Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 3 (3.5.2024)

Aufgabe 11: Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die folgende, Primzahlen charakterisierende Äquivalenz:

$$n \text{ prim} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right) = 2.$$

Aufgabe 12: Sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … die Folge der Primzahlen. Für reelle Zahlen $x \geq 2$ werde definiert

$$A_x = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\} \quad \text{ und } \quad B_x = \left\{ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\pi(x)}) : a_i \in \left\{ 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right\} \right\}.$$

(1) Zeige: Jedes $n \in A_x$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_{\pi(x)}^{a_{\pi(x)}} = \prod_{1 \leq i \leq \pi(x)} p_i^{a_i} \quad \text{ mit } \quad a_i \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei gilt

$$0 \leq a_i \leq \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor.$$

Also ist

$$f_x : A_x \to B_x, \qquad \prod_{1 \leq i \leq \pi(x)} p_i^{a_i} \mapsto (a_1, \ldots, a_{\pi(x)})$$

wohldefiniert und injektiv.

(2) Zeige:

$$|A_x| = \lfloor x \rfloor, \quad |B_x| = (1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor)^{\pi(x)}, \quad |A_x| \leq |B_x|.$$

(3) Folgere:

$$\pi(x) \geq \frac{\log(\lfloor x \rfloor)}{\log(1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor)}.$$

(4) (Diese Teilaufgabe soll nur einen Weg aufzeigen, wie man die Abschätzung in (5) zeigen kann.) Zeige, dass für $x \geq 23$ gilt

$$\log(\lfloor x \rfloor) > \log(x-1) \geq \frac{3}{4} \log x$$

und

$$\log(1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor) \leq \log(1 + \frac{\log x}{\log 2}) \leq \frac{3}{2} \log \log x.$$

(5) Zeige, dass gilt

$$\pi(x) > \frac{\log x}{2 \log \log x} \text{ für alle } x \geq 23.$$

Aufgabe 13: Bestimme die größte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^\alpha}).$$

Datei: anazt_u3.tex. Version vom 8.5.2024

Aufgabe 14:

(1) Bestimme alle Primzahlzwillinge der Gestalt
$$2^n - 1, \quad 2^n + 1.$$

(2) Bestimme mindestens vier Primzahlzwillinge der Gestalt
$$3 \cdot 2^n - 1, \quad 3 \cdot 2^n + 1.$$

Aufgabe 15:

(1) Zeige: Sind $p_1, \dots, p_{10}$ zehn Primzahlen, sodass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit
$$p_{i+1} = p_i + m \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 9,$$
so gilt $210 \mid m$.

(2) Gibt es Primzahl-10-Tupel wie in (1)? Was liefert die Primzahl-k-Tupel-Vermutung oder Schinzels Hypothese H?