{N+M}$
Rangbedingung besagt: Hyperflächen schneiden sich alle transvers
Deswegen ist $\mathcal{M}$ von Kodimension N im $\mathbb{R}^{N+M}$, also von Dimension M

Satz 9.54

Eine M-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ besitzt einen Atlas

$$\mathcal{A} = \{\varphi \mid \varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^M \text{ Homöomorphismus, } U_\varphi \subset \mathcal{M}\}$$

bestehend aus Karten φ, die Folgendes erfüllen:

(i) $U_\varphi \subset \mathcal{M}$ *offen in $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ versehen mit Unterraumtopologie)*

(ii) $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi = \mathcal{M}$

(iii) *Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ sind die Kartenwechsel*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^M \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^M$$

C^k-Diffeomorphismen

Bemerkung 9.55

(i), (ii), (iii) sind Definition (abstrakter) C^k-Mannigfaltigkeit

Jede C^k-Untermannigfaltigkeit ist also eine C^k-Mannigfaltigkeit

Umkehrung gilt auch: Satz von Whitney

Beweis:

Sei $U \subset \mathbb{R}^{M+N}$ offene Umgebung von $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ im $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ und $F : U \to \mathbb{R}^N$ von Maximalrang, so dass

$$\mathcal{M} \cap U \; = \; \{(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \mid F(x, y) = 0\}$$

Sei $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ invertierbar (sonst permutiere Argumente)
Nach Satz über implizite Funktionen $\exists$ Umgebung $V \subset \mathbb{R}^M$ von x_0 und $g : V \to \mathbb{R}^N$, so dass

$$F(x, g(x))) \; = \; 0 \qquad \forall \, x \in V$$

Nun setze

$$\varphi^{-1} \; : \; V \to \mathcal{M} \qquad \varphi^{-1}(x) \; = \; (x, g(x))$$

und

$$\varphi \; : \; \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{R}^M \qquad \varphi(x, g(x)) \; = \; x$$

Nun wird φ zu Diffeomorphismus $\tilde{\varphi}$ erweitert:

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x,t) \;=\; (x, g(x) + t) \qquad x \in V\,,\ t \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^N$$

Tatsächlich ist $\tilde{\varphi}$ invertierbar, da

$$(\tilde{\varphi}^{-1})'(x,t) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_M & g'(x) \\ 0 & \mathbf{1}_N \end{pmatrix}$$

Also $\tilde{\varphi}^{-1}$ lokal bei $(x_0, 0)$ invertierbar (Satz 9.40)

Gegeben zweite Karte ψ, ist also $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ lokaler C^k-Diffeomorphismus (auf adäquatem Definitionsbereich)

Zudem: $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x,0) = \tilde{\psi}(x, g(x)) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), 0)$

Somit Kartenwechsel lokale C^k-Diffeomorphismen

Atlas durch die Karte zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ gegeben $\square$

Konzepte der Analysis mit Karten auf Mannigfaltigkeiten übertragen:

Definition 9.56 (Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten)

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ C^k-Mannigfaltigkeiten und $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ Abbildung

F heißt C^k

$\iff$ für alle Karten $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^M$ von $\mathcal{M}$ und $\psi : U_\psi \to \mathbb{R}^N$ von $\mathcal{N}$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \;:\; \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$$

ist eine C^k-Abbildung

Bezeichnungen für Menge aller C^k-Abbildungen $C^k(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Falls $\mathcal{N} = \mathbb{R}$, dann $C^k(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = C^k(\mathcal{M})$

Falls $k = \infty$, spricht man von glatten Abbildungen

10 Tangentialräume und Differentialformen

Sei $\mathcal{M}$ M-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{M'} = \mathbb{R}^{M+N}$

Inverses zu Kartenabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \to U_\varphi \subset \mathbb{R}^{M'}$ glatt

Ableitung bei $x \in \varphi(U_\varphi)$ ist lineare Abbildung (Linearisierung)

$$(\varphi^{-1})'_x \;=\; \partial\varphi^{-1}(x) \;:\; \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{M'}$$

$(\varphi^{-1})'_x$ hat maximalen Rang M

Definition 10.1

Tangentialraum an $p \in \mathcal{M}$ ist das Bild von $(\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}$:

$$T_p\mathcal{M} \;=\; \mathrm{Ran}\big((\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}\big)$$

Satz 10.2

$T_p\mathcal{M}$ ist die Menge aller Ableitungen $\gamma'(0)$ wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$

Beweis: "$\subset$" Sei $v \in \mathbb{R}^M$ und setze $\gamma(t) = \varphi^{-1}(x + tv)$ wobei $\varphi(p) = x$

Dann γ glatt und $\gamma'(0) = (\varphi^{-1})'_x(v)$

"$\supset$" Sei γ Kurve wie oben. Dann ist $\varphi \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi(U_\varphi)$ glatt

und $\gamma'(0) = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'_0 = (\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(\varphi \circ \gamma)'_0 \in T_p\mathcal{M}$ □

Definition 10.3

Eine Punkt-Derivation bei $p \in \mathcal{M}$ ist lineare Abbildung $\partial : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ mit Punkt-Leibniz-Regel:

$$\partial(fg) \;=\; \partial f\, g(p) \;+\; f(p)\, \partial g$$

Jeder glatten Weg γ durch $p \in \mathcal{M}$ definiert Punkt-Derivation

$$\partial_\gamma f \;=\; \partial_t\big(f \circ \gamma(t)\big)\Big|_{t=0}$$

Umgekehrt: zu jeder Punkt-Derivation bei p $\exists$ Weg γ durch p:

Satz 10.4

$T_p\mathcal{M}$ ist isomorph zum Vektorraum der Punkt-Derivationen bei p

Beweis: Zunächst beachte: Punkt-Derivationen bilden Vektorraum

Wir verwenden eine Basis der Punkt-Derivationen

Sei $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^M$ Karte mit $p \in U_\varphi$ und $x = \varphi(p) = 0$ nach Verschieben

Seien $x^1, \ldots, x^M$ Koordinatenfunktionen in $\varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M$

Dies gibt glatte Funktionen $x^m \circ \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$

Zu gegebener Punkt-Derivation ∂ bei p, setze $\lambda^m = \partial(x^m \circ \varphi) \in \mathbb{R}$

Betrachte Weg $\gamma(t) = \varphi^{-1}(t\lambda^m e_m)$ durch $p = \varphi^{-1}(0)$

Hierbei $e_1, \ldots, e_M$ Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^M$. Dann:

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma f &= \partial_t\big(f \circ \gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(\lambda^m e_m) \\
&= \lambda^m\big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(e_m) = \partial(x^m \circ \varphi)\big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(e_m) \\
&= \partial\Big(\big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(e_m)x^m \circ \varphi\Big) = \partial\Big(\big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(x^m \circ \varphi e_m)\Big) \\
&= \partial f \qquad \text{da nach Taylor für } f = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi
\end{aligned}$$

$$f(q) = f(p) + \big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(x^m \circ \varphi e_m) + \mathcal{O}(x^2) \text{ für } q = \varphi^{-1}(x^m \circ \varphi e_m) \qquad \square$$

Zusammenfassung

Verschiedene Darstellungen des Tangentialraumes an p:

$$\begin{aligned} T_p\mathcal{M} &= \mathrm{Ran}\big((\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}\big) \\ &= \{\text{Ableitungen } \gamma'(0) \text{ glatter Wege } \gamma \text{ durch } p\} \\ &= \{\text{Punkt-Derivationen bei } p\} \end{aligned}$$

Notation: zu Karte φ setze $\partial_{x^m} = \partial_{\gamma_m}$ wobei $\gamma_m(t) = \varphi^{-1}(te_m)$, d.h.

$$\partial_{x^m} f \;=\; \partial_{\gamma_m} f \;=\; \partial_t\big(f \circ \gamma_m(t)\big)\Big|_{t=0} \;=\; \big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(e_m)$$

Zu Karte um $p \in \mathcal{M}$ ist dann $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^M}$ Basis von $T_p\mathcal{M}$

$$v \;=\; \sum_{m=1}^{M} v^m \, \partial_{x^m} \;=\; v^m \, \partial_{x^m} \;\in\; T_p\mathcal{M}$$

Dies ist Koordinatendarstellung von Tangentialvektoren

Beachte: diese Basis gibt es für alle Punkte in Kartenumgebung

Definition 10.5

Tangentialraum ist $T\mathcal{M} = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$

Definition 10.6

Vektorfeld X auf $\mathcal{M}$ ist ein Schnitt vom Tangentialraum $T\mathcal{M}$,

d.h. glattes $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ mit $X(p) \in T_p\mathcal{M}$

Beispiel 10.7

Lokal sind ∂_{x^m} glatte Vektorfelder

Da sie in jedem Punkt p eine Basis von $T_p\mathcal{M}$ bilden, gilt lokal

$$X = X^m \partial_{x^m}$$

für geeignete glatte Funktionen $X^m : U_\varphi \subset \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

Definition 10.8

Vektorfeld $X = X^m \partial_{x^m}$ wirkt auf $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ wie in Defintion 10.3

$$X(f) \;=\; X^m \partial_{x^m}(f) \;\in\; C^\infty(\mathcal{M})$$

Bemerkung 10.9 (Dynamisches System auf Mannigfaltigkeit)

Zu Vektorfeld X auf $\mathcal{M}$ gehört ein dynamisches System

Hierzu sucht man den Fluss $\phi : I \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit

$$\partial_t \phi_t(p) \;=\; X(\phi_t(p)) \qquad , \qquad \phi_0 \;=\; \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ Zeitintervall

Außerdem: $t \in I \mapsto \phi_t(p)$ Pfad und somit $\partial_t \phi_t(p) \in T_{\phi_t(p)}\mathcal{M}$

Also ist obige Gleichung eine Gleichung zwischen Tangentialvektoren

Lokale Existenz dieses Flusses wieder mit Picard-Lindelöf

Koordinatenwechsel von Tangentialvektoren

Sei $p \in U_\varphi \cap U_\psi$ in zwei Kartengebieten

Koordinaten in $\varphi(U_\varphi)$ sind $x^1, \dots, x^M$ mit $\varphi(p) = 0$

Koordinaten in $\psi(U_\psi)$ sind $y^1, \dots, y^M$ mit $\psi(p) = 0$

Dann hat $\partial \in T_p\mathcal{M}$ zwei Darstellungen:

$$\partial \;=\; v_\varphi^m \, \partial_{x^m} \;=\; v_\psi^m \, \partial_{y^m} \tag{*}$$

Ziel: Berechnung von $v_\varphi^1, \dots, v_\varphi^M$ aus $v_\psi^1, \dots, v_\psi^M$

Glatter Koordinatenwechsel: $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\psi)$

$$\begin{aligned}
\partial_{x^m} f \;&=\; \big(f \circ \varphi^{-1}\big)'_0(e_m) \;=\; (f \circ \psi^{-1})'_0(\psi \circ \varphi^{-1})'_0(e_m) \\
&=\; \partial_{y^n} f \; e^n(\psi \circ \varphi^{-1})'_0(e_m) \;=\; \big((\psi \circ \varphi^{-1})'_0\big)^n_m \, \partial_{y^n} f
\end{aligned}$$

Also: $\partial \;=\; v_\varphi^m \, \partial_{x^m} \;=\; v_\varphi^m \big((\psi \circ \varphi^{-1})'_0\big)^n_m \partial_{y^n}$

Somit sogenanntes kontravariantes Transformationsverhalten zu (*):

$$v_\psi^n \;=\; \big((\psi \circ \varphi^{-1})'_0\big)^n_m \, v_\varphi^m$$

Definition 10.10

Dualraum $T_p^*\mathcal{M}$ zu Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ heißt Kotangentialraum an p

Schnitte von $T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}$ heißen Kovektorbündel

Dies sind glatte Abbildungen $X^* : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}$ mit $X^*(p) \in T_p^*\mathcal{M}$

Selbstverständlich hat $T_p^*\mathcal{M}$ duale Basis zu $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^M}$

Diese duale Basis wird mit $dx^1, \ldots, dx^M$ bezeichnet und erfüllt:

$$dx^m(\partial_{x^n}) \;=\; \delta_n^m$$

Beachte: in der Literatur werden Indizes an dx^m oft unten gesetzt

Wiederum kann dx^m lokal als Kovektorfeld aufgefasst werden

Jedes Kovektorfeld X^* kann lokal geschrieben werden als

$$X^* \;=\; X_m^*\, dx^m$$

mit glatten Funktionen $X_1^*, \ldots, X_M^*$

Koordinatenwechsel von Kovektoren

Set-up wie bei Koordinatenwechsel von Tangentialvektoren:

Glatter Koordinatenwechsel: $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\psi)$. Dann

$$\partial \;=\; v_\varphi^n\, \partial_{x^n} \;=\; v_\psi^m\, \partial_{y^m} \;\in\; T_p\mathcal{M} \quad\Longrightarrow\quad v_\psi^m \;=\; \big((\psi \circ \varphi^{-1})_0'\big)^m_{\;n} v_\varphi^n$$

Nun transformieren Kovektoren mit inverser Abbildung (siehe oben)

Also gegeben zwei Darstellungen

$$v^* \;=\; v_n^\varphi\, dx^n \;=\; v_m^\psi\, dy^m \;\in\; T_p^*\mathcal{M}$$

gilt:

$$v_m^\psi \;=\; \big(((\psi \circ \varphi^{-1})_0')^{-1}\big)^n_{\;m}\, v_n^\varphi \;=\; \big(((\varphi \circ \psi^{-1})_0'\big)^n_{\;m}\, v_n^\varphi$$

da im Allgemeinen für Diffeomorphismus F gilt $(F')_x^{-1} = (F^{-1})'_{F(x)}$

Tensorfelder

Definition 10.11

Zu $K \geqslant 0$ und $L \geqslant 0$ betrachte Tensoren aus $T^K_L(T_p\mathcal{M})$

Ein Tensorfeld ist eine glatte Abbildung $p \in \mathcal{M} \mapsto T(p) \in T^K_L(T_p\mathcal{M})$

Beispiel 10.12

Ein Vektorfeld ist ein Tensorfeld der Stufe $(1, 0)$

Ein Kovektorfeld ist ein Tensorfeld der Stufe $(0, 1)$

Lokal kann jedes Tensorfeld nach den Basen entwickelt werden

$$T = T^{n_1,\ldots,n_K}{}_{m_1,\ldots,m_L}\, \partial_{x^{n_1}} \otimes \ldots \otimes \partial_{x^{n_K}} \otimes dx^{m_1} \otimes \ldots \otimes dx^{m_L}$$

wobei nun $T^{n_1,\ldots,n_K}{}_{m_1,\ldots,m_L} : U_\varphi \subset \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen

Tensorfelder bilden Modul über $C^\infty(\mathcal{M})$ durch punktweise Multiplik.

Differentialformen: antisymmetrische, kovariante Tensoren

Definition 10.13 (Differentialformen)

Eine Differentialform vom Grad L, kurz auch L-Form, ist eine glatte Abbildung $p \in \mathcal{M} \mapsto \omega(p) \in \Lambda_L(T_p\mathcal{M})$

Die Menge aller L-Formen wird mit $\Omega_L(\mathcal{M})$ bezeichnet

Analog zur Grassmann Algebra definiert man auch den Vektorraum

$$\Omega(\mathcal{M}) \;=\; \bigoplus_{L=0}^{M} \Omega_L(\mathcal{M})$$

Lokal ist eine L-Form $\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$ von der Gestalt (Koeff. antisym.):

$$\omega \;=\; \omega_{m_1,\ldots,m_L}\, dx^{m_1} \wedge \ldots \wedge dx^{m_L}$$

Beispiel 10.14

0-Formen sind glatte reelle Funktionen, d.h. $\Omega_0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$

1-Formen sind genau die Kovektorfelder

Beachte: $\Omega_L(\mathcal{M})$ ist von unendlicher Dimension, genau wie $C^\infty(\mathcal{M})$

Definition 10.15 (Äußere Ableitung von Funktionen)

Zu $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definiere die äußere Ableitung $df \in \Omega_1(\mathcal{M})$

$$df(X) \;=\; X(f)$$

Bemerkung 10.16

In Koordinaten ist dies

$$df \;=\; \partial_{x^m}(f)\, dx^m \;=\; \sum_{m=1}^{M} \partial_{x^m}(f)\, dx^m$$

denn dann für $X = X^m\,\partial_{x^m}$:

$$df(X) \;=\; \partial_{x^m}(f)\, dx^m(X^n\,\partial_{x^n}) \;=\; \partial_{x^m}(f)\, X^n\,\delta^n_m \;=\; X^m\,\partial_{x^m}(f) \;=\; X(f)$$

Bemerkung 10.17

Beachte: Versuch aus Ableitungen $\partial_{x^m}(f)$ Vektorfeld $\sum_{m=1}^M \partial_{x^m}(f)\partial_{x^m}$ zu konstruieren schlägt fehl, weil dies koordinatenabhängig ist

Definition 10.18 (Äußere Ableitung von Differentialformen)

$d : \Omega_L(\mathcal{M}) \to \Omega_{L+1}(\mathcal{M})$ in Koordinaten definert durch

$$d\big(f\, dx^{m_1} \wedge \ldots \wedge dx^{m_L}\big) \;=\; df \wedge dx^{m_1} \wedge \ldots \wedge dx^{m_L}$$

und lineare Fortsetzung

Somit im Allgemeinen:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_{m_1,\ldots,m_L}\, dx^{m_1} \wedge \ldots \wedge dx^{m_L}) \\ &= (\partial_{x^m}\omega_{m_1,\ldots,m_L})\, dx^m \wedge dx^{m_1} \wedge \ldots \wedge dx^{m_L} \end{aligned}$$

Beachte: Für $L = 0$ stimmt dies mit obiger Definition 10.15 überein

Satz 10.19

(i) *d ist linear*

(ii) $d(fg) = (df)g + f(dg)$ *für* $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$

(iii) $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta \;+\; (-1)^L \omega \wedge (d\eta)$ *für* $\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$, $\eta \in \Omega_K(\mathcal{M})$

(iv) $d^2 = d \circ d = 0$

Beweis: (i) klar nach Koordinatendarstellung

(ii) nach $d(fg) = \partial_{x_m}(fg)\, dx^m$ und Punktderivations-Eigenschaft von ∂_{x_m}

(iii) folgt ebenfalls in Koordinatendarstellung da obiges dx^m durchkommutitiert werden muss an die erste Stelle

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d(\omega_{n_1,\dots,n_L}\, \eta_{m_1,\dots,m_K} dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_k}) \\
&= \partial_{x^m}(\omega_{n_1,\dots,n_L}\eta_{m_1,\dots,m_K}) dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\
&= (\partial_{x^m}\omega_{n_1,\dots,n_L})\eta_{m_1,\dots,m_K} dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\
&\quad + \omega_{n_1,\dots,n_L}(\partial_{x^m}\eta_{m_1,\dots,m_K}) dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\
&= (\partial_{x^m}\omega_{n_1,\dots,n_L})\eta_{m_1,\dots,m_K} dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\
&\quad + (-1)^L \omega_{n_1,\dots,n_L}(\partial_{x^m}\eta_{m_1,\dots,m_K}) dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^m \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K}
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d\big((\partial_{x^m}\omega_{n_1,\dots,n_L})\, dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L})\big) \\
&= (\partial_{x^{m'}}\partial_{x^m}\omega_{n_1,\dots,n_L})\, dx^{m'} \wedge dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \\
&= -(\partial_{x^{m'}}\partial_{x^m}\omega_{n_1,\dots,n_L})\, dx^m \wedge dx^{m'} \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} = 0
\end{aligned}$$

weil partielle Ableitungen vertauschen (Satz von Schwarz) $\square$

Definition 10.20

$\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$ geschlossen $\iff d\omega = 0$

Definition 10.21

$\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$ exakt $\iff \exists\ \eta \in \Omega_{L-1}(\mathcal{M})$ mit $\omega = d\eta$

Bemerkung 10.22

ω exakt $\implies \omega$ geschlossen (da $d^2 = 0$)

Umkehrung gilt lokal:

Satz 10.23 (Poincaré Lemma)

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^M$ sternförmig, d.h. $\exists$ Stern p_0 mit $[p_0, p] \subset \mathcal{M}\ \forall\ p \in \mathcal{M}$

Dann: $\omega \in \Omega(\mathcal{M})$ geschlossen $\implies \omega$ exakt

Global Unterschiede: de Rham Kohomologie

Beweis: siehe Literatur

Pushforwards von Tangentialvektoren

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension M und N (evtl. $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, oder anderes Extrem $M \neq N$)

Nach Definition 9.56: $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ glatt $\iff$ $\forall$ Karten φ von $\mathcal{M}$ und ψ von $\mathcal{N}$ ist $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ glatt

Definition 10.24 (Pushforward = Vorschieben)

Pushforward $F_* : T_p\mathcal{M} \to T_{F(p)}\mathcal{N}$ auf Punkt-Derivationen definiert durch

$$\big(F_*(\partial)\big)(f) \;=\; \partial(f \circ F) \qquad , \qquad f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

oder auf Wegableitungen:

$$\big(F_*(\partial_\gamma)\big)(f) \;=\; \partial_t(f \circ F \circ \gamma(t))\big|_{t=0} \qquad , \qquad f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

Analog Pushforward von Vektorfeldern

Bemerkung 10.25

Sei $(F')^n_m \;=\; \langle e_n | (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})'(e_m)\rangle$. Dann:

$$F_*(\partial^\varphi_{x^m}) \;=\; (F')^n_m \partial^\psi_{y^n}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
\big(F_*(\partial^\varphi_{x^m})\big)(f) &= \partial^\varphi_{x^m}(f \circ F) \\
&= \partial_t f(F(\varphi^{-1}(te_m)))\Big|_{t=0} \\
&= \partial_t \left(f \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(te_m)))\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left(f \circ \psi^{-1}\right)'_{\psi(F(0))} \left(\partial_t(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(te_m)))\Big|_{t=0}\right) \\
&= \left(f \circ \psi^{-1}\right)'_{\psi(F(0))} \left(e_n (F')^n_m\right) \\
&= (F')^n_m \left(f \circ \psi^{-1}\right)'_{\psi(F(0))} (e_n) \\
&= (F')^n_m \partial^\psi_{y^n} f
\end{aligned}$$

Pullbacks von Kotangentialvektoren

Definition 10.26 (Pullback = Zurückziehen)

Zu $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ glatt, ist Pullback $F^* : T^*_{F(p)}\mathcal{N} \to T^*_p\mathcal{M}$ gegeben durch

$$(F^*\omega)(v) \;=\; \omega(F_* v) \qquad , \qquad \omega \in T^*_{F(p)}\mathcal{N}\,,\quad v \in T_p\mathcal{M}$$

Analog für Kovektorfeld ω auf $\mathcal{N}$ (d.h. 1-Form auf $\mathcal{N}$)

Bemerkung 10.27

$(\mathrm{id}_{\mathcal{M}})^* = \mathrm{id}_{T^*\mathcal{M}}$ und $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

Satz 10.28

Für 1-Form ω auf $\mathcal{N}$ und $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N})$ gilt

$$F^*(f\,\omega) \;=\; (f \circ F)\; F^*(\omega) \qquad , \qquad F^*df \;=\; d(f \circ F)$$

Insbesondere $d(F^*df) = 0$

Beweis: Für $v \in T_p\mathcal{M}$ ist $F_* v \in T_{F(p)}\mathcal{N}$ und somit:

$$F^*(f\,\omega)(v) \;=\; (f\,\omega)(F_* v) \;=\; f(F(p))\,\omega(F_* v) \;=\; \big((f \circ F)\; F^*(\omega)\big)(v)$$

Weiter für Vektorfeld X auf $\mathcal{M}$ und $p \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}(F^* df)(X)(p) &= df(F_* X)(F(p)) \\ &= (F_* X)(f)(F(p)) \\ &= X(f \circ F)(p) \\ &= (d(f \circ F))(X)(p)\end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.29

Falls F Diffeomorphismus, auch Pushforwards von Kovektoren:

$$F_* \;=\; (F^{-1})^* : T_p^*\mathcal{M} \to T_{F(p)}^*\mathcal{N}$$

Ebenso Pullbacks von Tangentialvektoren

$$F^* \;=\; (F^{-1})_* : T_{F(p)}\mathcal{N} \to T_p\mathcal{M}$$

Pullbacks von Differentialformen

Definition 10.30

$F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ glatt. Pullback $F^* : \Omega_L(\mathcal{N}) \to \Omega_L(\mathcal{M})$ von Differentialformen gegeben durch, für $\omega \in \Omega_L(\mathcal{N})$ und $v_1, \ldots, v_L \in T_p\mathcal{M}$,

$$(F^*\omega)(v_1, \ldots, v_L) \;=\; \omega(F_* v_1, \ldots, F_* v_L)$$

Satz 10.31

Für $\omega \in \Omega_L(\mathcal{N})$ und $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N})$ gilt

$$F^*(f\,\omega) \;=\; (f \circ F)\; F^*(\omega) \qquad , \qquad F^* d\omega \;=\; d(F^*\omega)$$

Beweis: Erste Formel wie in Satz 10.28

Zweite Formel für $L = 0$ klar und für $L = 1$ Satz 10.28

Allgemein: wegen $\mathbb{R}$-Linearität betrachte nur $\omega = f\, dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}$

Duale Beziehung zu Bemerkung 10.25: $F^*(dy^l) = (F')^l_k dx^k$

$$\begin{aligned}
F^* d\omega &= F^*\big((\partial_{y^l} f)\, dy^l \wedge dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}\big) \\
&= (\partial_{y^l} f) \circ F\; F^*(dy^l \wedge dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}) \\
&= (\partial_{y^l} f) \circ F\; F^*(dy^l) \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}) \\
&= (\partial_{y^l} f) \circ F\; (F')^l_k dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}) \\
&= \partial_{x^k}(f \circ F)\, dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L})
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
dF^*\omega &= d\big(f \circ F\; F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L})\big) \\
&= \big(d(f \circ F)\big)\; F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L})) \\
&\quad + \; f \circ F\; d\big(F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L})\big) \\
&= \partial_{x^k}(f \circ F)\, dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}) \; + \; 0
\end{aligned}$$

Letzteres weil $F^*(dy^{m_1} \wedge \ldots \wedge dy^{m_L}) = F^*(dy^{m_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dy^{m_L})$
und $dF^*(dy^m) = 0$ nach Satz 10.28 $\square$

Satz 10.32

Sei $\dim(\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{N}) = M$ *und* $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *glatt*

Weiter sei φ *Karte auf* $\mathcal{M}$ *und* ψ *Karte auf* $\mathcal{N}$ *und setze*

$$(F')^n_m \;=\; \langle e_n | (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})'(e_m) \rangle$$

Dann gilt lokal für M*-Form (maximalen Grades):*

$$F^*(f\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M) \;=\; \det(F')\,(f \circ F)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M$$

Beweis: Dies ist Satz 8.31 angewandt auf Linearisierung von F, welche nach Bemerkung 10.25 erfüllt:

$$F_*(\partial^{\varphi}_{x^m}) \;=\; (F')^n_m \partial^{\psi}_{y^n}$$

□

11 Orientierung und Integration auf Mannigfaltigkeiten

Definition 11.1 (Orientierung in der linearen Algebra)

V reeller Vektorraum (nicht über $\mathbb{C}$)

(i) Zwei Basen $b_1, \dots, b_M$ und $e_1, \dots, e_M$ sind gleichorientiert
$\iff \det(A) > 0$ für Basiswechsel $A(b_m) = e_m$, $m = 1, \dots, M$

(ii) Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation mit 2 Klassen

(iii) V orientiert $\iff$ eine Klasse als positiv ausgezeichnet

(iv) Sei $L : V \to W$ Isomorphismus zwischen orientierten VR
L orientierungstreu $\iff$ L(positive Basis) ist positiv

Bemerkung 11.2

$0 \neq \omega \in \Lambda_M(V)$ alternierende Form höchsten Grades
ω legt Orientierung fest durch

$$b_1, \dots, b_M \text{ positiv} \quad \iff \quad \omega(b_1, \dots, b_M) > 0$$

Definition 11.3 (Orientierung auf Mannigfaltigkeit)

Eine Orientierung auf $\mathcal{M}$ ist eine Orientierung in jedem $T_p\mathcal{M}$ mit:

$\forall\ p \in \mathcal{M} \quad \exists$ Karten (φ, U_φ) mit $p \in U_\varphi$ so dass für alle $q \in U_\varphi$

$$(\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^M}) \text{ positiv in } T_q\mathcal{M}$$

Ein solche Karte heißt dann positiv oder positiv orientiert

Wenn Orientierung auf $\mathcal{M}$ existiert, so heißt $\mathcal{M}$ orientierbar

Bemerkung 11.4

Orientierung von $\mathcal{M}$ globale Eigenschaft! Lokal immer möglich

Satz 11.5

$\mathcal{M}$ orientierbar $\iff$ $\exists$ Atlas $\mathcal{A}$ so dass für alle Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$:

$$\det\left((\psi \circ \varphi^{-1})'\right) > 0 \qquad \text{auf } \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

Beweis: Verwende nur positive Karten für $\mathcal{A}$

Dann Kartenwechsel orientierungstreu $\square$

Satz 11.6

$\mathcal{M}$ orientierbar $\iff$ $\exists$ eine sogenannte Volumenform auf $\mathcal{M}$

d.h. $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M})$ maximalen Grades $M = \dim(\mathcal{M})$ mit $\omega_p \neq 0 \ \forall \ p \in \mathcal{M}$

Beweis: "$\Longleftarrow$" Nach Bemerkung 11.2 legt ω in $T_p\mathcal{M}$ Orientierung fest

"$\Longrightarrow$" Dies verwendet folgende Begrifflichkeit

Definition 11.7 (Zerlegung der Eins)

Sei $(U)_{U \in \mathcal{A}}$ offene Überdeckung einer Mannigfaltikeit $\mathcal{M}$

Dann heißt $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{A}$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins

$\iff$

(i) $g_i : \mathcal{M} \to [0, 1]$ glatt mit Träger $\mathrm{supp}(g_i) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{A}$

(ii) Für jedes $p \in \mathcal{M}$ gibt es eine Umgebung von p, auf der nur endlich viele g_i ungleich Null sind

(iii) $\sum_{i \geqslant 1} g_i(p) = 1$ für alle $p \in \mathcal{M}$

Existenz von Zerlegung der Eins zu Atlas $\mathcal{A}$ wird unten bewiesen

Sei also $\mathcal{A} = (\varphi_i, U_{\varphi_i})_{i\geqslant 1}$ Atlas mit positiven Karten

und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{A}$ untergeordenete Zerlegung der Eins

Auf jedem Kartengebiet U_{φ_i} gibt es nicht-verschwindende M-Form

$$(\varphi_i)^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M)$$

Eine glatte M-Form auf ganz $\mathcal{M}$ ist dann

$$\omega_i \;=\; g_i\,(\varphi_i)^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M)$$

Nun ist eine Volumenform auf $\mathcal{M}$ gegeben durch

$$\omega \;=\; \sum_{i\geqslant 1} \omega_i$$

weil Summanden sich wegen gleicher Orientierung nicht aufheben □

Bemerkung 11.8

Es gibt nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten, z.B. das Möbiusband $\mathcal{M} = (\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$ bez. Wirkung $k \cdot (x, y) = (x + k, (-1)^k y)$

Satz 11.9

$\exists$ *Zerlegung der Eins zu Atlas von $\mathcal{M}$*

Beweis: Fakt 1: $\exists\ f : \mathbb{R}^M \to [0,1]$ glatte Funktion mit (Konstruktion?)

$$f|_{B_1(0)} = 1 \qquad , \qquad \mathrm{supp}(f) \subset B_2(0)$$

Fakt 2: $\exists$ Folge (in $\mathcal{M}$) offener Mengen O_n mit kompaktem Abschluss mit

$$\overline{O_n} \subset O_{n+1} \qquad , \qquad \mathcal{M} = \bigcup_{n \geqslant 1} O_n$$

weil: Offene Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(q) \subset \mathbb{R}^{M'}$ mit $q \in \mathbb{Q}^{M'}$ Basis der Topologie

Dann $\mathcal{M} \cap B_{\frac{1}{n}}(q) \subset \mathbb{R}^{M'}$ präkompakte Basis in $\mathcal{M}$ (Unterraumtop.)

Sei $(O'_n)_{n \geqslant 1}$ Abzählung dieser Mengen

Dann setze: $O_n = O'_1 \cup \ldots \cup O'_n$ $\diamond$

Beachte Zerlegung in “Ringe”:

für $n \geqslant 3$ ist kompaktes $\overline{O_n} \backslash O_{n-1}$ enthalten in offenem $O_{n+1} \backslash \overline{O_{n-2}}$

Zu $p \in \mathcal{M}$ sei

$$n_p \; = \; \max\{n \in \mathbb{N} \mid p \notin O_n\}$$

Sei (U, φ) Karte mit $p \in U$ und wähle $V_p \subset U_p \subset U \cap O_{n_p+2} \backslash \overline{O_{n_p}}$
so dass $B_2(0) \subset \varphi(U_p)$ und $\varphi(V_p) \subset B_1(0)$ (ggfs. Karte skalieren)
Definiere $f_p : \mathcal{M} \to [0,1]$ durch

$$f_p(q) \; = \; \begin{cases} 0 \, , & q \notin U_p \\ f \circ \varphi(q) \, , & q \in U_p \end{cases}$$

Nun: $(V_p \cap O_3)_{p \in \mathcal{M}}$ offene Überdeckung von $\overline{O}_2$
und: $(V_p \cap (O_{n+1} \backslash \overline{O}_{n-2}))_{p \in \mathcal{M}}$ offene Überdeckung von $\overline{O}_n \backslash O_{n-1}$
Wähle jeweils endliche Teilüberdeckung aus
Dies liefert eine lokal endliche Überdeckung $(V_p)_{p \in P}$ von $\mathcal{M}$
Nun setze für $p \in P \subset \mathcal{M}$:

$$g_p \; = \; \frac{f_p}{\sum_{p' \in P} f_{p'}}$$

□

Definition 11.10 (Integral über orientierte Mannigfaltigkeiten)

Sei $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M})$ und (U_φ, φ) positiv orientierte Karte

Dann $(\varphi^{-1})^*\omega = \omega^\varphi \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M = \omega^\varphi \, dx \in \Omega_M(\varphi(U_\varphi))$

Hierbei ist dx Lebesgue-Maß auf $\varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M$

Falls ω^φ integrierbar, setze für messbares $A \subset U_\varphi$

$$\int_A \omega \;=\; \int_{\varphi(A)} (\varphi^{-1})^*\omega \;=\; \int_{\varphi(A)} \omega^\varphi \, dx$$

Wenn $(g_i)_{i \geqslant 1}$ Zerlegung der Eins zu positiven Atlas $(U_{\varphi_i}, \varphi_i)_{i \geqslant 1}$ und Integrierbarkeit $\sum_{i \geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} |g_i \, \omega| < \infty$ vorliegt,

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \;=\; \sum_{i \geqslant 1} \int_{U_{\varphi_i}} g_i \, \omega \;=\; \sum_{i \geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} g_i \, \omega$$

Satz 11.11

Integral unabhängig von Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins

Beweis: Zunächst zu $\int_A \omega$

Sei $A \subset U_\psi$ für zweite positive Karte (U_ψ, ψ)

Hierzu $(\psi^{-1})^*\omega = \omega^\psi \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M = \omega^\psi \, dy$

Für glatte Transformation $F = \psi \circ \varphi^{-1}$ gilt nach Satz 10.32

$$F^*(\psi^{-1})^*\omega \;=\; F^*(\omega^\psi \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M) \;=\; \det(F') \, \omega^\psi \circ F \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M$$

Da $\det(F') > 0$, mit Jacobi'scher Transformationsformel (Satz 3.11):

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} \omega^\varphi \, dx \;&=\; \int_{\varphi(A)} (\varphi^{-1})^*\omega \;=\; \int_{\varphi(A)} (\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(A)} (\psi \circ \varphi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega \;=\; \int_{\varphi(A)} F^*(\psi^{-1})^*\omega \\
&= \int_{F^{-1}(\psi(A))} \det(F') \, \omega^\psi \circ F \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M \\
&= \int_{\psi(A)} \omega^\psi \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^M \;=\; \int_{\psi(A)} \omega^\psi \, dy
\end{aligned}$$

Auch $(\widetilde{g}_j)_{j\geqslant 1}$ Zerlegung der Eins zu positiven Atlas $(U_{\widetilde{\varphi}_j}, \widetilde{\varphi}_j)_{j\geqslant 1}$

Für jedes i gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} g_i\,\omega \;=\; \sum_{j\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} \widetilde{g}_j\, g_i\,\omega$$

Nach Obigem kann $\int_{\mathcal{M}} \widetilde{g}_j\, g_i\,\omega$ in beiden Karten berechnet werden

Wegen Integrierbarkeit können Summen vertauscht werden.

Somit

$$\begin{aligned} \sum_{i\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} g_i\,\omega \;&=\; \sum_{j\geqslant 1} \sum_{i\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} \widetilde{g}_j\, g_i\,\omega \\ &=\; \sum_{j\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} \widetilde{g}_j\,\omega \end{aligned}$$

$\square$

Elementare Eigenschaften des Integrals

Satz 11.12

(i) *Abbildung* $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M}) \mapsto \int_{\mathcal{M}} \omega$ *linear*

(ii) $\overline{\mathcal{M}}$ *Mannigfaltigkeit* $\mathcal{M}$ *mit umgekehrter Orientierung. Dann*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}} \omega = -\int_{\mathcal{M}} \omega$$

(iii) $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann*

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} F^* \omega$$

Beweis: (i) und (ii) offensichtlich

(iii) Nach Definition des Integrals ausreichend:

nur Fall $\mathrm{supp}(\omega) \subset U_\psi$ für eine orientierte Karte auf $\mathcal{N}$

Dies folgt analog zu Kartenwechsel aus Transformationsformel $\square$

Definition 11.13 (Integration über Formen von niedrigerem Grad)

$\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ N- und M-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeitigkeiten

Sei $N \leqslant M$ und $\omega \in \Omega_N(\mathcal{M})$

Zudem $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ glatt und $F^*\omega$ integrierbar über $\mathcal{N}$

Definiere Integral $\int_F \omega$ über ω entlang F, oft mit $\int_{F(\mathcal{N})} \omega$ bezeichnet:

$$\int_F \omega \;=\; \int_{\mathcal{N}} F^*\omega$$

Beispiel 11.14 (Kurvenintegral)

$\gamma : (0,1) \to \mathcal{M}$ glatt und $\omega = \omega_m dx^m \in \Omega_1(\mathcal{M})$ 1-Form. Dann

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_{(0,1)} \gamma^*\omega \;=\; \int_0^1 dt\, \omega_m(\gamma(t))\, (\varphi^m \circ \gamma)'(t)$$

weil

$$\gamma^*(dx^m)(\partial_t) \;=\; dx^m(\gamma_*(\partial_t)) \;=\; (\gamma_*(\partial_t))(\varphi^m) \;=\; \frac{d}{dt}\,\varphi^m(\gamma(t))$$

Definition 11.15 (Glatte Abbildungen auf Halbräumen)

Sei $\mathbb{R}^M_\geqslant = \{x \in \mathbb{R}^M \mid x^M \geqslant 0\}$ mit Unterraumtopologie vom $\mathbb{R}^M$

d.h. $U \subset \mathbb{R}^M_\geqslant$ offen $\iff$ $U = V \cap \mathbb{R}^M_\geqslant$ mit $V \subset \mathbb{R}^M$ offen

Rand hiervon ist $\partial\mathbb{R}^M_\geqslant = \{x \in \mathbb{R}^M \mid x^M = 0\}$

Nun $F : U \subset \mathbb{R}^M_\geqslant \to \mathbb{R}^N$ glatt $\iff$ $\exists$ glatte Erweiterung $\widetilde{F} : V \to \mathbb{R}^N$

Für $x \in \partial\mathbb{R}^M_\geqslant$ setze $F'_x = \widetilde{F}'_x$

Bemerkung 11.16

Definition von F'_x unabhängig von Wahl von $\widetilde{F}$ da $\widetilde{F}'$ stetig

Satz 11.17

Für $U, V \subset \mathbb{R}^M_\geqslant$ offen sei $F : U \to V$ Diffeomorphismus (F, F^{-1} glatt)

$\implies$ *$F(U \cap \partial\mathbb{R}^M_\geqslant) = V \cap \partial\mathbb{R}^M_\geqslant$ (d.h. Rand wird auf Rand abgebildet)*

und $F|_{U \cap \partial\mathbb{R}^M_\geqslant}$ Diffeomorphismus

Beweis: (nur Analysis) Sei $\mathrm{Int}(U) = U \backslash \partial \mathbb{R}^M_{\geqslant}$

Behauptung 1: Wenn $x \in \mathrm{Int}(U)$ und $F(x) \in \partial \mathbb{R}^M_{\geqslant}$, so $\mathrm{Ran}(F'_x) \subset \partial \mathbb{R}^M_{\geqslant}$

weil: für alle $v \in \mathbb{R}^M$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $F(x + tv) = F(x) + tF'_x(v) + o(t)$

Also für M-te Komponente und für alle t ausreichend klein:

$$0 \leqslant F(x + tv)_M = F(x)_M + tF'_x(v)_M + o(t)$$

Somit $F'_x(v)_M = 0$ für alle v. Also $\mathrm{Ran}(F'_x) \subset \partial \mathbb{R}^M_{\geqslant}$ $\diamond$

Behauptung 2: $U \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}^M_{\geqslant}) \iff V \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}^M_{\geqslant})$

weil: "$\Longrightarrow$" Sonst $\exists\ x \in U$ mit $F(x) \in \partial \mathbb{R}^M_{\geqslant}$

Dann ist F'_x nach Behauptung 1 kein Isomorphismus

Widerspruch zu F Diffeomorphismus $\lightning$ Für Umkehrung F^{-1} $\diamond$

Also: $F : \mathrm{Int}(U) \to \mathrm{Int}(V)$ Diffeomorphismus

Somit Rand auf Rand bijektiv. Auch Diffeomorphismus $\square$

Definition 11.18 (Mannigfaltigkeit mit Rand)

Mannigfaltigkeit mit Rand genau wie in Satz 9.54, nur dass

Bilder $\varphi(U_\varphi)$ der Kartenabbilungen φ offen in $\mathbb{R}^M_\geqslant$ sind

Die Kartenwechsel sind dann Diffeomorphismen wie in Satz 11.17

Rand von $\mathcal{M}$ ist $\partial\mathcal{M} = \{p \in \mathcal{M} \mid \exists\, \varphi \text{ mit } \varphi(p) \in \partial\mathbb{R}^M_\geqslant\}$

Beachte: Mannigfaltigkeit Spezialfall von Mannigfaltigkeit mit Rand

Satz 11.19

Rand $\partial\mathcal{M}$ wohldefinierte $(M-1)$-dimensionale Mfkt mit Atlas

$$\partial\mathcal{A} \;=\; \{\varphi|_{U_\varphi \cap \partial\mathcal{M}} \mid (U_\varphi, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

Außerdem ist $\mathrm{Int}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ Mannigfaltigkeit ohne Rand

Beweis: Für $p \in U_\psi$ gilt $\psi(p) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \in \partial\mathbb{R}^M_\geqslant$ nach Satz 11.17
Kartenwechsel eingeschränkt auf Rand auch glatt nach Satz 11.17 $\square$

Beachte: Rand ist immer eine Mannigfaltigkeit ohne Rand

Definition 11.20 (Induzierte Orientierung auf dem Rand)

Sei $\mathcal{M}$ orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand mit $\dim(\mathcal{M}) = M \geqslant 2$

In $p \in \partial\mathcal{M}$ sind $v_1, \dots, v_{M-1} \in T_p\partial\mathcal{M}$ positiv orientiert

$\Longleftrightarrow$ für nach außen zeigenden Vektor $w_\perp \in T_p\mathcal{M}$ ist

$w_\perp, v_1, \dots, v_{M-1}$ positiv orientiert in $T_p\mathcal{M}$ (vorgegebene Orient.)

Äquivalent hierzu: Restriktionen negativer Karten auf Rand sind positiv

Beispiel 11.21

(i) $\mathcal{M} = [0, 1]$ mit $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{(0,1]}, \mathrm{id}_{[0,1)}\}$, $\partial\mathcal{M} = \{0, 1\}$ und $\mathrm{Int} = (0, 1)$

(ii) $\mathcal{M} = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^M$ mit $\partial\mathcal{M} = \mathbb{S}^{M-1}$, zwei Karten

(iii) $\mathcal{M} = [0, 1] \times \mathbb{S}^1$ Zylinderoberfläche

Dann $\partial\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, beide in umgekehrter Richtung orientiert

Satz 11.22 (Satz von Stokes)

$\mathcal{M}$ M-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeitigkeit mit Rand $\partial\mathcal{M}$

Sei $M \geqslant 2$. Auf $\partial\mathcal{M}$ ist die Orientierung von $\mathcal{M}$ induziert

Sei Einbettung $i : \partial\mathcal{M} \to \mathcal{M}$

Weiter: $\omega \in \Omega_{M-1}(\mathcal{M})$ mit kompakten Träger

Wenn $d\omega$ und $i^*\omega$ integrierbar, dann

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega$$

Insbesondere: wenn $\mathcal{M}$ keinen Rand hat, dann $\int_{\mathcal{M}} d\omega = 0$

Beachte: Fall von Dimension $M = 1$ ist genau der Fundamentalsatz

Dann $\mathcal{M} = [a, b]$ mit $\partial\mathcal{M} = \{a, b\}$ wobei b positiv und a negativ

Eine Nullform $\omega = f$ auf $\mathcal{M}$ ist eine Funktion und $i^*\omega = f|_{\{a,b\}}$. Also:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_a^b df = f(b) - f(a) = \int_{\partial\mathcal{M}} f = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega$$

Beweis des Satzes von Stokes:

Zuerst Spezialfall $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^M_{\geqslant}$ und ω mit Träger in $(-R, R)^{M-1} \times [0, R)$

Dann: $\omega = \omega_m \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \ldots \wedge dx^M$

wobei ω_m glatte Funktionen und $\widehat{dx^m}$ heißt: dx^m fehlt. Nun

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{m=1,\ldots,M} \partial_{x^m}\omega_m \, dx^m \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \ldots \wedge dx^M \\ &= \sum_{m=1,\ldots,M} (-1)^{m-1} \partial_{x^m}\omega_m \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M \end{aligned}$$

Also mit Fubini und $\int_{-R}^{R} dx^m \, \partial_{x^m}\omega_m = 0$ für $m < M$ (Hauptsatz):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d\omega &= \sum_{m=1,\ldots,M} (-1)^{m-1} \int_{-R}^{R} dx^1 \cdots \int_{-R}^{R} dx^{M-1} \int_0^R dx^M \partial_{x^m}\omega_m \\ &= (-1)^{M-1} \int_{-R}^{R} dx^1 \cdots \int_{-R}^{R} dx^{M-1} \Big(\int_0^R dx^M \partial_{x^M}\omega_M \Big) \\ &= (-1)^M \int_{-R}^{R} dx^1 \cdots \int_{-R}^{R} dx^{M-1} \, \omega_M(x_1, \ldots, x_{M-1}, 0) \end{aligned}$$

Andererseits: $i : \partial\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist $i(\tilde{x}) = (\tilde{x}, 0)$ mit $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^{M-1})$ und

$$\begin{aligned}(i^*\omega)_{\tilde{x}}(v_1, \dots, v_{M-1}) &= \omega_{(\tilde{x},0)}(i_* v_1, \dots, i_* v_{M-1}) \\ &= \omega_M(\tilde{x}, 0)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{M-1}(v_1, \dots, v_{M-1})\end{aligned}$$

weil $v_1, \dots, v_{M-1} \in \partial\mathbb{R}^M_{\geqslant}$ und somit nur dieser Summand $\neq 0$

Zudem Berechnung der Orientierung Orient:

$$\begin{aligned}\mathrm{Orient}(x^1, \dots, x^{M-1}) &= \mathrm{Orient}(-x^M, x^1, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)\mathrm{Orient}(x^M, x^1, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)^2\mathrm{Orient}(x^1, x^M, x^2, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)^M\mathrm{Orient}(x^1, \dots, x^M) \\ &= (-1)^M\end{aligned}$$

Also

$$\int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega = (-1)^M \int_{-R}^{R} dx^1 \cdots \int_{-R}^{R} dx^{M-1}\, \omega_M(x^1, \dots, x^{M-1}, 0) = \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

nach Vergleich mit Obigem. Also Spezialfall gezeigt

Allgemeiner sei nun $\operatorname{supp}(\omega) \subset U_\varphi$ für eine positive Karte φ

Dann $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^M_\geqslant$ orientierungstreuer Diffeomorphismus mit

$$\begin{tikzcd} \partial\mathcal{M} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi|_{\partial\mathcal{M}}"] & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^{M-1} \arrow[r, "i"] & \mathbb{R}^M_\geqslant \end{tikzcd}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^M_\geqslant} (\varphi^{-1})^*(d\omega) && \text{(Definition des Integrals)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^M_\geqslant} d(\varphi^{-1})^*(\omega) && \text{(Satz 10.31)} \\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^M_\geqslant} i^*(\varphi^{-1})^*(\omega) && \text{(Spezialfall)} \\
&= \int_{\partial\mathbb{R}^M_\geqslant} ((\varphi|_{\partial\mathcal{M}})^{-1})^* i^*(\omega) && \text{(obiges Diagramm)} \\
&= \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega && \text{(Definition des Integrals)}
\end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall, sei $\mathcal{A} = ((U_{\varphi_i}, \varphi_i))_{i \geqslant 1}$ orientierter Atlas und $(g_i)_{i \geqslant 1}$ untergeordnete Zerlegung der Eins

Dann

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{M}} \omega &= \sum_{i\geqslant 1} \int_{\partial\mathcal{M}} g_i \omega \\
&= \sum_{i\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} d(g_i \omega) && \text{(2. Spezialfall)} \\
&= \sum_{i\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} dg_i\, \omega \;+\; \sum_{i\geqslant 1} \int_{\mathcal{M}} g_i\, d\omega \\
&= \int_{\mathcal{M}} d\Big(\sum_{i\geqslant 1} g_i\Big)\, \omega \;+\; \int_{\mathcal{M}} \Big(\sum_{i\geqslant 1} g_i\Big)\, d\omega \\
&= \int_{\mathcal{M}} d\omega
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 11.23

Sei $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 2\}$ abgeschlossener Ring

Rand: $\partial\mathcal{M} = S_1 \cup S_2$ mit $S_j = \{(x, y) \in \mathcal{M} \mid \|(x, y)\| = j\}$

Orientierung von $\mathbb{R}^2$ induziert

Innerer Kreis von $\partial\mathcal{M}$ im Uhrzeigersinn, äußerer umgekehrt

Sei

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Omega_1(\mathcal{M})$$

Diese Form ist geschlossen:

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\partial_x \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dx \wedge dy + \left(\partial_y \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Nun ist $t \in [0, 2\pi) \mapsto (j\cos(t), j\sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ Parametrisierung von S_j wobei Orientierung auf S_2 positiv, auf S_1 negativ. Zudem

$$i_j^*\omega \;=\; \frac{j\cos(t)d(j\sin(t)) - j\sin(t)d(j\cos(t))}{(j\cos(t))^2 + (j\sin(t))^2} \;=\; dt$$

und somit $\int_{S_2} i_2^*\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ und analog $\int_{S_1} i_1^*\omega = -2\pi$. Also

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega \;=\; \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega \;=\; 0 \;=\; \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

Beispiel 11.24 (Variation zu Obigem)

$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|(x, y)\| \leqslant 2\}$ nicht kompakt mit Rand $\partial\mathcal{M} = S_2$

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega \;=\; 0 \;\neq\; 2\pi \;=\; \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

Voraussetzung an kompakten Träger (hier $\mathcal{M}$) ist also wesentlich

Gauss'scher Divergenzsatz

Erster Spezialfall von Stokes. Verwendet Geometrie des $\mathbb{R}^M$

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^M$ kompakte M-Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\mathcal{M}$

Orientierung ist vom $\mathbb{R}^M$ geerbt. Diese garantiert auch Existenz von

$N : \partial\mathcal{M} \to \mathbb{R}^M$ Hauptnormalenvektorfeld auf $\partial\mathcal{M}$ (nach außen)

Flächenelement auf $\partial\mathcal{M}$ ist nun durch $N = (N^1, \ldots, N^M)$ gegeben:

$$dS \;=\; \sum_{m=1,\ldots,M} (-1)^{m+1} N^m \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \ldots \wedge dx^M \;\in\; \Omega_{M-1}(\partial\mathcal{M})$$

Auch: $dS = \langle N | d\mathbf{S} \rangle$ wobei $d\mathbf{S}$ passende vektorwertige Form

Divergenz zu Vektorfeld $x \in \mathcal{M} \mapsto X(x) = (X^1, \ldots, X^M)^T \in T_x\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^M$

$$\mathrm{div}(X) \;=\; \partial_{x^m} X^m \;=\; \sum_{m=1,\ldots,M} \partial_{x^m} X^m$$

Satz 11.25 (Gauss'scher Divergenzsatz)

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{div}(X)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M \;=\; \int_{\partial\mathcal{M}} \langle N | X \rangle \, dS$$

Formeln im Fall $M = 3$

Dann also $\partial\mathcal{M}$ 2-dimensionale Fläche

Normalenfeld in $x \in \partial\mathcal{M}$:

$$N(x) \;=\; \pm\,\frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} \qquad , \qquad v_1, v_2 \in T_x\partial\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Hierbei ist $\times$ Kreuzprodukt und $\|\,.\,\|$ euklidische Länge (Skalarprodukt)

Vorzeichen so gewählt, dass $x + t\,N(x) \notin \mathcal{M}$ für $t > 0$ klein. Außerdem:

$$d\mathbf{S} \;=\; \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ -dx^1 \wedge dx^3 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix}$$

In Karte $r = (r_1, r_2, r_3) = \varphi^{-1}(y^1, y^2) \in \partial\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ ist dies

$$N(r) \;=\; \pm\,\frac{\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r}{\|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\|}$$

Nun $d\mathbf{S}$ in gleicher Karte:

$$d\mathbf{S} = \begin{pmatrix} (\partial_{y^1} r_2\, dy^1 + \partial_{y^2} r_2\, dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_3\, dy^1 + \partial_{y^2} r_3\, dy^2) \\ (\partial_{y^1} r_3\, dy^1 + \partial_{y^2} r_3\, dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_1\, dy^1 + \partial_{y^2} r_1\, dy^2) \\ (\partial_{y^1} r_1\, dy^1 + \partial_{y^2} r_1\, dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_2\, dy^1 + \partial_{y^2} r_2\, dy^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{y^1} r_2 \partial_{y^2} r_3 - \partial_{y^1} r_3 \partial_{y^2} r_2 \\ \partial_{y^1} r_3 \partial_{y^2} r_1 - \partial_{y^1} r_1 \partial_{y^2} r_3 \\ \partial_{y^1} r_1 \partial_{y^2} r_2 - \partial_{y^1} r_2 \partial_{y^2} r_1 \end{pmatrix} dy^1 \wedge dy^2 = \partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\, dy^1 \wedge dy^2$$

Also in Karte φ:

$$(\varphi^{-1})^*(dS) = (\varphi^{-1})^*(\langle N | d\mathbf{S} \rangle) = \|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\|\, dy^1 \wedge dy^2$$

Also in Karte und bis auf Vorzeichen (was von Wahl der Karte abhängt):

$$\int_{\partial\mathcal{M}} f\, dS = \pm \int dy^1 \int dy^2\, f(r(y^1, y^2))\, \|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\|$$

Beweis von Satz 11.25: Satz von Stokes für die Form $\omega \in \Omega_{M-1}(\mathcal{M})$:

$$\omega = \sum_{m=1,\dots,M} (-1)^{m+1} X^m \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \ldots \wedge dx^M = \langle X | d\mathbf{x} \rangle$$

wobei $d\mathbf{x}$ ein Vektor von $(M-1)$-Formen definiert durch obige Gleichung (Einschränkung $i^* d\mathbf{x}$ auf $\partial\mathcal{M}$ ist genau $d\mathbf{S}$). Dann

$$d\omega = \mathrm{div}(X) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^M$$

und die Einschränkung $i^*\omega$ auf $\partial\mathcal{M}$ ist, für $v_1, \ldots, v_{M-1} \in T_x\partial\mathcal{M}$,

$$i^*\omega(v_1, \ldots, v_{M-1}) = \omega(v_1, \ldots, v_{M-1}) = \langle X | d\mathbf{S} \rangle (v_1, \ldots, v_{M-1})$$
$$= \langle X | N \rangle \langle N | d\mathbf{S} \rangle (v_1, \ldots, v_{M-1}) + \sum_{j=1,\dots,M-1} \langle X | w_j \rangle \langle w_j | d\mathbf{S} \rangle (v_1, \ldots, v_{M-1})$$

mit $w_1, \ldots, w_{M-1}$ ONB von $T_x\partial\mathcal{M}$, also $N, w_1, \ldots, w_{M-1}$ ONB von $\mathbb{R}^M$

Mit Rotationsinvarianz und Satz 8.29 folgt $\langle w_j | d\mathbf{S} \rangle (v_1, \ldots, v_{M-1}) = 0$

Also $i^*\omega = \langle X | N \rangle \, dS$ $\square$

Beispiel 11.26

Sei $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leqslant 1\}$ Ellipse zu $a, b > 0$
Parametrisierung von $\partial\mathcal{M}$ (strikt: 2 Karten) ist:

$$\varphi^{-1}(t) \;=\; (a\cos(t), b\sin(t)) \qquad , \qquad t \in [0, 2\pi)$$

In Karte $N(t) = (b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t))^{-\frac{1}{2}}(b\cos(t), a\sin(t))^T$. Also

$$\begin{aligned} dS \;&=\; \langle N|d\mathbf{S}\rangle \;=\; \langle N|(dy, -dx)^T\rangle \\ &=\; (b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t))^{-\frac{1}{2}}\big(b\cos(t)d(b\sin(t)) - a\sin(t)d(a\cos(t))\big) \\ &=\; \big(b^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)\big)^{\frac{1}{2}}dt \end{aligned}$$

Nun sei $X = (\alpha y, \beta x)$. Dann $\operatorname{div}(X) = 0$ und in der Tat

$$\int_{\partial\mathcal{M}}\langle N|X\rangle\, dS \;=\; \int_0^{2\pi}\left\langle\begin{pmatrix} b\cos(t) \\ a\sin(t)\end{pmatrix}\Big|\begin{pmatrix}\alpha b\sin(t) \\ \beta a\cos(t)\end{pmatrix}\right\rangle dt \;=\; 0$$

Klassischer Satz von Kelvin-Stokes

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Fläche mit Rand $\partial\mathcal{M}$

Sei $x \in \mathcal{M} \mapsto X(x) \in \mathbb{R}^3$ Vektorfeld (dies ist *nicht* Schnitt von $T\mathcal{M}$)

Betrachte die zugehörige 1-Form (Indexkonflikt wegen Hochziehen):

$$\omega \;=\; X^1 dx^1 + X^2 dx^2 + X^3 dx^3 \;=\; \langle X | d\mathbf{s} \rangle \;\in\; \Omega_1(\mathcal{M})$$

mit $d\mathbf{s} = (dx^1, dx^2, dx^3)^T$. Wir benötigen (mit Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} d\omega \;&=\; \sum_{i=1,2,3} (\partial_{x^i} X_{i+1} - \partial_{x^{i+1}} X_i) dx^i \wedge dx^{i+1} && \text{(zyklisch)} \\ &=\; \langle \nabla \times X | d\mathbf{S} \rangle \;=\; \langle \nabla \times X | N \rangle \, dS && \text{(wie in Satz 11.25)} \end{aligned}$$

Also folgt aus allgemeinem Satz von Stokes:

Satz 11.27 (Satz von Kelvin-Stokes)

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \times X | d\mathbf{S} \rangle \;=\; \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X | d\mathbf{s} \rangle$$