

Analysis I, II und III

Hermann Schulz-Baldes*

Wintersemester 2009/10, Sommersemester 2010, Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Relationen, Zahlen	2
2 Gruppen, Ringe, Körper	15
3 Die reellen Zahlen \mathbb{R}	24
4 Folgen reeller Zahlen	34
5 Vektorräume und die komplexen Zahlen	38
6 Unendliche Reihen	42
7 Topologische Grundlagen	55
8 Stetige Funktionen	67
9 Differenzialrechnung reeller Funktionen einer Variable	80
10 Riemann–Integral für Funktionen einer Variablen	98
11 Polynome	118
12 Fourier–Reihen	135
13 Lineare Operatoren	145
14 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	150
15 Nichtlineare Analysis	165
16 Lebesgue–Maß	178

*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstr. 1 $\frac{1}{2}$, D-91054 Erlangen, Germany. e-mail: schuba@mi.uni-erlangen.de, web: www.mi.uni-erlangen.de/~schuba

17 Lebesgue–Integral	192
18 Integrationstechniken: Satz von Fubini und Jacobi’sche Transformationsformel	201
19 Integration über Ränder und der Gauss’sche Satz	212
Literatur	220

Vielen Dank an Frau I. Moch, die die Notizen abgetippt hat, und an Herrn Ch. Schumacher und Herrn P. Seidel, die Korrektur gelesen haben. Selbstverständlich bleiben noch viele Fehler. Für deren Korrektur können Sie eine Mail an schuba@mi.uni-erlangen.de senden.

1 Mengen, Relationen, Zahlen

Georg Cantor (1845–1918): "Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten und wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen."

Objekte heißen Elemente.

X Menge

Beispiel und Bezeichnungen: $X = \{x, y, Z\}$

$x \in X$ "x Element von X" ähnlich: $u \notin X$

Bezeichnung für die leere Menge: \emptyset

Allgemeine Definitionen:

$A \subset X$ genau dann, wenn $(a \in A \implies a \in X)$

Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$

Beispiel: $X = \{x, y, Z\}$

$\implies \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{Z\}, \{x, y\}, \{y, Z\}, \{x, Z\}, \{x, y, Z\}\}$

Operationen auf Mengen:

Vereinigung $A \cup B = \{x \in X \mid \underbrace{x \in A \text{ und } x \in B}_{\text{"mit"}}\}$

Durchschnitt $A \cap B$

Differenz $A \setminus B = A$ ohne $B = \{a \in A \mid a \notin B\}$

Komplement von $A \subset X$ in X : $\mathbb{C}_X A = X \setminus A$ (oft auch $A^c = \mathbb{C}_X A$)

Mengentheoretisches Produkt

$$A \times B \underbrace{:=}_{\text{"definiert als"}} \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{geordnetes Paar}} \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$$

Regeln: für $A \subset X$ und $B \subset X$:

Idempotenz $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Kommutativität $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Assoziativität $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributivität $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Morgan-Regeln $\mathbb{C}_X(A \cup B) = (\mathbb{C}_X A) \cap (\mathbb{C}_X B)$

$\mathbb{C}_X(A \cap B) = (\mathbb{C}_X A) \cup (\mathbb{C}_X B)$

Begründungen (weil Regeln), z.B. 1. Morgan-Regel:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{C}_X(A \cup B) &\stackrel{\text{daraus folgt}}{\implies} x \notin A \cup B \\ &\implies x \notin A \text{ und } x \notin B \\ &\implies x \in \mathbb{C}_X A \text{ und } x \in \mathbb{C}_X B \\ &\implies x \in (\mathbb{C}_X A) \cap (\mathbb{C}_X B), \end{aligned}$$

also $\mathbb{C}_X(A \cup B) \subset (\mathbb{C}_X A) \cap (\mathbb{C}_X B)$.

Ähnlich (durch Umdrehen der Implikation): $(\mathbb{C}_X A) \cap (\mathbb{C}_X B) \subset \mathbb{C}_X(A \cup B)$

Viele weitere elementare Regeln, z.B.:

$$\begin{aligned}
A \cup \emptyset &= A & A \cap \emptyset &= \emptyset \\
(A \cap B = A) &\iff A \subset B \\
(A \times C) \cup (A \times B) &= A \times (C \cup B) \\
A \times \emptyset &= \emptyset = \emptyset \times A
\end{aligned}$$

1.1 Definition X, Y Mengen

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zu.
 X heißt Definitionsbereich, x in $f(x)$ heißt Argument.
 Y heißt Wertebereich.

$$\text{Bild}(f) := \{y \in Y \mid \underbrace{\exists}_{\text{"es existiert"}} x \in X \text{ mit } f(x) = y\} \subset Y$$

1.2 Definition $f : X \rightarrow Y$ Abbildung

$$(i) \ f \text{ injektiv} \iff \left(\underbrace{\forall}_{\text{"für alle"}} x, x' \in X, x \neq x' \text{ gilt } f(x) \neq f(x') \right)$$

$$(ii) \ f \text{ surjektiv} \iff (\forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y)$$

$$(iii) \ f \text{ bijektiv (eins-zu-eins, umkehrbar)} \iff f \text{ injektiv und surjektiv}$$

Beispiel (mit Schulstoff) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(i) \ f(x) = x^2 \text{ nicht injektiv, nicht surjektiv}$$

$$(ii) \ f(x) = x^3 \text{ bijektiv}$$

$$(iii) \ f(x) = x^3 - x \text{ surjektiv, nicht injektiv}$$

$$(iv) \ f(x) = x, \text{ dann } f = \text{id} = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

1.3 Definition $f : X \rightarrow Y$ Abbildung, dann ist $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad \text{für } B \subset Y$$

Falls f bijektiv ist, ist $f^{-1}(\{y\})$ einelementig $\forall y \in Y$ und somit kann die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ definiert werden durch $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$

Achtung! f^{-1} bezeichnet zwei verschiedene Objekte!

Zudem $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ (Letzteres ohnehin im Allgemeinen sinnlos)

Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = [0, \infty) \quad , \quad f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2] \quad , \quad f^{-1}\left(\underbrace{(-\infty, 4]}_{\substack{\text{unendlich} \\ \uparrow \\ \text{Intervall}}}\right) = [-2, 2]$$

1.4 Satz $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow V$ Abbildungen
 Definiere die Komposition:

$$g \circ f : X \rightarrow Z \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in X$$

(i) Dann gilt das Assoziativgesetz:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(ii) $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, falls f bijektiv

(iii) $f \circ \text{id}_X = f$ $\text{id}_Y \circ f = f$

Beweis (i) $\forall x \in X$ gilt:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

□

1.5 Definition Eine Teilmenge $R \subset X \times X$ heißt eine Relation auf X . Dann

(i) R reflexiv $\iff (x, x) \in R \quad \forall x \in X$

(ii) R symmetrisch $\iff ((x, y) \in R \iff (y, x) \in R)$

(iii) R antisymmetrisch $\iff ((x, y) \in R \text{ und } (y, x) \in R \implies x = y)$

(iv) R transitiv $\iff ((x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in R \implies (x, z) \in R)$

1.6 Definition (i) Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt Halbordnung auf X .

(ii) Eine Ordnung auf X ist eine Halbordnung, die zudem total ist, d.h. $\forall x, y \in X$ gilt entweder $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$.

Anstelle von $(x, y) \in R$ schreibt man dann oft auch $x \leq y$.

(iii) Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt Äquivalenzrelation. Anstelle von $(x, y) \in R$ schreibt man dann oft auch $x \sim y$ oder $x \approx y$.

Beispiele

1. $f : X \rightarrow X$ Abbildung. Dann ist

$$R = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times X \quad \text{Relation, auch genannt Graph von } f$$

$$R \text{ reflexiv} \iff f = \text{id}_X \iff R = \{(x, x) \mid x \in X\} \text{ Diagonale}$$

Gegeben eine Relation R auf X . Dann gilt

R Graph einer Funktion

$$\iff \forall x \in X \quad \underbrace{\exists}_{=1} y \in X \text{ mit } (x, y) \in R$$

"existiert genau ein"

$$\iff ((x, y) \in R \text{ und } (x, z) \in R \implies y = z)$$

2. (Mit Schulwissen)

Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$

$$\begin{aligned}n \sim m &\stackrel{\text{def.}}{\iff} n - m \text{ Vielfaches von } 5 \\ &\iff n - m \text{ durch } 5 \text{ teilbar} \\ &\iff n = m \pmod{5}\end{aligned}$$

Dann $2 \sim 7 \sim 12 \sim -3$ etc.

Idee: Fasse alle äquivalenten Elemente zusammen zu so genannten Klassen.

1.7 Definition \sim Äquivalenzrelation auf X

$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$ Äquivalenzklasse von x

Elemente aus $[x] \subset X$ heißen Repräsentanten von $[x]$.

1.8 Satz Zwei Äquivalenzklassen $[x], [x'] \subset X$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Beweis

$$\begin{aligned}y \in [x] \cap [x'] &\implies y \sim x \text{ und } y \sim x' \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{\implies} x \sim y \text{ und } y \sim x' \\ &\stackrel{\text{Transitivität}}{\implies} x \sim x', \text{ d.h. } [x] = [x']\end{aligned}$$

Somit: nicht disjunkt \implies gleich (Umkehrung trivial) □

1.9 Definition \sim Äquivalenzrelation auf X . Dann definiere:

$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ Menge der Äquivalenzklassen.

X/\sim heißt auch Quotient von \sim .

Beispiel \mathbb{Z} , \sim Gleichheit modulo 5

$$[1] = \{1, 6, 11, -4, -9, \dots\} = \{1 + 5 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 1 + 5\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], [3], [4]\} = \{[1], [2], [3], [4], [5]\}$$

Weitere Notationen: $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z} \pmod{5}$

Jetzt kommen wir zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Was bedeuten die Punkte?

Bemerkung manchmal auch ohne die Null definiert, d.h. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, dann $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Axiomatischer Zugang zu den natürlichen Zahlen mit Peano Axiomen:

1.10 Definition [Peano Axiome] \mathbb{N} ist eine Menge mit ausgezeichnetem Element $0 \in \mathbb{N}$ (die Null) und einer Abbildung $\mathcal{N} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (die Nachfolgerfunktion) mit

(P1) \mathcal{N} injektiv ($\mathcal{N}(n) = \mathcal{N}(m) \implies n = m$)

(P2) $0 \notin \mathcal{N}(\mathbb{N})$ (0 hat keinen Vorgänger)

(P3) $M \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und der Eigenschaft $\mathcal{N}(M) = M$. Dann $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen

1. Dann identifiziert man

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \mathcal{N}(0) & \mathcal{N}(\mathcal{N}(0)) & \mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{N}(0))) & \dots & \mathcal{N}^n(0) & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \end{array},$$

wobei $\mathcal{N}^n = \mathcal{N} \circ \mathcal{N}^{n-1} = \underbrace{\mathcal{N} \circ \dots \circ \mathcal{N}}_{n\text{-mal}}$

2. Konstruktion von \mathbb{N} aus der Mengenlehre möglich:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(\emptyset) = \{\emptyset\} = 0 \cup \{0\},$$

$$\mathcal{N}(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\},$$

d.h. allgemein $\mathcal{N}(n) = n \cup \{n\}$ für $n \neq 0$

Dann beweist man, dass (P1), (P2) und (P3) gelten (siehe [3]).

3. Wir zeigen später, dass \mathbb{N} durch Definition 1.10 eindeutig bestimmt ist.

1.11 Definition (i) *Addition natürlicher Zahlen* $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $n + 0 := n$
Dann induktiv (oder rekursiv) in $m \in \mathbb{N}$

$$n + \mathcal{N}(m) := \mathcal{N}(\underbrace{n + m}_{\text{schon bekannt}})$$

(ii) *Multiplikation* \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ähnlich durch

$$\begin{aligned} n \cdot 0 &:= 0 \\ n \cdot \mathcal{N}(m) &:= n \cdot m + m \end{aligned}$$

(iii) *Ordnung auf \mathbb{N}*

$$n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } m = n + k$$

Bemerkungen

1. Rechnen wie in der Schule, insbesondere Assoziativität $(n + m) + k = n + (m + k)$, Kommutativität $n + m = m + n$.
2. Überprüfe, dass \leq tatsächlich reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und total ist.
3. $n < m \stackrel{\text{def.}}{\iff} n + 1 \leq m$. Dann ist $<$ keine Ordnung (nicht reflexiv).

1.12 Satz (*Wohlordnungsprinzip für \mathbb{N}*) Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$, besitzt ein Minimum, d.h. $\exists m \in M$ mit $m \leq n \quad \forall n \in M$.

Beweis Gegenannahme: M hat kein Minimum. Setze

$$S = \{s \in \mathbb{N} \mid s \leq m \quad \forall m \in M\}$$

Dann ist $0 \in S$. Sei $s \in S$, dann $s \notin M$ (sonst Minimum)

$$\implies s < m \quad \forall m \in M$$

$$\implies s + 1 \leq m \quad \forall m \in M$$

$$\implies s + 1 \in S$$

$$\stackrel{(P3)}{\implies} S = \mathbb{N} \implies M = \emptyset \text{ Widerspruch.}$$

□

Achtung: nicht jede Menge $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$, hat ein Maximum!

1.13 Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Gegeben eine durch \mathbb{N} induzierte Folge von Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(Jede Aussage kann wahr oder falsch sein, z.B. eine richtige/falsche Gleichung.)

Es gelte:

(i) $A(0)$ wahr (Induktionsanfang)

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \implies A(n+1) \text{ richtig}$ (Induktionsschritt)

Dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Begründung Setze $M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ wahr}\}$.

Nach (i) ist $0 \in M$. Nach (ii) ist $\mathcal{N}(M) \subset M \stackrel{(P3)}{\implies} M = \mathbb{N}$

□

Bemerkung (Variation mit ähnlichem Beweis) $n_0 \in \mathbb{N}$

(i) $A(n_0)$ wahr

(ii) $\forall n \geq n_0 : (A(k) \text{ wahr für } n_0 \leq k \leq n \implies A(n+1) \text{ wahr})$

Dann $A(n)$ wahr $\forall n \geq n_0$.

Beispiele

$$1. \quad \sum_{k=0}^n k := 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^n k$$

↑
Summe über k von 0 bis n

Aussage: $A(n) : 2 \left(\sum_{k=0}^n k \right) = n(n+1)$

Frage: Gleichung richtig = $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$?

Anfang: $A(0)$ wahr, weil $0 = \sum_{k=0}^0 k \stackrel{?}{=} 0 \cdot (0+1) = 0$

Schritt:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{n+1} k &= 2 \left(\sum_{k=0}^n k + n + 1 \right) \stackrel{A(n)}{=} n(n+1) + 2(n+1) = (n+2)(n+1) \\ &= (n+1)((n+1)+1) \quad , \text{ d.h. } A(n+1) \text{ wahr.} \end{aligned}$$

2. Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 2 & & 1 & \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& & & & & & & & &
\end{array}$$

k -ter Eintrag in n -ter Zeile = $\binom{n}{k}$ Binominalkoeffizient, $0 \leq k \leq n$

Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ mit Anfang } \binom{0}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{n+1} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Behauptung $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

mit $0! = 1$ und $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1$

Beweis Induktion über n

Anfang für $n = 0$: $\frac{0!}{0!0!} = 1$

Schritt:

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{n(n-1) \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \dots \cdot 1} \underbrace{\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right)}_{\frac{n+1}{k+1}} \\
&= \frac{(n+1)n \dots \cdot (n-k+1)}{(k+1)k \dots \cdot 1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}
\end{aligned}$$

Also gleiches Bildungsgesetz erfüllt.

3. Binomische Formel für $a, b \in \mathbb{N}$ (später auch $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ mit } a^0 = 1, a^k = a \cdot a^{k-1} \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}$$

Begründung Induktion über n :

Anfang: $n = 0$ OK

Schritt:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
 &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}b^na \\
 &\quad + \binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
 &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right)a^nb + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right)a^{n-1}b^2 \\
 &\quad + \dots + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+2}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

Übung $(a_1 + \dots + a_p)^n = n! \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_p \leq p \\ i_1 + \dots + i_p = p}} \frac{a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p}}{i_1! \dots i_p!}$ Multinomialformel

(Induktion über p)

Übung: $6 \sum_{k=0}^n n^2 \stackrel{?}{=} n(2n+1)(n+1)$

Problem beim Induktionsbeweis: bevor es durchgeführt werden kann, muss die Formel bekannt sein.

Theoretische Anwendung des Induktionsprinzips:

1.14 Satz (Einzigkeit von \mathbb{N} nach Dirichlet, 1831–1916)

Seien $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, 0)$ und $(\tilde{\mathbb{N}}, \tilde{\mathcal{N}}, \tilde{0})$ zwei Tripel mit $(P1)$, $(P2)$, $(P3)$

$\implies \exists$ Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$ mit

$$\varphi(0) = \tilde{0} \quad \text{und} \quad \varphi = \mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \circ \varphi$$

Beweis Betrachte Mengen $H \subset \mathbb{N} \times \tilde{\mathbb{N}}$ mit

(i) $(0, \tilde{0}) \in H$

(ii) $(n, \tilde{n}) \in H \implies (\mathcal{N}(n), \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{n})) \in H$

Insbesondere erfüllt $\mathbb{N} \times \tilde{\mathbb{N}}$ Eigenschaften (i) und (ii).

Zudem bleiben die Eigenschaften (i) und (ii) unter Durchschnitten erhalten.

Minimale Menge mit (i) und (ii) ist: $D = \bigcap_{H \text{ mit (i)+(ii)}} H$

Behauptung D Graph einer Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$. Hierzu Induktion über $n \in \mathbb{N}$

$A(n) : n \in \mathbb{N} \implies \exists \tilde{n} \in \tilde{\mathbb{N}} \text{ mit } (n, \tilde{n}) \in D$

Anfang $A(0) : \text{Nimm an } (0, \tilde{m}) \in D \text{ mit } \tilde{m} \neq \tilde{0}$

$\implies (0, \tilde{m})$ kann von D eliminiert werden, ohne (i) und (ii) zu verletzen
 \implies Widerspruch zur Minimalität von D

Schritt $A(n) \implies A(n+1)$:

Wieder sei $(\mathcal{N}(n), \tilde{m}) \in D$ mit $\tilde{m} \neq \tilde{\mathcal{N}}(\tilde{n})$.

Wiederum könnte dieser entfernt werden. Widerspruch.

Also $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$ mit $D = \{(n, \varphi(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Nach (i) $\varphi(0) = \tilde{0}$

und nach (ii) $(n, \varphi(n)) \in D \implies (\mathcal{N}(n), \tilde{\mathcal{N}}(\varphi(n))) = (\mathcal{N}(n), \varphi(\mathcal{N}(n))) \in D$ (weil Graph)

$\implies \tilde{\mathcal{N}}(\varphi(n)) = \varphi(\mathcal{N}(n)) \quad \forall n$, d.h. $\tilde{\mathcal{N}} \circ \varphi = \varphi \circ \mathcal{N}$

Genauso: $\exists \tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\tilde{\varphi}(\tilde{0}) = 0 \quad \tilde{\varphi} \circ \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \circ \tilde{\varphi}$

Behauptung $\tilde{\varphi} \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{N}}$, d.h. $\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}$

Begründung wieder Induktion

Anfang $\tilde{\varphi} \circ \varphi(0) = \tilde{\varphi}(\varphi(0)) = \tilde{\varphi}(\tilde{0}) = 0$

Schritt $\tilde{\varphi} \circ \varphi(\mathcal{N}(n)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\mathcal{N}}(\varphi(n))) = \mathcal{N}(\tilde{\varphi} \circ \varphi(n)) = \mathcal{N}(n)$ □

Ein Teil der Zahlentheorie befasst sich mit \mathbb{N} .

1.15 Definition $p \in \mathbb{N}$ Primzahl $\iff p > 1$ und $\nexists n, m \in \mathbb{N}, 1 < n, m < p$ mit $p = n \cdot m$

1.16 Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau eine Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ mit p_1, \dots, p_k Primzahlen.

Beweis (Euklid, Gauss) Existenz: Betrachte

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat keine Primfaktorzerlegung und } n > 1\}$$

M enthält keine Primzahl. **Annahme:** $M \neq \emptyset$

Nach Wohlordnungsprinzip $\exists m = \min(M) \in M$.

m nicht Primzahl $\implies m = ab$ mit $a < m$ und $b < m$

Da m keine Zerlegung hat, müsste dies für a oder b gelten, d.h. $a \in M$ oder $b \in M$. Widerspruch zur Minimalität von m .

Eindeutigkeit: Nimm an, dass zwei Zerlegungen vorliegen

$$n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k = p'_1 \cdot \dots \cdot p'_{k'}$$

Man darf annehmen $p_i \neq p'_j \quad \forall i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k'$ (sonst teile durch alle gemeinsamen Faktoren)

p_1 teilt n , also auch einen Faktor p'_j . Widerspruch. □

Bemerkung Widerspruchsbeweis konstruiert die Faktorisierung nicht!

1.17 Satz Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis nach Euler:

Gegenannahme \exists endlich viele Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k

Betrachte $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$, nicht durch p_1, \dots, p_k teilbar.

Sei $q > 1$ kleinster Teiler von n .

Dann ist q eine Primzahl, aber $q \neq p_1, \dots, p_k$ □

Jetzt werden die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und die rationalen Zahlen \mathbb{Q} eingeführt.

Mögliche Definitionen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ganze Zahlen

oder $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c} -n \\ \end{array} \right) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}}_{\text{neue Zahlen}}$

Besser: Gleichungen

$$a = b + n \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

können nach $n \in \mathbb{Z}$ gelöst werden. Definiere \mathbb{Z} als Lösungen dieser Gleichungen gegeben durch ein Paar $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Viele Gleichungen haben gleiche Lösung

\implies Quotient mit Äquivalenzrelation \sim auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b$$

Überprüfen: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, d.h.

$$(a, b) \sim (a, b) \quad , \quad (a, b) \sim (a', b') \iff (a', b') \sim (a, b)$$

und

$$\begin{aligned} a + b' = a' + b, \quad a' + b'' = a'' + b' &\xrightarrow{\text{Summe}} a + b' + a' + b'' = a' + b + a'' + b' \\ &\implies a + b'' = a'' + b \end{aligned} \quad \square$$

Jetzt definiere: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{[(a, b)] \mid a, b \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Bemerkung $[(a, b)]$ entspricht $a - b \in \mathbb{Z}$.

Dann ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ durch folgende Einbettung gegeben: $n \in \mathbb{N} \mapsto [(n, 0)] \in \mathbb{Z}$

Operationen $+$ und \cdot sind auf \mathbb{N} definiert, somit auch auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') &:= (a + a', b + b') \\ (a, b) \cdot (a', b') &:= (aa' + bb', ab' + ba') \end{aligned}$$

(bei Letzterem denke an $(a - b)(a' - b') = \dots$)

Nun auf $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$:

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(a', b')] &:= [(a + a', b + b')] \\ [(a, b)] \cdot [(a', b')] &:= [(aa' + bb', ab' + ba')] \end{aligned}$$

1.18 Lemma Diese Operationen sind wohl definiert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

Beweis für +: Sei

$$(c, d) \sim (a, b) \quad \text{und} \quad (c', d') \sim (a', b'),$$

d.h.

$$c + b = d + a \quad \text{und} \quad c' + b' = d' + a' \tag{1.1}$$

Zu zeigen für +:

$$\begin{aligned} & (a + a', b + b') \sim (c + c', d + d') \\ \iff & a + a' + d + d' = b + b' + c + c' \\ \iff & a' + d' = b' + c' \\ \iff & 0 = 0 \quad \text{wahr} \end{aligned}$$

Zu zeigen für ·:

$$aa' + bb' + cd' + dc' = cc' + dd' + ba' + ab', \text{ wenn (1) gilt.}$$

Betrachte den Fall

$$\begin{aligned} a - b \geq 0 & \iff c - d \geq 0 \\ a' - b' \geq 0 & \iff c' - d' \geq 0 \end{aligned}$$

Dann Gleichung äquivalent zu (alles mit positiven Termen!)

$$\begin{aligned} & a(a' - b') + cd' + dc' = cc' + dd' + b(a' - b') \\ \iff & a(a' - b') + d(c' - d') = c(c' - d') + b(a' - b') \\ \iff & (a - b)(a' - b') = (c - d)(c' - d') \\ \stackrel{1}{\iff} & (a - b)(c' - d') = (a - b)(c' - d') \quad \text{wahr} \end{aligned}$$

Andere drei Fälle ähnlich. □

Bemerkungen

1. + und · in \mathbb{N} stimmen Definition in \mathbb{Z} überein.
2. Rechnen wieder wie in der Schule

Konstruktion der rationalen Zahlen \mathbb{Q} (nach ähnlicher Prozedur wie der Konstruktion von \mathbb{Z} aus \mathbb{N}): Gleichungen

$$p = xq \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

können in \mathbb{Q} gelöst werden

$\mathbb{Q} :=$ Äquivalenzklassen von Gleichungen mit gleicher Lösung
Definiere Äquivalenzrelation \approx auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$(p, q) \approx (p', q') \iff pq' = qp'$$

Überprüfe: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität

Definiere: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx = \{[(p, q)] \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Bemerkung Anstelle von $[(p, q)]$ schreibe auch $\frac{p}{q}$ (wie üblich)

Kürzen entspricht dann Übergang zu anderem Repräsentanten

Operationen $(p, q) + (p', q') = (pq' + qp', qq')$ (wie $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$)
 $(p, q) \cdot (p', q') = (pp', qq')$ (wie $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$)

1.19 Lemma $+$ und \cdot auf \mathbb{Q} wohl definiert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten

Begründung Für Multiplikation (ähnlich für Addition):

Seien $(p, q) \approx (r, s) \iff ps = qr$ und $(p', q') \approx (r', s') \iff p's' = q'r'$

Frage: $(p, q) \cdot (p', q') \sim (r, s) \cdot (r', s')$

$\iff (pp', qq') \sim (rr', ss')$

$\iff pp'ss' = qq'rr' = qrq'r = psp's'$ wahr □

Also $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definiert durch

$$[(p, q)] + [(p', q')] := [(p, q) + (p', q')] \quad , [(p, q)] \cdot [(p', q')] := [(p, q) \cdot (p', q')]$$

wohl definiert. Eigenschaften:

1.20 Lemma $(\mathbb{Q}, +)$ ist kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 = [(0, 1)] = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$, d.h. es gelten folgende Eigenschaften:

(i) (Assoziativität) $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

(ii) (Neutrales Element) $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

(iii) (Inverses) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists x' \in \mathbb{Q}$ mit $x + x' = 0$

(iv) (Kommutativität) $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

Beweis (teilweise)

(i) $x = \frac{p}{q} \quad , \quad y = \frac{r}{s} \quad , \quad z = \frac{t}{n}$
 $(x + y) + z = \frac{ps+rq}{qs} + \frac{t}{n} = \frac{psn+rqn+qst}{qsn}$
 $x + (y + z) = \frac{p}{q} + \frac{rn+st}{sn} = \frac{psn+qrn+qst}{qsn}$

(iii) $x = \frac{p}{q} \implies x' = \frac{-p}{q} = -x$ □

Ähnlich erhält man:

1.21 Lemma $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element $1 = \frac{1}{1} = [(1, 1)]$, d.h.

(i) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

(ii) $x \cdot 1 = x$

(iii) $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \exists x' \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot x' = 1$

$$(iv) \quad x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Achtung! In (iii) ist $0 \cdot x' = 1$ **nicht** lösbar nach x' .

Zusammen ergeben Lemma 1.20 und 1.21 Punkte (i) und (ii) von:

1.22 Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ Körper, d.h. es gilt:

(i) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ kommutative Gruppe

(ii) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ kommutative Gruppe

(iii) (Distributivgesetz) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

(iv) $0 \neq 1$

Beweis Es verbleibt noch (iii), was eine Übung ist. □

2 Gruppen, Ringe, Körper

2.1 Definition G Menge versehen mit Abbildung (binärer Operation) $\circ : G \times G \rightarrow G$
 (G, \circ, e) Gruppe \iff (i), (ii), (iii) gelten, wobei

(i) $\forall a, b, c \in G$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Assoziativität)

(ii) \exists neutrales Element $e \in G$ mit $e \circ a = a$

(iii) $\forall a \in G \exists b \in G$ mit $b \circ a = e$ (Existenz von Inversen)
 Schreibweise: $b = a^{-1}$

Falls (iii) nicht gilt, heißt (G, \circ, e) Halbgruppe.

Falls zudem $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$, heißt (G, \circ, e) kommutativ oder abelsch.

$H \subset G$ Untergruppe $\iff (H, \circ, e)$ Gruppe

Beispiele

1. $(\mathbb{N}, +, 0)$ Halbgruppe, aber keine Gruppe, $e = 0$

2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ kommutative Gruppe, Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $e = 0$, Inverses $(a)^{-1} = -a$

3. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ kommutative Gruppe mit $e = 1$, Inverses von $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$

4. $p \in \mathbb{N}$. Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} gegeben durch

$$n \sim m \iff n - m = kp \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$[n] = \{n + kp \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\sim = \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], \dots, [p-1]\}$$

Addition $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p \quad [n] + [m] := [n + m]$ unabhängig vom Repräsentanten

$(\mathbb{Z}_p, +, [0])$ kommutative Gruppe mit $e = [0]$, genannt zyklische Gruppe

$$\text{Inverses } [n]^{-1} = [-n]$$

5. X Menge

$A = \{f \mid f : X \rightarrow X \text{ Abbildung}\}$

$\circ : A \times A \rightarrow A$ Hintereinanderausführung

(A, \circ, id_X) Halbgruppe, im Allgemeinen nicht-kommutativ, $e = \text{id}_X$

$G = \{f \in A \mid f \text{ bijektiv}\}$ Gruppe (Inverses existiert!)

Falls $X = \{1, 2, \dots, n\}$, so heißt $S_n = \{f \mid f = \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}$ symmetrische Gruppe.

6. Symmetriegruppen, z.B. regelmäßiges n -Eck

Diedergruppe $D_{2n} = \{\text{Rotationen um } k \frac{2\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1, \text{ Spiegelungen}\}$

Untergruppe $\mathbb{Z}_n = \{\text{nur Rotationen}\} \subset D_{2n}$

2.2 Satz (G, \circ, e) Gruppe

(i) $a^{-1} \circ a = e \implies a \circ a^{-1} = e$ (Linksinverses = Rechtsinverses)

(ii) $e \circ a = a \iff a \circ e = a$

(iii) Es gibt nur ein neutrales Element e .

(iv) Auch das Inverse ist eindeutig.

(v) Kürzungsregel $a \circ b = a \circ c \implies b = c$

(vi) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(vii) $(a^{-1})^{-1} = a$

Begründung

(i) Sei $a^{-1} \circ a = e$, dann $\exists b \in G$ mit $b \circ a^{-1} = e$.

$$\begin{aligned} a \circ a^{-1} &= e \circ (a \circ a^{-1}) = (b \circ a^{-1}) \circ (a \circ a^{-1}) = b \circ (a^{-1} \circ a) \circ a^{-1} \\ &= b \circ (e \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1} = e \end{aligned}$$

(ii) Gegeben $e \circ a = a$ und $a^{-1} \circ a = e$

$$a \circ e = a \circ a^{-1} \circ a \stackrel{(i)}{=} e \circ a = a$$

(iii) Gegeben zwei Einsen e, e' , so gilt

$$e = e' \circ e \stackrel{(ii)}{=} e'$$

(iv) Gegeben zwei Inverse a^{-1}, b

$$b = b \circ e = b \circ a \circ a^{-1} = e \circ a^{-1} = a^{-1}$$

(v) -(vii) Übung

□

2.3 Definition R Menge mit zwei Operatoren $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$

$(R, +, \cdot, 0)$ Ring \iff

(i) $(R, +, 0)$ kommutative Gruppe mit neutralem Element 0

(ii) \cdot assoziativ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(iii) Distributivgesetze $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Zudem: $(R, +, \cdot, 0)$ kommutativ $\iff a \cdot b = b \cdot a$

$(R, +, \cdot, 0)$ Ring mit Eins 1 $\iff \exists 1 \in R$ mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$

Bemerkung Inverses in $(R, +, 0)$ wird mit $-$ bezeichnet, d.h. $a - a = 0$.

Punkt \cdot wird oft weggelassen.

Beispiele

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0)$ kommutative Ringe mit Eins.
2. $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, [0])$ kommutativer Ring mit Eins $[1]$, wobei $[n] \cdot [m] = [nm]$ unabhängig von Repräsentanten.
3. Polynome in x mit Koeffizienten in \mathbb{Q} (später auch \mathbb{R}, \mathbb{C})

$$\mathbb{Q}[x] = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \mid n \in \mathbb{N}, p_k \in \mathbb{Q}, p_n \neq 0 \right\} \cup \{0\},$$

$$\text{Grad}(p) = \begin{cases} n & , \text{ falls } p = \sum_{k=0}^n p_k x^k, p_n \neq 0 \\ -\infty & , \text{ falls } p = 0 \end{cases}$$

$p, q \in \mathbb{Q}[x]$, dann $p + q, p \cdot q \in \mathbb{Q}[x]$ definiert durch

$$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^n (p_k + q_k) x^k \quad , \quad n = \max\{\text{Grad}(p), \text{Grad}(q)\}$$

$$= p(x) + q(x)$$

$$(p \cdot q)(x) = p(x)q(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^k p_\ell \cdot q_{k-\ell} \right) x^k \quad , \quad n = \text{Grad}(p) + \text{Grad}(q)$$

$(\mathbb{Q}[x], +, \cdot, 0)$ kommutativ mit Eins $e(x) = 1$

4. Menge der Matrizen bilden Ring, siehe Lineare Algebra.

2.4 Satz $(R, +, \cdot, 0)$ Ring. Dann $\forall a, b \in R$

- (i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- (ii) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
- (iii) $ab = (-a)(-b)$
- (iv) Falls R Eins 1 hat: $(-1) \cdot a = -a = a(-1)$

Beweis

- (i) $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \xrightarrow{\text{Kürzungsregel}} a \cdot 0 = 0$
- (ii) $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0$ Somit $(-a)b = -(ab)$
- (iii) + (iv) Übung □

2.5 Definition $(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper $\iff (K, +, \cdot, 0)$ Ring mit Null 0 und Eins 1 , so dass $0 \neq 1$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ abelsche Gruppe.

Bemerkungen

1. Anstelle von $a^{-1}b$ in $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ auch Schreibweise $\frac{1}{a}b = \frac{b}{a}$
2. $(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper \iff
 - (i) $(K, +, 0)$ abelsche Gruppe
 - (ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ abelsche Gruppe
 - (iii) Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$
 - (iv) $0 \neq 1$

Beispiele

1. \mathbb{Q} Körper, \mathbb{Z} nicht. Später: \mathbb{R}, \mathbb{C} Körper
2. $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot, [0], [1])$ Körper, $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\} = \{0, 1\}$, Verknüpfungstafel

+	0	1	·	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

 Inverses $1^{-1} = 1$,
 $(\mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}, \cdot)$ triviale Gruppe mit einem Element. Zu \mathbb{Z}_p etwas später mehr.

2.6 Satz $(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper, $a, b \in K$

- (i) $ab = 0 \implies a = 0$ oder $b = 0$ (Nullteilerfreiheit)
- (ii) Gleichung $ax = b$ mit $a \neq 0$ hat eindeutige Lösung $x \in K$

Beweis

(i) Sei $a \neq 0$ und $b \neq 0$, dann $a, b \in (K \setminus \{0\}, \cdot) \xrightarrow{\text{Gruppe}} a \cdot b \in K \setminus \{0\}$, dann $ab \neq 0$ (d.h. Negation gezeigt)

(ii) Falls $b \neq 0$, Lösung $x = a^{-1}b = \frac{b}{a}$ Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$

Falls $b = 0$ muss nach Voraussetzung und (i) $x = 0$ gelten. \square

2.7 Satz $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, [0], [1])$ Körper $\iff p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ Primzahl

Beweis \mathbb{Z}_2 schon oben

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ Ring klar noch zu zeigen $(\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$ abelsche Gruppe

abelsch, da $[n][m] = [nm] = [mn] = [m][n]$

p nicht Primzahl, dann $p = nm$ mit $1 < n, m < p \implies [n][m] = [p] = [0]$, somit Nullteiler, also \mathbb{Z} kein Körper, also Implikation " \implies " gezeigt durch Negation.

p Primzahl, zu zeigen: Inverses $[q]^{-1}$ existiert für $1 < q < p$

Setze $M = \{nq + mp \mid n, m \in \mathbb{Z}, nq + mp > 0\} \subset \mathbb{N}$

Wohlordnungsprinzip $\implies d = \min\{M\}$ existiert und $d \geq 1$

Behauptung $d = 1$

Begründung Sei $d \geq 2$.

Zerlege $p = sd + r$ mit Rest $0 \leq r < d$

$r = p - sd = p - s(nq + mp) = (-sn)q + (1 - sm)p$

$\implies r = 0$ nach Minimalität von d . Aber $r = 0$ Widerspruch zu p Primzahl.

Also $\exists n, m$ mit $nq + mp = 1$, d.h. $[n][q] + \underbrace{[mp]}_{=0} = [1] \implies [q]^{-1} = [n]$ \square

Bemerkung Klassifikation endlicher Körper zeigt, dass die Anzahl ihrer Elemente immer gleich p^n ist, mit p Primzahl und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2.8 Definition (vergleiche Definition 1.5 und 1.6) X Menge. Eine Ordnung \leq auf X ist eine Relation

$\{(x, y) \mid x \leq y, x, y \in X\}$ mit

(i) $x \leq x$ (Reflexivität)

(ii) $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$ (Antisymmetrie)

(iii) $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$ (Transitivität)

(iv) $\forall x, y \in X$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Totalität)

Dann heißt X geordnet.

Zudem definiere dann $x < y \iff (x \leq y \text{ und } x \neq y)$

Schreibweisen: $y \geq x \iff x \leq y$

$y > x \iff x < y$

Bemerkung (X, \leq) geordnet. Dann $\forall x, y \in X$

$$\text{entweder } x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } x > y \quad (2.1)$$

Umgekehrt: gegeben eine transitive Relation $<$ mit (2), dann definiert

$$x \leq y \iff (x < y \text{ oder } x = y)$$

eine Ordnung.

Detaillierter Nachweis: Übung

Beispiele

1. Bekannte Ordnungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und \mathbb{R}
2. Lexikographische Ordnung auf X^2 , wenn (X, \leq) geordnet:

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \iff (x_1 < y_1 \text{ oder } (x_1 = y_1 \text{ und } x_2 < y_2))$$

Ähnlich: Lexikographische Ordnung auf $X^n = X \times \dots \times X$, z.B. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

2.9 Definition $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *geordneter Körper* \iff

(i) $(K, +, \cdot, 0, 1)$ Körper

(ii) (K, \leq) geordnet

(iii) $\forall a, b, c \in K : a < b \implies a + c < b + c$ (Verträglichkeit der Addition)

(iv) $\forall a, b \in K : a > 0, b > 0 \implies a \cdot b > 0$ (Verträglichkeit der Multiplikation)

Achtung: Lexikographische Ordnung macht \mathbb{C} nicht zu geordnetem Körper (Vorgriff).

Beispiel \mathbb{Q} geordneter Körper, aber \mathbb{Z}_p , p Primzahl, **nicht**, weil $[0] < [1] \not\Rightarrow [p-1] < [p] = [0]$

2.10 Satz (Rechenregeln) K geordneter Körper

(i) $a > b \iff a - b > 0$

(ii) $a > b$ und $c > d \implies a + c > b + d$

(iii) $a > b, c > 0 \implies ac > bc$

(iv) $a > 0 \implies -a < 0$

(v) $a \neq 0 \implies a^2 > 0$

(vi) $1 > 0$

$$(vii) \ a > b > 0 \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$$

$$(viii) \ a > b > 0 \implies \frac{a}{b} > 1$$

Beweis

$$(i) \ a > b \stackrel{\text{Def 9(iii)}}{\iff} a + (-b) > b + (-b) \iff a - b > 0$$

$$(ii) \ a > b \stackrel{\text{Def 9(iii)}}{\implies} a + c > b + c > b + d$$

$$(iii) \ a > b \stackrel{(i)}{\implies} a - b > 0 \stackrel{\text{Def 9(iv)}}{\implies} (a - b)c > 0 \implies ac - bc > 0 \stackrel{(i)}{\implies} ac > bc$$

$$(iv) \ a > 0 \stackrel{\text{Def 9(iii)}}{\implies} a - a > -a \implies 0 > -a$$

$$(v) \ a \neq 0 \implies a > 0 \text{ oder } a < 0$$

Falls $a > 0$ ist $a^2 = aa > 0$ (nach Def. 2.9(iv)).

Falls $a < 0 \implies -a > 0 \implies (-a)(-a) = a^2 > 0$

(vi) Wegen $1 = 1 \cdot 1$ und (v)

$$(vii) \ a^{-1} = \underbrace{a^{-1}a}_{=1>0} \underbrace{a}_{>0} > 0 \text{ nach Def. 2.9(iv). Also}$$

$$\begin{aligned} a > b &\stackrel{(iii)}{\implies} 1 = aa^{-1} > ba^{-1}, \text{ weil } a^{-1} > 0 \\ &\implies b^{-1} > b^{-1}ba^{-1} = a^{-1} > 0 \end{aligned}$$

(viii) Klar, da $a > b \implies ab^{-1} > bb^{-1} = 1$

□

2.11 Definition K geordneter Körper

$$(i) \ |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad \text{Betrag}$$

$$(ii) \ \text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad \text{Signum oder Vorzeichen}$$

2.12 Satz K geordneter Körper, $a, b \in K$

$$(i) \ a = |a|\text{sgn}(a)$$

$$(ii) \ |-a| = |a|$$

$$(iii) \ |a| \geq 0 \text{ und } (|a| = 0 \iff a = 0)$$

$$(iv) \ |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

$$(v) \ |a| - |b| \leq |a + b|$$

Beweis nur (iv): $\pm a \leq |a|$ $\pm b \leq |b|$
 $\implies a + b \leq |a| + |b|$ und $-a - b = -(a + b) \leq |a| + |b|$
 (v) $|a| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$ □

2.13 Satz (Ungleichungen in geordnetem Körper K)

(i) (Bernoullische Ungleichung) Für $a > -1$ gilt $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $a_n, b_n \in K$, $n = 1, \dots, N$

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n b_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N b_n^2 \right)$$

(iii) (Geometrisches und arithmetisches Mittel) $a_n \in K$, $a_n > 0$, $n = 1, \dots, N$

$$a_1 \dots a_N \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \right)^N$$

Beweis

(i) Übung

(ii) Schreibe \sum_n für $\sum_{n=1}^N$.

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} \sum_{n,m} (a_n b_m - a_m b_n)^2 \quad (\text{weil Summe pos. Terme}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,m} a_n^2 b_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{n,m} a_m^2 b_n^2 - \sum_{n,m} a_n b_m a_m b_n \\ &= \sum_{n,m} a_n^2 b_m^2 - \sum_{n,m} a_n b_n b_m a_m \\ &= \left(\sum_n a_n^2 \right) \left(\sum_m b_m^2 \right) - \left(\sum_n a_n b_n \right)^2 \end{aligned}$$

(iii) Induktion über N

Anfang $N = 1$ klar

Schritt $N - 1$ nach N :

Ordne $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ (o.B.d.A.)

Setze $M = \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

Dann $a_1 \leq M \leq a_N$

Setze:

$$b = a_1 + a_N - M \tag{2.2}$$

Dann $Mb - a_1 a_N = M(a_1 + a_N - M) - a_1 a_N = (M - a_1)(a_N - M) > 0$
 $\implies a_1 a_N \leq Mb \implies$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_N &\leq b a_2 \dots a_{N-1} M \\ &\leq \left(\frac{b + a_2 + \dots + a_{N-1}}{N-1} \right)^{N-1} M \quad (\text{Induktionsannahme}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \left(\frac{NM}{N-1} - \frac{M}{N-1} \right)^{N-1} M = M^{N-1} M = M^N \end{aligned}$$

□

2.14 Definition K geordneter Körper

K archimedisch $\iff \forall a \in K \exists n \in \mathbb{N}$ mit $1 + 1 + \dots + 1 = n \cdot 1 > a$

Beispiel \mathbb{Q} ist archimedisch, \mathbb{Z}_p nicht (sogar nicht geordnet!), \exists geordnete, aber nicht archimedische Körper (rationale Funktionen)

Bemerkung K archimedisch $\implies \exists$ injektives $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow K$, d.h. \mathbb{Q} Unterkörper von K

2.15 Definition K geordneter Körper, $M \subset K$, $M \neq \emptyset$

(i) M nach oben beschränkt mit oberer Schranke $a \in K$

$$\iff m \leq a \quad \forall m \in M$$

(ii) Ist a obere Schranke von M und $a \in M$, dann heißt $a = \max(M)$ Maximum von M .

(iii) $s \in K$ heißt Supremum von M , Schreibweise: $s = \sup(M) \iff s$ obere Schranke von M und es gibt keine kleinere obere Schranke von M

Ähnlich: definiere von unten beschränkt, untere Schranke, Minimum, Infimum

Bemerkungen

1. M endliche Menge (d.h. endlich viele Elemente), dann existiert $\max(M)$. Im Allgemeinen jedoch nicht, z.B.

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} \subset \mathbb{Q}$$

hat kein Maximum, wohl aber $\sup(M) = 1 \in \mathbb{Q}$.

2. Im Allgemeinen existiert auch kein Supremum, z.B.

$$M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

Dann $\sup(M)$ gleich $\sqrt{2}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ wegen folgendem

2.16 Satz Die Gleichung $x^2 = p$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ für Primzahl p .

Beweis (Euklid) Nimm an $x = \frac{k}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd

$$\implies n^2 = pm^2 \implies n^2 \text{ durch } p \text{ teilbar.}$$

$$\implies n \text{ durch } p \text{ teilbar, d.h. } n = pr \text{ mit } r \in \mathbb{Z}$$

$$\implies p^2 r^2 = pm^2 \implies pr^2 = m^2 \implies m \text{ auch durch } p \text{ teilbar. Widerspruch.}$$

□

2.17 Definition Ein geordneter Körper heißt *ordnungsvollständig*

\iff jede nicht leere von oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum

\iff jede nicht leere von unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum

Bemerkung Nach einem Satz von Dedekind gibt es im Wesentlichen nur einen ordnungsvollständigen, geordneten Körper, nämlich \mathbb{R} .

3 Die reellen Zahlen \mathbb{R}

Unzulänglichkeiten der rationalen Zahlen:

1. algebraischer Grund: schon quadratische Gleichungen wie $x^2 = 2$ haben keine Lösung in \mathbb{Q} .
2. analytischer Grund: sup und inf beschränkter Mengen existieren nicht.
3. geometrischer Grund: z.B. goldener Schnitt φ erfüllt per Definition

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} \quad \text{unendlicher Kettenbruch}\end{aligned}$$

$$\varphi \notin \mathbb{Q}, \quad \varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ als positive Lösung von } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

a b

Möglichkeiten zur Konstruktion von \mathbb{R} :

1. Dedekindsche Schnitte, z.B. Ebbinghaus "Zahlen"
2. Intervallschachtelungen, siehe Ebbinghaus
3. Vervollständigung von \mathbb{Q} mit Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (nach Cantor)

Vorteil von 3.: gleiches Vorgehen bei Funktionenräumen, deswegen hier dieser Zugang.

3.1 Definition K archimedisch geordneter Körper (wie \mathbb{Q} , später auch \mathbb{R})

(i) Abbildungen $a : \mathbb{N} \rightarrow K$ heißen Folgen in K

Schreibweise: $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(ii) Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c \in K$

$\iff \forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|c - a_n| < \varepsilon \forall n \geq N$

Dann sagt man: a ist konvergent mit Grenzwert oder Limes c .

(iii) Eine Folge in K , die gegen keinen Grenzwert konvergiert, heißt divergent.

(iv) Eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K heißt Cauchy-Folge

$\iff \forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m \geq N$

Bemerkung Diese Begriffe können immer für Folgen in einer Menge X definiert werden, wenn ein Abstand $d(x, y) = |x - y|$ zwischen Punkten $x, y \in X$ vorliegt mit $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$, sowie $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Vergleiche Kap. 6 (Topologische Grundlagen)

3.2 Satz Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = N(\frac{\varepsilon}{2})$ so, dass

$$|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Dann, für $n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - c + c - a_m| \leq |a_n - c| + |a_m - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Beispiel für nicht-konvergierte Cauchy-Folge in \mathbb{Q} (Somit Umkehrung von Satz 3.22 in $K = \mathbb{Q}$ falsch!)

Definiere $a_0 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$. Falls a_n konvergent,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \frac{1}{1+c} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$c^2 + c = c + 1 + 1 \implies c^2 = 2 \implies c \notin \mathbb{Q}$$

Aber trotzdem Cauchy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

Mit $a_n \geq 1$ folgt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4} \leq \dots \leq \frac{1}{4^n} \underbrace{|a_1 - a_0|}_{=1} = \frac{1}{4^n} \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
 |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-2} - a_{n+k-3}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\
 &\leq \left(\frac{1}{4^{n+k-1}} + \frac{1}{4^{n+k-2}} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4^n} \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{4^\ell} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{4^n} \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}} \frac{1}{2} < \frac{1}{4^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4^n},
 \end{aligned}$$

weil $\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell \right) (1-x) = (1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) - (x+x^2+\dots+x^k) = 1-x^k$ (geometrische Reihe).

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle N so, dass $\frac{1}{4^N} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 4^N$ (archimedisch). Dann $|a_m - a_n| < \varepsilon \forall n, m \geq N$, also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich Cauchy-Folge.

3.3 Definition Ein archimedisch geordneter Körper heißt vollständig \iff jede Cauchy-Folge konvergent.

Bemerkung \mathbb{Q} nicht vollständig, aber \mathbb{R} wird es sein.

Später: vollständig \implies sup und inf existieren (ordnungsvollständig).

Ziel: \mathbb{R} = Klassen von Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} mit gleichem Limes = Cauchy-Folgen in \mathbb{Q}/\sim , wobei \sim Übereinstimmung bis auf Nullfolgen.

Mit dieser Definition wird \mathbb{R} vollständig sein!

Bezeichnung $\mathcal{C} = \{\text{Cauchy-Folgen in } \mathbb{Q}\}$

3.4 Satz Seien $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Dann sind die Summen- und Produktfolge

$$a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad a \cdot b = (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

auch Cauchy-Folgen, d.h. in \mathcal{C} .

Beweis Zunächst Summe $c = a + b = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Nach Voraussetzung $\exists N_a = N_a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $N_b = N_b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ mit

$$\begin{aligned}
 |a_n - a_m| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_a \\
 |b_n - b_m| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_b
 \end{aligned}$$

Dann für $n, m \geq N = \max\{N_a, N_b\}$

$$\begin{aligned}
 |c_n - c_m| &= |a_n + b_n - a_m - b_m| \\
 &\leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Somit $c = a + b$ Cauchy. □

Vorbereitung Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Begründung Zu $\varepsilon = 1$ wähle N so, dass

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N.$$

Sei $m = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}$ (existiert!)

Dann $|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + m = s$ und die Vorbereitung ist gezeigt.

Somit $\exists s \in \mathbb{Q}$ mit

$$|a_n| \leq s, \quad |b_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2s}\right)$ mit $\forall n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2s} \quad \text{und} \quad |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2s}.$$

Dann für $d_n = a_n b_n$ und $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |d_n - d_m| &= |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \\ &\leq |a_n| |b_n - b_m| + |a_n - a_m| |b_m| \\ &\leq s \frac{\varepsilon}{2s} + s \frac{\varepsilon}{2s} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $d = ab$ auch Cauchy-Folge. □

Somit assoziative (!) und kommutative (!) binäre Operationen

$$+, \cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \quad \text{mit Distributivgesetz}$$

Zudem injektive und mit $+, \cdot$ verträgliche Einbettung $I : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{C}$ gegeben durch konstante Folge $I(x) = (x)_{n \in \mathbb{N}}$.

Neutrale Elemente in \mathcal{C} sind $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ und $1 = (1)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(\mathcal{C}, +, \cdot)$ Ring, aber kein Körper (kein multiplikatives Inverses, da Folgen $a_n = 0$ haben können, ohne $0 = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ zu sein).

\mathcal{C} zu groß, um $\mathbb{R} = \mathcal{C}$ zu definieren (viele Cauchy-Folgen haben gleichen Limes) \implies Übergang zu einem Quotienten (kleiner!)

3.5 Definition (i) Folge in K heißt Nullfolge \iff sie konvergiert gegen 0.

Bezeichnung: $\mathcal{N} = \{\text{Nullfolgen in } \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{C}$ (nach Satz 3.2)

(ii) Auf \mathcal{C} definiere eine Relation \sim durch

$$\begin{aligned} a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = b &\iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge} \\ &\iff a - b \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

3.6 Satz \sim Äquivalenzrelation auf \mathcal{C}

Beweis Reflexivität, Symmetrie offensichtlich

Transitivität: $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h. $\exists N = N(\frac{\varepsilon}{2})$ mit $\forall n \geq N$

$$|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N, \text{ d.h. } a - c \in \mathcal{N} \quad \square$$

3.7 Definition Die reellen Zahlen sind die Äquivalenzklassen rationaler Cauchy-Folgen: $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim$.

3.8 Satz Auf $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$ sind die Operationen

$$[a] + [b] := [a + b] \quad [a] \cdot [b] = [ab]$$

wohl definiert und machen $(\mathbb{R}, +, \cdot, [0], [1])$ zu einem Körper.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Unterkörper mittels der injektiven Abbildung $I(x) = [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$.

Beweis Seien $n, n' \in \mathcal{N}$ Nullfolgen. Dann $[a + n] = [a]$ und $[b + n'] = [b]$.

Fakt $n + n' \in \mathcal{N}$, $n \cdot a \in \mathcal{N} \quad \forall a \in \mathcal{C}$ (d.h. \mathcal{N} so genanntes Ideal in \mathcal{C}).

Begründung $n + n'$ klar (teile in $\frac{\varepsilon}{2}$), $n \cdot a$ verwerde, dass Cauchy-Folge beschränkt.

Also:

$$[a + n] + [b + n'] = [a + b + \underbrace{n + n'}_{\in \mathcal{N}}] = [a + b] = [a] + [b]$$

$$[a + n][b + n'] = [ab + \underbrace{an' + bn + nn'}_{\in \mathcal{N}}] = [ab] = [a][b]$$

Somit Operationen wohl definiert.

Assoziativität und Kommutativität offensichtlich

Additives Inverses: $-[a] = -[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$

Multiplikatives Inverses zu $a = [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \neq 0 = [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = \mathcal{N}$

Also: Negation von $(\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n| < \varepsilon)$

$\iff \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N$ mit $|a_n| > \varepsilon$

Zu diesem ε wähle $\tilde{N} = \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2})$, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq \tilde{N} \quad (\text{Cauchy-Folge})$$

Sei $|a_N| > \varepsilon$ für ein $N > \tilde{N}$. Dann $\forall n \geq N$

$$|a_n| = |a_n + a_n - a_N| \geq |a_N| - |a_n - a_N| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $b_n = \begin{cases} \frac{1}{1} & n \geq N \\ 1 & n \leq N \end{cases}$ (jetzt wohl definiert!)

Es gilt $[a][b] = [1 + n] = [1]$ mit $n \in \mathcal{N}$.

Letzte Behauptung offensichtlich. □

3.9 Satz $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$ wird zum geordneten Körper mittels

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] > [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \iff \exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n - b_n > \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Dies ist verträglich mit Ordnung auf \mathbb{Q} .

Beweis Zunächst: Unabhängigkeit von gewählten Repräsentanten klar (unterteile ε , um Nullfolgen zu eliminieren!).

Einfach: Transitivität, Verträglichkeit mit $+$ und \cdot und Ordnung auf \mathbb{Q}

Zu zeigen (für Totalität, Bemerkung nach Def. 2.8) ist das Trichotomiegesetz:

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy in } \mathbb{R} \implies \begin{cases} \text{entweder} & [a] > 0 \\ \text{oder} & [a] = [0] \\ \text{oder} & [a] < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{entweder} & \exists \varepsilon_+ \exists N, \quad \forall n \geq N_+ \quad a_n > \varepsilon_+ & (a) \\ \text{oder} & \forall \varepsilon_0 > 0 \exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 \quad |a_n| < \varepsilon_0 & (b) \\ \text{oder} & \exists \varepsilon_- \exists N_-, \quad \forall n \geq N_- \quad a_n < -\varepsilon_- & (c) \end{cases}$$

Nimm an: nicht (a) und nicht (b). Zeige (c).

Nicht (a) $\iff \forall \varepsilon_+ \quad \forall N_+ \exists n_+ \geq N_+$ mit $a_{n_+} \leq \varepsilon_+$

Nicht (b) $\iff \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_0 \exists n_0 \geq N_0$ mit $|a_{n_0}| \geq \varepsilon_0$

Insbesondere wähle $\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon_0}{3}$. Dann $\exists N = N(\frac{\varepsilon_0}{3})$, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \forall n, m \geq N.$$

Nach nicht (a) $\exists n_+ \geq N$:

$$a_{n_0} = a_{n_0} - a_{n_+} + a_{n_+} \leq a_{n_0} - a_{n_+} + \frac{\varepsilon_0}{3} < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \frac{2\varepsilon_0}{3},$$

also nach nicht (b): $a_{n_0} < -\varepsilon_0$ (weil $|a_{n_0}| \geq \varepsilon_0$) und $\forall n > N$

$$a_n = a_n - a_{n_0} + a_{n_0} < a_n - a_{n_0} - \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon_0 = -\frac{2\varepsilon_0}{3},$$

d.h. $[a] < 0$.

Bild:

$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon_0}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_0 & & \varepsilon_0 \\ & 0 & \\ & \frac{\varepsilon_0}{3} & \end{array}$$

also hier

nach Cauchy-Eigenschaft

□

Bemerkung Mit Hilfe der Ordnung auf \mathbb{R} wird der Betrag und somit der Abstand auf \mathbb{R} definiert (vergleiche Def. 2.11).

$$|a|_{\mathbb{R}} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Somit jetzt auch Cauchy-Folgen in \mathbb{R} und konvergente Folgen in \mathbb{R} definiert.

3.10 Satz \mathbb{R} vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in \mathbb{R} konvergent.

Beweis Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathbb{R} .

Zu zeigen: $\exists x = [(q_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, wobei $\mathbb{R}\text{-lim}$ den Limes in \mathbb{R} bezeichnet.

Zu jedem n ist $x_n = [(x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}]$ mit $x_{n,k} \in \mathbb{Q}$ und Cauchy bez. $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $|x_{n,k} - x_{n,\ell}|_{\mathbb{Q}} < \varepsilon \quad \forall k, \ell \geq N$

Insbesondere für $\varepsilon = \frac{1}{n} \exists N = N(\varepsilon)$ mit

$$|x_{n,k} - x_{n,\ell}|_{\mathbb{Q}} < \frac{1}{n} \quad \forall k, \ell \geq N.$$

Setze $q_n = x_{n,N(n)} \in \mathbb{Q}$.

Da Abstand in \mathbb{R} unabhängig von endlich vielen Folgengliedern. Somit

$$|I(q_n) - x_n|_{\mathbb{R}} < \frac{1}{n}, \tag{3.1}$$

wobei $I(q_n) = [(q_n)_{k \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$.

Behauptung $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathbb{Q}

Begründung Sei $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Wähle $M = M\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, so dass (Voraussetzung, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy bez. $|\cdot|_{\mathbb{R}}$) gilt

$$\forall n, m \geq M: |x_n - x_m|_{\mathbb{R}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left(\text{eigentlich } < I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$$

Also für $n, m \geq \max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), M\right\}$ gilt

$$\begin{aligned} |q_n - q_m|_{\mathbb{Q}} &= |I(q_n) - I(q_m)|_{\mathbb{R}} \\ &\leq |I(q_n) - x_n|_{\mathbb{R}} + |x_n - x_m|_{\mathbb{R}} + |x_m - I(q_m)|_{\mathbb{R}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also $x = [(q_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ wohl definiert und

$$\mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} I(q_n) = x$$

(weil $|I(q_n) - x|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$) nach (3) und Cauchy-Eigenschaft.

Zuletzt: nach (3) $\mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} (I(q_n) - x_n) = 0$

$$\implies \mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - I(q_n)) + \mathbb{R}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} I(q_n) = 0 + x = x$$

□

3.11 Satz Archimedischer Körper (K, \leq) vollständig \implies jede von oben beschränkte Menge $M \neq \emptyset$ hat Supremum $\sup(M)$ (d.h. K ist ordnungsvollständig).

Beweis Konstruktion des Supremums als Limes einer Cauchy-Folge (der existiert wegen der Vollständigkeit!)

$\exists m_0 \in M$ und obere Schranke $s_0 \in K$ von M .

Betrachte Mittelpunkt $m_0 \leq \frac{m_0 + s_0}{2} \leq s_0$ (wobei $2 = 1 + 1$).

Falls Mittelpunkt obere Schranke, setze

$$m_1 = m_0 \quad , \quad s_1 = \frac{m_0 + s_0}{2}$$

sonst

$$m_1 = \frac{m_0 + s_0}{2} \quad , \quad s_1 = s_0.$$

In beiden Fällen enthält

$$[m_1, s_1] := \{a \in K \mid m_1 \leq a \leq s_1\}$$

einen Punkt aus M (im zweiten Fall, da Mittelpunkt nicht obere Schranke).

Iteration gibt

$$[m_n, s_n] \subset [m_{n-1}, s_{n-1}]$$

mit

$$[m_n, s_n] \cap M \neq \emptyset$$

$$|s_n - m_n| = \frac{1}{2} |s_{n-1} - m_{n-1}| = \frac{1}{2^n} |s_0 - m_0|$$

Behauptung $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen.

Begründung Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $|s_0 - m_0| 2^{-N+1} < \varepsilon$ (archimedisches Axiom). Dann für $n, k \geq N$

$$|s_n - s_k| \leq |s_n - m_N| + |s_k - m_N| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^N} |s_0 - m_0| < \varepsilon$$

Ebenso

$$|m_n - m_k| < \varepsilon$$

Somit existieren Limes, die zudem gleich sind:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n \quad , \quad s \in K$$

Nach Konstruktion ist s obere Schranke (da $M \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Sei $t < s$ kleinere obere Schranke $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $m_n > t$ und $[m_n, s_n] \cap M \neq \emptyset$. \square

Anwendung $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$ Cauchy in \mathbb{Q} , also $\mathbb{R} \implies c = \mathbb{R}\text{-lim } a_n \in \mathbb{R}$ existiert und $c = 1 + \frac{1}{1+c} \iff c^2 = 2$

Bemerkung: Ab jetzt schreiben wir wieder \lim für \mathbb{R} -lim.

3.12 Satz Jede monoton wachsende von oben beschränkte Folge in \mathbb{R} ist konvergent.

Beweis $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R} mit $x_n \leq x_{n+1} \leq s \in \mathbb{R}$

$\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy (sonst $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \exists n > m \geq N \quad x_n - x_m > \varepsilon$, Widerspruch zu beschränkt) \square

3.13 Definition (i) Die erweiterten reellen Zahlen sind $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$, auch genannt Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von \mathbb{R} .

(ii) Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$ gegeben durch Ordnung auf \mathbb{R} und

$$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(iii) Operationen $+, \cdot$ auf \mathbb{R} können teilweise fortgesetzt werden: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty \quad , \quad x - \infty = -\infty \quad , \\ x \cdot \infty &= \begin{cases} \infty & \text{für } x > 0 \\ -\infty & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \\ \infty + \infty &= \infty = \infty \cdot \infty \quad , \text{ etc.} \end{aligned}$$

Sinnlos sind

$$\frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty.$$

Somit $\overline{\mathbb{R}}$ kein Körper.

(iv) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ konvergent uneigentlich gegen ∞

$$\iff \forall s \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n > s \quad \forall n \geq N$$

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ Ähnlich: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

(v) Für eine nach oben unbeschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert man $\sup(M) = \infty$. Entsprechend: $\inf(M) = -\infty$

(vi) Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definiere abgeschlossene, offene und halboffene Intervalle durch

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\} \quad , \\ (a, b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \quad , \\ (a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\} \quad , \quad [a, b) = \dots \end{aligned}$$

Beispiele $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^3$ existiert nicht

$$\sup(\mathbb{N}) = \infty \quad , \quad \inf(\mathbb{Z}) = -\infty$$

$$\sup((a, b)) = \sup((a, b]) = b$$

3.14 Satz (Intervallschachtelungsprinzip) Seien $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$(i) I_{n+1} \subset I_n$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } b_n - a_n < \varepsilon$$

Dann $\iff \exists x \in \mathbb{R}$ mit $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c \in \mathbb{R} \mid c \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}$

Beweis Nach (i) ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und von oben beschränkt $\xrightarrow{\text{Satz 3.12}} a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.

Ähnlich: $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existiert.

Klar $a \leq b$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b]$

Begründung Gegenannahme $\delta = a - b > 0$. Dann $\exists n$ mit $|a_n - a| < \frac{\delta}{3}$ und $|b - b_n| < \frac{\delta}{3}$.

Aber $a < b$ Widerspruch zu $\forall \varepsilon > 0 \exists n$ mit $b - a < b_n - a_n < \varepsilon$

$\implies x = a = b \implies [x, x] = \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ □

Bemerkung: Satz 3.14 falsch für halboffene Intervalle, z.B. $\bigcap_{n \geq 1} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$, weil $0 \notin (0, \frac{1}{n}]$, und zu jedem $x > 0 \exists n$ mit $\frac{1}{n} < x$ (nach Archimedes).

3.15 Definition M Menge, $M \neq \emptyset$

(i) Zwei Mengen sind gleichmächtig $\iff \exists$ Bijektion zwischen ihnen.

(ii) M endlich $\iff \exists n \in \mathbb{N}$ mit M gleichmächtig zu $\{1, \dots, n\}$.

(iii) M unendlich $\iff M$ nicht endlich.

(iv) M abzählbar $\iff M$ gleichmächtig zu \mathbb{N} .

(v) M höchstens abzählbar $\iff M$ abzählbar oder endlich.

Bemerkungen

1. $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$ höchstens abzählbar

Begründung: Nach Wohlordnungsprinzip ordne M der Größe nach. Abzählen der Elemente gibt Bijektion.

2. M höchstens abzählbar $\iff \exists$ surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$

Begründung " \implies " klar für M abzählbar, für M endlich auch (überlagere)

" \impliedby " Definiere $g : M \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$g(a) = \min f^{-1}(\{a\})$$

Dann g injektiv (aber evtl. nicht surjektiv)

aber $g : M \rightarrow g(M)$ bijektiv und $g(M) \subset \mathbb{N}$ nach (i) höchstens abzählbar

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ auch, weil eine surjektive Abzählabbildung gemäß folgendem Bildes gegeben ist:

\mathbb{N}

\mathbb{N}

Somit \mathbb{Q} auch abzählbar, weil $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mapsto \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ surjektiv.

3.16 Satz \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Beweis Gegenannahme: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Durchnummerierung von \mathbb{R}

Wähle abgeschlossenes Intervall $I_0 \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \notin I_0$.

Dann wähle iterativ abgeschlossenes Intervall $I_{n+1} \subset I_n$ mit $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ und I_{n+1} hat $\frac{1}{3}$ der Länge von I_n .

Nach Intervallschachtelungsprinzip existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Aber $\forall n$ ist $x_n \notin I_n$, also $x \notin \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, also keine Durchnummerierung. \square

4 Folgen reeller Zahlen

Definition 3.1 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R} , $x_n \in \mathbb{R}$ konvergent mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ mit } |x_n - x| < \varepsilon \forall n \geq N$$

Cauchy-Kriterium (Satz 3.10)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert.

Monotoniekriterium (Satz 3.2): $x_n \leq x_{n+1} \leq s \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

\implies Limes existiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Analog: fallende Folgen

Schreibweisen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n$

4.1 Satz Sei $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\lim(x_n + \lambda y_n) = (\lim x_n) + \lambda(\lim y_n) = x + \lambda y$ (Existenz von Limes und Gleichheit)

(ii) $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n) = xy$

(iii) Falls $y \neq 0$, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{x}{y}$.

(iv) Falls $x_n \leq y_n$ gilt $x \leq y$.

(v) Sei $x = y$ und $x_n \leq z_n \leq y_n \implies \lim z_n = x$.

Beweis

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $M = M\left(\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right)$ mit

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \quad \forall n \geq \max\{N, M\}$$

\implies

$$|x_n + \lambda y_n - x - \lambda y| < \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N, M\}$$

(ii) Ähnlich (vergleiche auch Beweis von Satz ???: Nullfolgen bilden Ideal)

(iii) Nach (ii) reicht es, $x_n = 1$ zu betrachten.

Da $y \neq 0 \exists \delta > 0$ mit $|y_n| > \delta \quad \forall n \geq N$

$$\implies \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - y_n}{y_n y} \right| \leq \frac{1}{\delta |y|} |y - y_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{M(\varepsilon \delta |y|), N\}$$

(iv) Gegenannahme: $\delta = x - y > 0$. Dann $\exists n$ mit

$$|x - x_n| < \frac{\delta}{3} \quad |y - y_n| < \frac{\delta}{3}$$

$$\implies x_n - y_n = (x_n - x) + (x - y) + (y - y_n) \geq -\frac{\delta}{3} + \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3}$$

(v) z.B. Intervallschachtelungsprinzip □

Beispiele

1. $x_n = \frac{2n^2 - 4n}{n^2 + 1}$ Konvergenz + Grenzwert?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n}}{1 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

2. $x_n = \frac{n}{q^n}$ mit $q > 1$

x_n monoton fallend und ≥ 0

weil: $x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{q} x_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1$, so dass für n ausreichend groß, x_n fallend

Also Konvergenz.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{nq} x_n = \frac{1}{q} x \implies x \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 0 \implies x = 0$$

3. Sei $0 < y \leq 1$ und $p \in \mathbb{N}$

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{y - (x_n)^p}{p(x_n)^p}\right)$$

Behauptung $x_n \geq x_{n+1} > 0$ und $(x_n)^p \geq y$

Begründung Induktion über n

Anfang: $n = 0$ OK

Schritt: Da $(x_n)^p \geq y$, ist $1 + \frac{y - (x_n)^p}{p(x_n)^p} < 1$, somit $x_{n+1} < x_n$. Zudem

$$\begin{aligned}(x_{n+1})^p - y &= (x_n)^p \left(1 + \frac{y - (x_n)^p}{p(x_n)^p}\right)^p - y \\ &\geq (x_n)^p \left(1 + \frac{y - (x_n)^p}{p(x_n)^p} \cdot p\right) - y \quad (\text{Bernoullische Ungleichung}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Somit: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert und

$$x = x \left(1 + \frac{y - x^p}{px^p}\right) \iff 1 = 1 + \frac{y - x^p}{px^p} \iff x^p = y$$

Die Gleichung $x^p = y$ hat nur eine positive Lösung (weil $0 < x < x' \implies x^p < (x')^p$).

Das $x > 0$ definiert die p -te Wurzel $x = \sqrt[p]{y} = y^{\frac{1}{p}}$, $0 < y \leq 1$.

Für $y > 1$ setze: $\sqrt[p]{y} = \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{y}}}$.

$$\text{Für } p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z} \text{ setze für } y > 0, \quad y^{\frac{q}{p}} = \begin{cases} \left(y^{\frac{1}{p}}\right)^q & q > 0 \\ 1 & q = 0 \\ \frac{1}{\left(y^{\frac{1}{p}}\right)^{|q|}} & q < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}(yz)^{\frac{q}{p}} &= y^{\frac{q}{p}} z^{\frac{q}{p}} \quad z > 0 \\ y^{\frac{q}{p}} y^{\frac{q'}{p'}} &= y^{\frac{q}{p} + \frac{q'}{p'}} \\ \left(y^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q'}{p'}} &= y^{\frac{qq'}{pp'}}\end{aligned}$$

4. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$

Betrachte $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Dann

$$\begin{aligned}\frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n - 1}\right)^n \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \\ &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n^2 - 1}\right) \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\end{aligned}$$

Somit $y_n \leq y_{n-1}$ und $y_n \geq 0 \implies y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existiert.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} \right) = y \cdot 1$ existiert.

Definition: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ heißt Eulersche Zahl.

4.2 Definition (i) $y \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt (HP) einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|y - x_n| < \varepsilon$

(ii) Gegeben eine streng monoton wachsende Abbildung $k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$, d.h. $n_k < n_{k+1}$. Man nennt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung Eine konvergente Folge hat genau einen HP, nämlich ihren Grenzwert.

Begründung $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Sei $y \neq x$ zweiter HP. Dann $|x - y| = \delta > 0$. Zu $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ soll nun $|x_n - x| < \frac{\delta}{3} \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$ gelten und $|y - x_n| < \frac{\delta}{3}$ für unendlich viele n . Widerspruch.

4.3 Satz y HP von reeller Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \exists$ gegen y konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis " \implies " Konstruktion der Teilfolge iterativ.

Zu $\varepsilon = \frac{1}{k}$ wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $|y - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$.

" \impliedby " offensichtlich. □

4.4 Satz (Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft von \mathbb{R})

Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} besitzt mindestens einen HP.

Beweis $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t \leq x_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Setze

$$\begin{aligned} M &= \{a \in \mathbb{R} \mid x_n \geq a \text{ für fast alle } n\} \\ &= \{a \in \mathbb{R} \mid x_n \geq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bis auf endlich viele}\} \end{aligned}$$

$t \in M$, somit $M \neq \emptyset$.

M beschränkt von oben durch s .

$\implies y = \sup(M) \in \mathbb{R}$ existiert nach Vollständigkeit (Satz 3.11)

Behauptung y HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Gegenannahme: $\exists \varepsilon > 0$ mit $\{a \in \mathbb{R} \mid |y - a| < \varepsilon\}$ enthält nur endlich viele Folgenglieder

$\implies y + \frac{\varepsilon}{2} \in M$, d.h. y nicht $\sup(M)$. □

4.5 Korollar Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt eine Teilfolge, die entweder in \mathbb{R} konvergiert oder uneigentlich gegen ∞ konvergiert oder uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert (man sagt $\overline{\mathbb{R}}$ ist folgenkompakt).

Beweis Falls Folge beschränkt, Satz 4.4. Falls unbeschränkt, wähle uneigentlich konvergente Teilfolge aus. □

4.6 Definition $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\overline{\mathbb{R}}$

Limes inferior $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$

Limes superior $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$

Alternative Schreibweisen: \liminf \limsup

Bemerkung $x_n = \inf_{k \geq n} x_k$ monoton wachsend \implies konvergent und $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k$ existiert also für jede Folge!

Analog: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$

Beispiel $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ $\underline{\lim} x_n = -1, \overline{\lim} x_n = 1$

4.7 Satz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Dann ist $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ der kleinste HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ der größte.

Beweis $x_n = \inf_{k \geq n} x_k$ größte untere Schranke ab $n \implies \exists k_n \geq n$ mit $x_n \leq x_{k_n} \leq x_n + \frac{1}{n}$.

Falls notwendig, eliminiere k_n , so dass $k_n < k_{n+1}$.

Nach Satz 4.1 (vi)

$$\lim_n x_n \leq \lim_n x_{k_n} \leq \lim_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right) = \lim_n x_n$$

Somit $\underline{\lim}_n x_n$ HP wegen Satz 4.3, weil Teilfolge $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dagegen konvergiert. Es kann keinen echt kleineren HP geben, denn $\forall \delta > 0 \exists N = N(\delta)$ mit $x_n > \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k - \delta \quad \forall n \geq N$.

Für zweite Behauptung genauso, oder alternativ

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_n x_n &= -\underline{\lim}_n (-x_n) = -\inf\{\text{HP von } (-x_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= (-1) \cdot (-1) \sup\{\text{HP von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}, \end{aligned}$$

denn $\inf(A) = -\sup(-A)$. □

4.8 Korollar $\lim_n x_n = c \iff \underline{\lim}_n x_n = c = \overline{\lim}_n x_n$

5 Vektorräume und die komplexen Zahlen

5.1 Definition $d \in \mathbb{N}, d \neq 0$

(i) $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) \mathbb{R}^d wird zu kommutativer Gruppe mittels $+$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert durch $\vec{x} + \vec{y} =$
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}, \quad -\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_d \end{pmatrix}$

(iii) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Skalarmultiplikation definiert durch

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_d \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist $(\mathbb{R}^d, +, \cdot)$ d -dimensionaler reeller Vektorraum (nicht: $\cdot : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, \mathbb{R}^d kein Körper!)

(iv) $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R}^d , $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,d} \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \iff \lim_n x_{n,j} = y_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, d\}$$

Beispiel $d = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (-1)^{n \frac{1}{n}} \\ (1 + \frac{1}{n})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \quad (\text{nichts Neues!})$$

5.2 Definition Die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ versehen mit Addition aus \mathbb{R}^2 und einer Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}.$$

Definiere

$$0_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{imaginäre Einheit}).$$

Dann ist für $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ (d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^2)

$$z = x \cdot 1_{\mathbb{C}} + y \cdot i = x + iy \quad (\text{Kurzschreibweise}).$$

Bemerkung $z \cdot z' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$ ($z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$)

$$i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1_{\mathbb{C}}$$

5.3 Satz $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$ Körper mit Unterkörper $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ gegeben durch Einbettung

$$I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad I(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x 1_{\mathbb{C}}.$$

Beweis $(\mathbb{C}, +) = (\mathbb{R}^2, +)$ kommutative Gruppe

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe mit Eins $1_{\mathbb{C}}$

Inverses: $(x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

Assoziativität

$$\begin{aligned} (x + iy)\{(x' + iy')(x'' + iy'')\} &= (x + iy)(x'x'' - y'y'' + i(x'y'' + y'x'')) \\ \dots &= \{(x + iy)(x' + iy')\}(x'' + iy'') \end{aligned}$$

Distributivgesetz ähnlich.

Zuletzt: $I(x) + I(x') = I(x + x')$ und $I(x) \cdot I(x') = I(x \cdot x')$. □

5.4 Definition $z = x + iy \in \mathbb{C}$

(i) $\mathcal{R}e(z) = x$ Realteil, $\mathcal{I}m(z) = y$ Imaginärteil

(ii) $\bar{z} = x - iy$ komplexe Konjugation

(iii) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z (Pythagoras)

(iv) $\varphi = \arg(z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ Argument von z (mit Schulwissen)

Bemerkung

$\mathcal{I}m$

y $|z|$ z
 φ $\mathcal{R}e$
 x

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ |z|^2 &= z \cdot \bar{z} \geq 0 \\ \frac{z + \omega}{z \cdot \omega} &= \bar{z} + \bar{\omega} \quad (z, \omega \in \mathbb{C}) \\ \frac{\bar{z} \cdot \bar{\omega}}{\bar{z}} &= \bar{\omega} \\ \overline{\bar{z}} &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\mathcal{R}e(z) & z - \bar{z} &= 2i\mathcal{I}m(z) \end{aligned}$$

5.5 Satz (Eigenschaften des Betrages) $z, \omega \in \mathbb{C}$

(i) $|z| \geq 0$ und $(|z| = 0 \iff z = 0)$

(ii) $|z + \omega| \leq |z| + |\omega|$ Dreiecksungleichung

(iii) $|z \cdot \omega| = |z||\omega|$

(iv) $|\bar{z}| = |z|$

(v) $\max\{|\mathcal{R}e z|, |\mathcal{I}m(z)|\} \leq |z| \leq |\mathcal{R}e(z)| + |\mathcal{I}m(z)|$

Beweis

(i) klar

(ii) $z = x + iy, \omega = u + iv$

$$\text{CSU: } (xu + yv)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle^2 \leq (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$$

(Satz 2.13(ii))

$$\begin{aligned} |z + \omega|^2 &= |(x + u) + i(y + v)|^2 = (x + u)^2 + (y + v)^2 \\ &= x^2 + 2xu + u^2 + y^2 + 2yv + v^2 \\ &\leq (x^2 + y^2) + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2} + (u^2 + v^2) \\ &= (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2})^2 = (|z| + |\omega|)^2 \end{aligned}$$

(iii) $|z\omega|^2 = z\omega\bar{z}\bar{\omega} = z\bar{z}\omega\bar{\omega} = |z|^2|\omega|^2$

(iv) klar

(v) $z = x + iy$

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad (\text{Letzteres, da } x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|) \quad \square$$

Wichtigster Grund für Einführung von \mathbb{C} :

5.6 Satz (Hauptsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom n -ten Grades, $n \in \mathbb{N}$,

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0,$$

hat genau n Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, d.h.

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Beweis Mit Hilfsmitteln der Analysis, in jeder Vorlesung über Funktionentheorie.

5.7 Definition $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$$

5.8 Satz $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ mit $|z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Beweis " \implies " Notation $z = x + iy, z_n = x_n + iy_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |y - y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Also nach Satz 5.5 (v), für $n \geq N$

$$|z - z_n| = |(x - x_n) + i(y - y_n)| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

" \impliedby " Wegen $\max\{|x|, |y|\} \leq |x + iy|$ □

5.9 Satz $d \mathbb{C}$ hat die Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft, d.h. jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C} , $|z_n| < s \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nach BW für \mathbb{R} wähle Teilfolge, so dass $(\operatorname{Re}(z_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Hiervon wähle Teilfolge, so dass auch $\operatorname{Im}(z_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ konvergiert. \square

5.10 Definition Der d -dimensionale komplexe Vektorraum ist $\mathbb{C}^d = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^{2d}$, versehen mit der Addition aus \mathbb{R}^{2d}

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \omega_1 \\ \vdots \\ z_d + \omega_d \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit komplexen Skalaren $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_d \end{pmatrix}$$

Konvergenz komponentenweise.

5.11 Satz \mathbb{C}^d hat Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft.

Frage Hat \mathbb{R}^d für $d \geq 3$ auch Körperstruktur? Nur für $d = 4$ ist dies fast möglich (Hamilton am 16.10.1843): Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times i\mathbb{R} \times j\mathbb{R} \times k\mathbb{R}$ mit

$$-1 = i^2 = j^2 = k^2 = ijk$$

Mit diesen Regeln ist \mathbb{H} Divisionsalgebra = Körper nur ohne Kommutativität der Multiplikation.

6 Unendliche Reihen

6.1 Definition Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C} . Für $N \in \mathbb{N}$ ist die zugehörige Partialsumme

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N.$$

Falls $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in \mathbb{C} ist, schreibt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$$

und nennt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente (unendliche) Reihe.

Falls $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert, heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Falls $a_n \in \mathbb{R}$, kann auch uneigentliche Konvergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$ definiert werden.

Bemerkungen

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff \exists s \in \mathbb{C}$ mit $\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon)$

$$\left| s - \sum_{n=0}^N a_n \right| < \varepsilon \quad \forall N \geq M$$

2. (Cauchy Kriterium) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon)$, mit $\left| \sum_{n=N+1}^{N+K} a_n \right| < \varepsilon \quad \forall N \geq M, K \in \mathbb{N}$ (\mathbb{C} vollständig)

Begründung $s_{N+K} - s_N = \sum_{n=N+1}^{N+K} a_n$

Somit insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ notwendig für Konvergenz.

3. Reihe wird über zugehörige Folge der Partialsummen analysiert.
Umgekehrt: jede Folge in \mathbb{C} ist Partialsummenfolge einer Reihe.

Begründung $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ Folge. Dann setze $a_N = s_N - s_{N-1}$, $s_{-1} = 0$

Dann $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$

4. Gegebenenfalls beginnt Reihe bei $p \in \mathbb{N}$, d.h. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$. Dies hat keinen Einfluss auf ihre Konvergenz.
5. $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) + \lambda (\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n)$, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent (Satz 4.1 (i)).

Beispiele

1. $z \in \mathbb{C}$; $a_n = z^n$; $s_N = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1} = \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ 1 & z = 1 \\ \text{exist. nicht} & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit für $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{genannt geometrische Reihe}$$

2. Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, oder gegen ∞ uneigentlich konvergent (obwohl $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$).

Begründung $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots +$
 $\geq \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^K \cdot \frac{1}{2^{K+1}} + \dots$

Also s_N monoton wachsend und $s_{2K+1} \geq K \cdot \frac{1}{2}$

$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \infty$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent

Begründung mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots + \frac{1}{(N+K)^2} \\ &\leq \frac{1}{N(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \dots + \frac{1}{(N+K+1)(N+K)} \\ &= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N+K+1} - \frac{1}{N+K} \right) \\ &= \frac{1}{N} - \frac{1}{N+K} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall N \geq M(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

6.2 Satz (Majorantenkriterium) $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \geq 0$. Es gelte $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis (mit Cauchy-Kriterium) $\left| \sum_{n=N+1}^{N+K} a_n \right| \stackrel{\text{Dreieck}}{\leq} \sum_{n=N+1}^{N+K} b_n < \varepsilon \quad \forall N \geq M(\varepsilon)$, weil $\sum b_n$ konvergent. \square

Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergent $\forall p \geq 2$, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Majorante, da $\left| \frac{1}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

6.3 Satz (Minorantenkriterium für Divergenz) $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, d.h. divergent.

Beweis offensichtlich, da Partialsummen größer werden. \square

Beispiel $\frac{q}{p} \leq 1$, dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}}$ divergent, weil

$$\frac{1}{p^{\frac{q}{p}}} \geq \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

6.4 Definition (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent in \mathbb{C} , aber $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$

6.5 Satz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

Beweis Mit Cauchy-Kriterium

$$\left| \sum_{n=N}^{N+K} a_n \right| \leq \sum_{n=N}^{N+K} |a_n| < \varepsilon \quad \forall N \geq N(\varepsilon)$$

□

Bemerkung Umkehrung falsch

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} &= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \end{aligned}$$

nach Beispiel 3, also konvergent, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

6.6 Satz (*Quotientenkriterium = Majorantenkriterium mit geometrischer Reihe*)

$$(i) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}$$

$$(ii) \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \text{ f\u00fcr fast alle } n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

Beweis

(i) W\u00e4hle c , so dass

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c < 1.$$

Dann $\exists N = N(c)$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq c \quad \forall n \geq N.$$

Also

$$|a_{N+k}| = \left| \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \frac{a_{N+k-1}}{a_{N+k-2}} \dots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N \right| \leq c^k \cdot |a_N|$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} c^k |a_N| = \frac{1}{1-c} |a_N| < \infty$$

Endlich viele Anfangssummanden \u00e4ndern absolute Konvergenz nicht.

(ii) Dann $\exists N$ mit $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \dots \geq |a_N| > 0 \quad \forall n \geq N$

$$\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

□

6.7 Satz (Wurzelkriterium)

(i) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(ii) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

Beweis Ganz analog zu Satz 6.6 mit $N = N(c)$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1 \quad \forall n \geq N \iff |a_n| \leq c^n \quad \forall n \geq N.$$

□

Beispiele

1. $z \in \mathbb{C}$, $a_n = \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$

Begründung Quotientenkriterium $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{1}{n+1} |z| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

□

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt Exponentialreihe, Schreibweise $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

2. $z \in \mathbb{C}$, $a_n = n^p z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$

Begründung Wurzelkriterium

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} |z| = 1 \cdot |z| = |z| < 1$$

3. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{8} & n \text{ ungerade} \end{cases}, \text{ Quotientenkriterium zieht nicht.}$$

Aber $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{(-1)^n}} = \frac{1}{2} \implies \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+(-1)^n}$ absolut konvergent.

Jetzt Kriterien für bedingt konvergente Reihen (nicht absolut konvergent):

6.8 Satz (Leibnizkriterium) $a_{n+1} > a_n \geq 0$ streng monoton fallende positive Nullfolge

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent

Beweis Wir zeigen, dass das Cauchy Kriterium gilt: Sei N ungerade.

Nun geben immer zwei Terme zusammen gepaart entweder positive oder negative Beiträge und dies führt zu folgender Abschätzung:

$$-a_{N+1} < -a_{N+K} < \underbrace{\sum_{n=N+1}^{N+K} (-1)^n a_n}_{>0} = a_{N+1} - \underbrace{a_{N+2} + a_{N+3} - \dots + (-1)^{N+K} a_{N+K}}_{<0} < a_{N+1}$$

Ähnlich für N gerade. Somit

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+K} (-1)^n a_n \right| < a_{N+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

□

Beispiele

1. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent, siehe oben.
2. auch $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ konvergent für $\frac{q}{p} > 0$

6.9 Satz (Abelsche partielle Summation)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{C} , $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ Partialsumme

(i) $\sum_{n=0}^N a_n b_n = \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{N+1} B_N$

(ii) $(a_{N+1} B_N)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ konvergent
 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konvergent

Beweis

(i) Induktion über N

Anfang $N = 0$ $a_0 b_0 \stackrel{?}{=} (a_0 - a_1) B_0 + a_1 B_0 = a_0 B_0 = a_0 b_0$

Schritt von $N - 1$ nach N :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n b_n &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_n + a_N b_N \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + \underbrace{a_N B_{N-1} + a_N b_N}_{a_N B_N} \\ &= \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{N+1} B_N \end{aligned}$$

(ii) klar nach (i)

□

Beispiel $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$

Dann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent.

Begründung $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = z^n$, $B_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, $|B_N| \leq \frac{2}{|1-z|}$

Dann $\lim_{N \rightarrow \infty} a_{N+1} B_N = 0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) B_n \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} B_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{2}{|1-z|} < \infty \end{aligned}$$

Konvergenz nach Satz 6.9 (ii)

6.10 Definition $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unendliche Reihe in \mathbb{C} , $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektive Abbildung
 Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

6.11 Satz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent \implies jede Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen den gleichen Wert.

Beweis Sei $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung.
 Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N = N(\varepsilon)$ mit

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Wähle $M \geq N$, so dass $\{1, \dots, N\} \subset \varphi(\{1, \dots, M\})$, d.h. $\forall n \leq N \exists m \leq M$ mit $\varphi(m) = n$.

Dann

$$\left| \sum_{n=0}^M a_{\varphi(n)} - S \right| = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_{\varphi(n)}| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

↑
andere Terme heben sich weg

↑
evtl. mehr Terme

Also $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$. □

6.12 Satz (Riemann) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergente Reihe in \mathbb{R} , $S \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig
 $\implies \exists$ Umordnung mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$
 (keine Kommutativität der Summanden!)

Beweisskizze für Fall $S = \infty$ (sonst siehe Literatur)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihe der positiven Glieder von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Reihe der Beträge der negativen Glieder.

Behauptung $\sum_n b_n = \infty$ und $\sum_n c_n = \infty$

Begründung Falls $\sum b_n < \infty$ und $\sum c_n < \infty$, so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Widerspruch.

Falls $\sum b_n = \infty$ und $\sum c_n < \infty \implies \sum_n a_n$ divergent. Widerspruch.

Jetzt Konstruktion von φ : Mit $\sum_n b_n = \infty$ konstruiere $r_n \in \mathbb{N}$ iterativ in $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{r_n} b_{R_n+k} > 1 + c_n \quad , \quad R_n = \sum_{j=1}^{n-1} r_j.$$

Dann wähle φ , so dass

$$a_{\varphi(R_n+n+k)} = \begin{cases} c_n & , \quad k = 0, \\ b_{R_n+k} & , \quad k = 1, \dots, r_n. \end{cases}$$

Dann für N mit $R_n \leq N < R_{n+1}$ gilt

$$\sum_{k=1}^N a_{\varphi(k)} \geq n.$$

□

6.13 Definition $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ unendliche Reihen in \mathbb{C}

Sei $k \in \mathbb{N} \mapsto (n_k, m_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$ eine Produktreihe von $\sum_n a_n$ und $\sum_m b_m$.

Beispiel

	b_0	b_1	b_2	b_3	
a_0					Cauchysche Produktreihe (diskrete Faltung)
a_1					Cauchy $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \right)$
a_2					Quadratreihe c_n
a_3					

6.14 Satz $\sum_n a_n$ und $\sum_m b_m$ absolut konvergent

\implies jede Produktreihe absolut konvergent mit Wert $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{m=0}^{\infty} b_m)$

Beweis Sei $\mathbb{N} \ni k \mapsto (n_k, m_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Bijektion und $c_k = a_{n_k} b_{m_k}$ Terme der zugehörigen Produktreihe. Zu $K \in \mathbb{N}$, sei

$$r = \max\{n_0, \dots, n_K\} \quad , \quad s = \max\{m_0, \dots, m_K\}.$$

Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K |c_k| &\leq (|a_1| + \dots + |a_r|)(|b_1| + \dots + |b_s|) \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) < \infty \quad \forall K \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Somit Produktreihe absolut konvergent.

Nach Satz 6.11 konvergiert jede Umordnung gegen gleichen Wert, aber jede Produktreihe ist Umordnung obiger Produktreihe.

\implies alle Produktreihen konvergieren gegen gleichen Wert. Speziell auch Quadratreihe:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N^2-1} c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \left(\sum_{m=0}^N b_m \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_n \right)$$

□

6.15 Satz (Cauchyscher Doppelreihensatz)

Sei $(c_{n,m})_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}$ doppelt indizierte Folge in \mathbb{C} .

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k, m_k}$ absolut konvergent für eine Bijektion $k \in \mathbb{N} \mapsto (n_k, m_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

\implies absolut konvergent für jede Bijektion, und Vertauschung der Summation möglich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k, m_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} \right)$$

Beweis ähnlich wie oben, zur Berechnung der Werte verwende Anordnungen

und

□

Anwendung:

6.16 Satz Die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und erfüllt

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) $\exp(z + \omega) = \exp(z) \exp(\omega) \quad \forall z, \omega \in \mathbb{C}$

(iii) $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z) \quad \text{und} \quad |\exp(ix)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

(v) Die so genannte Euler-Konstante erfüllt

$$e = \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Schreibweise: $\exp(z) = e^z$

Beweis Absolut konvergent mit Quotientenkriterium, siehe oben.

(i) klar, da $0! = 1$ und $0^0 = 1$

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + \omega)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \omega^{n-k} \right) && \text{Binomische Formel} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!} && \text{Cauchy-Produkt (Faltung)} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^m}{m!} \right) && \text{Satz 6.14} \\ &= \exp(z) \exp(\omega) \end{aligned}$$

$$(iii) \exp(z) \exp(-z) \stackrel{(ii)}{=} \exp(z-z) \stackrel{(ii)}{=} \exp(0) = 1$$

$$|\exp(ix)|^2 = \overline{\exp(ix)} \exp(ix) = \exp(-ix) \exp(ix) = \exp(0) = 1$$

$$x \in \mathbb{R}$$

(iv)

$$I_n = \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=2}^n \frac{z^k}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}\right) \right| \quad \text{erste zwei Terme fallen weg}$$

$$\leq \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{k!} \left|1 - \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right|$$

Behauptung $\left|1 - \prod_{\ell=1}^k \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k \ell \leq \frac{k^2}{n}$

Induktion über k . $k = 1$ OK. Von $k-1$ nach k

$$\left|1 - \prod_{\ell=1}^k \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\right|$$

$$\leq \left|1 - \frac{k}{n}\right| \left|1 - \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)\right| + \frac{k}{n}$$

$$\leq 1 \cdot \frac{\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell}{n} + \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k k$$

Also: $I_n \leq \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{k!} \frac{(k-1)^2}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k (k-1)^2}{k!} = \frac{c}{n}$ für $n \rightarrow \infty$ □

↑
abs. conv. (z.B. Quotientenkrit.)

6.17 Definition Für $z \in \mathbb{C}$ sind Cosinus und Sinus definiert durch

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

6.18 Satz (i) $\cos(z)$ und $\sin(z)$ sind durch absolut konvergente Reihen gegeben:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in \mathbb{R}$.

(iii) $\cos(-z) = \cos(z)$ (Cosinus ist gerade)
 $\sin(-z) = -\sin(z)$ (Sinus ist ungerade)

(iv) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (Pythagoras)

(v) $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

(vi) Additionstheoreme für $z, \omega \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin(z + \omega) &= \sin(z) \cos(\omega) + \cos(z) \sin(\omega) \\ \cos(z + \omega) &= \cos(z) \cos(\omega) - \sin(z) \sin(\omega)\end{aligned}$$

Begründung

(i)

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (i^n + (-1)^n i^n) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \quad \text{Durchnummerierung der geraden Zahlen}\end{aligned}$$

sin analog

(ii) + (iii) klar

(iv)

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) = 1\end{aligned}$$

(v) nach Definition

(vi)

$$\begin{aligned}\sin(z) \cos(\omega) + \sin(\omega) \cos(z) &= \frac{1}{4i} [(e^{iz} - e^{-iz})(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + (e^{i\omega} - e^{-i\omega})(e^{iz} + e^{-iz})] \\ &= \frac{1}{4i} [2e^{i(z+\omega)} - 2e^{-i(z+\omega)}] = \sin(z + \omega)\end{aligned}$$

cos analog.

□

Bemerkung Weitere trigonometrische Funktionen:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \text{ falls } \cos(z) \neq 0,$$

$$\cot(z) = \frac{1}{\tan(z)} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \text{ falls } \sin(z) \neq 0.$$

6.19 Definition Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C} , $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Potenzreihe um z_0 .

Bemerkung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt auch analytische oder holomorphe Funktion. Studium in der Funktionentheorie.

6.20 Satz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Potenzreihe um z_0 . Definiere den Konvergenzradius

$$\rho = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Dann ist Potenzreihe absolut konvergent für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$, und divergent für $|z - z_0| > \rho$.

Beweis Nach Wurzelkriterium Konvergenz für

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}) |z - z_0| < 1$$

Divergenz, falls > 1 . □

Beispiele

1. Geometrische Reihe $a_n = 1, z_0 = 0 \implies \rho = 1$

2. Exponentialfunktion $a_n = \frac{1}{n!}, z_0 = 0$, oder

$$\exp(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - z_0)^n, \quad \rho = \infty$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$ für $|z - z_0| < 1, \rho = 1$

$i\mathbb{R}$

Verhalten auf dem Rand delik特

(vgl. Beispiel nach Abelscher partieller Summation)

Divergenz

Konv.

ρ

z_0

\mathbb{R}

Bemerkung Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existiert, gilt nach dem Quotientenkriterium $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (Hadamardsche Formel).

7 Topologische Grundlagen

Schlagwörter: Metrische und topologische Räume, Kompaktheit

7.1 Definition X Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ heißt *Metrik (oder Abstand)* auf X , falls $\forall x, y, z \in X$ gilt, dass

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Nichtentartung)

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt (X, d) *metrischer Raum*.

Beispiele

1. $X = \mathbb{R}^d$ oder \mathbb{C}^d , euklidische Metrik

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j - y_j|^2}$$

(i)+(ii) klar, (iii) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

2. $X = \mathbb{R}^d$, andere Metrik d'

$$d'(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{j=1, \dots, d} |x_j - y_j| \quad \text{Maximumsmetrik}$$

(i)+(ii) klar, sei zudem $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$, dann

$$\begin{aligned} d'(\vec{x}, \vec{y}) &= \max_{j=1, \dots, d} |x_j - z_j + z_j - y_j| \\ &\leq \max_{j=1, \dots, d} (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|) \\ &\leq \max_{j=1, \dots, d} |x_j - z_j| + \max_{j=1, \dots, d} |z_j - y_j| \\ &= d'(\vec{x}, \vec{z}) + d'(\vec{z}, \vec{y}) \end{aligned}$$

3. X Menge, $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ ist eine Metrik

4. $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkte Funktion}\}$ (reeller Vektorraum der Dimension ∞)

$$d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Beweis von (iii) wie in Beispiel 2.

$[0, 1]$ "kontinuierlicher Index des Vektors f "

7.2 Definition (X, d) metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$, $A \subset X$ Teilmenge

(i) Die (offene) Kugel mit Radius r und Mittelpunkt x ist

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

(ii) A offen $\iff \forall a \in A \exists r > 0$ mit $B_r(a) \subset A$

7.3 Satz (X, d) metrischer Raum, $r > 0$, $x \in X$

(i) $(A_i)_{i \in I}$, I Indexmenge, $A_i \subset X$ offen

$\implies \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i \text{ für ein } i \in I\}$ ist offen.

(ii) $B_r(x)$ offen

(iii) $A \subset X$ offen $\iff A$ ist Vereinigung von Kugeln

(iv) $A, B \subset X$ offen $\implies A \cap B$ offen

Beweis

(i) Setze $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Sei $a \in A$.

$\implies \exists i \in I$ mit $a \in A_i$

$\stackrel{A_i \text{ offen}}{\implies} \exists r > 0$ mit $B_r(a) \subset A_i$

$\implies B_r(a) \subset A$, somit A offen

(ii) Sei $a \in B_r(x)$. Sei $\delta = d(a, x) < r$. Dann $B_{r-\delta}(a) \subset B_r(x)$

(iii) " \Leftarrow " klar nach (i) und (ii)

" \implies " Zu $a \in A$ wähle $r_a > 0$ mit $B_{r_a}(a) \subset A$.

Dann $A = \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$ (hier ist A Indexmenge!)

(iv) $a \in A \cap B \stackrel{A, B \text{ offen}}{\implies} \exists r_A > 0$ und $r_B > 0$ mit $B_{r_A}(a) \subset A$ und $B_{r_B}(a) \subset B$.

Setze $r = \min\{r_A, r_B\}$. Dann $B_r(a) \subset A \cap B$. Somit $A \cap B$ offen. \square

Beispiele

1. Offene Mengen in \mathbb{R} sind Vereinigungen offener Intervalle (a, b) .
2. Offene Mengen in \mathbb{R}^d sind Vereinigungen offener euklidischer Kugeln (oder offener Würfel bei Maximumsmetrik).

Verallgemeinerung des metrischen Raumes: topologischer Raum

Erinnerung: $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ Potenzmenge von X

7.4 Definition X Menge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ Mengensystem von Teilmengen von X

Dann heißt \mathcal{O} Topologie auf X , falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$

(ii) $(A_i)_{i \in I}, A_i \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$ (\mathcal{O} vereinigungsstabil)

(iii) $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{O}, N \in \mathbb{N}$

$\implies \bigcap_{i=1}^N A_i = \{a \in X \mid a \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, N\} \in \mathcal{O}$
(\mathcal{O} endlich durchschnittsstabil)

Dann heißt (X, \mathcal{O}) topologischer Raum und die Elemente von \mathcal{O} heißen offene Mengen.

Bemerkungen

1. (X, d) metrischer Raum. Die von d induzierte Topologie auf X ist

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{\text{beliebige Vereinigungen von Kugeln in } X\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \mid r_i > 0, x_i \in X, i \in I \right\} \cup \{\emptyset\}\end{aligned}$$

Begründung: Satz 7.3

2. Nicht jede Topologie wird von einer Metrik induziert.

Beispiel: X Menge mit mindestens zwei Elementen; $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ "Klumpentopologie"

Annahme: \exists Metrik d auf X , welche \mathcal{O} induziert.

\implies einzige Kugel ist X .

$\implies \forall r > 0$ gilt $d(x, y) < r \quad \forall x, y \in X$.

$\implies d(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in X$ Widerspruch zur Definition von d , da X mehr als ein Element hat.

3. Verschiedene Metriken d und d' auf X können gleiche Topologie erzeugen. Dies gilt insbesondere, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{C}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

weil dann (mit der Bezeichnung $B'_r(x)$ für Kugeln bezüglich d')

$$B_{\frac{1}{C}r}(x) \subset B'_r(x) \subset B_{Cr}(x)$$

Begründung $y \in B_r(x) \implies \exists r_y > 0$ mit $B_{r_y}(y) \subset B_r(x) \implies \exists r'_y$ mit $B'_{r'_y}(y) \subset B_{r_y}(y) \subset B_r(x)$.

Somit $B_r(x) = \bigcup_{y \in B_r(x)} B'_{r'_y}(y)$ offen bezüglich Topologie von d' .

Beispiel \mathbb{R}^d mit euklidischer Metrik d und Maximumsmetrik d' :

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{i=1, \dots, d} |x_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1, \dots, d} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

d.h. $C = \sqrt{d}$.

Erinnerung $A \subset X$, $\complement_X A = \complement A = \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A$ heißt Komplement von A in X

7.5 Definition (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, $A \subset X$
 A abgeschlossen $\iff \complement_X A$ offen

7.6 Satz (X, \mathcal{O}) topologischer Raum

- (i) \emptyset, X abgeschlossen
- (ii) $(A_i)_{i \in I}$ Familie abgeschlossener Mengen $\implies \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen
- (iii) A_1, \dots, A_N abgeschlossen $\implies \bigcup_{i=1}^N A_i$ abgeschlossen

Begründung

- (i) $\complement_X \emptyset = X$ und $\complement_X X = \emptyset$ offen
- (ii) Mengentheoretische Identität:

$$\begin{aligned} \complement_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) &= \left\{ x \in X \mid x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \right\} \\ &= \{x' \in X \mid x' \notin A_i \text{ für ein } i \in I\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid x \notin A_i\} = \bigcup_{i \in I} \complement_X A_i \end{aligned}$$

Nun ist $\complement_X A_i$ offen $\forall i \in I$

$$\stackrel{\text{Def. 4(ii)}}{\implies} \bigcup_{i \in I} \complement_X A_i \text{ offen} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen}$$

$$(iii) \complement_X \left(\bigcup_{i=1, \dots, N} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^N \underbrace{\complement_X A_i}_{\text{offen}} \text{ offen}$$

7.7 Definition (X, \mathcal{O}) topologischer Raum , $x \in X$, $U \subset X$
 $U = U(x)$ heißt Umgebung von $x \iff \exists A \in \mathcal{O}$ mit $x \in A \subset U$

Bemerkung Im metrischen Raum (X, d) ist U Umgebung von x
 $\iff \exists$ Kugel $B_r(x) \subset U$

Beispiele $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen in \mathbb{R}
2. $[a, b)$ weder offen noch abgeschlossen
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen

Begründung $q \in \mathbb{Q}$, dann ist kein $B_r(y) \subset \mathbb{Q}$, wenn $r > 0$.

4. $[a, b)$ Umgebung von allen $x \in (a, b)$, aber nicht von a und b

5. $\underbrace{\bigcap_{n \geq 1} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} = (0, 1]$ nicht offen, aber Durchschnitt **nicht** endlich

6. $\bigcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$ nicht abgeschlossen, aber unendliche Vereinigung

7.8 Satz (X, \mathcal{O}) topologischer Raum , $A \subset X$
 A offen $\iff A$ Umgebung all seiner Punkte

Beweis " \implies " $x \in A \implies x \in A \subset A$ mit A offen $\implies A$ Umgebung von x
" \impliedby " A Umgebung von $x \forall x \in A$
 $\implies \forall x \exists$ offenes B_x mit $x \in B_x \subset A$
 $\implies \bigcup_{x \in A} B_x = A$ offen, nach Vereinigungsstabilität □

7.9 Definition (X, \mathcal{O}) topologischer Raum , $x \in X$, $A \subset X$

(i) x Berührungspunkt (BP) von A

$\iff \forall$ Umgebungen U von x gilt $U \cap A \neq \emptyset$

(ii) x Häufungspunkt (HP) von A

$\iff \forall$ Umgebungen U von x gilt $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Bemerkungen

1. $x \in A$, dann x BP von A , aber nicht immer HP von A .

Beispiel 1 ist BP von $A = \{1\} \subset \mathbb{R}$, aber 1 nicht HP von A .

2. Jeder HP von A ist auch BP von A (nicht umgekehrt!).

3. $A \subset \mathbb{R}$ von oben beschränkt $\implies a = \sup(A)$ BP von A

Begründung Sonst gäbe es $r > 0$ mit $B_r(a) \cap A = \emptyset$ und $a - \frac{r}{2}$ wäre kleinere obere Schranke. Widerspruch!

7.10 Satz (X, \mathcal{O}) topologischer Raum , $A \subset X$. Äquivalent sind

(i) A abgeschlossen.

(ii) Jeder BP von A gehört zu A .

(iii) Jeder HP von A gehört zu A .

Beweis (i) \implies (ii): A abgeschlossen , $x \notin A$
 $\implies x \in \mathring{C}_X A$ offen $\xrightarrow{\text{Satz 7.8}} \mathring{C}_X A$ Umgebung von x
Da aber $\mathring{C}_X A \cap A = \emptyset$, ist x nicht BP von A .
Somit: x BP von $A \implies x \in A$

(ii) \implies (iii): klar nach Bemerkung 2.

(iii) \implies (i): Jeder HP von A ist in A , also ist $x \in \mathring{C}_X A$ nicht HP von A .
 $\implies \exists$ offene Umgebung $U(x)$ mit $A \cap (U(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$, d.h. $U(x) \subset \mathring{C}_X A$
Somit $\mathring{C}_X A = \bigcup_{x \in \mathring{C}_X A} U(x)$ offen $\implies A$ abgeschlossen □

7.11 Definition Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt Hausdorff-Raum
 $\iff \forall x, y \in X, x \neq y \exists$ Umgebungen $U(x), U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$
Man sagt auch, es gilt die Trennungseigenschaft T_2

7.12 Satz Jeder metrische Raum (X, d) ist ein Hausdorff-Raum (wenn versehen mit der induzierten Topologie).

Beweis $x, y \in X, x \neq y \implies r = d(x, y) > 0$ (Nichtentartung)
Wähle $U(x) = B_{\frac{r}{2}}(x)$ und $U(y) = B_{\frac{r}{2}}(y)$. □

7.13 Satz (X, \mathcal{O}) Hausdorff, x HP von $A \subset X$
 \implies in jeder Umgebung U von x liegen unendlich viele Punkte von A .

Beweis x HP von A, U Umgebung von x
 $\implies \exists x_1 \in A \cap U \setminus \{x\}, x_1 \neq x$
 $\implies \exists$ Umgebungen $U_1(x) \subset U(x)$ und $V_1(x_1)$ mit $U_1 \cap V_1 = \emptyset$
 $\implies \exists x_2 \in U_1(x) \setminus \{x\} \cap A, x_2 \neq x_1, x_2 \neq x$
Dann iteriere. □

7.14 Definition (X, \mathcal{O}) Hausdorff
Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $x \in X$
(Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n = x$)
 \iff zu jeder Umgebung U von $x \exists N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U \forall n \geq N$.

Bemerkung (X, d) metrischer Raum. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ mit } x_n \in B_\varepsilon(x) \forall n \geq N)$$

Für $X = \mathbb{R}^d$ oder $X = \mathbb{C}^d$ stimmt Konvergenzbegriff mit dem Vorherigen überein!

7.15 Definition (X, \mathcal{O}) Hausdorff, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X
 $x \in X$ Häufungspunkt (HP) von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 \iff zu jeder Umgebung U von $x \exists$ unendlich viele n mit $x_n \in U$

Achtung! HP von Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \implies$ HP von Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, aber Umkehrung falsch (z.B. konstante Folgen)

7.16 Satz (X, \mathcal{O}) Hausdorff-Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X
 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies x$ einziger HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (somit auch Grenzwert eindeutig)

Beweis Sei y zweiter HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y \neq x$
 $\implies \exists$ Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$

Nach Definition der Konvergenz $\exists N$ mit $x_n \in U(x) \quad \forall n \geq N \implies$ nur endlich viele x_n in $U(y)$. Widerspruch. \square

7.17 Satz (X, d) metrischer Raum

$x \in X$ HP von Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \implies \exists$ Teilfolge, die gegen x konvergiert.

Beweis Bestimme iterativ $n_k > n_{k-1}$, so dass

$$d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}.$$

Dann $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. \square

Metrische Räume sind natürlicher Kontext für folgende schon bekannte Begriffe.

7.18 Definition (X, d) metrischer Raum

(i) $A \subset X$ beschränkt $\iff \exists C \in \mathbb{R}$ mit $d(x, y) \leq C \quad \forall x, y \in A$

(ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in X

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

(iii) (X, d) vollständig \iff jede Cauchy-Folge in X konvergent

(iv) (X, d) Bolzano-Weierstraß-Raum (BWR)

\iff jede beschränkte Folge hat einen HP

7.19 Satz (X, d) metrischer Raum

(i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\implies \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

(ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

(iii) (X, d) BWR. Dann gilt

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und höchstens einen HP

(iv) (X, d) BWR $\implies (X, d)$ vollständig

Beweis analog zu \mathbb{R}

(i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\implies \exists N$ mit $d(x_n, x_m) \leq 1 \quad \forall n, m \geq N$

Setze $r = \max\{d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\} + 1$.

Dann $x_k \in B_r(x_N) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_n x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$. Bestimme N , so dass

$$d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

Dann $\forall n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) " \implies " klar nach (i) und Satz 7.17.

" \impliedby " Nach BWE hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also genau einen HP x .

Behauptung $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,

weil sonst $\exists \varepsilon > 0$ und \exists unendlich viele $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $d(x, x_{n_j}) > \varepsilon$.

Nach BWE hat $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ einen HP y .

Zudem $d(x, y) \geq \varepsilon \implies x \neq y$. Widerspruch.

(iv) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebige Cauchy-Folge in X .

Nach (i) beschränkt, nach BWE \exists mindestens ein HP.

Behauptung Es gibt keine zwei HP (mit (iii) folgt dann Konvergenz und somit (iv)).

Begründung Seien $x \neq y$ HP, dann $d(x, y) = \delta > 0$.

Zu $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ wähle N mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad (\text{Cauchy}).$$

Da x, y HP, \exists nach Definition $M, K \geq N$ mit

$$d(x, x_M) < \varepsilon \quad d(y, x_K) < \varepsilon$$

$$\implies \delta = d(x, y) \leq d(x, x_M) + d(x_M, x_K) + d(x_K, y) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon = \delta. \text{ Widerspruch. } \square$$

Zusammenfassung: Hierarchie

$$X \text{ BWR} \implies X \text{ vollständig} \implies X \text{ metrischer Raum} \implies X \text{ HR} \implies X \text{ topologischer Raum}$$

Bemerkungen

1. Viele topologische Räume sind nicht metrisch.
2. Beispiel für X vollständig, aber nicht BWE:

$$X = \mathbb{N} \quad , \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Genau die schließlich konstanten Folgen sind Cauchy und konvergieren (somit vollständig).
Aber $x_n = n$ beschränkt, hat aber keinen HP.

3. Es gibt unvollständige metrische Räume, aber jeder metrische Raum (X, d) kann vervollständigt werden.

Hierzu setze:

$$Y = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } X\}$$

$$\tilde{X} = Y / \sim, \text{ wobei}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Definiere $\tilde{d}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ (Limes existiert, Übung!)

$$\text{Einbettung } I : X \rightarrow \tilde{X} \quad I(x) = (x)_{n \in \mathbb{N}}$$

Satz (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig und $X \subset \tilde{X}$ dicht, d.h. zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und Umgebung \tilde{U} von \tilde{x} existiert $x \in X$ mit $x \in \tilde{U}$ (ohne detaillierten Beweis, aber im Prinzip genauso wie bei \mathbb{R}).

Beispiel $X = \mathbb{Q}$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$

Konstruktion neuer topologischer Räume aus bekannten, z.B. Urbildtopologie

$$f : Y \rightarrow (X, \mathcal{O})$$

$$\mathcal{O} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{O}\} \text{ Topologie auf } Y \quad (\text{siehe Übung})$$

Wichtiger Spezialfall:

7.20 Definition (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, $A \subset X$

$\mathcal{O}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{O}\}$ Unterraumtopologie auf A und (A, \mathcal{O}_A) heißt Unterraum (UR) von (X, \mathcal{O}) .

Bemerkungen

1. \mathcal{O}_A tatsächlich eine Topologie auf A . Nachweis der Eigenschaften in Definition 7.4:

(i) $\emptyset, A \in \mathcal{O}_A$

(ii) $C_i \in \mathcal{O}_A \implies \exists B_i \in \mathcal{O} \text{ mit } C_i = A \cap B_i \implies \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{i \in I} B_i \cap A = \bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{O}_A$

(iii) Übung

2. Betrachte Einbettung $I : A \rightarrow X$, dann $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}(I)$ Urbildtopologie

3. $A \subset B \subset (X, \mathcal{O})$, dann A als UR von $X = A$ als UR von B , wobei B UR von X .

7.21 Definition (X, \mathcal{O}) topologischer Raum

(i) $(A_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \iff A_i \in \mathcal{O} \text{ und } \bigcup_{i \in I} A_i = X$

(ii) $(A_i)_{i \in I_0}$ Teilüberdeckung von $(A_i)_{i \in I} \iff I_0 \subset I \text{ und } X = \bigcup_{i \in I_0} A_i$

(iii) X heißt kompakt $\iff X$ HR und jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

(iv) $K \subset X$ kompakt $\iff K$ kompakt bez. Unterraumtopologie
 $\iff \forall (B_i)_{i \in I}$ offen in X und Überdeckung von $K \exists$ endliche Teilüberdeckung von K

Beispiele

- $(0, 1)$ nicht kompakte Teilmenge von \mathbb{R}
 weil: $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1)$ offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung
- Später: Satz von Heine–Borel zeigt $[0, 1]$ kompakt (Beweis notwendig!)
- Endliche Mengen sind immer kompakt.

7.22 Satz (X, \mathcal{O}) HR , $K \subset X$ kompakt. Dann

- K abgeschlossen
- $A \subset K$ abgeschlossen in $K \implies A$ kompakt

Beweis

(i) Sei $y \in \mathcal{C}_X K$. Verwende die Trennungseigenschaft.

Zu jedem $x \in K$ bestimme offene Umgebungen

$U(x)$ von x und $V_x(y)$ von y mit $U(x) \cap V_x(y) = \emptyset$

$\implies \bigcup_{x \in K} U(x)$ offene Überdeckung von K

$\xrightarrow{K \text{ komp.}} \exists$ endliche Teilüberdeckung $(U(x_n))_{n=1, \dots, N}$ von K

$\implies \bigcap_{n=1}^N V_{x_n}(y)$ offene Umgebung von y mit $\bigcap_{n=1}^N V_{x_n}(y) \subset \mathcal{C}_X K$

Somit ist $\mathcal{C}_X K$ Umgebung all seiner Punkte

$\xrightarrow{\text{Satz 7.8}} \mathcal{C}_X K$ offen $\implies K$ abgeschlossen

(ii) $(A_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A

$\implies \forall i \in I \exists B_i \subset K$ offen in K mit $A_i = B_i \cap K$

$\implies ((B_i)_{i \in I}, \mathcal{C}_K A)$ offene Überdeckung von K (weil $\mathcal{C}_X A$ offen!)

$\xrightarrow{K \text{ komp.}} \exists$ endliche Teilüberdeckung $(B_{i_1}, \dots, B_{i_N}, \mathcal{C}_K A)$ von K

$\implies (A_{i_1}, \dots, A_{i_N})$ endliche Teilüberdeckung von A □

7.23 Satz (X, d) metrischer Raum , $K \subset X$ kompakt

$\implies K$ beschränkt, d.h. $\text{diam}(K) = \sup_{x, y \in K} d(x, y) < \infty$

Beweis $x \in K$, $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von $K \implies \exists$ endliche Teilüberdeckung $(B_{N_i}(x))_{i=1, \dots, N} \implies K \subset B_{N_N}(x) \implies \text{diam } K < n_N < \infty$. □

7.24 Definition (X, \mathcal{O}) Hausdorff–Raum , $A \subset X$

- (i) X abzählbar kompakt \iff jede Folge in X besitzt einen HP
- (ii) X folgenkompakt \iff jede Folge in X besitzt konvergente Teilfolge
- (iii) A abzählbar kompakt (bzw. A folgenkompakt)
 - $\iff A$ versehen mit Unterraumtopologie abzählbar kompakt (bzw. A folgenkompakt)

Bemerkung X folgenkompakt $\implies X$ abzählbar kompakt

Beispiel $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abzählbar kompakt nach BWE

7.25 Satz (X, d) metrischer Raum. Äquivalent sind

- (i) X kompakt
- (ii) X folgenkompakt
- (iii) X abzählbar kompakt

7.26 Lemma (Lebesguesches Überdeckungslemma)

(X, d) abzählbar kompakt, $(A_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X

$\implies \exists$ Lebesguesche Zahl $\delta > 0$, so dass $\forall x \in X \exists i \in I$ mit $B_\delta(x) \subset A_i$

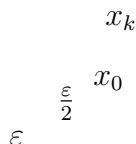
Beweis Gegenannahme: \nexists solches $\delta > 0$

$\implies \forall n \geq 1 \exists x_n \in X$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset A_i \quad \forall i \in I$

Sei x_0 HP von $(x_n)_{n \geq 1}$ (nach Voraussetzung).

Sei $i_0 \in I$, so dass $x_0 \in A_{i_0}$ (Überdeckung).

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ (A_{i_0} offen).



Wähle $k \geq \frac{2}{\varepsilon}$ mit $x_k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ (x_0 ist HP)

$\implies B_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k) \overset{\text{Dreieck}}{\subset} B_\varepsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ Widerspruch. □

7.27 Lemma (X, d) abzählbar kompakt

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists$ endlich viele x_1, \dots, x_r mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\varepsilon(x_j)$

Beweis Gegenannahme $\exists \varepsilon > 0$ mit $X \neq \bigcup_{j=1}^r B_\varepsilon(x_j)$ für jede Wahl von x_1, \dots, x_r und $r \in \mathbb{N}$.

Sei y_0 beliebig $\implies \exists y_1$ mit $d(y_1, y_0) \geq \varepsilon$

$\implies \exists y_2$ mit $d(y_2, y_1) \geq \varepsilon$ und $d(y_2, y_0) \geq \varepsilon$, etc., d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists y_n \quad \text{mit} \quad d(y_k, y_n) \geq \varepsilon \quad \forall k < n.$$

Diese Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt also $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$, kann also keinen HP haben. Widerspruch zu abzählbar kompakt. \square

Beweis von Satz 7.25:

(iii) \implies (i) (schwierigster Teil)

$(A_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung. Sei $\delta > 0$ zugehörige Lebesguezahl.

Nach Lemma 7.27 wähle x_1, \dots, x_r mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$.

Da $B_\delta(x_j) \subset A_{i_j}$ für geeignetes i_j nach Lemma 7.26, gilt $X = \bigcup_{j=1}^r A_{i_j}$, d.h. endliche Teilüberdeckung.

(i) \implies (iii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebige Folge in X .

Ziel: Konstruktion eines HP.

Setze

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \exists k \geq n \text{ mit } x_k \in B_\varepsilon(x)\} \\ &= \{x \in X \mid x \text{ BP von } (x_k)_{k \geq n}\} \subset A_{n-1} \end{aligned}$$

A_n abgeschlossen nach Satz 7.10.

Behauptung $\bigcap_{n \geq 1} A_n \neq \emptyset$

Begründung Sonst wäre $\bigcup_{n \geq 1} \complement_X A_n = X$ offene Überdeckung.

$\xrightarrow{X \text{ komp.}} \bigcup_{n=1}^N \complement_X A_n = X$ endliche Teilüberdeckung

$\implies \emptyset = \bigcap_{n=1}^N A_n = A_N$, aber $A_N \neq \emptyset$. Widerspruch.

Also $\exists x \in \bigcap_{k \geq 1} A_k$, d.h. x BP von $(x_k)_{k \geq n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies x$ HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ unendlich viele } n \text{ mit } d(x_1, x_n) < \varepsilon)$

(ii) \implies (iii) klar

(iii) \implies (ii) Satz 7.17 (zu jedem HP gehört konvergente Teilfolge) \square

7.28 Satz (Satz von Heine–Borel) (\mathbb{R}^d , euklidische Metrik) $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann:
 A kompakt $\iff A$ beschränkt und abgeschlossen.

Beweis " \implies " Satz 7.22 und 7.23

" \impliedby " BWE: Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^d besitzt HP.

Also hat Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A einen HP x , der auch BP von A ist (entweder $x = x_n$ für unendlich viele n , oder x HP der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) Jetzt:

A abgeschlossen $\xrightarrow{\text{Satz 7.10}} x \in A$

Somit hat jede Folge in A einen HP in A

$\xrightarrow{\text{Satz 7.25}} A$ kompakt \square

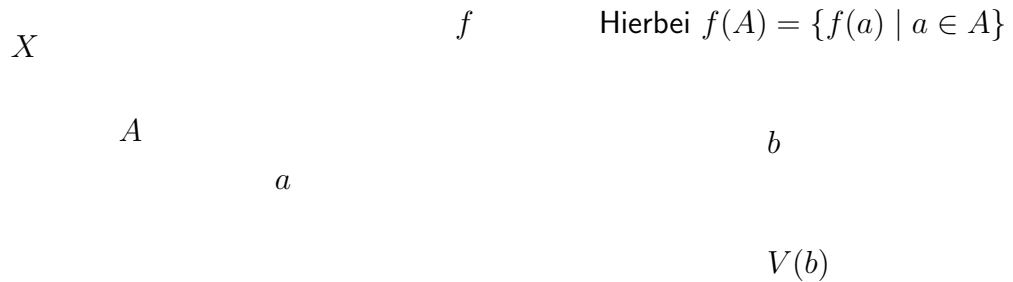
8 Stetige Funktionen

8.1 Definition (Grenzwerte von Funktionen)

X, Y Hausdorff-Räume , $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

$f : A \rightarrow Y$ Abbildung , $a \in X$, a BP von A , $b \in Y$

Dann definiere $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall$ Umgebungen $V(b)$ von $b \exists$ Umgebung $U(a)$ von a mit $f(U(a) \cap A) \subset V(b)$



$a \in A$ möglich, aber nicht notwendig! zu allen $V(b) \exists U(a)$

Bemerkung Grenzwerte sind eindeutig.

Beweis Seien $b_1, b_2 \in Y$ zwei Grenzwerte , $b_1 \neq b_2$, Y HR

$\implies \exists$ Umgebungen $V(b_1), V(b_2)$ mit $V(b_1) \cap V(b_2) = \emptyset$

$\xrightarrow{\text{Def.}} \exists$ Umgebungen $U_1(a)$ und $U_2(a)$ mit

$$f(U_j(a) \cap A) \subset V(b_j) \quad j = 1, 2$$

$\implies f(U_1(a) \cap U_2(a) \cap A) \subset \bigcap_{j=1,2} f(U_j(a) \cap A) \subset V(b_1) \cap V(b_2) = \emptyset$

$\implies U_1(a) \cap U_2(a) \cap A = \emptyset$

Aber $U_1(a) \cap U_2(a)$ Umgebung von $a \implies a$ nicht BP von A . Widerspruch.

□

8.2 Satz $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : A \subset X \rightarrow Y$, a BP von A .

Äquivalent sind:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $f(B_\delta(a) \cap A) \subset B'_\varepsilon(b)$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für $x \in A$ mit $d(x, a) < \delta$ gilt $d'(f(x), b) < \varepsilon$

(iv) \forall Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_n x_n = a$ gilt $\lim_n f(x_n) = b$

Beweis

(i) \implies (ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann $B'_\varepsilon(b)$ Umgebung von b
 $\implies \exists$ Umgebung $U(a)$ mit $f(U(a) \cap A) \subset B'_\varepsilon(b)$
 $\implies \exists \delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U(a)$ (da $U(a)$ Umgebung von a) und somit
 $f(B_\delta(a) \cap A) \subset f(U(a) \cap A) \subset B'_\varepsilon(b)$

(i) \longleftarrow (ii) Sei $V(b)$ Umgebung von b
 $\implies \exists \varepsilon > 0$ mit $B'_\varepsilon(b) \subset V(b)$
 $\stackrel{\text{Voraus.}}{\implies} \exists \delta > 0$ mit $f(B_\delta(a) \cap A) \subset B'_\varepsilon(b) \subset V(b)$
 Zudem $B_\delta(a)$ Umgebung von a

(ii) \iff (iii) ist lediglich Umformulierung

(iii) \implies (iv) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $\lim_n x_n = a$
 Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in (iii).
 $\implies \exists N$ mit $d(x_n, a) < \delta \quad \forall n \geq N$
 $\stackrel{\text{(iii)}}{\implies} d'(f(x_n), b) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$
 Somit $\lim_n f(x_n) = b$

(iv) \implies (iii) Gelte Negation von (iii)
 $\implies \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \exists x \in A$ mit $d(x, a) < \delta$, so dass $d'(f(x), b) \geq \varepsilon$
 Insbesondere für $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in A$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $d'(f(x_n), b) \geq \varepsilon$
 Also $\lim_n x_n = a$, aber $\lim_n f(x_n) \neq b$, d.h. Negation von (iv). \square

Beispiel $X = Y = \mathbb{C}$ mit euklidischer Metrik $d(z, z') = |z - z'|$

Behauptung $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (Beachte $\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ nicht definiert, aber 0 BP des Definitionsbereiches!)

Begründung Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} d\left(\frac{e^z - 1}{z}, 1\right) &= \left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| = \left|\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} z^{n-1} - 1\right| = \left|\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} z^{n-1}\right| \\ &\leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} |z| = c|z| = cd(z, 0), \end{aligned}$$

wobei $c = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!}$ eine Konstante ist.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Dann: $d(z, 0) < \delta$ gibt $d(f(z), 1) < \varepsilon$.

8.3 Satz (Cauchy-Kriterium)

(X, d) , (Y, d') metrische Räume, a BP von $A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$ Abbildung

(Y, d') vollständig. Dann:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für $x, x' \in A$ mit $d(x, a) < \delta$, $d(x', a) < \delta$ gilt $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Bemerkung Beachte, dass Grenzwert $b = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht benötigt wird, um Konvergenz zu untersuchen (aber auch nicht berechnet wird).

Beweis " \implies " (ohne Vollständigkeit von Y)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } d(x, a) < \delta \text{ gilt } d'(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \forall x, x' \in A \text{ mit } d(x, a) < \delta, d(x', a) < \delta \text{ gilt}$$

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), b) + d'(f(x'), b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

" \Leftarrow " Verwende Kriterium (iv) von Satz 8.2.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $\lim x_n = a$.

Behauptung $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (Y, d')

Begründung Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß Voraussetzung.

Nach Konvergenz $\lim x_n = a \exists N$ mit $d(x_n, a) < \delta \quad \forall n \geq N$

$$\stackrel{\text{Voraus.}}{\implies} d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

□

Weiter: Y vollständig $\implies \lim f(x_n) = b$ existiert.

Gegeben andere Folge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x'_n = a$ existiert auch $\lim f(x'_n) = b'$.

Behauptung $b = b'$

Begründung Betrachte $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x'_0, x_1, x'_1, \dots)$

Dann $\lim x''_1 = a$ und auch $\lim f(x''_n) = b''$ existiert. Aber $b'' = b'$ und $b'' = b$.

□

Beispiele

1. (Funktionen ohne Grenzwerte)

$$X, Y = \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{m} \quad x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ existiert nicht}$$

Begründung (mit Schulwissen)

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 \quad f(x_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \rightarrow 0 \quad f(x'_n) = -1$$

Tatsächlich: $\forall b \in [-1, 1] \exists$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = 0$ und

$$\lim f(x_n) = b$$

$$2. X, Y \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Hier ist jedoch Limes von rechts und links sinnvoll.

8.4 Definition $a \in \mathbb{R}$ BP von $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow (Y, d')$

- (i) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = b$ (*rechtsseitiger Limes*)
 $\iff \forall$ Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $x_n > a$, $\lim x_n = a$ gilt $\lim f(x_n) = b$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ (*uneigentlicher Limes*)
 $\iff \forall$ Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim x_n = \infty$ gilt $\lim f(x_n) = b$
- (iii) Analog linksseitiger Limes $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Beispiele

- $\lim_{x \downarrow 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim_{x \uparrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ existiert nicht.

8.5 Satz (Rechenregeln für Limes komplexwertiger Funktionen)

(X, d) metrischer Raum , a BP von $A \subset X$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ (oder \mathbb{R}) , $\lambda \in \mathbb{C}$. Jeweils wenn rechte Seiten existieren, gilt:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \lambda g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) + \lambda (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ (*Linearität*)
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, falls $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Falls $X = \mathbb{R}$, gilt alles auch für einseitige und uneigentliche Limes, (i) gilt auch für vektorwertige Funktionen.

Begründung Mit Satz 8.2 (iv) übertragen sich die Regeln für konvergente Folgen (Satz 4.1).

Jetzt: Im Allgemeinen hat der Grenzwert $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nichts mit dem Funktionswert $f(a)$ zu tun (falls a im Definitionsbereich).

8.6 Definition X, Y HR , $f : X \rightarrow Y$ Abbildung , $x_0 \in X$

- (i) f stetig in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (*Limes existiert und gleich $f(x_0)$*)
- (ii) f stetig (im Großen) $\iff f$ stetig in allen Punkten $x_0 \in X$

8.7 Satz Äquivalent sind

- (i) f stetig in x_0
- (ii) \forall Umgebungen V von $f(x_0) \exists$ Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$
- (iii) \forall Umgebungen V von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0

Begründung

(i) \iff (ii) nach Definition des Grenzwertes

(iii) \implies (i) klar

(ii) \implies (iii) $f(U) \subset V \implies U \subset f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(V)$

Da U Umgebung von x_0 ist, ist auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0 . □

8.8 Satz $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ HR, $f : X \rightarrow Y$. Äquivalent sind

(i) f stetig

(ii) Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. $\forall A \in \mathcal{O}_Y$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X$

(iii) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis

(i) \implies (ii) $A \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}(A)$

$\implies f(x) \in A$, d.h. A offene Umgebung von $f(x)$

$\xrightarrow{\text{Satz 8.7}} f^{-1}(A)$ Umgebung von x

Dies gilt $\forall x \in X \implies f^{-1}(A)$ Umgebung all seiner Punkte

$\xrightarrow{\text{Satz 7.8}} f^{-1}(A)$ offen

(ii) \implies (i) $x \in X$ und V Umgebung von $f(x)$

$\implies \exists$ offene Umgebung $V' \subset V$ von $f(x)$

$\xrightarrow{\text{(ii)}} f^{-1}(V')$ offen, und $x \in f^{-1}(V')$, d.h. $f^{-1}(V')$ Umgebung von x mit $f(f^{-1}(V')) \subset V$.

(ii) \implies (iii) $A \subset Y$ abgeschlossen $\implies \mathbb{C}_Y A$ offen

$\implies f^{-1}(\mathbb{C}_Y A)$ offen. Aber

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{C}_Y A) &= \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{C}_Y A\} \\ &= \mathbb{C}_X \{x \in X \mid f(x) \in A\} = \mathbb{C}_X f^{-1}(A) \end{aligned}$$

$\implies \mathbb{C}_X f^{-1}(A)$ offen $\implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen

(iii) \implies (ii) Analog. □

Achtung! Satz 8.8 (ii) nicht richtig für Bilder, es sei denn, f bijektiv und Umkehrabbildung auch stetig (solche Abbildungen heißen Homöomorphismen).

8.9 Satz (Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen ist stetig)

$f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

$\implies g \circ f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

Begründung $A \in \mathcal{O}_Z \implies (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\in \mathcal{O}_Y}) \in \mathcal{O}_X$ □

8.10 Satz (Lipshitz-Kriterium für Stetigkeit) $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ Lipshitz-stetig, d.h. es existiere eine Lipshitzkonstante $L \in \mathbb{R}$ mit

$$d'(f(x), f(x')) \leq L d(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

$\implies f$ stetig

Beweis Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$, dass

$$d(f(x), f(x_0)) \leq L d(x, x_0) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Somit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in X$ □

Bemerkung Analoges für Hölder-stetige Funktionen, d.h. $d'(f(x), f(x')) \leq L d(x, x')^\alpha$ für einen Hölderexponenten $\alpha > 0$.

Beispiele

1. Konstante Funktionen sind stetig.

Begründung $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, $f(x) = b$, $\forall x \in X$

$$\implies f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & b \in A \\ X & b \notin A \end{cases} \quad \text{beide offen}$$

2. Identität $\text{id} : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O})$ stetig

3. $f(z) = \frac{\sum_{n=0}^N p_n z^n}{\sum_{k=0}^K q_k z^k}$, $p_k, q_k \in \mathbb{C}$, rationale Funktion

$$f \text{ stetig auf } \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^K q_k z^k \neq 0 \right\}$$

Begründung Polynome stetig, weil lokal Lipshitz-stetig

Satz 8.5 (iii) kann verwandt werden bis auf an Nullstellen des Nenners

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

unstetig $\forall x \in \mathbb{R}$

8.11 Satz (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt)

$f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig zwischen HR

$K \subset X$ kompakt $\implies f(K)$ kompakt

Beweis $(B_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$, d.h. $B_i \in \mathcal{O}_Y$ und $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} B_i$

$$\implies K \underbrace{\subset}_{\text{(nicht gleich!)}} f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(B_i)}_{\text{offen, da } f \text{ stetig}} \quad \text{offene Überdeckung}$$

$$\xrightarrow{K \text{ komp.}} \exists \text{ endliches } I_0 \subset I \text{ mit } K \subset \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(B_i)$$

$$\implies f(K) \subset f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(B_i)\right) \underset{\text{Gleichheit}}{=} \bigcup_{i \in I_0} B_i,$$

also $f(K)$ kompakt. □

8.12 Satz (Jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge mit Werten in \mathbb{R} besitzt ein Maximum und ein Minimum.)

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, K kompakt

$$\implies \exists x_0 \in K \text{ mit } f(x_0) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x)$$

Beweis $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt $\implies f(K)$ beschränkt und abgeschlossen

Sei $M = \sup f(K)$, dann M BP von $f(K)$

$$f(K) \text{ abgeschlossen} \implies M \in f(K) \implies \exists x_0 \in K \text{ mit } f(x_0) = M$$
 □

Achtung! x_0 im Allgemeinen nicht eindeutig.

8.13 Satz $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ stetig, X kompakt

$$\implies f \text{ gleichmäßig stetig, d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit}$$

$$d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(δ kann uniform gewählt werden, unabhängig von x, x' .)

Beweis Gegenannahme: $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \geq 1 \exists x_n, x'_n$ mit

$$d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d'(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

X kompakt $\implies (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge und $x = \lim x_{n_k}$

Dann

$$\begin{aligned} d(x, x'_{n_k}) &\leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \\ &\leq d(x, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Somit $\lim x'_{n_k} = x = \lim x_{n_k}$

$$f \text{ stetig} \implies y = f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k})$$

$$\text{Aber } \varepsilon \leq d'(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), y) + d(y, f(x'_{n_k})) \rightarrow 0$$

Widerspruch. □

8.14 Definition (X, \mathcal{O}_X) topologischer Raum, (Y, d') metrischer Raum

$$\mathcal{F}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ beschränkte Abbildung}\}$$

$$C_b(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ beschränkte stetige Abbildung}\} \subset \mathcal{F}(X, Y)$$

Auf $\mathcal{F}(X, Y)$ definiere

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x))$$

Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}(X, Y)$ bez. Metrik D heißt **uniforme Konvergenz auf X** ,
 Bezeichnung: $g = \text{u-lim } f_n$.

Bemerkung Oft spricht man auch von **gleichmäßiger Konvergenz auf X** .

Bemerkung D ist tatsächlich eine Metrik auf $C_b(X, Y)$ und es gilt

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)) \quad , \quad \forall f, g \in C_b(X, Y).$$

Begründung $x \in X \mapsto d'(f(x), g(x))$ stetig.

Wichtiger Spezialfall: $Y = \mathbb{C}$ oder \mathbb{R}

Bezeichnungen: $C_b(X, \mathbb{C}) = C_b(X) = C_{b, \mathbb{C}}(X)$, $C_b(X, \mathbb{R}) = C_{b, \mathbb{R}}(X)$

Zusätzliche Strukturen auf $C_b(X)$

Vektorraum: $(g + \lambda f)(x) = g(x) + \lambda f(x)$ (Operationen in \mathbb{C}) , $\lambda \in \mathbb{C}$

Algebra: $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x)$

Auf dem (unendlich dimensionalen) Vektorraum gibt es eine Norm (L.A.)

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Zusammenhang: $D(f, g) = \|f - g\|_\infty$

8.15 Satz (Uniforme Limes stetiger Funktionen sind stetig)

(Y, d') metrischer Raum , X Hausdorff-Raum

$f_n \in C_b(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n, g) = 0$

$\implies g \in C_b(X, Y)$

Beweis Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

$\implies \exists N$ mit $D(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N$

f_N stetig bei $x \implies \exists$ Umgebung U von x , so dass

$$d'(f_N(x), f_N(x')) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x' \in U$$

Somit für $x' \in U$ gilt

$$\begin{aligned} d'(g(x), g(x')) &\leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x')) + d'(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq D(f, f_N) + \frac{\varepsilon}{3} + D(f_N, f) < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Übung: f_n zudem gleichmäßig stetig $\implies f$ gleichmäßig stetig

8.16 Satz (Cauchy-Kriterium für uniforme Konvergenz)

$f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform konvergent auf $X \iff (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bez. D , d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $D(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

Beweis

" \implies " klar (Satz 7.19)

" \impliedby " $\forall x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq D(f_n, f_m)$$

$\implies (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathbb{C}

\mathbb{C} vollständig $\implies g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$

Noch zu zeigen: Konvergenz uniform (dann g stetig)

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N \quad \forall x \in X$$

Außerdem wähle $m = m(x) \geq N$, so dass

$$|f(x) - f_{m(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann für $n > N$:

$$\begin{aligned} D(f_n, g) &= \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_{m(x)}(x)| + \sup_{x \in X} |f_{m(x)}(x) - g(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

8.17 Korollar $(C_b(X), D)$ vollständiger metrischer Raum

Beweis Nach Satz 17 konvergiert jede Cauchy-Folge und nach Satz 8.16 ist der uniforme Limes dann stetig, also in $C_b(X)$. □

8.18 Satz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius ρ

Sei $K \subset B_\rho(z_0)$ kompakt

$\implies f$ stetig auf K (sogar gleichmäßig)

Begründung Sei $\rho_0 = \max_{z \in K} |z - z_0|$.

Dann $\rho_0 < \rho$ (weil ansonsten $\exists z$ mit $\rho_0 = |z - z_0|$ nach Satz 8.12, aber kann nicht in $K \subset B_\rho(z_0)$ sein. Widerspruch.)

Somit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho_0^n < \infty$

Jetzt setze $f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z - z_0)^n$. Dann ist f_N stetig auf K .

Dann

$$\begin{aligned} D(f, f_N) &= \max_{z \in K} |f_N(z) - f(z)| \\ &= \max_{z \in K} \left| \sum_{n>N} a_n (z - z_n)^n \right| \\ &\leq \sum_{n>N} |a_n| \rho_0^n < \varepsilon \quad \text{für } N \text{ ausreichend groß} \end{aligned}$$

Also f uniformes Limes stetiger Funktionen. □

Beispiele

1. \exp, \cos, \sin stetig auf ganz \mathbb{C} (da $\rho = \infty$)
2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gleichmäßig stetig auf jedem Kompaktum $K \subset B_1(0)$, aber **nicht** auf $B_1(0)$.

Jetzt spezielle Eigenschaften von Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

8.19 Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig , $a, b \in f(I)$, $a \leq b$

$\implies [a, b] \subset f(I)$

Somit sind stetige Bilder von Intervallen wieder Intervalle.

Beweis Sei $x_0, y_0 \in I$, so dass $f(x_0) = a$, $f(y_0) = b$

Nimm an $x_0 < y_0$ (anderer Fall ähnlich)

Sei $c \in (a, b)$. Gesucht $x_* \in [x_0, y_0]$ mit $f(x_*) = c$.

Jetzt Intervallhalbierungsmethode (Newton)

Mittelpunkt $\frac{y_0+x_0}{2}$

Falls $f\left(\frac{y_0+x_0}{2}\right) = c$, fertig

Falls $f\left(\frac{y_0+x_0}{2}\right) > c$, setze $x_1 = x_0$, $y_1 = \frac{y_0+x_0}{2}$

Falls $f\left(\frac{y_0+x_0}{2}\right) < c$, setze $x_1 = \frac{y_0+x_0}{2}$, $y_1 = y_0$

Dann $f(x_1) < c < f(y_1)$. Iteration:

$$(x_n, y_n) = \begin{cases} \left(x_{n-1}, \frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}\right) & , \text{ falls } f\left(\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}\right) > c \\ \left(\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}, y_{n-1}\right) & , \text{ falls } f\left(\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}\right) < c \end{cases}$$

Dann $f(x_n) < c < f(y_n)$

Nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt

$\implies \lim x_n = x_*$, $\lim y_n = y_*$ existieren

Da $|x_n - y_n| = 2^{-n}|x_0 - y_0| \rightarrow 0$, folgt $x_* = y_*$

Nach Stetigkeit

$$f(x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x_*),$$

also $f(x_*) = c$ und $c \in f(I)$. □

8.20 Satz $I \subset \mathbb{R}$ Intervall , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

(i) f injektiv $\iff f$ streng monoton wachsend oder fallend, d.h. $\forall a, b \in I$

$a < b \implies f(a) < f(b)$ (wachsend) oder $f(a) > f(b)$ (fallend)

(ii) Falls f injektiv, existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ und

f^{-1} ist stetig und auch streng monoton.

Beweis

(i) " \implies " Gegenannahme: $\exists a, b, c \in I$ mit $a < c < b$ mit $f(c) < f(a)$ und $f(c) < f(b)$ oder $f(c) > f(a)$ und $f(c) > f(b)$.

Wir betrachten z.B. ersten Fall mit z.B. $f(a) < f(b)$.

Nach Zwischenwertsatz wird Wert $f(a)$ auf $[c, b]$ angenommen, aber auch bei $a \notin [c, b]$. Widerspruch zur Injektivität.

" \impliedby " klar (gilt auch ohne Stetigkeit)

(ii) klar: f^{-1} wohl definiert und auch streng monoton. Stetig?

Sei $y = f(x) \in f(I)$. Dann $f^{-1}(y) = x$.

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$f^{-1}((y - \delta, y + \delta) \cap f(I)) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Hierzu setze

$$\delta_{\pm} = \begin{cases} |f(x \pm \varepsilon) - y| & \text{für } x \pm \varepsilon \in I, \\ \pm 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } \delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}.$$

□

Beispiele

1. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, monoton wachsend, stetig

$$\implies f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \text{ stetig auf } [0, \infty)$$

2. $f(x) = \exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (Satz 8.18)

f monoton wachsend auf $[0, \infty)$, da Summe monoton wachsender Funktionen.

$f(x) = \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ auch monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$, da $x \in (-\infty, 0] \mapsto \exp(-x)$ monoton fallend

Zudem $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

$\implies f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend

$f^{-1}(y) = \ln(y)$ heißt natürlicher Logarithmus

Regeln:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(y)) &= y & \forall y > 0 & , \ln(1) = 0 \\ \ln(\exp(x)) &= x & \forall x \in \mathbb{R} & , \ln(e) = 1 \\ \ln(yy') &= \ln(y) + \ln(y') & \forall y, y' > 0 & \end{aligned}$$

weil: Seien $y = \exp(x)$, $y' = \exp(x')$. Dann

$$\ln(y) + \ln(y') = x + x' = \ln(\exp(x + x')) = \ln(\exp(x) \cdot \exp(x')) = \ln(yy')$$

□

Definition (Allgemeine Potenz) $a > 0$, $a^x = e^{x \ln(a)}$

(Logarithmus zur Basis $a > 0$) $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$

Regeln: Übung

Erinnerung $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8.21 Satz (Eigenschaften der reellen Funktionen \cos und \sin)

- (i) Für $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ gilt $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
 und somit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.
- (ii) Für $x \in [-4, 4]$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ und somit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- (iii) $x \in [0, \sqrt{6}] \mapsto \cos(x)$ streng monoton fallend.
- (iv) \cos hat genau eine Nullstelle auf $[0, 2]$, die mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird.
- (v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$
- (vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$ und $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$ und $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$
 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- (ix) $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin(x)$, $\sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$
 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
- (x) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ streng monoton wachsend
 Die Umkehrfunktion ist $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, genannt *arcus sinus*.
- (xi) $x \in [0, \pi] \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ streng monoton fallend
 Umkehrfunktion: $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, *arcus cosinus*

Beweis

- (i) Für $x \in [-5, 5]$ und $n \geq 2$ gilt $\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} < 1$
 $\implies \left(\frac{x^{2n}}{2n!}\right)_{n \geq 2}$ monoton fallende Folge, konvergiert gegen 0.
 Cosinus-Reihe alternierend \implies Abschätzung nach unten (bzw. oben) durch endliche Teilreihe mit letztem Glied negativ (bzw. positiv). (Vergleiche Beweis vom Leibnizkriterium, Satz 6.8.)
- (ii) Ähnlich: Für $x \in [-4, 4]$ und $n \geq 1$ ist $\frac{x^2}{(2n)(2n+1)} < 1$
 $\implies \left(\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)_{n \geq 1}$ monoton fallend
 $\implies 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \stackrel{|x| \leq 4}{\leq} 1$

(iii) Nach Additions-Theorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) \\ &= \underbrace{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0 \text{ nach (ii)}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}_{>0, y-x>0} > 0\end{aligned}$$

Für $0 < x < y \leq \sqrt{6}$

(iv) \cos stetig, $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

\implies Nullstelle nach Zwischenwertsatz. Eindeutig nach (iii).

(v) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

Zudem: $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

(vi) $\exp(in\pi) \stackrel{(v)}{=} (i)^{2n} = (-1)^n \stackrel{\text{Satz 6.18}}{=} \cos(n\pi) + i\sin(n\pi)$

(vii) $\exp\left(i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = i^{2n+1} = (-1)^n i = \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) + i\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$

(viii) $\cos(x + n\pi) + i\sin(x + n\pi) = \exp(i(x + n\pi)) = \exp(ix)\exp(in\pi) = (\cos x + i\sin x)(-1)^n$

(ix) analog

(x) Nach (ix) $\sin(x) = \begin{cases} -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$x \in [0, \sqrt{6}] \mapsto \cos x$ monoton fallend nach (iii) $\implies \sin$ monoton wachsend

(xi) analog □

Übung: arctan, arccot

9 Differenzialrechnung reeller Funktionen einer Variable

9.1 Definition $A \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

f differenzierbar in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ existiert

Dann heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f bei x_0 .

Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) = Df(x_0) = \dots$

Weiter: f differenzierbar auf $A \iff f$ differenzierbar in $x \quad \forall x \in A$

Bemerkungen

1. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt Differenzenquotient, x_0 BP seines Definitionsbereiches $A \setminus \{x_0\}$

2. Umschreiben $f'(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$

3. Geometrische Interpretation von $f'(x_0)$ als Steigung der Tangente bei x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4. $f'(x_0)$ existiert $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon|x - x_0| \quad \text{für } |x - x_0| < \delta$$

$\iff \exists$ Funktion $\varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$ mit $\delta(0) = 0$, stetig in 0, so dass

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{lineare Approximation von } f \text{ bei } x_0} + \delta(x - x_0) \cdot (x - x_0)$$

9.2 Satz f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0

Beweis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \frac{x - x_0}{x - x_0} \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung Umkehrung falsch, da z.B. $f(x) = |x|$ stetig in 0, aber nicht differenzierbar in x_0 .

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ existiert nicht}$$

Beispiele

1. $f(x) = c \implies f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x \implies f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon)^n - x^n}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k \varepsilon^{n-k-1} = \binom{n}{n-1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

4. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{nach Satz 8.21}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad \text{nach Satz 8.21}$$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(\varepsilon) + \sin(x)(\cos(\varepsilon) - 1)}{\varepsilon}$$

$$= \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0 = \cos(x)$$

$$g'(x) = -\sin(x)$$

5. $f(x) = \exp(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(x + \varepsilon) - \exp(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} \exp(x) \\ &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} \right) \exp(x) = \left(1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \geq 2} \frac{\varepsilon^{n-2}}{n!} \right) \exp(x) = \exp(x), \end{aligned}$$

weil $\sum_{n \geq 2} \frac{\varepsilon^{n-2}}{n!} < \infty$ uniform für kleines ε .

9.3 Satz (Rechenregeln) $A \subset \mathbb{R}$ offen, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) (Linearität der Ableitung)

$$(f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x)$$

(ii) (Produktregel oder Leibnizregel)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(iii) (Quotientenregel) Sei $g'(x) \neq 0$. Dann

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(iv) (Kettenregel) h differenzierbar in $f(x)$

$$(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$$

(v) (Inversenregel) Sei f stetig und injektiv auf Umgebung von x , $f'(x) \neq 0$ Dann $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ und $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beweis

(i)

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f + \lambda g)(x + \varepsilon) - (f + \lambda g)(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} + \lambda \frac{g(x + \varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} \right) = f'(x) + \lambda g'(x) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) - f(x)g(x+\varepsilon) + f(x)g(x+\varepsilon) - f(x)g(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \underbrace{g(x+\varepsilon)}_{\text{stetig}} + f(x) \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

(iii) analog, Übung

(iv) Sei $y = f(x)$. Definiere Funktion $\delta(\varepsilon)$ durch

$$h(y') = h(y) + h'(y)(y' - y) + \delta(y' - y)(y' - y)$$

Dann ist δ stetig in 0 und $\delta(0) = 0$ (Bemerkung 4. nach Definition 9.1.)

Wähle $y' = f(x + \varepsilon)$. Dann

$$h(f(x + \varepsilon)) = h(f(x)) + h'(f(x))(f(x + \varepsilon) - f(x)) + \delta(f(x + \varepsilon) - f(x))(f(x + \varepsilon) - f(x))$$

Somit

$$\begin{aligned}(h \circ f)'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(h'(f(x)) \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} + \underbrace{\delta(f(x + \varepsilon) - f(x))}_{\text{Komposition stetiger Funktion}} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right) \\ &= h'(f(x))f'(x) + \delta(0)f'(x)\end{aligned}$$

(v) Da $f^{-1}(f(x)) = x$, folgt mit (iv):

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

□

Beispiele

1. $f(x) = \ln(x) = \exp^{-1}(x) \implies f'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \arcsin(x) \quad x \in (-1, 1)$
 $\implies f'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \stackrel{\cos > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)} \implies f'(x) = \ln(a)a^x$

4. $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \implies f'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

$$5. f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

$$6. \frac{d}{dy} \operatorname{arccot}(y) = \frac{-1}{1+\cot^2(x)} = \frac{-1}{1+y^2}, \quad y = \cot(x)$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 & x = 0 \end{cases}$$

f differenzierbar auf \mathbb{R} , aber f' nicht stetig in 0.

9.4 Definition $a, b \in \mathbb{R}$, $quad f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $quad x_0 \in (a, b)$

(i) f besitzt lokales Maximum (bzw. Minimum) bei x_0

$$\iff \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x_0, \text{ so dass } \forall x \in U \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(bzw. $f(x) \geq f(x_0)$)

Ein lokales Extremum ist entweder lokales Maximum oder Minimum.

(ii) Sei f zudem differenzierbar in x_0 .

$$x_0 \text{ kritischer Punkt von } f \iff f'(x_0) = 0$$

Dann heißt $f(x_0)$ kritischer Wert von f .

9.5 Satz $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$

f hat lokales Extremum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$, d.h. x_0 kritischer Punkt

Beweis Z.B. lokales Maximum

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

$$\text{Also } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(x_0)$$

□

9.6 Satz (Satz von Rolle) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) .

Sei $f(a) = f(b)$.

$$\implies \exists c \in (a, b) \text{ mit } f'(c) = 0$$

Beweis $[a, b]$ kompakt (nach Heine–Borel), f stetig

$\implies f$ nimmt Maximum und Minimum an, d.h. $\exists c', c'' \in [a, b]$ mit

$$f(c') = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad f(c'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

Falls c', c'' beides Endpunkte a, b von $[a, b]$, ist f konstant, d.h. $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b] \implies f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b)$

Sonst sei etwa $c = c' \in (a, b)$
 $\implies f$ hat lokales Maximum bei c
 $\xrightarrow{\text{Satz 5}} f'(c) = 0$

□

9.7 Satz (Mittelwertsatz) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) .
 $\implies \exists c \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Beweis Setze

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad , \quad x \in [a, b]$$

F erfüllt Voraussetzungen des Satzes von Rolle, insbesondere $F(a) = 0 = F(b)$
 $\implies \exists c \in (a, b)$ mit $0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

□

9.8 Korollar $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar
 $\implies \forall x, y \in (a, b) \exists \gamma = \gamma(x, y) \in (0, 1)$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(x + \gamma(x - y))(x - y)$$

9.9 Korollar $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

(i) f monoton wachsend (bzw. fallend)

$$\iff \forall x \in (a, b) \text{ gilt } f'(x) \geq 0 \text{ (bzw. } f'(x) \leq 0)$$

(ii) f streng monoton wachsend (bzw. fallend) und somit injektiv auf (a, b) .

$$\iff \forall x \in (a, b) \text{ gilt } f'(x) > 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) < 0)$$

(iii) f konstant $\iff f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Begründung (i) und (ii)

" \implies " klar

" \impliedby " Korollar 9.8

□

9.10 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$$\implies \exists c \in (a, b) \text{ mit } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis wie Satz 9.7, nur mit

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

□

Anwendung:

9.11 Satz (Regel von de l'Hospital)

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte

$$(i) \lim_{x \downarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \downarrow a} g(x)$$

oder

$$(ii) \lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \downarrow a} g(x).$$

Zudem existiere $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\implies \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{Existenz des ersten Limes und Gleichheit})$$

Analoges gilt für $\lim_{x \uparrow b}$.

Beweis

- (i) Da $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ (ggfs. nach Verkleinern von b). Zudem können f, g stetig nach a fortgesetzt werden (durch den Wert 0).

$\xrightarrow{\text{Satz 10}} \forall x \in (a, b) \exists x_0 \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Mit $x \downarrow a$ auch $x_0 \downarrow a$.

- (ii) Sei $\alpha = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Zu $\varepsilon > 0 \exists c > a$ mit

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, c)$$

Nach der Voraussetzung von (ii) und evtl. Verkleinern von δ gilt zudem

$$f(x) > f(c) \quad \text{und} \quad g(x) > g(c) \quad \forall x \in (a, c).$$

Nach Satz 9.10: $\forall x \in (a, c) \exists x_0 \in (x, c)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(c) - f(x)}{g(c) - g(x)},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \cdot \frac{g(c) - g(x)}{f(c) - f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \left(1 - \frac{g(x)f(c) - g(c)f(x)}{g(x)(f(c) - f(x))} \right) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \left(1 + \frac{\frac{f(c)}{f(x)} - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} \right) \\ &\xrightarrow{x \downarrow a} \alpha \left(1 + \frac{0 - 0}{1 - 0} \right) = \alpha, \end{aligned}$$

wobei $x \downarrow a$ auch $x_0 \downarrow a$ impliziert. □

Beispiele

1. $\alpha \neq \beta, \alpha\beta \neq 0$. Mit (i):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{x^{\frac{1}{\beta}} - x^{\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - \beta x^{\beta-1}}{\frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1} - \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}} = \frac{\alpha - \beta}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}} = \alpha\beta$$

2. $\alpha, \beta > 0$. Mit (ii):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cosh(\alpha x))}{\ln(\cosh(\beta x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cosh(\alpha x)} \sinh(\alpha x) \cdot \alpha}{\frac{1}{\cosh(\beta x)} \sinh(\beta x) \cdot \beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tanh(\alpha x) \alpha}{\tanh(\beta x) \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

9.12 Definition $I \subset \mathbb{R}$ Intervall , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

(i) f konvex $\iff \forall a, b \in I$, $a < b$, $\forall t \in (0, 1)$ gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

(ii) f streng konvex \iff " $<$ " anstelle von " \leq "

(iii) f (streng) konkav $\iff -f$ (streng) konvex

Bemerkung Interpretation mit Bild:

f Funktionswert \leq Lineare Interpolation (konvex)

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & & \downarrow \\ & & (1-t)a + tb \end{array}$$

9.13 Satz Äquivalent sind:

(i) f konvex

(ii) $\forall a, x, b \in I$ mit $a < x < b$ gilt $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

(iii) $\forall a, x, b \in I$ mit $a < x < b$ gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Analoges gilt für streng konvex und konkav.

Beweis

(i) \implies (ii) Gegeben x , setze $t = \frac{x-a}{b-a}$. Dann $x = (1-t)a + tb$ und

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

(ii) \implies (iii) Nach (ii)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und

$$f(b) - f(x) \geq f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-x),$$

d.h.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}.$$

(iii) \implies (i) Gegeben t , setze $x = (1 - t)a + tb$. Dann

$$\begin{aligned} (f(x) - f(a))(b - x) &\leq (f(b) - f(x))(x - a), \\ \text{so dass } f(x)(b - a) &\leq f(b)(x - a) + f(a)(b - x) \\ &= [tf(b) + (1 - t)f(a)](b - a) \end{aligned}$$

□

9.14 Satz $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und bis auf an Randpunkten differenzierbar mit differenzierbarer Ableitung (d.h. zweite Ableitung f'' existiert). Äquivalent sind:

(i) f (streng) konvex auf I

(ii) f' (streng) monoton wachsend auf I

(iii) $f''(x) \geq 0$ (bzw. > 0) $\forall x \in I$, x nicht Randpunkt von I

Beweis (ohne "streng")

(i) \implies (ii) Sei $a < x < b < y$. Wende Satz 9.13 (iii) zweimal an:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b}$$

Bilde $\lim_{x \downarrow a}$ und $\lim_{y \downarrow b}$, dann $f'(a) \leq f'(b)$.

Im strengen Fall füge weiteren Punkt $z \in (x, b)$ ein und wende Satz 9.13 dreimal an.

(ii) \implies (i) Nach Mittelwertsatz folgt die Bedingung Satz 9.13 (iii).

(ii) \iff (iii) Korollar 9.9 (nur hier f'' benötigt)

□

Beispiel $f(x) = x^\alpha$, $\text{quad } x \in I = (0, \infty)$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

Falls $\alpha > 1$ oder $\alpha < 0$, ist f strikt konvex auf I .

Falls $0 < \alpha < 1$, ist f strikt konkav auf I .

Erstes Beispiel für eine Konvexitätsungleichheit:

9.15 Satz (Jensen-Ungleichung) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex

$$x_1, \dots, x_N \in I, \quad 0 < \lambda_n < 1 \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$$

$$\implies f\left(\sum_{n=1}^N \lambda_n x_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \lambda_n f(x_n)$$

Beweis Induktion über N .

Klar für $N = 1$

Schritt von N nach $N + 1$:

Setze $\lambda = \sum_{n=1}^N \lambda_n$ und $x = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n$. Dann $1 - \lambda = \lambda_{N+1}$ und

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{N+1}) &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{N+1}) \\ &= \lambda f\left(\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n\right) + \lambda_{N+1}f(x_{N+1}) \\ &\stackrel{\text{Voraus.}}{\leq} \lambda \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n) + \lambda_{N+1}f(x_{N+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \lambda_n f(x_n) \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$, konvex auf \mathbb{R}
 $\implies e^{\frac{x+y+z}{3}} \leq \frac{1}{3}(e^x + e^y + e^z)$

Bemerkung Verallgemeinerung für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß anstelle von $\sum_{n=1}^N \lambda_n \delta_{x_n}$, d.h. $f(\mathbb{E}(x)) \leq \mathbb{E}(f(x))$, wobei \mathbb{E} der Erwartungswert ist.

9.16 Definition $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, induktiv in n definiere:

- (i) f n -mal differenzierbar auf I mit n -ter Ableitung $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $\iff f^{(n-1)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $(f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) \quad \forall x \in I$
- (ii) $C^n(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ } n\text{-mal differenzierbar und } f^{(n)} \text{ stetig auf } I\}$
- (iii) $C^\infty(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ beliebig oft differenzierbar}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, \mathbb{R})$

Bemerkung $C^0(I, \mathbb{R}) = C(I, \mathbb{R})$ stetige reellwertige Funktionen. Beachte

$$C^n(I, \mathbb{R}) \supset C^{n+1}(I, \mathbb{R}) \dots \supset C^\infty(I, \mathbb{R})$$

Weitere Schreibweisen: $f^{(n)} = \partial^n f = \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^n f}{dx^n}$

Beispiel $f(x) = e^x$, $f^{(n)} = f \implies f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$

9.17 Definition $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar, $x_0 \in I$. Das Taylorpolynom von f in x_0 der Ordnung n ist

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k$$

Bemerkungen

1. Für $0 \leq k \leq n$ gilt (nach Ableiten und Einsetzen)

$$\frac{d^k}{dx^k} T_{n,k_0}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} f(x_0) = f^{(k)}(x_0). \quad (9.1)$$

T_{n,x_0} ist eindeutig bestimmt als Polynom n -ten Grades, für das (1) gilt (für $0 \leq k \leq n$).

2. T_{n,x_0} ist Approximation von f in Nähe von x_0 durch Polynom n -ten Grades.

Qualität der Approximation wird gegeben durch:

9.18 Satz (Satz von Taylor) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, $x, x_0 \in I$

Definiere den n -ten Rest durch

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

$\implies \exists \gamma = \gamma(x_0, x, n) \in (0, 1)$, so dass

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \gamma(x - x_0)) \quad (\text{Lagrangesches Restglied})$$

Bemerkungen

1. Für $n = 0$ ist dies genau Mittelwertsatz.
2. Falls $f^{(n+1)}$ stetig, d.h. $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

Insbesondere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

Achtung! Im Allgemeinen gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,x_0}(x) = 0$

3. Falls $f^{(n+1)}$ durch $C > 0$ beschränkt ist, gilt $R_{n,x_0}(x) \leq C|x - x_0|^{n+1}$.

Beweis Definiere

$$g(x) = R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x).$$

Nach (1)

$$0 = g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0).$$

Jetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} \\
 &= \frac{g'(\xi)}{(x+1)(\xi-x_0)^n} \quad \text{Verallg. MWS mit } \xi \in (x_0, x) \text{ oder } \xi \in (x, x_0) \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{g'(\xi) - g'(x_0)}{(\xi-x_0)^n - (x_0-x_0)^n} \\
 &= \frac{1}{(x+1)} \frac{g''(\xi)}{n(\xi-x_0)^{n-1}} \quad \text{mit neuer Zwischenstelle } \xi \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(\xi-x_0)^0} \quad \text{neues } \xi = x_0 + \gamma(x-x_0) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{da } (T_{n,x_0})^{(n+1)} = 0.
 \end{aligned}$$

□

Anwendung (Höherer Ableitungstest für lokale Extrema)

$I = \mathbb{R}$ offenes Intervall , $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $n \geq 1$

Sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dann

- (i) n ungerade, $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \implies f$ lokales Minimum bei x_0
- (ii) n ungerade, $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \implies f$ lokales Maximum bei x_0
- (iii) n gerade, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \implies f$ hat kein lokales Extremum bei x_0
(x_0 Sattel- oder Wendepunkt).

Begründung Nach Taylor $\exists \gamma \in (0, 1)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \gamma(x-x_0))$$

Nach Voraussetzung ist $f^{(n+1)}$ stetig, somit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n+1)}(x_0 + \gamma(x-x_0)) = f^{(n+1)}(x_0).$$

Also kann lokales Verhalten an Polynom $(x-x_0)^{n+1}$ abgelesen werden. □

Bemerkung Nach qualitativer Version von Taylor (siehe Übung) gilt Gleiches auch ohne Stetigkeit von $f^{(n+1)}$.

9.19 Definition $I \subset \mathbb{R}$ offen , $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in I$

(i) Die Potenzreihe $T_{\infty, x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ heißt Taylorreihe von f in x_0 (oft auch MacLaurinreihe genannt).

(ii) f reell analytisch in $x_0 \iff \exists r > 0$, so dass

$$f(x) = T_{\infty, x_0}(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < r$$

(Konvergenz der Reihe und Gleichheit mit f)

(iii) f reell analytisch auf $I \iff f$ reell analytisch in $x_0 \forall x_0 \in I$

Bemerkung Als Potenzreihe hat Taylorreihe immer einen Konvergenzradius

$$\rho = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}} \right)^{-1}.$$

Falls Limes existiert, gilt (Quotientenkriterium)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| n \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} \right| \quad (\text{Hadamardsche Formel})$$

Innerhalb des Konvergenzradius, d.h. $x \in B_\rho(x_0)$, konvergiert die Taylorreihe. Sie muss aber nicht f darstellen (d.h. f muss nicht reell analytisch sein). Hierzu folgendes

Beispiel $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$, Taylorreihe um $x_0 = 0$

Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^4} - 2 \frac{1}{x^3} \right) \\ f^{(n)}(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \text{Polynom } (2n)\text{-ten Grades in } \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y}}{y^{-k}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^k}{e^y} \stackrel{\text{L'Hospital } k\text{-mal}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k!}{e^y} = 0,$$

gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(0)$$

$\implies f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und Taylorreihe bei $x_0 = 0$ identisch 0, somit ungleich f (d.h. f nicht reell analytisch in 0).

Aber: f reell analytisch in allen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Satz 9.22 unten)

Ziel: Reelle Analytizität von Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ innerhalb ihres Konvergenzradius ρ , d.h. $\forall x_0 \in B_\rho(0)$. Bisher nur klar für $x_0 = 0$.

9.20 Satz I offenes endliches Intervall , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $C^1(I, \mathbb{R})$. Es gelte:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ existiert für ein $x_0 \in I$.

(ii) Ableitungen $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren uniform auf I gegen $g \in C^0(I, \mathbb{R})$.

$\implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uniform auf I gegen $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ und $f' = g$.

Bemerkung Voraussetzungen legitimieren also Vertauschung der Limites:

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

Die Voraussetzung (i) dient lediglich der Fixierung der additiven Konstanten von f .

Beweis Erinnerung: $D(f'_n, g) = \sup_{x \in (a,b)} |f'_n(x) - g(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Nach Satz 8.15 ist g stetig als uniformer Limes stetiger Funktionen.

Nun für $x \in (a, b)$ gilt nach MWS (für die Funktion $f_n - f_m$):

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)(f'_n(\xi) - f'_m(\xi)).$$

Somit

$$D(f_n, f_m) \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |b - a| D(f'_n, f'_m).$$

Da $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathbb{R} und $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bezüglich D , ist also auch $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bezüglich D .

$\xrightarrow{\text{Satz 8.16}}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform konvergent gegen stetige Funktion f .

Noch zu zeigen: f differenzierbar und $f' = g$.

Sei $x, y \in I$ und z.B. $x < y$. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \exists$ nach MWS $\xi_n \in (x, y)$ mit

$$\frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = f'_n(\xi_n).$$

Nach der Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft von $\mathbb{R} \exists$ zu $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge, wieder mit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Sei $\xi = \lim \xi_n \in [x, y]$. Dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(\xi) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - g(\xi) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(\xi_n) - g(\xi_n) + g(\xi_n) - g(\xi)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (D(f'_n, g) + |g(\xi_n) - g(\xi)|) \underbrace{=}_g \text{ stetig} 0 \end{aligned}$$

Also

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ \xi \in [x, y]}} g(\xi) = g(x)$$

(wieder, da g stetig)

□

9.21 Korollar $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ uniform konvergente Reihe in $C^1(I, \mathbb{R})$

mit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergent für ein $x_0 \in I$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uniform konvergent auf I und $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

Begründung Satz 9.20 für Partialsummen □

9.22 Satz Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$

$\implies f$ reell analytisch auf $B_\rho(0)$

Präziser: $f(x) = T_{\infty, x_0}(x) \quad \forall x \in B_{\rho-|x_0|}(x_0)$

Bemerkung Nach Translation gilt das Gleiche für Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ um beliebigen Punkt x_0 (anstelle von 0).

Beweis Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n n x^{n-1}$ ist ρ (da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$).

Für $r < \rho$ ist Konvergenz auf $\overline{B_r(0)} = [-r, r]$ uniform (Satz 8.18).

Zudem $\sum_{n \geq 0} a_n 0^n = a_0$.

$\xrightarrow{\text{Korollar 9.21}} f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1} \quad \forall x \in \overline{B_r(0)}$ und f' stetig auf $B_r(0)$.

Da dies $\forall r < \rho$ gilt, folgt $f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1} \quad \forall x \in B_\rho(0)$

Iteration dieses Arguments zeigt, dass $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in B_\rho(0)$$

Jetzt für $x_0 \in B_\rho(0)$ und $x \in B_{\rho-|x_0|}(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_n ((x - x_0) + x_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}$$

Die Doppelreihe ist absolut konvergent, da

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} |x - x_0|^k |x_0|^{n-k} = \sum_{n \geq 0} |a_n| \underbrace{(|x - x_0| + |x_0|)^n}_{< \rho} < \infty$$

Somit gilt nach dem Cauchyschen Doppelreihensatz (Satz 6.15)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right) (x - x_0)^k \\ &\stackrel{\text{oben}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k = T_{\infty, x_0}(x). \end{aligned}$$

□

Beispiele

1. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{quad } x > -1$
 $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $n \geq 1$

$$T_{\infty,0}(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} \text{Konvergenzradius} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\alpha-n} \right| = 1 \end{aligned}$$

Lagrangescher Rest mit $\gamma \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+0+\gamma x)^{\alpha-n-1} \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha-k}{k+1} \frac{1}{1+\gamma x} \right) \frac{\alpha-n}{n+1} x (1+\gamma x)^{\alpha-1} \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(-1 + \frac{\alpha+1}{k+1} \right)}_{\substack{|\text{Faktor}| < 1 \text{ f\"ur } k \text{ gro\ss,} \\ \text{falls } \left| \frac{x}{1+\gamma x} \right| < 1}} \frac{x}{1+\gamma x} \right) \underbrace{\frac{\alpha-n}{n+1} x (1+\gamma x)^{\alpha-1}}_{\text{beschr\"ankt f\"ur } n \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Jetzt:

$$\left| \frac{x}{1+\gamma x} \right| < 1 \iff |x| < (1+\gamma \text{sgn}(x)|x|) \iff |x| < \frac{1}{1-\gamma \text{sgn}(x)}$$

OK f\"ur $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,x}(0) = 0$

Somit: $f(x) = (1+x)^\alpha$ reell analytisch auf $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Resultat nicht optimal: Tats\"achlich f reell analytisch auf $(-1, 1)$.

Begr\"undung $f'(x) = \alpha(x+1)^{\alpha-1} = \alpha(x+1)^{-1} f(x)$,

d.h. $(x+1)f'(x) = \alpha f(x)$

Zudem mit Korollar 9.21 f\"ur $x \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} &(x+1)(T_{\infty,0})'(x) \\ &= (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \right) x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} (n+\alpha-n) x^n \\ &= \alpha T_{\infty,0}(x) \end{aligned}$$

Gleiche Differentialgleichung erster Ordnung und

$$f(0) = 1 = T_{\infty,0}(0)$$

$$\text{Somit } \left(\frac{T_{\infty,0}}{f} \right)' = \frac{(T_{\infty,0})' f - T_{\infty,0} f'}{f^2} = 0 \xrightarrow{\text{Korollar 9.9}} \frac{T_{\infty,0}}{f} = \text{konst}$$

$$\xrightarrow{\text{Wert bei } 0} \text{konst} = 1 \implies f(x) = T_{\infty,0}(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

2. $f(x) = \ln(1-x)$ Taylorreihe um 0?

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}, \quad f^{(n)}(x) = (n-1)! \frac{-1}{(1-x)^n}$$

$$\implies T_{\infty,0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n \text{ konvergent f\u00fcr } |x| < 1$$

$$\text{Betrachte } F(x) = \ln(1-x) - T_{\infty,0}(x), \quad F(0) = 0$$

Mit Korollar 22:

$$F'(x) = \frac{-1}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} n x^{n-1} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Kor. 9}} F(x) = \text{konst} = F(0) = 0$$

$$\implies \boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

3. $f(x) = \arctan(x)$, $T_{\infty,0}$?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad \text{f\u00fcr } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

"Termweise integrieren" mit konstantem Term $\arctan(0) = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{f\u00fcr } |x| < 1$$

(rigoros gehe wie oben mit Differentialgleichung vor)

9.23 Satz (Abelscher Grenzwertsatz f\u00fcr das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rand)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{C} .

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent (nicht notwendigerweise absolut)

$$\implies f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ uniform konvergent auf } [0, 1]$$

Insbesondere ist also f stetig auf $[0, 1]$ und $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis Setze $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$.

Cauchy-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $|S_{m,k}| < \varepsilon \quad \forall m \geq N, k \in \mathbb{N}$.

Jetzt

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n x^n &= S_{m,1} x^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1}) x^{m+2} + \dots + (S_{m,k} - S_{m,k-1}) x^{m+k} \\ &= S_{m,1} \underbrace{(x^{m+1} - x^{m+2})}_{\geq 0} + S_{m,2} \underbrace{(x^{m+2} - x^{m+3})}_{\geq 0} + \dots \\ &\quad + S_{m,k-1} (x^{m+k-1} - x^{m+k}) + S_{m,k} x^{m+k} \end{aligned}$$

Somit

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n x^n \right| \leq \varepsilon (x^{m+1} - x^{m+2} + x^{m+2} - x^{m+3} + \dots + x^{m+k-1} - x^{m+k} + x^{m+k})$$

$$\leq \varepsilon x^{m+1} \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

Also Cauchy-Kriterium für uniforme Konvergenz (Satz 8.16) erfüllt. □

Beispiele

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ alternierende konvergente Reihe (Leibnizkriterium)

Somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \uparrow 1} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \right)$$

Bsp. 2, oben $\stackrel{=}{=} \lim_{x \uparrow 1} \ln(1 - (-x)) = \ln(2)$

- 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{x \uparrow 1} \arctan(x)$$

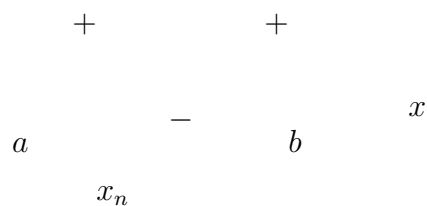
$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Letzteres, weil $\tan(\varphi) = 1 \iff \cos \varphi = \sin \varphi \iff \varphi = \frac{\pi}{4}$ (siehe gleichschenkliges Dreieck)

10 Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen

Integral = Fläche zwischen Funktion und Achse

y



Riemann-Integral $\approx \sum_n (x_n - x_{n-1})f(\xi_n)$ mit Zwischenpunkten $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$

Alternative: Lebesgue-Integral durch Zerlegung der y -Achse

Definition über Limesprozedur:

10.1 Definition (i) Eine Zerlegung Z des endlichen Intervalls $[a, b]$ ist gegeben durch Punkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ mit endlichem $N \in \mathbb{N}$.

(ii) Zerlegung Z' feiner als Zerlegung Z (Schreibweise $Z \leq Z'$)

\iff jeder Punkt in Z ist auch in Z'

(iii) Gegeben Zerlegungen Z und Z' , so entsteht die Verfeinerung $Z \cup Z'$ durch deren Überlagerung.

(iv) Feinheit einer Zerlegung $\mathcal{F}(Z) = \max_{n=1, \dots, N} \Delta x_n$ mit $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

10.2 Definition (i) *Untersumme* $U_Z(f)$ und *Obersumme* $O_Z(f)$ einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bez. Zerlegung Z von $[a, b]$ sind

$$U_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot m_n \quad \text{mit} \quad m_n = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

$$O_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot M_n \quad \text{mit} \quad M_n = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

(ii) *Unteres und oberes Riemann-Integral* sind durch \sup und \inf über alle Zerlegungen von $[a, b]$ definiert:

$$U(f) = \sup_Z U_Z(f) \quad , \quad O(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

(iii) f *Riemann-integrierbar* $\iff U(f) = O(f) \in \mathbb{R}$

Dann werden folgende Schreibweisen für das Integral von f über $[a, b]$ verwendet:

$$\int_a^b dx f(x) = U(f) = O(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} dx f(x)$$

Bemerkung Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dann $U_Z(f) = \infty$ für alle Zerlegungen. Riemann-integrierbare Funktionen sind also immer beschränkt.

10.3 Satz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Z, Z' Zerlegungen von $[a, b] \implies U_Z(f) \leq O_{Z'}(f)$
Somit auch $U(f) \leq O(f)$

Begründung Behauptung klar für $Z = Z'$

Sei zunächst $Z \leq Z'$ und z.B. $x_{n-1} = x'_{j-1} < x'_j < x'_{j+1} = x_n$

Dann

$$\begin{aligned} \Delta x_n m_n &= \Delta x'_j m_n + \Delta x'_{j+1} m_n \\ &\leq \Delta x'_j m'_j + \Delta x'_{j+1} m'_{j+1} \quad (\text{weil inf über kleineres Intervall}) \end{aligned}$$

Somit $U_Z(f) \leq U_{Z'}(f)$

Analog: $O_Z(f) \geq O_{Z'}(f)$

Jetzt $Z \leq Z \cup Z'$ und $Z' \leq Z \cup Z'$, so dass

$$U_Z(f) \leq U_{Z \cup Z'}(f) \leq O_{Z \cup Z'}(f) \leq O_{Z'}(f)$$

□

10.4 Satz (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ Zerlegung Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

Beweis

" \implies " $O(f) = U(f) \implies Z, Z'$ mit $O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$
 $\implies O_{Z \cup Z'}(f) - U_{Z \cup Z'}(f) \leq O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$ (Beweis von Satz 10.3)

" \impliedby " $0 \leq O(f) - U(f) \leq O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$ für geeignetes Z □

10.5 Satz (Verschärftes Riemannkriterium) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \quad \forall Z$ mit $\mathcal{F}(Z) < \delta$.

Beweis

" \impliedby " klar nach Satz 10.4

" \implies " Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 10.4 \exists Zerlegung Z' mit $O_{Z'} - U_{Z'} < \frac{\varepsilon}{3}$ (ohne Argument von $O_{Z'} = O_{Z'}(f)$). Sei Z beliebige Zerlegung.

Behauptung \exists eine von Z unabhängige Konstante $C = C(f, Z')$ mit

$$O_Z - O_{Z \cup Z'} \leq C\mathcal{F}(Z) \quad , \quad U_{Z \cup Z'} - U_Z \leq C\mathcal{F}(Z)$$

Begründung Seien x_n, x_{n+1} in Z .

Betrachte zugehörigen Beitrag B_n zu $O_Z - O_{Z \cup Z'}$.

Falls kein Punkt von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, ist $B_n = 0$.

Falls ein Punkt x' von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt:

$$\begin{aligned} B_n &= (x_{n+1} - x_n) \sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - (x_{n+1} - x') \sup_{[x', x_{n+1}]} f - (x' - x_n) \sup_{[x_n, x']} f \\ &= (x_{n+1} - x') \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x', x_{n+1}]} f \right) + (x' - x_n) \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x_n, x']} f \right) \\ &\leq \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f \right) \cdot 2 \end{aligned}$$

Falls k Punkte von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt analog:

$$B_n \leq \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f \right) (k + 1)$$

Summieren über Beitrag zeigt erste Behauptung. Zweite analog.

Somit

$$\begin{aligned} O_Z - U_Z &\leq |O_Z - O_{Z \cup Z'}| + |O_{Z \cup Z'} - U_{Z \cup Z'}| + |U_{Z \cup Z'} - U_Z| \\ &\leq C\mathcal{F}(Z) + \frac{\varepsilon}{3} + C\mathcal{F}(Z) < \varepsilon \end{aligned}$$

für $\mathcal{F}(Z) < \delta = \frac{\varepsilon}{3C}$. □

10.6 Definition $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von $[a, b]$ mit Punkten $x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Sei $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Die zugehörige Riemannsche Zwischensumme ist

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot f(\xi_n).$$

10.7 Satz (Zwischensummenbeschreibung des Riemann-Integrals)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

$$\int_a^b dx f(x) = I \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |S_{Z,\xi}(f) - I| < \varepsilon$$

\forall Zerlegungen $\mathcal{F}(Z) < \delta$ und Zwischenpunkte ξ .

Beweis

" \implies " Es gilt

$$U_Z - O_Z \leq U_Z - I \leq S_{Z,\xi} - I \leq O_Z - I \leq O_Z - U_Z,$$

d.h. $|S_{Z,\xi} - I| < O_Z - U_Z < \varepsilon \quad \forall \mathcal{F}(Z) < \delta$ (nach Satz 10.5).

" \impliedby " Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$, so dass

$$|S_{Z,\xi} - I| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } \mathcal{F}(Z) < \delta \quad \forall \text{ Zwischenpunkte } \xi.$$

Bestimme ξ und ξ' , so dass

$$|S_{Z,\xi} - O_Z| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad |S_{Z,\xi'} - U_Z| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dann

$$O_Z - U_Z \leq |O_Z - S_{Z,\xi}| + |S_{Z,\xi} - I| + |S_{Z,\xi'} - I| + |S_{Z,\xi'} - U_Z| < \varepsilon.$$

Schließe mit Satz 10.4 oder 10.5. □

10.8 Korollar $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

$$\implies \int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N f\left(a + \frac{n-t}{N}(b-a)\right) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Begründung Spezielle Zwischensumme mit $\xi_n = a + \frac{n-t}{N}(b-a)$ mit $\Delta x_n = \frac{b-a}{N}$. □

Beispiel zur Berechnung von Integralen: $f(x) = x^2$, $quad x \in [a, b]$

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N \left(a + \frac{n}{N}(b-a)\right)^2 \quad (\text{Korollar 10.8})$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N \left(a^2 + n \frac{2}{N}(b-a)a + \frac{1}{N^2}(b-a)^2 n^2\right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \left(Na^2 + \frac{2}{N}(b-a)a \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{N^2}(b-a)^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right)$$

$$= (b-a) \left(a^2 + (b-a)a + \frac{1}{3}(b-a)^2 \right) = (b-a) \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Länglich. Bessere Alternative später (Fundamentalsatz).

10.9 Satz *Jede stetige Funktion ist (Riemann-) integrierbar.*

Beweis Da $[a, b]$ kompakt, ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig (Satz 8.13), d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall |x - x'| < \delta$.

Für Zerlegung Z mit $\mathcal{F}(Z) < \delta$ gilt also

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Schließe mit Satz 10.4 oder 10.5. □

10.10 Definition $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *Treppenfunktion* $\iff \exists$ Zerlegung Z von $[a, b]$, so dass f auf (x_{n-1}, x_n) konstant ist $\forall n = 1, \dots, N$.

Bemerkung Treppenfunktionen sind nicht stetig, dennoch

10.11 Satz *Treppenfunktionen sind integrierbar.*

Begründung $O_Z(f) - U_Z(f)$ wird beliebig klein, wenn Beitrag der Sprungstellen klein gemacht wird. □

Beispiel für eine nicht Riemann-integrierbare Funktion: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann \forall Zerlegungen Z gilt $O_Z(f) = 1 > U_Z(f) = 0$.

Aber: f Lebesgue-integrierbar und $\int_0^1 dx f(x) = 0$, weil \mathbb{Q} "nur" abzählbar in \mathbb{R} .

10.12 Satz (i) *Monotone Funktionen sind integrierbar.*

(ii) f, g integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \implies f + \lambda g$ und $f \cdot g$ integrierbar (d.h. integrierbare Funktionen bilden eine Algebra).

(iii) f integrierbar $\implies |f|$ integrierbar

(iv) f integrierbar, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies h \circ f$ integrierbar

Beweis

(i) Sei f monoton steigend. Dann

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{n=1}^N \Delta x_n \underbrace{(f(x_{n+1}) - f(x_n))}_{\geq 0} \\ &\leq \mathcal{F}(Z) \sum_{n=1}^N (f(x_{n+1}) - f(x_n)) = \mathcal{F}(Z)(f(b) - f(a)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $\mathcal{F}(Z) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \delta$.

(ii) Für $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$ Übung),

$$\begin{aligned} O_Z(f + \lambda g) &= \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sup_{[x_{n-1}, x_n]} (f + \lambda g) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \Delta x_n \left(\sup_{[x_{n-1}, x_n]} f + \lambda \sup_{[x_{n-1}, x_n]} g \right) \\ &= O_Z(f) + \lambda O_Z(g) \end{aligned}$$

Analog $U_Z(f + \lambda g) \geq U_Z(f) + \lambda U_Z(g)$

Somit

$$O_Z(f + \lambda g) - U_Z(f + \lambda g) \leq (O_Z(f) - U_Z(f)) + \lambda(O_Z(g) - U_Z(g)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Letzteres nach Satz 10.4.

Hilfsmittel:

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sup_{x, x' \in [x_{n-1}, x_n]} |f(x) - f(x')| = \sum_{n=1}^N \Delta x_n v_n(f),$$

wobei die lokale Variation definiert ist als

$$v_n(f) = \sup_{x, x' \in [x_{n-1}, x_n]} |f(x) - f(x')|.$$

Da

$$f(x)g(x) - f(x')g(x') = (f(x) - f(x'))g(x) + f(x')(g(x) - g(x')),$$

gilt

$$v_n(fg) \leq \|g\|_\infty v_n(f) + \|f\|_\infty v_n(g),$$

wobei

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Somit

$$O_Z(fg) - U_Z(fg) \leq \|g\|_\infty(O_Z(f) - U_Z(f)) + \|f\|_\infty(O_Z(g) - U_Z(g))$$

und fg integrierbar nach gleichem Argument wie oben.

(iii) Variation erfüllt $v_n(|f|) \leq v_n(f)$. Dann wie in (ii).

(iv) h gleichmäßig stetig auf Kompaktum $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ (Satz 8.13), d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $|h(y) - h(y')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall |y - y'| < \delta$.

Da f integrierbar, wähle Z , so dass

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \frac{\varepsilon \cdot \delta}{4\|h\|_\infty}.$$

Sei $\sum_{n=1}^{I N}$ die Summe über Terme mit $v_n(f) < \delta$, und $\sum_{n=1}^{II N}$ die Summe über Terme mit $v_n(f) \geq \delta$. Dann

$$O_Z(f) - U_Z(f) \geq \sum_{n=1}^{II N} \Delta x_n,$$

d.h.

$$\sum_{n=1}^{II N} \Delta x_n < \frac{\varepsilon}{4\|h\|_\infty}.$$

Also

$$\begin{aligned} O_Z(h \circ f) - U_Z(h \circ f) &= \sum_{n=1}^{I N} \Delta x_n v_n(h \circ f) + \sum_{n=1}^{II N} \Delta x_n v_n(h \circ f) \\ &\leq \sum_{n=1}^{I N} \Delta x_n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum_{n=1}^{II N} \Delta x_n 2\|h\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

10.13 Satz (Rechenregeln fürs Integral) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) (Linearität des Integrals)

$$\int_a^b dx (f(x) + \lambda g(x)) = \left(\int_a^b dx f(x) \right) + \lambda \left(\int_a^b dx g(x) \right)$$

(ii) (Intervalladditivität) $c \in (a, b)$. Dann

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x)$$

(iii) (Monotonie) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Dann

$$\int_a^b dx f(x) \leq \int_a^b dx g(x)$$

(iv) (Standardabschätzung)

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)| \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

Begründung Da $f + \lambda g$ und $|f|$ integrierbar, folgen alle Aussagen aus den entsprechenden Aussagen für Ober- und Untersummen. \square

10.14 Satz $(f_n)_{n \geq 1}$ auf $[a, b]$ uniform konvergente Folge integrierbarer Funktionen

\implies Grenzfunktion integrierbar und: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx f_n(x) = \int_a^b dx (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$

Entsprechendes gilt für uniform konvergente Reihen: $\sum_n \int = \int \sum_n$

Begründung Sei $f(x) = \lim_n f_n(x)$ Grenzfunktion. Dann

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= (O_Z(f) - O_Z(f_n)) - (U_Z(f) - U_Z(f_n)) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \\ &\leq O_Z(f - f_n) - U_Z(f - f_n) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \quad (\text{vgl. Bew. Satz 10.12(i)}) \\ &\leq 2(b-a) \|f - f_n\|_\infty + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \end{aligned}$$

Wähle n , so dass

$\|f - f_n\|_\infty = D(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, dann Z , so dass $O_Z(f_n) - U_Z(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach Riemannkriterium ist f also integrierbar.

Zudem gilt wegen Linearität und Standardabschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b dx f(x) - \int_a^b dx f_n(x) \right| &= \left| \int_a^b dx (f(x) - f_n(x)) \right| \\ &\leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

\square

10.15 Definition Seien $f, F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, F differenzierbar

F Stammfunktion von $f \iff F' = f$

Bezeichnung: $F(x) = \int dx f(x)$

Bemerkung Stammfunktionen sind immer nur bis auf additive Konstanten $c \in \mathbb{R}$ bestimmt:

F Stammfunktion von $f \iff G = F + c$ Stammfunktion von f

10.16 Satz (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

(i) Für jede Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a).$$

- (ii) Das unbestimmte Integral $G(x) = \int_a^x dt f(t)$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$.
 Falls f stetig ist in $x \in (a, b)$, ist G differenzierbar in x und $G'(x) = f(x)$.
 Somit, falls f stetig auf $[a, b]$, ist G eine Stammfunktion von f .

Bemerkung (ii) bringt die glättende Wirkung des Integrierens zum Ausdruck.

Beweis

- (i) Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, gilt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{n=1}^N (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n) \quad (\text{MWS } x_{n-1} < \xi_n < x_n) \\ &= S_{Z, \xi}(f) \end{aligned}$$

Nun wähle Folge $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(Z_j) = 0$. Dann nach Satz 10.7:

$$F(b) - F(a) = \lim_j S_{Z_j, \xi_j}(f) = \int_a^b dx f(x)$$

- (ii) Lipschitz-Stetigkeit: Sei $x, x' \in [a, b]$, $x < x'$

$$|G(x') - G(x)| = \left| \int_x^{x'} dt f(t) \right| \leq \int_x^{x'} dt |f(t)| \leq |x - x'| \sup_{[a, b]} |f| \leq L|x - x'|$$

mit $L = \|f\|_\infty$.

Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(x') - G(x)}{x' - x} - f(x) \right| &= \frac{1}{|x' - x|} \left| \int_x^{x'} dt (f(t) - f(x)) \right| \\ &\leq \frac{1}{|x' - x|} \int_x^{x'} dt |f(t) - f(x)| \\ &\leq \sup_{t \in [x, x']} |f(t) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

für $|x - x'| < \delta$ nach Stetigkeit von f in x . □

Bemerkungen

1. $F \in C^1([a, b])$. Dann F' Riemann-integrierbar und

$$\int_a^x dt F'(t) = F(x) - F(a)$$

2. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ hat unbestimmtes Integral $G(x) = \int_0^x dt f(t) = |x|$
(Beachte, dass für $x < 0$, $\int_0^x dt f(t) = -\int_x^0 dt f(t)$.)
Aber G nicht differenzierbar in 0, wohl aber Lipschitz-stetig.

Beispiele

1. $\alpha \neq 1$, $\int dx x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, mit entweder $\alpha \in \mathbb{N}$ oder $x > 0$
2. $\int dx \frac{1}{x} = \ln|x| + c \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\int dx e^x = e^x + c$
4. $\int dx a^x = \int dx e^{\ln(a)x} = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad a > 0, a \neq 1$
5. $\int dx \cos(x) = \sin(x) + c \quad \int dx \sin(x) = -\cos(x) + c$
6. $\int dx \tan(x) = -\ln|\cos(x)| + c \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
7. $\int dx \cot(x) = \ln|\sin(x)| + c \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
8. $\int dx \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + c$
9. $\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c \quad \text{für } x \in (-1, 1)$

10.17 Definition *Elementare Funktionen sind rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, all deren Umkehrungen und sämtliche Kombinationen (Summen, Produkte, Kompositionen) davon.*

Bemerkung Stammfunktionen von elementaren Funktionen brauchen nicht elementar zu sein. Beispiele sind:

Integrallogarithmus	$\int dx \frac{1}{\ln(x)}$
Integralsinus	$\int dx \frac{\sin(x)}{x}$
Gauss'sche Fehlerfunktion	$\int dx e^{-x^2}$

Jetzt Integrationstechniken: Partielle Integration, Substitutionsregel

10.18 Satz (Partielle Integration) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit integrierbaren Ableitungen f', g' . Dann

$$\int_a^b dx f(x)g'(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b dx f'(x)g(x)$$

und analog für unbestimmte Integrale.

Beweis Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ Dann Fundamentalsatz. □

Beispiele

1. $\int dx \ln(x) = x \ln(x) - \int dx \frac{1}{x} x = x \ln(x) + c$

2. $\int dx x^n \cos(x) = x^n \sin(x) - n \int dx x^{n-1} \sin(x)$
3. $\int dx x^n \sin(x) = -x^n \cos(x) + n \int dx x^{n-1} \cos(x)$
- 4.

$$\begin{aligned} \int dx x^3 \arctan(x) &= \left(\frac{x^4}{4} + c' \right) \arctan(x) - \int dx \left(\frac{x^4}{4} + c' \right) \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{4}(x^4 - 1) \arctan(x) - \frac{1}{4} \int dx (x^2 - 1) \quad (\text{Wahl } c' = -\frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{4}(x^4 - 1) \arctan(x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + c \end{aligned}$$

10.19 Satz (Substitutionsregel) $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, ϕ differenzierbar , ϕ' integrierbar

Dann

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} dx f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dt f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

und für die Stammfunktionen

$$\int dt f(\phi(t))\phi'(t) = \left(\int dx f(x) \right) \circ \phi$$

Beweis Nach Fundamentalsatz ist Stammfunktion F von f stetig differenzierbar.

$\implies (F \circ \phi)' = (F' \circ \phi)\phi' = (f \circ \phi)\phi'$ nach Satz 10.12 integrierbar. SchlieÙe mit Fundamentalsatz. □

10.20 Korollar (Variablentransformation) $f \in C([a, b], \mathbb{R})$

$\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ differenzierbar und bijektiv, ϕ' integrierbar

$$\implies \int_a^b dx f(x) = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} dt f(\phi(t))\phi'(t)$$

Beispiele

1. $\int_a^b dt f(\alpha t + \beta) = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} dx f(x)$
2. $\int dx \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \log |\phi(x)| + C$, solange $\phi(x) \neq 0$
3. $R(\cdot, \cdot)$ -rationale Funktion in zwei Variablen
 $\int dx R(x, \sqrt[n]{ax+b}) = \int dt R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1}$,
 weil $t = \sqrt[n]{ax+b}$, $ax+b = t^n$, $x = \frac{t^n-b}{a}$, $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

Beispiele

1. $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ rationale Funktion in zwei Variablen

$$\int dx R(x, \sqrt[n]{ax+b}) = \int dt R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1} + C$$

Begründung: setze $t = \sqrt[n]{ax+b}$, $ax+b = t^n$, $x = \frac{t^n-b}{a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}}{a} dt$

Somit z.B.

$$\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{x+1}} \stackrel{x+1=t^2}{=} \int_1^{\sqrt{2}} dt 2 \cdot \frac{t^2-1}{t} = \frac{2}{3} t^3 - 2t \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

Im Allgemeinen ist rechte Seite rationale Funktion in t (Methode siehe unten).

2. $\int dx R(\cos x, \sin x) = \int dt \frac{2}{1+t^2} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) + C$
(wieder rationale Funktion in t)

Begründung: setze $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $quad x = 2 \arctan(t)$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x)$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin x$$

Konkrete Beispiele später.

Methode für Integration rationaler Funktionen $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

1. **Schritt:** Polynomdivision mit Rest

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{Polynom}(x) + \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \text{Grad}(p) < \text{Grad}(q), \text{ teilerfremd}$$

2. **Schritt:** Faktorisierung von q (Fundamentalsatz der Algebra)

$$q(x) = (x-z_1)^{\ell_1} \cdot (x-z_2)^{\ell_2} \cdot \dots \cdot (x-z_n)^{\ell_n}, \quad \ell_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, z_j \in \mathbb{C} \text{ distinkt}$$

z_j ist ℓ_j -fache Nullstelle von q , nicht Nullstelle von p .

3. **Schritt:** Partialbruchzerlegung (eindeutig)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\ell_j} \frac{A_{j,\ell}}{(x-z_j)^\ell} \quad \text{mit } A_{j,\ell} \in \mathbb{C}$$

Berechnung der $A_{i,\ell}$:

- (i) multipliziere mit q
- (ii) Koeffizientenvergleich
- (iii) löse lineare Gleichungen

Beweis der Existenz der Partialbruchzerlegung:

Induktion über $m = \text{Grad}(q)$

Anfang $m = 1$ klar

Schritt von $m - 1$ nach m : sei z Nullstelle von q der Ordnung $\ell \geq 1$. Somit

$$q(x) = (x - z)^\ell r(x) \quad \text{mit Polynom } r, \quad r(z) \neq 0$$

Dann

$$\frac{p(x)}{r(x)} - \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p(x)r(z) - p(z)r(x)}{r(x)r(z)} = \frac{(x - z)s(x)}{r(x)}$$

mit Polynom s (weil Zähler z als Nullstelle hat). Somit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - z)^\ell r(x)} = \frac{p(z)}{r(z)} \frac{1}{(x - z)^\ell} + \frac{s(x)}{(x - z)^{\ell-1} r(x)},$$

d.h. neuer Summand und Term mit $\text{Grad}((x - z)^{\ell-1} r(x)) = m - 1$.

Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung: Gegeben zweite Zerlegung mit Koeffizienten $B_{j,\ell}$, multipliziere mit $(x - z_j)^{\ell_j}$ und setze $x = z_j \implies A_{j,\ell_j} = B_{j,\ell_j}$. Dann multipliziere mit $(x - z_j)^{\ell_j - 1}$, etc. \square

4. Schritt: Termweise Integrieren

$$\int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \int dx \text{Polynom}(x) + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\ell_j} A_{j,\ell} \int dx \frac{1}{(x - z_j)^\ell}$$

Integrand ist komplexwertig.

10.21 Definition $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar $\iff \mathcal{R}e(f), \mathcal{I}m(f)$ integrierbar

Dann

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \mathcal{R}e f(x) + i \int_a^b dx \mathcal{I}m f(x)$$

Bemerkung Fundamentalsatz gilt für Real- und Imaginärteil separat. Somit:

Gegeben $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ (hier enthält F' die Ableitung von Real- und Imaginärteil), gilt $\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$

$$\int dx f(x) = F + C, \quad C \in \mathbb{C}$$

Beispiele

1. $\ell \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}$

$$\int dx (x - z)^\ell = \frac{1}{\ell + 1} (x - z)^{\ell+1} + C,$$

weil, mit $z = u + iv$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x-z)^{\ell+1} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} (x-u)^k (-iv)^{\ell+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell+1} (\ell+1) \frac{\ell!}{(\ell+1-k)!k!} \cdot k(x-u)^k (-iv)^{\ell-(k-1)} \\ &= (\ell+1)(x-z)^\ell \end{aligned}$$

2. $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > 1$

$$\int dx \frac{1}{(x-z)^\ell} = -\frac{1}{\ell-1} \frac{1}{(x-z)^{\ell-1}} + C,$$

weil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{(x-z)^{\ell-1}} &= \frac{d}{dx} \frac{(x-\bar{z})^{\ell-1}}{((x-z)(x-\bar{z}))^{\ell-1}} \\ &= (\ell-1) \left[\frac{(x-\bar{z})^{\ell-2}}{((x-z)(x-\bar{z}))^{\ell-1}} - \frac{(x-\bar{z})^{\ell-1}}{((x-z)(x-\bar{z}))^\ell} (2x-z-\bar{z}) \right] \\ &= (\ell-1) \frac{1}{(x-z)^{\ell-1}} \left[\frac{1}{x-\bar{z}} - \frac{1}{(x-z)(z-\bar{z})} (2x-z-\bar{z}) \right] \\ &= (\ell-1) \frac{1}{(x-z)^\ell} \frac{1}{x-\bar{z}} [x-z-2x+z+\bar{z}] \\ &= -(\ell-1) \frac{1}{(x-z)^\ell} \end{aligned}$$

Achtung! Falsch für $\frac{1}{x-z}$ und $\frac{1}{(x-z)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Noch benötigt im 4. Schritt:

3. $\int dx \frac{1}{x-z} = \frac{1}{2} \ln((x-u)^2 + v^2) + i \arctan\left(\frac{x-u}{v}\right) + C$ wieder mit $z = u + iv$

Begründung: $\int dx \frac{1}{x-z} = \int dx \frac{x-u}{(x-u)^2+v^2} + i \int dx \frac{v}{(x-u)^2+v^2}$

Substitutionen: $y = (x-u)^2$ $\tilde{y} = \frac{x-u}{v}$
 $dy = 2(x-u)dx$ $d\tilde{y} = \frac{dx}{v}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int dy \frac{1}{y-v^2} + i \int d\tilde{y} \frac{1}{\tilde{y}^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|y-v^2| + i \arctan(\tilde{y}) + C \end{aligned}$$

□

Zusammenfassend:

10.22 Satz Die Stammfunktion einer reellen oder komplexen rationalen Funktion ist elementar. (Gegeben durch rationale Funktionen, \ln , \arctan .)

Beispiel

$$\begin{aligned}
 \int dx \frac{4x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2} &\stackrel{\text{2. Schritt}}{=} \int dx \frac{4x^2 - 4x}{(x - i)^2(x + i)^2} \\
 &\stackrel{\text{3. Schritt}}{=} \int dx \left(\frac{A}{x - i} + \frac{B}{(x - i)^2} + \frac{C}{x + i} + \frac{D}{(x + i)^2} \right) \\
 \text{Nebenrechnung} &\stackrel{=}{=} \int dx \left(\frac{-i}{x - i} + \frac{1 + i}{(x - i)^2} + \frac{i}{x + i} + \frac{1 - i}{(x + i)^2} \right) \\
 &\stackrel{\text{4. Schritt}}{=} -\frac{i}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + (1 + i) \frac{-1}{x - i} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(-x) + (1 - i) \frac{-1}{x + i} + C \\
 &= 2 \arctan(x) + 2 \frac{1 - x}{1 + x^2} + C
 \end{aligned}$$

Reelles Ergebnis nach Rechnung im Komplexen.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 4x &= A(x^2 + 1)(x + i) + B(x + i)^2 + C(x^2 + 1)(x - i) + D(x - i)^2 \\
 &= A(x^3 + ix^2 + x + i) + B(x^2 + 2ix - 1) + C(x^3 - ix^2 + x - i) + D(x^2 - 2ix - 1)
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich und LA:

$$\begin{aligned}
 O(x^3) : & 0 = A + C \implies C = -A \\
 O(x^2) : & 4 = iA + B - iC + D = 2iA + B + D \\
 O(x) : & -4 = A + 2iB + C - 2iD = 2i(B - D) \\
 O(x^0) : & 0 = iA - B + C - D = 2iA - (B + 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O(x^2) + O(x^0) : & 4 = 4iA \implies A = -i \implies C = i \\
 O(x^2) - O(x^0) : & 4 = 2(B + D) \implies B + D = 2 \\
 O(x) : & B - D = 2i \implies B = 1 + i \quad \text{und} \quad D = 1 - i
 \end{aligned}$$

□

10.23 Definition $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $quadf : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

f uneigentlich integrierbar $\iff f$ integrierbar auf allen kompakten Intervallen $[c, d] \subset (a, b)$ und $\lim_{c \downarrow a} \int_c^d dx f(x)$ und $\lim_{d \uparrow b} \int_c^d dx f(x)$ existieren. Dann

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{c \downarrow a} \lim_{d \uparrow b} \int_c^d dx f(x)$$

Beispiele

1. $\alpha \neq 1 \quad \int dx \frac{1}{x^\alpha} = \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{x^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1} - \lim_{x \downarrow 0} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ falls } \alpha < 1$$

Für $\alpha > 1$ ist $\frac{1}{x^\alpha}$ nicht (uneigentlich) integrierbar bei 0.

$$\int_1^\infty dx \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} - \frac{-1}{(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha-1}, \text{ falls } \alpha > 1$$

Für $\alpha < 1$ ist $\frac{1}{x^\alpha}$ nicht integrierbar bei ∞ .

2. Cauchy-Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b dx \frac{1}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(a)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

3. Ein rationales Integral in $\sin(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{2y}{y^2 - \sin^2(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{2y}{y^2 - \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))} = \int_0^\pi dx \frac{2y}{2y^2 - 1 + \cos(x)}$$

mit Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (siehe oben):

$$\begin{aligned} &= \int_{\tan(\frac{0}{2})}^{\tan(\frac{\pi}{2})} dt \frac{2}{1+t^2} \frac{2y}{2y^2 - 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_0^\infty dt \frac{2y}{(1+t^2)(2y^2-1) + 1-t^2} \\ &= 2 \int_0^\infty dt \frac{2y}{t^2(2y^2-2) + 2y^2} = \frac{2}{y} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^2 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) + 1} \\ &= \frac{2}{y} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}} \int_0^\infty dt \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{y^2 - 1}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}} \end{aligned}$$

□

10.24 Satz (Majorantenkriterium) $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $|f| \leq g$, f stetig

$$\int_a^b dx g(x) \text{ existiert} \implies \int_a^b dx f(x) \text{ existiert}$$

Begründung $\left| \int_c^d dx f(x) \right| \leq \int_c^d dx |f(x)| \leq \int_c^d dx g(x)$

□

Beispiele

1. $\int_0^\infty dx \frac{e^{-\frac{1}{1+x}}}{1+x^2} \leq \int_0^\pi dx \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

2. Euler'sche Γ -Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1}, \quad x > 0$$

Integral uneigentlich bei 0 und ∞ . Somit Spalte auf $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^a + \int_a^\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt e^{-1} t^{x-1} &\leq \int_0^1 dt t^{x-1} < \infty \quad \text{für } x-1 > -1 \iff x > 0 \\ \int_a^\infty dt e^{-t} t^{x-1} &= \int_a^\infty dt e^{-t+(x-1)\ln(t)} \\ &\leq \int_a^\infty dt e^{-t+\frac{1}{2}t} \quad \text{für } a \text{ ausreichend groß} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Zusammenfassend ist $\Gamma(x)$ definiert $\forall x > 0$.

Nach partieller Integration:

$$\int_\varepsilon^R dt e^{-t} t^x = -e^{-t} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=R} + x \int_\varepsilon^R dt e^{-t} t^{x-1}$$

Im Limes $\varepsilon \downarrow 0$ und $R \uparrow \infty$ erhält man die Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Da $\Gamma(1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = 1$, folgt

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

10.25 Satz (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen)

Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, monoton fallend mit $\int_0^\infty dx f(x) < \infty$.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R} mit $|a_n| \leq f(n)$

$\implies \sum_{n \geq 0} a_n$ absolut konvergent.

Begründung $\sum_{n=1}^\infty |a_n| \leq \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n dx f(x) = \int_0^\infty dx f(x) < \infty$ □

Beispiel Riemann'sche ξ -Funktion

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \quad s > 1, \quad s \in \mathbb{R}$$

Tatsächlich ist dies wohldefiniert für $s > 1$, wie ein Vergleich mit der integrierbaren Funktion $f(x) = \min\{1, \frac{1}{x^s}\}$ zeigt.

10.26 Satz (Parameterabhängige Integrale) $a < b$, $c < d$

Sei $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $F(y) = \int_a^b dx f(x, y)$ stetig auf $[c, d]$.

Ist zudem $f(x, y)$ stetig differenzierbar in y , so ist F stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dy} \int_a^b dx f(x, y) = \int_a^b dx \frac{d}{dy} f(x, y).$$

Beweis Sei $y \in [c, d]$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ Folge mit $\lim y_n = y$. Für die Stetigkeit von F zeigen wir $\lim F(y_n) = F(y)$.

Betrachte $f_n(x) = f(x, y_n)$, welches integrierbar, weil stetig ist. Zudem gilt punktweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = f(x, y)$$

und uniform bez. der Metrik der uniformen Konvergenz:

$$\begin{aligned} \|f_n - g\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y_n) - f(x, y)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

Letzteres für $d_{\mathbb{R}^2}((x, y_n), (x, y)) \leq \delta$ nach der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf den kompakten Mengen $[a, b] \times [c, d]$ (Heine–Borel und Satz 8.13). Also konvergiert f_n uniform gegen g auf $[a, b]$. Nach Satz 10.14 gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx f_n(x) = \int_a^b dx \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(y).$$

Für den Beweis der zweiten Aussage verwenden wir, dass auch $(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \mapsto \frac{d}{dy} f(x, y)$ gleichmäßig stetig ist (wieder Satz 8.13).

Jetzt:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(y + \varepsilon) - F(y)}{\varepsilon} - \int_a^b dx \frac{d}{dy} f(x, y) \right| \\ &= \left| \int_a^b dx \left(\frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon} - \frac{d}{dy} f(x, y) \right) \right| \quad (\text{Linearität von } \int) \\ &\leq \int_a^b dx \left| \frac{d}{dy} f(x, \xi) - \frac{d}{dy} f(x, y) \right| \quad (\text{MWS mit } \xi \in [y, y + \varepsilon]) \\ &\leq \int_a^b dx \sup_{a \leq x' \leq b} \sup_{y \leq \xi \leq y + \varepsilon} \left| \frac{d}{dy} f(x', \xi) - \frac{d}{dy} f(x', y) \right| \\ &\leq \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ (nach gleichmäßiger Stetigkeit von $\frac{d}{dy} f$). Somit $\frac{d}{dy} F(y) = \int_a^b dx \frac{d}{dy} f(x, y)$. \square

Beispiel Berechnung von $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln(y^2 - \sin^2(x))$ für $y > 1$. Direkt schwierig, aber nach Satz 10.22:

$$\frac{d}{dy} F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{2y}{y^2 - \sin^2(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

wobei Letzteres weiter oben schon gezeigt wurde. Jetzt

$$F(y) = \pi \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \stackrel{y = \cosh(t)}{=} \pi \int dt \sinh(t) \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(t) - 1}} = \pi \operatorname{arccosh}(y) + C$$

Aber

$$\operatorname{arccosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

weil

$$\begin{aligned} \cosh(\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})) &= \frac{1}{2} \left(y + \sqrt{y^2 - 1} + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{y^2 + (y^2 - 1) + 2y\sqrt{y^2 - 1} + 1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = y. \end{aligned}$$

Also

$$F(y) = \pi \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C.$$

Zur Bestimmung der Konstante betrachtet man das Verhalten für $y \rightarrow \infty$. Hierzu folgende Definition als Einschub:

10.27 Definition $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^d$, $g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (meist $g(x) = x^\alpha$ oder $g(x) = \ln(x)$, etc.)

(i) f ist von der Ordnung g , Schreibweise: $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \rightarrow \infty$

$$\iff \exists b > a \text{ mit } \sup_{x \geq b} \frac{\|f(x)\|_{\mathbb{C}^d}}{g(x)} \leq C < \infty$$

(ii) f von der Ordnung klein o von g , Schreibweise $f = o(g)$

$$\iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\|f(x)\|_{\mathbb{C}^d}}{g(x)} = 0$$

(iii) Analoge Definitionen für Verhalten bei a und $-\infty$.

Beispiele

1. $\frac{1}{x^{2\gamma+2+\cos(x)}} = \mathcal{O}(x^{-2\gamma})$ für $x \rightarrow \infty$, $\gamma > \frac{1}{2}$

2. $\sin(x) - x = o(x)$ für $x \rightarrow 0$

3. $\ln(1 - x) = \mathcal{O}(x)$ für $x \rightarrow 0$

4. $\ln(1 - x) - x = \mathcal{O}(x^2)$ für $x \rightarrow 0$

Beispiel Weiter:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln(y^2 - \sin^2 x) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left(\ln(y^2) + \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(y^2) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^2} \right) \quad (\text{da } \ln(1 - x) = \mathcal{O}(x)) \\ &= \pi \ln(y) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^2} \right) \end{aligned}$$

und vergleiche mit

$$\begin{aligned} F(y) = \pi \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C &= \pi \ln(2y) + \pi \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y^2}}\right) + C \\ &= \pi \ln(2) + \pi \ln(y) + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Somit $C = -\pi \ln(2)$.

11 Polynome

11.1 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$. Dann existieren $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ (eventuell gleich), so dass

$$P(z) = a_N (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N).$$

Beweis Es reichte zu zeigen, dass eine Nullstelle z_N existiert (danach betrachte das Polynom $\frac{P(z)}{z - z_N}$ und bestimme von ihm weitere Nullstelle, etc.).

Zudem darf $a_N = 1$ angenommen werden.

Setze $\mu = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

Für $|z| = R \in \mathbb{R}$ gilt

$$|P(z)| \geq R^N \left(1 - |a_{n-1}| \frac{1}{R} - \dots - |a_0| \frac{1}{R^N}\right).$$

Somit existiert ein R_c , so dass

$$|P(z)| > \mu \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R_c.$$

Auf dem Kompaktum $\overline{B_{R_c}(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R_c\}$ nimmt die stetige Funktion $|P|$ ihr Infimum an (Satz 8.12), d.h. $\exists z_N \in \overline{B_{R_c}(0)}$ mit

$$|P(z_N)| = \mu.$$

Behauptung $\mu = 0$

Begründung Gegenannahme $\mu > 0$. Definiere das Polynom

$$Q(z) = \frac{P(z + z_N)}{P(z_N)}.$$

Q ist nicht konstant und erfüllt

$$Q(0) = 1 \quad , \quad |Q(z)| \geq 1.$$

Somit existiert $k \in \{1, \dots, N\}$, so dass

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_N z^N \quad \text{mit} \quad b_k \neq 0, b_n \in \mathbb{C}.$$

Sei $\theta \in [0, \frac{2\pi}{k})$ definiert durch

$$e^{ik\theta} = -\frac{|b_k|}{b_k}.$$

Für $r > 0$ und $r^k|b_k| < 1$ folgt

$$|1 + b_k(re^{i\theta})^k| = 1 - r^k|b_k|$$

und somit

$$\begin{aligned} |Q(re^{i\theta})| &\leq 1 - r^k|b_k| + r^{k+1}|b_{k+1}| + \dots + r^N|b_N| \\ &= 1 - r^k(|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{N-k}|b_N|) \\ &\leq 1 - r^k|b_k| \cdot \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

Letzteres für r ausreichend klein. Widerspruch! □

11.2 Satz (Satz von Weierstraß) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann existiert eine Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ von Polynomen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_\infty = 0 \quad (\text{mit } \|g\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|).$$

Umformulierungen:

1. Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist uniformer Limes von Polynomen.
2. Die Polynome liegen dicht im metrischen Raum $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Die Vervollständigung der Polynome auf $[a, b]$ bez. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist $C([a, b])$.

Beweis von Satz 11.2: Nach Reskalierung $x \in [a, b] \mapsto \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$ reicht es, den Fall $[a, b] = [0, 1]$ zu betrachten. Zudem setze

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)).$$

Da $f - g$ ein Polynom ist, reicht es zu zeigen, dass g uniform durch Polynome approximiert wird. Es gilt

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(1) = 0.$$

Zudem setze $g(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$ und $x \geq 1$. Dann ist g gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} (Satz 8.13). Setze

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1,$$

mit $c_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_{-1}^1 dx Q_n(x) = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 dx(1-x^2)^n &= 2 \int_0^1 dx(1-x^2)^n \\
 &\geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} dx(1-x^2)^n \\
 &\geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} dx(1-nx^2) \quad (\text{Bernoulli-Ungleichung}) \\
 &= 2 \left(x - n \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
 &= 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) > \frac{1}{\sqrt{n}}.
 \end{aligned}$$

Somit

$$c_n < \sqrt{n}$$

und

$$Q_n(x) < \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \quad \text{für } |x| \geq \delta > 0.$$

Also konvergiert Q_n auf $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ uniform gegen 0, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} |Q_n(x)| = 0.$$

Definiere, für $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \int_{-1}^1 dt g(x+t) Q_n(t) \\
 &= \int_{-1+x}^{1+x} dt g(t) Q_n(t-x) \\
 &= \int_0^1 dt g(t) Q_n(t-x) \quad (\text{weil } \text{supp}(g) \subset [0, 1]).
 \end{aligned}$$

Also ist P_n ein Polynom in x (vom Grad $\leq 2n$).

Sei $\varepsilon > 0$. Nach gleichmäßiger Stetigkeit von g wähle $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall |x - y| < \delta.$$

Dann

$$\begin{aligned}
 |P_n(x) - g(x)| &= \left| \int_{-1}^1 dt (g(x+t) - g(x)) Q_n(t) \right| \quad \left(\text{da } \int_{-1}^1 Q_n = 1 \right) \\
 &\leq \int_{-1}^1 dt |g(x+t) - g(x)| Q_n(t) \quad (\text{da } Q_n \geq 0 \text{ auf } [-1, 1]) \\
 &= \left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^1 \right) dt |g(x+t) - g(x)| Q_n(t) \\
 &\leq 2 \|g\|_{\infty} \left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^1 \right) dt Q_n(t) + \int_{-\delta}^{\delta} dt \frac{\varepsilon}{2} Q_n(t) \quad (\text{mit } \|g\|_{\infty} = \sup_x |g(x)|) \\
 &\leq 2 \|g\|_{\infty} \cdot 2\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

für n ausreichend groß. Dies ist unabhängig von x , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - g\|_\infty = 0.$$

□

Eine wesentliche Verallgemeinerung ist der

Satz von Stone–Weierstraß: Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$ eine $*$ -Algebra, die abgeschlossen ist und Punkte trennt, d.h.

- (i) $f, g \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C} \implies f + \lambda g, f \cdot g, \bar{f} \in \mathcal{A}$ ($*$ -Algebra)
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform konvergente Folge in $\mathcal{A} \implies f = \lim f_n \in \mathcal{A}$ (abgeschlossen bez. $\|\cdot\|_\infty$)
- (iii) $\forall x \neq y \in X \exists f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$ (\mathcal{A} trennt Punkte)

Dann ist $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$.

Beweis Siehe Literatur, z. B. Reed, Simon [6].

Bemerkung $X \subset [a, b]$ und $\mathcal{A} \subset \overline{\{\text{Polynome}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$, es gilt wieder der Satz von Weierstraß.

Die Frage der effizienten Approximation stetiger Funktionen durch Polynome führt zu den orthogonalen Polynomen, welche aus verschiedenen Gründen in vielen Bereichen der Mathematik auftreten.

Erinnerung Lineare Algebra:

- (i) $(V, \|\cdot\|)$ normierter komplexer Vektorraum (d.h. $f, g \in V, \lambda \in \mathbb{C} \implies f + \lambda g \in V$ definiert, $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, $\|f\| = 0 \iff f = \vec{0}$)
- (ii) Eine Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $f_n \in V$ heißt vollständig in $(V, \|\cdot\|)$
 \iff endliche Linearkombinationen von Vektoren aus $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegen dicht in $(V, \|\cdot\|)$
 $\iff \forall g \in V$ und $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ und $c_n \in \mathbb{C}, n = 0, \dots, N$, mit

$$\left\| g - \sum_{n=0}^N c_n f_n \right\| < \varepsilon$$

(Achtung: dieser Begriff der Vollständigkeit hat nichts mit der Vollständigkeit von metrischen Räumen zu tun!)

- (iii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Schauder–Basis von $(V, \|\cdot\|)$
 \iff jedes $g \in V$ kann auf eindeutige Art und Weise als bez. $\|\cdot\|$ konvergente Reihe $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n, c_n \in \mathbb{C}$, geschrieben werden, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{n=0}^N c_n f_n \right\| = 0.$$

- (iv) $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ Skalarprodukt
 $\iff \langle f | g + \lambda h \rangle = \langle f | g \rangle + \lambda \langle f | h \rangle, h \in V$ (Linearität im zweiten Argument)
 $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$ (Symmetrie)

$$\langle f | f \rangle \geq 0 \quad (\text{Positivität})$$

$$\langle f | f \rangle = 0 \iff f = \vec{0} \quad (\text{Nichtentartung})$$

Man nennt V versehen mit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dann auch einen Prä-Hilbert-Raum. Seine Vervollständigung bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist dann ein Hilbert-Raum.

(v) Eine Orthonormalbasis (ONB) auf einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist eine orthonormale Schauderbasis. (Achtung! Evtl. ist $\|f\| \neq \|f\|_2$.)

(vi) $f \perp g$ orthogonal $\iff \langle f | g \rangle = 0$

(vii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonale Familie $\iff \langle f_n | f_m \rangle = 0 \quad \forall n \neq m$

(viii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale Familie $\iff \langle f_n | f_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} = \delta_{n,m}$ (Kronecker Delta)

(ix) Gram-Schmidt Verfahren: gegeben eine Familie $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren, erhält man eine orthonormale Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iterativ durch:

$$f_n = \frac{g_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle f_k | g_n \rangle f_k}{\|g_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle f_k | g_n \rangle f_k\|_2},$$

wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

Begründung normiert klar, für Orthogonalität nimm Skalarprodukt mit f_ℓ , $\ell < n$.

(x) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ONB von $(V, \|\cdot\|)$ bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Für $g \in V$ gilt dann

$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n \quad \text{mit} \quad c_n = \langle f_n | g \rangle.$$

Begründung $\langle f_k | g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \underbrace{\langle f_k | f_n \rangle}_{0 \text{ oder } 1} = c_k$ □

Wichtiges Beispiel: Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist $V = C([a, b]) = C([a, b], \mathbb{C})$ ein komplexer Vektorraum (unendlich dimensional). Eine Norm auf V ist:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Gemäß dem Satz von Weierstraß bilden die Monome $(x^n)_{n \geq 0}$ eine vollständige Familie von $C([a, b])$ (Übung: verifiziere all diese Aussagen). Sie bilden jedoch keine Schauder-Basis von $C([a, b])$, denn uniform konvergente Potenzreihen sind ja immer reell analytisch und es gibt aber stetige Funktionen, die nicht reell analytisch sind. Jetzt sei

$$\rho : (a, b) \rightarrow (0, \infty) \quad \text{stetig}$$

mit

$$\int_a^b dx \rho(x) = 1,$$

wobei Letzteres ein uneigentliches Integral ist. Man nennt ρ auch eine (stetige) Wahrscheinlichkeitsdichte. Jetzt definiere

$$\langle f | g \rangle_\rho = \int_a^b dx \rho(x) \overline{f(x)} g(x) \quad f, g \in C([a, b])$$

11.3 Lemma $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ ist ein Skalarprodukt auf $C([a, b])$.

Begründung Linearität im zweiten Argument folgt aus der Linearität des Integrals. Nachweis der Symmetrie:

$$\begin{aligned} \overline{\langle g | f \rangle_\rho} &= \overline{\int_a^b dx \rho(x) \overline{g(x)} f(x)} \\ &= \int_a^b dx \rho(x) \overline{\overline{g(x)} f(x)} = \langle f | g \rangle_\rho \end{aligned}$$

Zur Positivität:

$$\langle f | f \rangle_\rho = \int_a^b dx \underbrace{\rho(x) |f(x)|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Zur Nichtentartung: Falls $f = 0$ (Nullfunktion = Nullvektor), ist offensichtlich $\langle f | f \rangle_\rho = 0$. Für die Umkehrung (in negierter Form) sei $f \neq 0$. Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $|f(x_0)| = \delta > 0$. Zudem ist nach Voraussetzung $\rho(x_0) = \delta' > 0$. Nun sind f und ρ stetig. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(x)| \geq \frac{\delta}{2}, \quad \rho(x) \geq \frac{\delta'}{2} \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Also

$$\langle f | f \rangle_\rho \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} dx \rho(x) |f(x)|^2 \geq 2\varepsilon \cdot \frac{\delta'}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > 0.$$

□

Bemerkung (Eine Variation obigen Beispiels) Sei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann definiere

$$V = C_0((a, b)) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig und } \lim_{x \downarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \uparrow b} f(x) = 0\},$$

d.h. der Index 0 bedeutet die Einschränkung, dass nur stetige Funktionen betrachtet werden, die am Rand verschwinden. Wie oben kann die Norm $\|\cdot\|_\infty$ und ein Skalarprodukt definiert werden. Beachte jedoch, dass z.B. $C_0(\mathbb{R})$ kein Polynom enthält und somit die Polynome auch keine Basis bilden.

11.4 Definition Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf (a, b) , die ein Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ auf $C([a, b])$ definiert. Die orthogonalen Polynome $(P_n)_{n \geq 0}$ bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ sind die orthogonale Familie, die man mit dem Gram-Schmidt Verfahren aus den Monomen $(x^n)_{n \geq 0}$ erhält.

Bemerkung Es gilt also

$$\langle P_n | P_m \rangle_\rho = \int_a^b dx \rho(x) \overline{P_n(x)} P_m(x) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tatsächlich ist auch $\overline{P_n(x)} = P_n(x)$, da die Monome reell sind und somit auch das Gram-Schmidt Verfahren reell ist.

11.5 Satz Die orthogonalen Polynome $(P_n)_{n \geq 0}$ bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ erfüllen eine Dreitermrekurrenzrelation (DTR):

$$xP_n(x) = t_{n+1}P_{n+1}(x) + v_nP_n(x) + t_nP_{n-1}(x) \quad , \quad \text{quad } n \geq 0,$$

wobei $t_0 = 0$, $t_n > 0 \forall n \geq 1$ und $v_n \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\sup\{|v_n|, |t_n|\} \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

Beweis $xP_n(x)$ ist Polynom vom Grad $n + 1$. Für $k < n - 1$ gilt

$$\langle xP_n | P_k \rangle_\rho = \int dx \rho(x) xP_n(x) P_k(x) = \langle P_n | xP_k \rangle_\rho = 0,$$

da $\text{Grad}(xP_k) = k + 1 < n$. Somit ist $xP_n(x)$ tatsächlich im Spann von P_{n+1}, P_n, P_{n-1} . Zudem gilt

$$t_n = \langle xP_n | P_{n-1} \rangle_\rho = \langle P_n | xP_{n-1} \rangle_\rho = \langle xP_{n-1} | P_n \rangle_\rho,$$

d.h. auch die Symmetrie der Koeffizienten ist gezeigt. Weiter

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| \int_a^b dx \rho(x) xP_n(x)P_n(x) \right| \leq \max\{|a|, |b|\} \int_a^b dx \rho(x) |P_n(x)|^2 \\ &= \max\{|a|, |b|\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |t_n| &= \left| \int_a^b dx \rho(x) xP_n(x)P_{n-1}(x) \right| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \int_a^b dx \sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(x)}|P_n(x)||P_{n-1}(x)| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \max\{|a|, |b|\} \left(\int dx \rho(x) |P_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int dx \rho(x) |P_{n-1}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \max\{|a|, |b|\}. \end{aligned}$$

□

11.6 Definition Zu einer Dreitermrekurrenzrelation gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Jacobi-Matrix

$$H_N = \begin{pmatrix} v_0 & t_1 & & & & \\ t_1 & v_1 & t_2 & & & \\ & t_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & t_{N-1} \\ & & & & t_{N-1} & v_{N-1} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

1. H_N ist eine symmetrische, reelle $N \times N$ Matrix, d.h. $(H_N)^t = (H_N)^* = H_N$.
2. Jede symmetrische tridiagonale, reelle Matrix ist eine Jacobi-Matrix.
3. Auch die unendliche Matrix (Operator) H_∞ kann definiert werden.
4. Zu jeder Jacobi-Matrix gehört eine DTR und somit orthogonale Polynome. Folgende Trilogie kann gezeigt werden:

$$\{\text{Jacobi-Matrizen } H_\infty\} \longleftrightarrow \{(P_n)_{n \geq 0} \text{ orthogonale Polynome}\} \longleftrightarrow \{\text{WS-Maße auf } \mathbb{R}\}$$
5. Interpretation von H_N als quantenmechanischer Hamilton-Operator eines eindimensionalen Gittermodells:

$$\begin{array}{ccc} & t_n & \\ & v_n & \\ & & t_n \text{ kinetische Energie} \\ & & v_n \text{ potentielle Energie} \\ 0 & n & N-1 \\ & t_n & \end{array}$$

11.7 Satz Die Eigenwerte von H_N sind genau die Nullstellen x_1, \dots, x_N von P_N , welche reell und distinkt sind. Ein Eigenvektor von x_n ist

$$\begin{pmatrix} P_0(x_n) \\ P_1(x_n) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Beweis Lineare Algebra: H_N selbstadjungiert $\implies H_N$ diagonalisierbar (geometrische gleich algebraische Vielfachheit), reelle Eigenwerte. Sei $x \in \mathbb{R}$ Eigenwert mit Eigenvektor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \psi_0 = 1.$$

Dann

$$H_N \psi = \begin{pmatrix} v_0 \psi_0 + t_1 \psi_1 \\ t_1 \psi_0 + v_1 \psi_1 + t_2 \psi_2 \\ \vdots \\ t_{N-2} \psi_{N-3} + v_{N-2} \psi_{N-2} + t_{N-1} \psi_{N-1} \\ t_{N-1} \psi_{N-2} + v_{N-1} \psi_{N-1} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x \psi_0 \\ x \psi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x \psi_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Somit erfüllen die Komponenten von ψ die DTR, so dass $\psi_0 = 1 = P_0(x)$ und gemäß den ersten $N - 1$ Gleichungen $\psi_n = P_n(x)$ für $n = 1, \dots, N - 1$. Die letzte Gleichung ist also

$$t_{N-1} P_{N-2}(x) + v_{N-1} P_{N-1}(x) = x P_{N-1}(x).$$

Vergleich mit DTR zeigt $P_N(x) = 0$, da $t_N \neq 0$. Eine Entartung von x kann nicht vorliegen, da es nur den oben konstruierten Eigenvektor gibt. \square

Erinnerung Für $Q(x) = \sum_{m=0}^M b_m x^m$ ist

$$Q(H_N) = \sum_{m=0}^M b_m (H_N)^m \quad \text{mit} \quad (H_N)^m = \underbrace{H_N \cdot \dots \cdot H_N}_{m\text{-mal}}, \quad (H_N)^0 = \mathbb{1}_N.$$

Notation Standardbasis des \mathbb{C}^N ist

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{N-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.8 Satz (i) $P_n(H_N)e_0 = e_n$ für $n = 0, \dots, N - 1$.

(ii) $P_N(H_N)e_0 = 0 = \vec{0} \in \mathbb{C}^N$

Bemerkung Der Satz von Cayley–Hamilton besagt sogar, dass $P_N(H_N) = 0$, weil P_N nach Satz 11.7 das charakteristische Polynom von H_N ist.

Beweis Gemäß der DTR gilt die Matrixidentität

$$H_N P_n(H_N) = t_{n+1} P_{n+1}(H_N) + v_n P_n(H_N) + t_n P_{n-1}(H_N).$$

Wir zeigen (i) durch Induktion über n .

Anfang: $n = 0$ $P_0(H_N) = \mathbb{1}_N \implies e_0 = P_0(H_N)e_0$

Schritt $n \rightsquigarrow n + 1$ mit $n + 1 \leq N - 1$.

Zunächst gilt wegen der Tridiagonalität von H_N , dass

$$P_{n+1}(H_N)e_0 \in \text{span} \{e_0, \dots, e_{n+1}\}.$$

Somit

$$\langle P_{n+1}(H_N)e_0 | e_k \rangle = 0 \quad \forall k = n + 2, \dots, N - 1.$$

Für $k \leq N - 1$ gilt

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} \langle P_{n+1}(H_N)e_0 \mid e_k \rangle &= \langle (H_N P_n(H_N) - v_n P_n(H_N) - t_n P_{n-1}(H_N))e_0 \mid e_k \rangle \\
 &= \langle H_N e_n \mid e_k \rangle - v_n \langle e_n \mid e_k \rangle - t_n \langle e_{n-1} \mid e_k \rangle \\
 &= \langle t_n e_{n-1} + v_n e_n + t_{n+1} e_{n+1} \mid e_k \rangle - v_n \langle e_n \mid e_k \rangle - t_n \langle e_{n-1} \mid e_k \rangle \\
 &= t_{n+1} \delta_{n+1,k},
 \end{aligned}$$

was (i) zeigt.

Für (ii) zeigt die gleiche Rechnung

$$t_N \langle P_N(H_N)e_0 \mid e_k \rangle = \langle H_N e_{N-1} \mid e_k \rangle - v_{N-1} \langle e_{N-1} \mid e_k \rangle - t_{N-1} \langle e_{N-2} \mid e_k \rangle = 0.$$

□

11.9 Satz (Gauss'sche Quadratur)

Gegeben eine Wahrscheinlichkeitsdichte ρ und dazugehörige orthogonale Polynome $(P_n)_{n \geq 0}$. Seien x_1, \dots, x_N die Nullstellen von P_N . Definiere die Christoffel-Zahlen

$$\lambda_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k(x_n)^2}, \quad \text{quad } n = 1, \dots, N.$$

Dann gilt für jedes Polynom Q mit $\text{Grad}(Q) \leq 2N - 1$

$$\int_a^b dx \rho(x) Q(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n Q(x_n).$$

Anwendung Approximative numerische Berechnung des Integrals für stetiges f :

$$\int_a^b dx \rho(x) f(x) \approx \sum_{n=1}^N \lambda_n f(x_n)$$

Beweis Zunächst führe eine Polynomdivision mit Rest durch

$$Q(x) = Q_1(x) P_N(x) + Q_0(x),$$

wobei

$$\text{Grad}(Q_1) = N - 1, \quad \text{Grad}(Q_0) \leq N - 1.$$

Weiter entwickle

$$Q_0(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n P_n(x), \quad a_n = \langle P_n \mid Q_0 \rangle_\rho \in \mathbb{C}.$$

Dann

$$\int dx \rho(x) Q(x) = \langle P_N \mid Q_1 \rangle_\rho + \int dx \rho(x) Q_0(x) = 0 + a_0 = a_0.$$

Nun gilt

$$Q(H_N) = P_N(H_N)Q_1(H_N) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n P_n(H_N),$$

so dass nach Satz 11.8

$$\begin{aligned} \langle e_0 | Q(H_N) e_0 \rangle &= \langle e_0 | Q_1(H_N) P_N(H_N) e_0 \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle e_0 | P_n(H_N) e_0 \rangle \\ &= \langle e_0 | Q_1(H_N) \underbrace{P_N(H_N) e_0}_{=0} \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle e_0 | e_n \rangle \\ &= 0 + a_0 = a_0. \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Satz 11.7 und dem Spektralsatz für Matrizen:

$$Q(H_N) = \sum_{n=1}^N Q(x_n) |\psi_n\rangle \langle \psi_n|,$$

wobei $P_N(x_n) = 0$ und

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k(x_n)^2}} \begin{pmatrix} P_0(x_n) \\ P_1(x_n) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \int dx \rho(x) Q(x) &= \langle e_0 | Q(H_N) | e_0 \rangle \\ &= \sum_{n=1}^N Q(x_n) |\langle e_0 | \psi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N Q(x_n) \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k(x_n)^2}, \end{aligned}$$

da $P_0 = 1$. □

Bisher: allgemeine Theorie der orthogonalen Polynome

Jetzt: klassische orthogonale Polynome (Jacobi, Laguerre, Hermite)

Dies sind orthogonale Polynome zu besonders einfachen Klassen von Gewichten ρ , die zudem in Anwendungen oft auftretende Differentialgleichungen erfüllen. Diese Polynome können direkt mit der so genannten Rodrigues-Formel (RF) definiert werden:

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \partial^n (\sigma(x)^n \rho(x)) \quad , \quad \partial = \frac{d}{dx} \quad , \quad \partial^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

Hierbei ist $B_n \in \mathbb{R}$ eine Normierungskonstante und $\sigma(x)$ ist ein reelles Polynom höchstens zweiter Ordnung. Dieses Polynom kann zwei, eine oder keine Nullstelle haben. Nach Reskalierung und Translation führt dies auf drei mögliche Situationen:

$$\sigma(x) = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \quad \text{oder} \quad \sigma(x) = x \quad \text{oder} \quad \sigma(x) = 1$$

Weiter sei $\tau(x) = \gamma x + \delta$ ein reelles Polynom erster Ordnung und ρ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\partial(\sigma\rho) = \tau\rho.$$

Wir werden diese Gleichung nicht nach ρ lösen, sondern der Einfachheit halber diese Lösungen vorgeben. Dies führt zu den drei Familien klassischer orthogonaler Polynome:

1. Jacobi-Polynome: $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\rho(x) = c_{\alpha,\beta}(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$
mit $c_{\alpha,\beta}$, so dass

$$\int_{-1}^1 dx \rho(x) = 1.$$

Dann führt die RF zu den Jacobi-Polynomen $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Beachte, dass $P_n^{(\alpha,\beta)}$ tatsächlich ein Polynom vom Grad n ist. (Übung!)

Spezialfälle:

(i) $\alpha = \beta = 0$, Legendre

(ii) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, Tchebychev erster Art, $T_n = P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$

(iii) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, Tchebychev zweiter Art, $U_n = P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

(iv) $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, $P_n^{(\lambda)} = P_n^{(\alpha,\alpha)}$, Gegenbauer

2. Laguerre-Polynome: $\sigma(x) = x$, $\rho(x) = c_\alpha x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, mit c_α , sodass

$$\int_0^\infty dx \rho(x) = 1.$$

Mit RF erhält man die Laguerre-Polynome $L_n^{(\alpha)}$. Klassischer Fall ist $\alpha = 0$.

3. Hermite-Polynome: $\sigma(x) = 1$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $\int_{-\infty}^\infty dx \rho(x) = 1$

RF gibt die Hermite-Polynome $H_n(x)$.

Anders als in der vorher dargestellten Theorie ist der Träger (a, b) der Dichte ρ im Fall von Laguerre (hier $(a, b) = (0, \infty)$) und von Hermite (hier $(a, b) = \mathbb{R}$) nicht kompakt. Dennoch ist $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$ definiert und es gilt:

11.10 Satz Die zu den oben gegebenen σ und ρ durch die RF definierten klassischen Polynome sind orthogonal bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$.

Bemerkung Die Konstanten B_n können so gewählt werden, dass die klassischen Polynome orthonormiert sind (explizite Berechnung etwas länglich). Dies wird aber nicht immer gemacht.

Beweis Zunächst bemerken wir, dass in allen drei Fällen für $0 \leq k < n$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^\ell \partial^k (\sigma(x)^n \rho(x)) \text{ verschwindet bei } x = a \text{ und } x = b$$

(detaillierter Nachweis Fall für Fall ist Übung). Jetzt gilt für $k < n$:

$$\begin{aligned} \langle x^k | P_n \rangle_\rho &= \int_a^b dx \rho(x) x^k B_n \frac{1}{\rho(x)} \partial^n (\sigma(x)^n \rho(x)) \\ &= B_n \int_a^b dx x^k \partial^n (\sigma(x)^n \rho(x)) \\ &= B_n x^k \partial^{n-1} (\sigma(x)^n \rho(x)) \Big|_a^b - B_n k \int_a^b dx x^{k-1} \partial^{n-1} (\sigma(x)^n \rho(x)) \\ &= 0 + B_n k! (-1)^k \int_a^b dx \partial^{n-k} (\sigma(x)^n \rho(x)) \\ &= B_n k! (-1)^k \partial^{n-k-1} (\sigma(x)^n \rho(x)) \Big|_a^b = 0. \end{aligned}$$

Somit ist das Polynom P_n vom Grad n orthogonal zu allen Polynomen niedrigeren Grades, also genau das n -te Polynom des Gram-Schmidt-Verfahrens zu $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$. \square

Dass die klassischen orthogonalen Polynome in Anwendungen immer wieder auftreten, liegt an folgendem Satz:

11.11 Satz Seien τ und σ Polynome vom Grad 1 und 2 respektive, und ρ eine Lösung von

$$\partial(\sigma\rho) = \tau\rho \text{ auf } (a, b).$$

Betrachte die zugehörige hypergeometrische Differentialgleichung (HGD)

$$\sigma \partial^2 y + \tau \partial y + \lambda y = 0$$

für zweimal differenzierbare Funktionen $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Genau für

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

hat die HGD eine Lösung, die ein Polynom P_n ist. Zudem ist P_n durch die zugehörige Rodrigues-Formel gegeben.

Bemerkungen

1. Falls σ und ρ wie oben bei den klassischen orthogonalen Polynomen gegeben sind, kann τ definiert werden durch

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(x)} \partial(\sigma(x) \rho(x)) \text{ ,quad } x \in (a, b).$$

Dann ist τ tatsächlich ein Polynom höchstens erster Ordnung (Übung).

2. Beachte, dass τ' und σ'' Zahlen sind.
3. Alle Lösungen (evtl. nicht Polynome) von der HGD heißen hypergeometrische Funktionen und sind Beispiele so genannter spezieller Funktionen.
4. Die HGD ist eine Eigenwertgleichung für den linearen Differentialoperator $L = \sigma\partial^2 + \tau\partial$ auf $C^2((a, b), \mathbb{C})$. Dann sind $-\lambda_n$ Eigenwerte von L mit Eigenvektoren P_n .
Der Operator L ist symmetrisch bez. $\langle \cdot | \cdot \rangle_\rho$, d.h.

$$\langle f | Lg \rangle_\rho = \langle Lf | g \rangle_\rho.$$

Begründung

$$\begin{aligned} \langle f | Lg \rangle_\rho &= \int dx \rho f (\sigma\partial^2 g + \tau\partial g) \\ &= \int dx \partial(\partial(\sigma\rho f) - \rho\tau f) g \quad (\text{Randterm} = 0) \\ &= \int dx \partial(\sigma\rho\partial f + \partial(\sigma\rho)f - \rho\tau f) g \\ &= \int dx \partial(\sigma\rho\partial f) g \quad (\text{da } \partial(\sigma\rho) = \tau\rho) \\ &= \int dx (\sigma\rho\partial^2 f + \tau\rho\partial f) g \\ &= \int dx \rho(\sigma\partial^2 + \tau)f g = \langle Lf | g \rangle_\rho \end{aligned}$$

Beweis von Satz 11.11: Für $\lambda = \lambda_0 = 0$ hat HGD die konstante Lösung, die mit P_0 wie durch die RF gegeben, übereinstimmt. Sei jetzt also $\lambda \neq 0$.

Behauptung 1 y Lösung von HGD $\iff y_1 = \partial y$ Lösung von HGD₁, mit $\sigma_1 = \sigma$, $\tau_1 = \tau + \sigma'$, $\mu_1 = \lambda + \tau'$, d.h.

$$\sigma_1\partial^2 y_1 + \tau_1\sigma y_1 + \mu_1 y_1 = 0. \quad (11.1)$$

Begründung " \implies " Leite die HGD ab:

$$\sigma\partial^3 y + \sigma'\partial^2 y + \tau'\partial y + \tau\partial^2 y + \lambda\partial y = 0$$

$\iff \sigma\partial^2 y_1 + (\tau' + \tau)\partial y_1 + (\lambda + \tau')y_1 = 0$, was genau (11) ist.

" \impliedby " Sei y_1 Lösung von (11)=HGD₁. Dann setze (vgl. HGD):

$$y = -\frac{1}{\lambda}(\sigma\partial y_1 + \tau y_1)$$

Tatsächlich ist y Stammfunktion von y_1 , da

$$\lambda\partial y = -(\sigma'\partial y_1 + \sigma\partial^2 y_1 + \tau'y_1 + \tau\partial y_1) \stackrel{\text{mit (11)}}{=} \lambda y_1$$

und auch Lösung von HGD:

$$\begin{aligned}\sigma \partial^2 y + \tau \partial y + \lambda y &= \sigma \partial y_1 + \tau y_1 + \lambda y \quad (\text{da } \partial y = y_1) \\ &= \sigma \partial y_1 + \tau y_1 + \lambda \frac{-1}{\lambda} (\sigma \partial y_1 + \tau y_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Behauptung 2 y Lösung von HGD $\iff y_n = \partial^n y$ Lösung von HGD $_n$ mit

$$\sigma_n = \sigma, \quad \tau_n = \tau + n\sigma', \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

Begründung Iteriere Behauptung 1 und verwende $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

□

Behauptung 3 Für $\lambda = \lambda_n = -n\tau^{-1} - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$ hat die ursprüngliche HGD eine polynomiale Lösung P_n mit Grad $(P_n) = n$.

Begründung Wenn $\lambda = \lambda_n$, dann ist $\mu_n = 0$ und die HGD $_n$ ist

$$\sigma \partial^2 y_n + \tau_n \partial y_n = 0.$$

Offensichtlich ist $y_n = 1$ eine Lösung. Dann konstruiere $y = P_n$ iterative wie in Behauptung 2 gemäß der Formel in Behauptung 1 (beachte, dass dies den Grad jeweils um 1 erhöht).

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass diese Lösung durch die RF gegeben ist.

Behauptung 4 Setze $\rho_n = \sigma^n \rho$. Dann

$$y_n \text{ Lösung von HGD}_n \iff \partial(\sigma \rho_n \partial y_n) + \mu_n \rho_n y_n = 0.$$

Also gilt für $y_{n+1} = \partial y_n$ wegen $\rho_{n+1} = \sigma \rho_n$

$$\partial(\rho_{n+1} y_{n+1}) = -\mu_n (\rho_n y_n).$$

Begründung Zunächst ist

$$\begin{aligned}\partial(\sigma \rho_n) &= \partial(\sigma^n \sigma \rho) \\ &= n\sigma^{n-1} \sigma' \sigma \rho + \sigma^n \partial(\sigma \rho) \\ &= n\sigma' \rho_n + \tau \sigma^n \rho \quad (\text{da } \partial(\sigma \rho) = \tau \rho) \\ &= (n\sigma' + \tau) \rho_n \\ &= \tau_n \rho_n.\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}\partial(\sigma \rho_n \partial y_n) + \mu_n \rho_n y_n &= \sigma \rho_n \partial^2 y_n + \tau_n \rho_n \partial y_n + \mu_n \rho_n y_n \\ &= \rho_n (\sigma \partial^2 y_n + \tau_n \partial y_n + \mu_n y_n).\end{aligned}$$

Da $\rho_n > 0$, folgt die Äquivalenz.

□

Schluss Sei jetzt $\lambda = \lambda_n$ und $y = P_n$. Dann ist $y_n = \partial^n y = 1$ (bzw. konstant). Es gilt

$$\begin{aligned} \partial^n \rho_n &= \partial^{n-1} \partial(\rho_n y_n) \\ &= \partial^{n-1}(-\mu_{n-1})\rho_{n-1}y_{n-1} \quad (\text{nach Beh. 4}) \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mu_k \right) \rho y \quad (\text{da } \rho_0 = \rho, y_0 = y). \end{aligned}$$

Also gilt mit einer Konstante B_n

$$P_n = y = B_n \frac{1}{\rho} \partial^n \rho_n = B_n \frac{1}{\rho} \partial^n (\sigma^n \rho),$$

was genau die RF ist. □

1. Beispiel Hermite–Polynome $\sigma(x) = 1$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Also

$$\tau(x) = e^{+x^2} \partial e^{-x^2} = -2x, \quad \lambda_n = 2n$$

Somit ist die HGD jetzt die Hermitesche Differentialgleichung

$$\partial^2 y - 2x \partial y + \lambda y = 0$$

und die Hermiteschen–Polynome H_n erfüllen

$$\partial^2 H_n(x) - 2x \partial H_n(x) = -2n H_n(x).$$

Eine Umformulierung führt auf die Lösungen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Definiere die Hermite–Funktionen

$$\psi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad c_n \in \mathbb{R}, \quad \text{quad } x \in \mathbb{R}.$$

Dann

$$(-\partial^2 + x^2) \psi_n = (2n + 1) \psi_n,$$

d.h. ψ_n ist Eigenvektor des Hamilton–Operators $-\partial^2 + x^2$ zum Eigenwert $2n + 1$ (in der Physik oft mit Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert).

Begründung

$$\begin{aligned} (-\partial^2 + x^2) \psi_n &= (-\partial^2 + x^2) \left(H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\ &= -\partial \left((\partial H_n) e^{-\frac{x^2}{2}} - x H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + x^2 H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= -(\partial^2 H_n) e^{-\frac{x^2}{2}} + \partial H_n x e^{-\frac{x^2}{2}} + H_n e^{-\frac{x^2}{2}} + x(\partial H_n) e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\quad + x^2 H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\stackrel{\text{Hermite DGL}}{=} 2n H_n e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \partial H_n e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x \partial H_n e^{-\frac{x^2}{2}} + H_n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (2n + 1) H_n e^{-\frac{x^2}{2}} = (2n + 1) \psi_n \end{aligned}$$

□

2. Beispiel Tchebychev–Polynome erster Art (detailliert, weil wichtig für nächsten Paragraphen über Fourier–Reihen)

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 1 - x^2, \quad \rho(x) = \frac{1}{\pi}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \tau(x) &= \frac{1}{\rho} \partial(\sigma\rho) = \frac{1}{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} \partial(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-2x) = -x \\ \lambda_n &= -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = (-n)(-1) - \frac{n(n-1)}{2}(-2) = n^2 \\ T_n(x) &= \frac{B_n}{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}} \partial^n \left((1 - x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

Tchebychev'sche Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)\partial^2 y - x\partial y + \lambda y = 0$$

Hiervon ist T_n Lösung für $\lambda = n^2$.

Alternative Darstellung:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Begründung Zunächst zeigen wir, dass die rechte Seite tatsächlich ein Polynom in x vom Grad n ist. Dies folgt daraus, dass $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ ein Polynom in $\cos(\theta)$ vom Grad n ist:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}(\cos(\theta) + i \sin \theta)^n \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x)^{n-k} (i \sin(x))^k \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2\ell} \cos(x)^{n-2\ell} (-1)^\ell \sin(x)^{2\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2\ell} \cos(x)^{2\ell} (-1)^\ell (1 - \cos^2(x))^{2\ell},\end{aligned}$$

wobei $[\alpha]$ der ganzzahlige Anteil von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist. Außerdem gelten die Orthogonalitätsrelationen bez. ρ :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 dx \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x)) \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) \quad (\text{mit } \theta = \arccos(x)) \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) = \delta_{n,m}\end{aligned}$$

Somit liegen also die T_n vor.

□

3. Beispiel Tchebychev–Polynome zweiter Art:

$$\sigma(x) = 1 - x^2 \quad , \quad \rho(x) = \frac{1}{\pi}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad U_n(x) = \frac{B_n}{\rho} \partial^n (\sigma^n \rho)$$

Andere Darstellung:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} = \frac{\sin((n+1) \arccos)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Begründung ähnliche Rechnung wie bei erster Art. □

Weiterführende Literatur: Nikiforov, Uvarov "Special functions of mathematical physics" [5]

12 Fourier–Reihen

Eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad , \quad \text{quad } x \in \mathbb{R},$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, heißt ein trigonometrisches Polynom. Falls $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, ist f reellwertig. Wenn $N = \infty$ ist und die Reihe konvergiert, spricht man von einer Fourier–Reihe. Zum Beispiel ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ Konvergenz garantiert, wenn $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n| < \infty$ und in diesem Fall ist die Funktion f stetig (als absolut konvergente Reihe stetiger Funktionen, Satz 8.15). Eine alternative Darstellung von trigonometrischen Polynomen und Fourier–Reihen ist

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad , \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Die Umrechnung ist $c_0 = a_0$ und, für $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad , \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

weil dann

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}.$$

Die a_n, b_n und c_n heißen Fourier–Koeffizienten von f . Beachte, dass die Umrechnung ein Basiswechsel in den zweidimensionalen Unterräumen $\text{span}\{\cos(nx), \sin(nx)\} = \text{span}\{e^{inx}, e^{-inx}\}$ von $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist. Weiter sind \cos und \sin 2π –periodisch und somit erfüllen trigonometrische Polynome und Fourier–Reihen:

$$f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + k2\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es ist ausreichend, eine solche 2π –periodische Funktion auf einem so genannten Fundamentalbereich vorzugeben. Hierzu werden Punkte x, y im Urbildbereich \mathbb{R} mit gleichen Funktionswerten durch eine Äquivalenzrelation identifiziert:

$$x \sim y \iff \frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Der natürliche Definitionsbereich einer periodischen Funktion ist also der folgende Fundamentalbereich

$$S^1 = \mathbb{R} / \sim \cong \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \cong [-\pi, \pi) \stackrel{z=e^{ix}}{\cong} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Hierbei heißt S^1 auch der Kreis und " \cong " bedeutet "unter geeigneter Identifikation gleiche Menge mit gleicher Topologie" oder "homöomorph". Die stetigen periodischen Funktionen sind also

$$\begin{aligned} C(S^1) &= \{f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und } f(-\pi) = \lim_{x \uparrow \pi} f(x)\} \\ &\cong \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Auf dem Vektorraum $C(S^1)$ liegt, wie gewöhnlich, die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S^1} |f(x)|$ vor. Außerdem können wir ein Skalarprodukt definieren (ohne Index ρ hier):

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \quad , \text{quad } f, g \in C(S^1)$$

12.1 Satz Die Familien

(i) $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$

(ii) $(1, (\sqrt{2} \cos(nx))_{n \geq 1}, (\sqrt{2} \sin(nx))_{n \geq 1})$

sind orthonormal bez. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ und vollständig in $(C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

Bemerkungen

1. Dieser Satz über trigonometrische Polynome ist dem Satz von Weierstraß über Polynome sehr ähnlich (und heißt deswegen auch Satz von Weierstraß). Entweder kann man den obigen Beweis adaptieren, oder (wie unten) Satz 12.1 auf den bekannten Sachverhalt zurückführen. Auch kann der Satz von Stone–Weierstraß angewandt werden.
2. Weil eine ONB vorliegt, können die so genannten Fourier–Koeffizienten von $f \in C(S^1)$ berechnet werden durch $a_0(f) = \langle 1 \mid f \rangle$ und

$$a_n(f) = 2 \langle \cos(nx) \mid f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\pi} \cos(nx) f(x), \quad n \geq 1,$$

$$b_n(f) = 2 \langle \sin(nx) \mid f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\pi} \sin(nx) f(x), \quad n \geq 1,$$

$$c_n(f) = \langle e^{inx} \mid f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} f(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

An den rechten Seiten dieser Formeln zeigt sich, dass Fourier–Koeffizienten auch für weniger reguläre Funktionen berechnet werden können, z.B. für eine Riemann–integrierbare Funktion f (die Unstetigkeiten haben kann).

3. Der Satz sagt nichts darüber aus, ob oder in welchem Sinne die Fourier-Reihen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ einer gegebenen Funktion f konvergieren. Hierfür werden später Kriterien bewiesen. Insbesondere bilden die beiden Familien in Satz 12.1 keine Schauder-Basen von $(C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis von Satz 12.1: Die Orthonormalität der beiden Familien kann direkt nachgerechnet werden, z.B. für (i):

$$\begin{aligned} \langle e^{inx} | e^{imx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} e^{imx} \\ &= \begin{cases} 1 & m = n \\ \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{m-n} e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} & m \neq n \end{cases} \\ &= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

Fall (ii) Übung. Wegen obiger Bemerkung über den Basiswechsel in zweidimensionalen Unterräumen reicht es, die Vollständigkeit für entweder (i) oder (ii) zu zeigen. Wir betrachten (ii). Zunächst spalten wir jede Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil auf:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Dies gibt die Zerlegung in eine direkte Summe von zwei Unterräumen:

$$C(S^1) = C_{\text{ger}}(S^1) \oplus C_{\text{ung}}(S^1)$$

Sowohl die geraden als auch die ungeraden Funktionen sind durch ihre Werte auf $[0, \pi]$ festgelegt. Da zudem die ungerade Funktion bei 0 und π verschwindet (da $f(0) = -f(0)$ und $f(\pi) = -f(-\pi) = f(\pi)$), folgt

$$C_{\text{ger}}(S^1) \cong C([0, \pi]) \quad C_{\text{ung}}(S^1) \cong C_0([0, \pi]),$$

wobei $C_0([0, \pi]) = \{f \in C([0, \pi]) \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$. Nun gilt offensichtlich $\cos(n \cdot) \in C_{\text{ger}}(S^1)$ und $\sin(n \cdot) \in C_{\text{ung}}(S^1)$. Der Satz folgt nun aus

Behauptung $(\cos(n \cdot))_{n \geq 0}$ ist vollständig in $C([0, \pi])$ und $(\sin(n \cdot))_{n \geq 1}$ ist vollständig in $C_0([0, \pi])$.

Wir verwenden hierfür die Bijektion $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, welche folgende Bijektion induziert:

$$\Phi : C([0, \pi]) \rightarrow C([-1, 1])$$

$$(\Phi(f))(x) = f(\arccos(x))$$

Nun reicht es zu zeigen, dass $(\Phi(\cos(n \cdot)))_{n \geq 0}$ Basis von $C([-1, 1])$ ist, und $(\Phi(\sin(n \cdot)))_{n \geq 1}$ von $C_0([-1, 1])$. Aber gemäß Kapitel 11 gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\cos(n \cdot))(x) &= \cos(n \arccos(x)) = T_n(x) \\ \Phi(\sin(n \cdot))(x) &= \sin(n \arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x), \end{aligned}$$

wobei T_n und U_n die Tchebychev-Polynome erster und zweiter Art sind. Nach dem Satz von Weierstraß sind aber $(T_n)_{n \geq 0}$ und $(U_n)_{n \geq 0}$ vollständig in $C([-1, 1])$. Wegen des Faktors $\sqrt{1-x^2}$

werden im zweiten Fall jedoch nur die Funktionen in $C_0([-1, 1])$ erreicht. □

Nächstes Ziel ist ein Beweis der Parseval'schen Identität:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} |f(x)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e^{inx} | f \rangle|^2.$$

Natürliche Voraussetzung hierfür ist, dass f im Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi])$ der Äquivalenzklassen quadratintegrierbarer Funktionen liegt. Dessen Definition setzt die Lebesgue'sche Integrationstheorie voraus und deswegen schränken wir uns hier ein auf Funktionen in

$$\mathcal{R} = \{f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \mid \bar{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ Riemann-integrierbar}\},$$

wobei

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-\pi, \pi) \\ f(-\pi) & x = \pi \end{cases}$$

Gemäß Satz 10.12, ist dies ein Vektorraum, der $C_{\text{per}}([-\pi, \pi))$ als Unterraum enthält. Außerdem ist \mathcal{R} eine Algebra und somit ist das Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \overline{f(x)} g(x)$$

wohldefiniert für $f, g \in \mathcal{R}$. Zunächst gilt Folgendes, dem Satz von Weierstraß ähnliches, Resultat (beachte jedoch, dass die Norm eine andere ist):

12.2 Satz Zu jedem $f \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein trigonometrisches Polynom $P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$, so dass

$$\|f - P\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Beweis Behauptung $\exists g \in C(S^1)$ mit $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

Begründung Dies geht wie folgt. Zunächst approximiert man das f durch eine Treppenfunktion, die Treppenfunktion dann durch eine stetige Funktion und die stetigen Funktion dann durch eine periodische Funktion. Dies geht in der $\|\cdot\|_2$ Norm aber nicht in der $\|\cdot\|_{\infty}$ Norm. Wir führen den ersten Schritt aus, die zwei anderen sind zur Übung. Sei $\epsilon > 0$ und $f \in \mathcal{R}$. Es existiert also ein $M > 0$ mit $\|f\|_{\infty} \leq M$. Zudem gibt es eine Zerlegung $x_0 < \dots < x_N$ von $[-\pi, \pi]$ (Satz 10.7) mit

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) - \sum_{n=1}^N \inf\{f(x) \mid x \in [x_n, x_{n-1}]\} (x_n - x_{n-1}) \right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Die Riemann-Summe kann als das Integral einer Treppenfunktion $g_{Tr} \in \mathcal{R}$ angesehen werden, für die gilt $f \geq g_{Tr}$ und

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} dx (f(x) - g_{Tr}(x)) \right) < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Somit ist

$$\|f - g_{Tr}\|_2^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} dx (f(x) - g_{Tr}(x))(f(x) - g_{Tr}(x)) \leq 2M \int_{-\pi}^{\pi} dx (f(x) - g_{Tr}(x)) < \epsilon,$$

womit die Behauptung folgt.

Nach Satz 12.1 gibt es ein trigonometrisches Polynom P , so dass $\|g - P\|_{\infty} < \frac{\epsilon}{2}$. Für diese g und P gilt:

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} |g(x) - P(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|g - P\|_{\infty} \leq \epsilon \end{aligned}$$

□

Als weitere Vorbereitung für die Parseval-Gleichung beweisen wir geometrische Aussagen, die in beliebigen Vektorräumen mit Skalarprodukt (Prä-Hilberträume) gelten.

12.3 Satz V Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_2$. Sei $(f_n)_{n=1, \dots, N}$ eine orthonormale Familie in V . Definiere die orthogonale Projektion auf den zugehörigen Unterraum durch

$$\Pi_N(f) = \sum_{n=1}^N \langle f_n | f \rangle f_n.$$

(i) Für alle $g = \sum_{n=1}^N a_n f_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$, gilt

$$\|f - \Pi_N(f)\|_2 \leq \|f - g\|_2.$$

(ii) $\|f\|_2^2 = \|f - \Pi_N(f)\|_2^2 + \|\Pi_N(f)\|_2^2$ (Pythagoras)

(iii) $\sum_{n=1}^N |\langle f_n | f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$ (Bessel-Ungleichung)

Beweis (i) Es gilt

$$\langle f | g \rangle = \sum_{n=1}^N \langle f | f_n \rangle a_n, \quad \|g\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |a_n|^2, \quad \|\Pi_N(f)\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f_n | f \rangle|^2$$

Somit

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \langle f - g | f - g \rangle = \|f\|_2^2 - \langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle + \langle g | g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 - \langle f | f_n \rangle a_n - \overline{\langle f | f_n \rangle} \overline{a_n}) \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n - \langle f_n | f \rangle|^2 - |\langle f_n | f \rangle|^2) \\ &= \|f\|_2^2 + \left(\sum_{n=1}^N |a_n - \langle f_n | f \rangle|^2 \right) - \|\Pi_N(f)\|_2^2. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dies minimal, wenn $a_n = \langle f_n | f \rangle$ ist, also $g = \Pi_N(f)$. In diesem Fall folgt auch (ii), welches direkt (iii) impliziert. \square

Bemerkung Eine weitere suggestive Schreibweise für Π_N ist

$$\Pi_N = \sum_{n=1}^N |f_n\rangle \langle f_n|.$$

Anwendung auf einen Ket-Vektor $f = |f\rangle$ gibt dann nämlich gerade wieder die ursprüngliche Definition. Beachte, dass $\Pi = \Pi_N$ erfüllt

$$\Pi^2 = \Pi = \Pi^*.$$

Dies sind genau die definierenden Gleichungen für einen Projektionsoperator (im Falle von endlich-dimensionalen V einer Projektionsmatrix).

12.4 Satz Sei $f \in \mathcal{R}$ Riemann-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$ und betrachte

$$\Pi_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \langle e^{inx} | f \rangle e^{inx}.$$

(i) (Konvergenz im Mittel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_N(f)\|_2 = 0$$

Somit sind die beiden Familien in Satz 1 Schauder-Basen von $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_2)$.

(ii) (Parseval-Gleichung)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e^{inx} | f \rangle|^2$$

(iii) Wenn auch $g \in \mathcal{R}$, dann

$$\langle g | f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle g | e^{inx} \rangle \langle e^{inx} | f \rangle.$$

Bemerkungen

1. Alle Aussagen gelten auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass f und g quadratintegrierbar im Sinne von Lebesgue sind.
2. (i) präzisiert, welche Polynome in Satz 12.2 gewählt werden können.
3. Der Projektionsoperator Π_N ist ein so genannter Integraloperator der Faltungsform:

$$\begin{aligned} \Pi_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} e^{-iny} f(y) e^{inx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) f(y) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} D_N(x-y) f(y), \end{aligned}$$

wobei D_N der Dirichlet-Kern heißt:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin\left((2N+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4. (iii) kann kurz geschrieben werden als

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{inx}\rangle \langle e^{iny}| = \mathbb{1}_{\mathcal{R}}.$$

Beweis (i) Zu $\varepsilon > 0$, wähle nach Satz 12.2 ein trigonometrisches Polynom, so dass

$$\|f - P\|_2 < \varepsilon.$$

Sei $N_0 = \text{Grad}(P)$. Gemäß Satz 12.3 gilt nun $\forall N \geq N_0$

$$\|f - \Pi_N(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 < \varepsilon.$$

Das ist gerade die Konvergenz. Weiter gilt

$$\langle g | \Pi_N(f) \rangle = \sum_{n=-N}^N \langle g | \langle e^{inx} | f \rangle e^{inx} \rangle = \sum_{n=-N}^N \langle g | e^{inx} \rangle \langle e^{inx} | f \rangle$$

und

$$\begin{aligned} |\langle g | f \rangle - \langle g | \Pi_N(f) \rangle| &= |\langle g | f - \Pi_N(f) \rangle| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|g\|_2 \|f - \Pi_N(f)\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

woraus (iii) folgt. (ii) ist ein Spezialfall davon. □

Eine Folgerung aus der Parseval-Gleichung ist, dass die Fourier-Koeffizienten von $f \in \mathcal{R}$ gegen 0 konvergieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e^{inx} | f \rangle = 0$$

Wegen $|c_n|^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2$ gilt Gleiches auch für die a_n und b_n . Tatsächlich gilt sogar mehr, dass nämlich die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ konvergiert. Quantitative Aussagen über den Abfall der Fourierkoeffizienten gelten für differenzierbare Funktionen.

12.5 Satz $f \in C^k(S^1) \cong \{f \in C^k(\mathbb{R}) \mid f(x+2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Dann existiert eine Konstante $C = C_f$, so dass $c_n(f) = \langle e^{inx} | f \rangle$ erfüllt

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{n^k}.$$

Beweis Dies folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{i}{n} (\partial e^{-inx}) f(x) \\ &= \frac{i}{n} e^{-inx} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} \partial f(x) \\ &= 0 + \frac{1}{n} \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} \partial f(x) = \dots = \frac{1}{n^k} \frac{1}{i^k} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} (\partial^k f)(x) \end{aligned}$$

Nun schlieÙe mit der Standardintegralabschätzung. □

12.6 Satz Die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in C^2(S^1)$ konvergiert uniform (und insbesondere punktweise) gegen f , d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} \right\|_{\infty} = 0, \quad c_n(f) = \langle e^{inx} | f \rangle.$$

Beweis Nach Satz 12.5 sind die Fourier-Koeffizienten $c_n(f)$ absolut summierbar. Nach Satz 8.15, folgt die uniforme Konvergenz. □

Der folgende Satz verallgemeinert diese Aussage.

12.7 Satz Sei $f \in \mathcal{R}$. Sei $x \in [-\pi, \pi)$. Folgende Grenzwerte mögen existieren:

$$f(x-) = \lim_{y \downarrow 0} f(x - y) \quad f(x+) = \lim_{y \downarrow 0} f(x + y)$$

Außerdem sei die Funktion

$$g(y) = \frac{(f(x - y) - f(x-)) + (f(x + y) - f(x+))}{y}$$

auf einem Intervall $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, integrierbar (Dini-Bedingung). Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f in x und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pi_N(f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Beweis Für den Dirichletkern $D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} D_N(x) = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{inx} = 1, \quad D_N(x) = D_N(-x).$$

Somit

$$\begin{aligned}
 \Pi_N(f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} D_N(x-y) f(y) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2\pi} D_N(y) f(x+y) \quad (f \text{ und } D_N \text{ periodisch}) \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{dy}{2\pi} D_N(y) (f(x+y) + f(x-y)) \quad (D_N \text{ gerade})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Pi_N(f)(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{dy}{2\pi} D_N(y) (f(x+y) + f(x-y) - f(x^+) - f(x^-)) \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{dy}{2\pi} \underbrace{\sin\left((2N+1)\frac{y}{2}\right) \frac{y}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}}_{\text{stetig auf } [0,\varepsilon]} \underbrace{\frac{(f(x+y) - f(x^+)) + (f(x-y) - f(x^-))}{y}}_{g(y)}.
 \end{aligned}$$

Nun spalte das Integral auf in $\int_0^{\pi} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}$. Sei $\delta > 0$. Wegen der Dini-Bedingung ist der Beitrag von \int_0^{ε} kleiner als $\frac{\delta}{2}$ für ε ausreichend klein. Dann ist die Funktion

$$y \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{y}{\sin \frac{y}{2}} g(y) \chi(y \geq \varepsilon)$$

Riemann-integrierbar (hier ist $\chi(y \geq \varepsilon)$ die Indikatorfunktion, welche 1 für $y \geq \varepsilon$ ist und 0 für $y < \varepsilon$). Somit konvergieren seine Fourier-Koeffizienten b_N gegen 0 (nach Parseval). Also existiert ein N_0 , so dass der Beitrag \int_{ε}^{π} auch kleiner als $\frac{\delta}{2}$ ist für $N \geq N_0$.

Beispiele

1. $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$, dann periodisch fortgesetzt. $f \in \mathcal{R}$, aber f ist nicht stetig. Dann $c_0(f) = 0$ und für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \langle e^{inx} | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{1}{-in} (\partial e^{-inx}) x \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-inx} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} \\ &= \frac{1}{-in} (-1)^n + 0 \end{aligned}$$

Somit

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 0 \quad , \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Nach Satz 12.5 gilt jetzt auf $[-\pi, \pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \begin{cases} x & , \quad x \neq -\pi \\ \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 & , \quad x = -\pi \end{cases}.$$

Insbesondere, für $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Sei $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \\ -1 & , \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

Diese Funktion ist ungerade. Dann

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\pi} \sin(nx) \operatorname{sgn}(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} dx \sin(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & , \quad n \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Also

$$\Pi_N(f)(x) = \sum_{n=0}^N \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

erfüllt $\Pi_N(f)(0) = 0$ (was im Limes $N \rightarrow \infty$ mit Satz 12.7 übereinstimmt). Zudem gilt

$$\Pi_N(f) \left(\frac{\pi}{2N+1} \right) = \frac{4}{2\pi} \sum_{n=0}^N \frac{2\pi}{2N+1} \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2N+1} \right)}{\frac{(2n+1)\pi}{2N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \frac{\sin(x)}{x} \approx \frac{2}{\pi} 1.85 > 1$$

Somit ist

$$\|f - \Pi_N(f)\|_\infty \geq \left|1 - \frac{\lambda}{\pi} 1.85\right| > 0 \quad \forall N \geq 1,$$

d.h. es liegt keine uniforme Konvergenz vor, obwohl die Fourier-Reihe punktweise konvergiert. Dies ist ein typisches Beispiel für das so genannte Gibbs-Phänomen.

13 Lineare Operatoren

Nach der Taylor-Formel gilt für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + f'(x_0)v + \frac{1}{2}f''(x_0)vv + \mathcal{O}(v^3)$$

für $x_0 \in D$ und kleines $v \in \mathbb{R}$. Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird nun die gleiche Formel gelten, wobei $x_0 \in D$ ist, $v \in \mathbb{R}^n$ und $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist und $f''(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine bilineare Abbildung ist, die zudem symmetrisch ist. Analog wird $f^{(k)}(x_0)$ eine k -lineare symmetrische Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^m sein.

Vorbereitungen: lineare Abbildungen und ihre Stetigkeit bez. verschiedener Normen.

Auf \mathbb{K}^n mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir schon die Normen

$$\|v\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |v_j| \quad , \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und

$$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v | v \rangle} \quad , \quad \langle v | w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{v}_j w_j \quad , \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

kennen gelernt. Es gibt weitere viel verwendete Normen.

13.1 Satz Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $q \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Setze, für $p < \infty$,

$$\|v\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Dann gilt:

- (i) (Hölder-Ungleichung) $|\langle v | w \rangle| \leq \|v\|_p \|w\|_q$
- (ii) (Minkowski-Ungleichung) $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$
- (iii) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ normierter Vektorraum
- (iv) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|v\|_\infty \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$

Bemerkung Der letzte Punkt besagt, dass alle Metriken $d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch $d_p(v, w) = \|v - w\|_p$ äquivalent sind und somit die gleiche Topologie auf \mathbb{K}^n induzieren. Man kann sogar zeigen, dass alle Normen auf \mathbb{K}^n äquivalent sind (Übung).

Beweis

(i) Der Fall $p = 1, q = \infty$ folgt direkt aus

$$|\langle v | w \rangle| \leq \sum_{j=1}^n |v_j| |w_j| \leq (\max_{j=1, \dots, n} |w_j|) \sum_{j=1}^n |v_j| = \|w\|_\infty \|v\|_1.$$

Analog: $p = \infty, q = 1$

Behauptung Für $a, b > 0$ gilt $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ (Young'sche Ungleichung).

Begründung Die Funktion $x \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto \ln(x)$ ist konkav. Nach Jensens Ungleichung gilt also für $x, y > 0$

$$\frac{1}{p} \ln(x) + \frac{1}{q} \ln(y) \leq \ln\left(\frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y\right).$$

Da exp monoton ist, folgt nach Exponentieren

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y.$$

Setze $x^{\frac{1}{p}} = a, y^{\frac{1}{q}} = b$, dann ist die Behauptung gezeigt.

Nun sei $\|v\|_p \neq 0$ und $\|w\|_q \neq 0$ (sonst trivial). Es folgt:

$$\frac{\langle v | w \rangle}{\|v\|_p \|w\|_q} \leq \sum_{j=1}^n \frac{|v_j| |w_j|}{\|v\|_p \|w\|_q} \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{|v_j|^p}{\|v\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|w_j|^q}{\|w\|_q^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(ii) Für $p = 1$ und $p = \infty$ folgt die Minkowski-Ungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung. Sei also $1 < p, q < \infty$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff q + p = pq \iff p = (p - 1)q.$$

Dann

$$\begin{aligned} \|v + w\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |v_j + w_j| |v_j + w_j|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |v_j| |v_j + w_j|^{p-1} \right) + \left(\sum_{j=1}^n |w_j| |v_j + w_j|^{p-1} \right) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\|v\|_p + \|w\|_p) \left(\sum_{j=1}^n |v_j + w_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|v\|_p + \|w\|_p) \|v + w\|_p^{\frac{p}{q}} \quad (\text{da } (p-1)q = p) \end{aligned}$$

Für $\|v + w\|_p \neq 0$ (sonst trivial) verwende nun

$$(\|v + w\|_p)^{p - \frac{p}{q}} = \|v + w\|_p.$$

(iii) Minkowski = Dreieck, zudem $\|\lambda v\|_p = |\lambda| \|v\|_p$. Nichtentartung klar.

$$(iv) \|v\|_\infty \leq \|v\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |v_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \|v\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|v\|_\infty \quad \square$$

Seien nun $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume über \mathbb{K} . Der Index an der Norm wird unterdrückt (aus Zusammenhang meist klar).

13.2 Definition Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt linear oder linearer Operator $\iff \forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $A(v + \lambda w) = A(v) + \lambda A(w)$.

13.3 Satz Für eine lineare Abbildung $A : (V, \|\cdot\|) \rightarrow (W, \|\cdot\|)$ sind äquivalent

- (i) A stetig in 0,
- (ii) A stetig,
- (iii) A gleichmäßig stetig,
- (iv) A beschränkt, d.h. $\exists M > 0$ mit $\|Av\| \leq M\|v\| \forall v \in V$.

Dann ist die Operatornorm von A definiert als

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Beweis

(i) \implies (iv) Gegenannahme: $\forall n \in \mathbb{N} \exists v_n \in V$ mit $\|Av_n\| > n\|v_n\|$.

Setze $w_n = \frac{v_n}{n\|v_n\|}$. Dann $\|w_n\| = \frac{1}{n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 \in V$.

Aber $\|Aw_n\| = \frac{\|Av_n\|}{n\|v_n\|} > 1$, d.h. Aw_n konvergiert **nicht** gegen $0 \in W$, so dass A unstetig bei 0 wäre.

(iv) \implies (iii) Nach Linearität gilt

$$\|Av - Aw\| = \|A(v - w)\| \leq M\|v - w\|.$$

Somit ist A global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante M , insbesondere also gleichmäßig stetig.

(iii) \implies (ii) \implies (i) klar. □

13.4 Satz Jede lineare Abbildung $A : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (V, \|\cdot\|)$ ist stetig.

Beweis Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{K}^n . Dann $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j \in \mathbb{K}^n$ und

$$\begin{aligned} \|Av\| &= \left\| \sum_{j=1}^n v_j A e_j \right\| \leq \max\{\|A e_1\|, \dots, \|A e_n\|\} \sum_{j=1}^n |v_j| \\ &= C \|v\|_1 \leq C n \|v\|_\infty \leq C n \|v\|_p. \end{aligned}$$

Also $\|A\| < \infty$ und A ist stetig. □

13.5 Satz Seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W, \|\cdot\|)$ normierte Vektorräume. Definiere

$$\mathcal{B}(V, W) = \{A : V \rightarrow W \mid \|A\| < \infty\} \quad \text{Menge der linearen und beschränkten Operatoren.}$$

Auf $\mathcal{B}(V, W)$ sind Operatornorm $\|\cdot\| : \mathcal{B}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$(A + \lambda B)(v) = Av + \lambda Bv \quad , \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

wohldefiniert und somit ist $(\mathcal{B}(V, W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Begründung Wenn A und B linear sind, dann auch $A + \lambda B$. Zudem

$$\|(A + \lambda B)v\| \leq \|Av\| + |\lambda| \|Bv\| \leq (\|A\| + |\lambda| \|B\|) \|v\|,$$

so dass $A + \lambda B \in \mathcal{B}(V, W)$. Insbesondere gilt also

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad , \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|.$$

Außerdem $\|A\| = 0 \iff A = 0$. □

13.6 Definition Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Beispiel X kompakt, dann $(C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum nach Korollar 8.17.

13.7 Satz $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $(W, \|\cdot\|)$ Banachraum

$$\implies (\mathcal{B}(V, W), \|\cdot\|) \text{ Banachraum}$$

Beweis Nach Satz 13.5 bleibt noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei also $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(V, W)$. Für jedes $v \in V$ ist dann

$$\|A_n v - A_m v\| = \|(A_n - A_m)v\| \leq \|A_n - A_m\| \|v\|,$$

d.h. $(A_n v)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in W . Nach der Vollständigkeit von W kann man also einen Operator $A : V \rightarrow W$ definieren durch

$$Av = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v.$$

Zu zeigen bleibt, dass $A \in \mathcal{B}(v, w)$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen A konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N$ mit $\|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n, m \geq N$.

Zudem gibt es $\forall v \in V$ ein $m \geq N$ mit $\|Av - A_m v\| < \frac{\varepsilon}{2} \|v\|$. Denn

$$\|(A - A_n)v\| \leq \|(A - A_m)v\| + \|(A_m - A_n)v\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|v\| = \varepsilon \|v\|.$$

Beachte, dass m von v abhängt, ε aber nicht. Somit $\|A - A_n\| \leq \varepsilon \forall n \geq N$. Also konvergiert $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen A . Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \|A(v + \lambda w) - Av - \lambda Aw\| \\ & \leq \|(A - A_n)(v + \lambda w) - (A - A_n)v - \lambda(A - A_n)w\| + \|A_n(v + \lambda w) - A_n v - \lambda A_n w\| \\ & \leq \|A - A_n\|(\|v + \lambda w\| + \|v\| + |\lambda| \|w\|) + 0 \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d.h. A ist linear. Zuletzt für n groß aber fast, $\|A\| \leq \|A - A_n\| + \|A_n\| \leq \varepsilon + \|A_n\| < \infty$. \square

13.8 Satz Seien U, V, W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{B}(U, V)$, $B \in \mathcal{B}(V, W)$.

Dann ist $BA = B \circ A \in \mathcal{B}(U, W)$ und $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

Begründung Die Linearität von BA ist klar, und $\forall u \in U$ gilt

$$\|BAu\| \leq \|B\| \|Au\| \leq \|B\| \|A\| \|u\|.$$

Somit

$$\|BA\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|BAu\|}{\|u\|} \leq \|B\| \|A\|.$$

\square

13.9 Definition Sei V ein normierter Vektorraum und sei $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(V, V)$. Dann ist der Vektorraum $\mathcal{B}(V)$ versehen mit \circ und der Operatornorm $\|\cdot\|$ eine normierte Algebra. Falls V vollständig ist, so ist auch $\mathcal{B}(V)$ vollständig (nach Satz 13.8) und $\mathcal{B}(V)$ ist eine so genannte Banachalgebra.

13.10 Definition Ein linearer Operator $A : V \rightarrow W$ heißt invertierbar $\iff A : V \rightarrow A(V)$ bijektiv.

Dann existiert ein Linksinverses $A^{-1} : A(V) \rightarrow V$.

Achtung! A^{-1} nicht notwendigerweise beschränkt, und nicht Rechtsinverses.

13.11 Satz Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{B}(V)$ mit $\|A\| < 1$. Dann ist $\mathbb{1} - A$ invertierbar und

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n \quad (\text{Neumann Reihe, konvergiert bez. Operatornorm})$$

und

$$\|(\mathbb{1} - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Beweis Nach Satz 13.8 gilt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Somit

$$\left\| \sum_{n=0}^N A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^N \|A^n\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

und $\left(\sum_{n=0}^N A^n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge bez. der Operatornorm.

Nach Satz 13.8 konvergiert die Reihe also gegen einen Operator $B \in B(V)$. Es gilt

$$(\mathbb{1} - A)B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1}$$

und analog $B(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1}$. Also $B = (\mathbb{1} - A)^{-1}$. □

Bemerkung Etwas allgemeiner kann für jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius ρ und jeden Operator $A \in B(V)$ mit $\|A\| < \rho$ ein neuer Operator $f(A)$ definiert werden durch

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Z.B. ist $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ für jedes $A \in B(V)$ definiert.

Achtung $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ gilt nur, wenn $AB = BA$ (A und B kommutieren).

14 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

14.1 Definition V, W normierte Vektorräume über \mathbb{R} , $D \subset V$ offene Teilmenge, $x_0 \in D$
 Eine Abbildung $f : D \rightarrow W$ heißt differenzierbar in Punkt x_0 (im Sinne von Fréchet)
 $\iff \exists A \in B(V, W)$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$\iff \exists A \in B(V, W)$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\| < \varepsilon \|x - x_0\| \quad \forall x \neq x_0 \quad \text{mit} \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

Dann heißt A Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkungen

1. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ ist $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, also durch eine Matrix in $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ gegeben.
2. Wenn die Ableitung existiert, dann ist sie eindeutig.

Begründung Seien A, A' zwei Ableitungen. Für alle $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (für A, A' gleichzeitig gewählt), so dass $\forall x \neq x_0, \|x - x_0\| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|(A - A')(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|f(x) - f(x_0) - A'(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

3. Im Fall $V = W = \mathbb{R}$ stimmt die Definition mit der vorherigen überein. In der Tat ist eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einfach durch Multiplikation mit einer reellen Zahl gegeben, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.
4. Definition 14.1 überträgt sich auch auf komplexe Vektorräume, wenn $\mathcal{B}(V, W)$ dann als komplex lineare Abbildungen aufgefasst werden. Viele der Ergebnisse weiter unten übertragen sich dann direkt. Im Fall $V = W = \mathbb{C}$, aufgefasst als Vektorraum über \mathbb{C} , heißt eine differenzierbare Funktion auch holomorph (vgl. Funktionentheorie) und $f'(z_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.
5. Einige einfache Beispiele:

(i) $f = w$ konstant $\implies f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in D$

(ii) $f : V \rightarrow V, f = \text{id}_V \implies f'(x_0) = \text{id}_V$

(iii) $f : V \rightarrow W$ linear, d.h. $f \in \mathcal{B}(V, W)$. Dann $f'(x_0) = f \quad \forall x_0 \in V$, weil

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{0}{\|x - x_0\|} = 0.$$

6. f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0 .

Begründung Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für $\|x - x_0\| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| + \|f'(x_0)(x - x_0)\| \\ &\leq \varepsilon\|x - x_0\| + \|f'(x_0)\|\|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Also ist f stetig in x_0 .

14.2 Satz V, W normierte Vektorräume

- (i) $f, g : D \subset V \rightarrow W$ differenzierbar in $x_0 \in D, \lambda \in \mathbb{R}, D$ offen.

Dann ist auch $f + \lambda g : D \rightarrow W$ differenzierbar in x_0 und

$$(f + \lambda g)'(x_0) = f'(x_0) + \lambda g'(x_0).$$

- (ii) $f, g : D \subset V \rightarrow W$ und W normierte Algebra (z.B. $W = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$).

Dann ist $f \cdot g : D \subset V \rightarrow W$ in x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

- (iii) $f : D \subset U \rightarrow V, g : f(D) \rightarrow W, x_0 \in D$

f differenzierbar in x_0, g differenzierbar in $f(x_0)$.

Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis

(i) Nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|x - x_0\|} \|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \lambda g'(x_0)(x - x_0)\| \\ & \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} [\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| + |\lambda| \|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|] \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|x - x_0\|} \|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)(x - x_0)\| \\ & \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} \left[\|f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - f'(x_0)(x - x_0)g(x)\| \right. \\ & \quad \left. + \|f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)(x - x_0)\| \right. \\ & \quad \left. + \|f'(x_0)(x - x_0)(g(x) - g(x_0))\| \right] \\ & \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} \left[\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \|g(x)\| \right. \\ & \quad \left. + \|f(x_0)\| \|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\| \right. \\ & \quad \left. + \|f'(x_0)\| \|x - x_0\| \|g(x) - g(x_0)\| \right] \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, \quad \text{weil } g \text{ stetig in } x_0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Operatorungleichung $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ verwandt.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|x - x_0\|} \|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0)\| \\ & \leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \\ & \quad \left(\frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \|f'(x_0)\| \right) \\ & \quad + \frac{\|g'(f(x_0))\| \cdot \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \cdot C + C \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zu Mittelwertsätzen, zunächst für reellwertige Funktionen.

14.3 Satz V normierter Vektorraum, $D \subset V$ offen,

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x, y \in D$, so dass $tx + (1 - t)y \in D \forall t \in [0, 1]$.

$\implies \exists t \in (0, 1)$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(tx + (1 - t)y)(x - y).$$

Beweis Definiere $\varphi : [0, 1] \rightarrow V$ durch $\varphi(t) = tx + (1 - t)y$. Dann ist $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(0, 1)$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\implies} f \circ \varphi(1) = f \circ \varphi(0) + (f \circ \varphi)'(t).$$

Nach der Kettenregel gilt $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = f'(\varphi(t))(x - y)$. □

Bemerkungen

1. Die Abbildung $f'(x_0) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear und stetig, also im Dualraum von V . Falls $V = \mathbb{R}^n$, ist diese Abbildung durch das Skalarprodukt mit einem Vektor gegeben, der mit $\text{grad}(f)(x_0) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet wird, d.h.

$$f'(x_0)(x - y) = \langle \text{grad}(f)(x_0) \mid x - y \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

2. Für Funktionen, die nicht reellwertig sind, gilt der MWS nicht, wie schon folgendes zweidimensionale Beispiel zeigt:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = e^{ix}$$

$$f(0) = f(2\pi) = 1, \quad f'(x) = ie^{ix} \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{Aber } f(2\pi) \neq f(0) + f'(t) \cdot (1 - 0) \quad \forall t \in [0, 1]$$

In vielen Situationen ist folgender Satz ein guter Ersatz:

14.4 Satz (Schrankensatz) $f : D \subset V \rightarrow W$ differenzierbar auf offenen D , d.h. in allen Punkten von D . Sei $x, y \in D$, so dass $tx + (1 - t)y \in D \quad \forall t \in [0, 1]$. Setze

$$M = \sup_{t \in [0, 1]} \|f'(tx + (1 - t)y)\|.$$

Dann

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Beweis Notation $[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\} \subset V$, Intervall in V . Dann

$$M = \sup_{x' \in [x, y]} \|f'(x')\|.$$

Gegenannahme: $\exists \varepsilon > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (M + \varepsilon)\|x - y\|.$$

Unterteile $[x, y] = [x, x_0] \cup [x_0, y]$ mit Mittelpunkt $x_0 = \frac{x+y}{2}$. Dann ist entweder

$$\|f(x) - f(x_0)\| \geq (M + \varepsilon)\|x - x_0\| \quad \text{oder} \quad \|f(x_0) - f(y)\| \geq (M + \varepsilon)\|x_0 - y\|,$$

weil sonst im Widerspruch zur Gegenannahme

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y)\| \\ &< (M + \varepsilon)(\|x - x_0\| + \|x_0 - y\|) \\ &= (M + \varepsilon)\|x - y\| \quad (\text{weil } x, x_0, y \text{ auf Gerade liegen}) \end{aligned}$$

Sei $[x_1, y_1]$ ein Intervall mit \geq (entweder $[x, x_0]$ oder $[x_0, y]$).
Iteration dieser Konstruktion gibt Folge $[x_n, y_n] \subset [x_{n-1}, y_{n-1}]$ mit

$$\|x_n - y_n\| = \frac{\|x - y\|}{2^n}$$

und

$$\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq (M + \varepsilon)\|x_n - y_n\|.$$

Nun existiert $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Wiederum erfüllt eines der Intervalle der Zerlegung $[x_n, y_n] = [x_n, x'] \cup [x', y_n]$ die Ungleichung mit \geq . Dies gilt entweder für unendlich viele x_n oder y_n , ohne Einschränkung unendlich vieler x_n , welche wir als Teilfolge auswählen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f'(x')\| &\geq \frac{\|f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \\ &\geq \frac{\|f(x_n) - f(x')\|}{\|x_n - x'\|} - \frac{\|f(x_n) - f(x') - f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \\ &\geq (M + \varepsilon) - \frac{\|f(x_n) - f(x') - f'(x')(x_n - x')\|}{\|x_n - x'\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (M + \varepsilon), \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

14.5 Definition Seien V_1, V_2, W normierte Vektorräume.

$V_1 \times V_2$ kartesisches Produkt mit Norm $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$

$D \subset V_1 \times V_2$ offen, $f : D \rightarrow W$, $(x_1, x_2) \in D$

f heißt partiell differenzierbar in (x_1, x_2)

\iff Abbildungen $x \in V_1 \mapsto f(x, x_2)$ und $x \in V_2 \mapsto f(x_1, x)$ sind in x_1 und x_2 differenzierbar.

Die zugehörigen linearen Abbildungen werden mit $\partial_{x_1} f(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(V_1, W)$ und $\partial_{x_2} f(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(V_2, W)$ bezeichnet und heißen partielle Ableitungen. Falls sie in allen Punkten von D existieren, heißt f partiell differenzierbar auf D . Analog sind partielle Ableitungen $\partial_{x_k} f$, $k = 1, \dots, n$, von Abbildungen $f : D \subset V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ definiert.

Wichtiges Beispiel: Im Folgenden wird oft die Situation $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^m$

betrachtet. Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann $\partial_{x_k} f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, eine lineare Abbildung, für jedes $k = 1, \dots, n$. Diese partiellen Ableitungen existieren genau dann, wenn

die Komponentenfunktion von $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $f_\ell : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, jeweils nach den Variablen x_k im eindimensionalen Sinne differenzierbar sind, d.h. $\partial_{x_k} f_\ell(x)$ die Ableitung der Funktion $y \in \mathbb{R} \mapsto f_\ell(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ am Punkt $y = x_k$. Die lineare Abbildung $\partial_{x_k} f(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$ ist durch den Vektor

$$\partial_{x_k} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_k} f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_k} f_m(x) \end{pmatrix}$$

gegeben. Wenn f auf D differenzierbar ist, definiert man die Jacobi-Matrix $\partial f : D \rightarrow \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ durch

$$\partial f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}.$$

Im Fall $m = 1$ ist $\partial f(x)$ ein Zeilenvektor, mit Hilfe dessen dann der Gradient $\text{grad}(f)(x) = (\partial f(x))^t \in \mathbb{R}^m$ definiert wird. Es gilt dann

$$f'(x)v = \langle \text{grad}(f)(x) | v \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Im Fall $n = m$ heißt $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch Vektorfeld. Ein Beispiel eines Vektorfeldes ist $\text{grad}(f) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Für ein Vektorfeld g ist zudem die Divergenz $\text{div}(g) = \nabla \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\text{div}(g) = \partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \dots + \partial_{x_n} g_n.$$

Falls $n = m = 3$, wird die Rotation des Vektorfeldes $g : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\text{rot}(g) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} g_3 - \partial_{x_3} g_2 \\ \partial_{x_3} g_1 - \partial_{x_1} g_3 \\ \partial_{x_1} g_2 - \partial_{x_2} g_1 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, d.h. $\text{grad}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei auch partiell differenzierbar. Dann ist der Laplaceoperator Δ angewandt auf f definiert durch

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \partial_{x_1}^2 f + \dots + \partial_{x_n}^2 f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

14.6 Satz $f : D \subset V_1 \times V_2 \rightarrow W$ differenzierbar in $x = (x_1, x_2) \in D$

$\implies f$ partiell differenzierbar in x und f' wird durch die partiellen Ableitungen dargestellt:

$$f'(x)(v_1, v_2) = \partial_{x_1} f(x)v_1 + \partial_{x_2} f(x)v_2 \quad , \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

14.7 Lemma Die Abbildung $\varphi : \mathcal{B}(V_1, W) \times \mathcal{B}(V_2, W) \rightarrow \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$ gegeben durch

$$\varphi(A_1, A_2)(x_1, x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

ist linear, stetig und bijektiv mit stetigem Inversen.

Beweis Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = ((\varphi^{-1})_1, (\varphi^{-1})_2)$ ist

$$(\varphi^{-1})_1(A)(x_1) = A(x_1, 0) \quad , \quad (\varphi^{-1})_2(A)(x_2) = A(0, x_2).$$

Nun ist $\mathcal{B}(V_1, W) \times \mathcal{B}(V_2, W)$ wieder ein kartesisches Produkt mit Norm $\|(A_1, A_2)\| = \|A_1\| + \|A_2\|$. Die Linearität von φ ist offensichtlich, die Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(A_1, A_2)\| &= \sup_{\|(x_1, x_2)\|=1} \|\varphi(A_1, A_2)(x_1, x_2)\| \\ &= \sup_{\|x_1\| + \|x_2\|=1} \|A_1 x_1 + A_2 x_2\| \\ &\leq \|A_1\| + \|A_2\| \end{aligned}$$

und die Stetigkeit von φ^{-1} aus

$$\begin{aligned}\|\varphi^{-1}(A)\| &= \|(\varphi^{-1})_1(A)\| + \|(\varphi^{-1})_2(A)\| \\ &= \sup_{\|x_1\|=1} \|A(x_1, 0)\| + \sup_{\|x_2\|=1} \|A(0, x_2)\| \\ &\leq \|A\| + \|A\| = 2\|A\|.\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 14.6 Sei $A = f'(x) \in \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$. Dann gibt es $A_1 = (\varphi^{-1})_1(A) \in \mathcal{B}(V_1, W)$ und $A_2 = (\varphi^{-1})_2(A) \in \mathcal{B}(V_2, W)$. Nach Lemma 14.7 sind A_1 und A_2 linear und stetig. Außerdem

$$\frac{\|f(y, x_2) - f(x_1, x_2) - A_1(y - x_1)\|}{\|y - x_1\|} = \frac{\|f(y, x_2) - f(x_1, x_2) - A((y, x_2) - (x_1, x_2))\|}{\|(y, x_2) - (x_1, x_2)\|} \xrightarrow{y \rightarrow x_1} 0,$$

Letzteres nach der Differenzierbarkeit von f in (x_1, x_0) . Somit gilt $\partial_{x_1} f(x) = A_1$. Analog erhält man $\partial_{x_2} f(x) = A_2$. □

Bemerkung Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie folgendes Standardbeispiel zeigt.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}.$$

f besitzt partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}, \\ \partial_y f(x, y) &= \begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Aber

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{2r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sin(2\varphi),$$

so dass $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y)$ nicht existiert, also f nicht stetig ist bei 0 und somit auch nicht differenzierbar.

14.8 Definition V, W normierte Vektorräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$

f stetig differenzierbar auf D

$\iff f$ differenzierbar in $x_0 \forall x_0 \in D$ und die Abbildung $x \in D \mapsto f'(x) \in \mathcal{B}(V, W)$ ist stetig.

Für stetig differenzierbare Funktionen gilt nun die Umkehrung von Satz 14.6.

14.9 Satz $f : D \subset V_1 \times V_2 \rightarrow W$ partiell differenzierbar. Dann sind äquivalent

(i) $\partial_{x_1} f : D \rightarrow \mathcal{B}(V_1, W)$ und $\partial_{x_2} f : D \rightarrow \mathcal{B}(V_2, W)$ stetig,

(ii) f auf D stetig differenzierbar.

Dann gilt $f' = \varphi(\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f)$, wobei φ die Abbildung aus Lemma 14.7 ist.

Bemerkung Analoges gilt für Abbildungen $f : D \subset V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$.

Beweis von Satz 14.9

(ii) \implies (i) Da $f' : D \subset V_1 \times V_2 \rightarrow \mathcal{B}(V_1 \times V_2, W)$ stetig ist, folgt nach Lemma 14.7, dass auch

$$\partial_{x_j} f = (\varphi^{-1})_j \circ f' : D \rightarrow \mathcal{B}(V_j, W) \quad , \quad j = 1, 2$$

stetig sind, d.h. f ist stetig partiell differenzierbar.

(i) \implies (ii) Wir zeigen, dass für $(x_1, x_2) \in D$ gilt

$$f'(x_1, x_2)(y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \partial_{x_1} f(x_1, x_2)(y_1 - x_1) + \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2).$$

Die Stetigkeit folgt dann wieder aus Lemma 14.7. Tatsächlich $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} & \|f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x_1, x_2)(y_1 - x_1) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2)\| \\ & \leq \|f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) - \partial_{x_1} f(x_1, y_2)(y_1 - x_1)\| \\ & \quad + \|[\partial_{x_1} f(x_1, y_2) - \partial_{x_1} f(x_1, x_2)](y_1 - x_1)\| \\ & \quad + \|f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)(y_2 - x_2)\| \\ & \leq \varepsilon \|y_1 - x_1\| + \varepsilon \|y_1 - x_1\| + \varepsilon \|y_2 - x_2\| \end{aligned}$$

für $\|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| < \delta$, nach der Definition der partiellen Ableitung und ihrer Stetigkeit. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, haben wir die Ableitung berechnet. \square

Bemerkung Wenn $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist, so ist die Ableitung $f'(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch die Jacobi-Matrix $\partial f = (\partial_{x_i} f_j)_{j=1, \dots, m, i=1, \dots, n}$ gegeben, d.h. für $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$

$$f'(x)v = \partial f v = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_1 v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_m v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \text{grad}(f_1) \mid v \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ \vdots \\ \langle \text{grad}(f_m) \mid v \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt im Fall $m = 1$, d.h. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$f'(x)v = \langle \text{grad}(f)(x) \mid v \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel Es gibt differenzierbare Abbildungen, die nicht stetig partiell differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Dann

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} 2xy \sin\left(\frac{1}{x}\right) - y \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Letzteres, weil $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(\varepsilon, y) - f(0, y) - 0 \cdot (\varepsilon - 0)}{\varepsilon} = \varepsilon y \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Außerdem

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Jetzt ist $\partial_y f$ stetig auf \mathbb{R}^2 , aber $\partial_x f$ ist unstetig auf $S = \{(0, y) \mid y \neq 0\}$. Dennoch ist f differenzierbar. Nach Satz 14.6 muss f' dann durch die partiellen Ableitungen gegeben sein. In der Tat gilt für $y \neq 0$ und $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} & \frac{|f(\varepsilon_x, y + \varepsilon_y) - f(0, y) - \partial_x f(0, y)\varepsilon_x - \partial_y f(0, y)\varepsilon_y|}{\|(\varepsilon_x, \varepsilon_y)\|} \\ &= \frac{|f(\varepsilon_x, y + \varepsilon_y)|}{|\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|} = \frac{1}{|\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|} \begin{cases} \left| \varepsilon_x^2 (y + \varepsilon_y) \sin\left(\frac{1}{\varepsilon_x}\right) \right| & , \varepsilon_x \neq 0 \\ 0 & , \varepsilon_x = 0 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} |\varepsilon_x| |y + \varepsilon_y| \left| \sin\left(\frac{1}{\varepsilon_x}\right) \right| & , \varepsilon_x \neq 0 \\ 0 & , \varepsilon_x = 0 \end{cases} \xrightarrow{(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

Es gibt noch ein weiteres Konzept von Ableitung.

14.10 Definition V, W normierte Vektorräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$, $v \in V$

f hat Richtungsableitung $(\partial_v f)(x) \in W$ in Richtung v an der Stelle $x \in D$

$\iff (\partial_v f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(x + \varepsilon v) - f(x))$ existiert in $(W, \|\cdot\|)$.

Alternativ $(\partial_v f)(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv) \big|_{t=0}$

Falls f in x Richtungsableitungen in alle Richtungen $v \in V$ besitzt, heißt f in x Gâteaux-differenzierbar.

Bemerkungen

- Partielle Differenzierbarkeit in eindimensionalen Faktoren eines kartesischen Produktes sind Spezialfälle von Richtungsableitungen, z.B. für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\partial_{x_j} f = \partial_{e_j} f,$$

wobei e_1, \dots, e_n Standardbasis ist.

- f differenzierbar $\implies f$ Gâteaux-differenzierbar. Wegen der Kettenregel gilt nämlich:

$$(\partial_v f)(x) = f'(x) \frac{d}{dt} (x + tv) \big|_{t=0} = f'(x)v.$$

Beispiele

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}$ nicht differenzierbar in 0 (siehe oben).

Aber f ist Gâteaux-differenzierbar, weil für $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$(\partial_v f)(0, 0) = \frac{d}{dt} \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} \big|_{t=0} = 0.$$

2. Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases} \quad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\partial_v f(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^3 v_x^2 v_y}{\varepsilon^4 v_x^4 + \varepsilon^2 v_y^2} \varepsilon \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0$$

Somit ist f Gâteaux-differenzierbar in 0. Aber f ist nicht differenzierbar in 0, weil $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ nicht existiert, denn z.B. mit $x = t, y = at^2$ folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 at^2}{t^4 + a^2 t^4} = \frac{a}{1 - a^2}.$$

Zusammenfassung: Folgende echte Inklusionen gelten (erste davon wird in Übung diskutiert):

$$\{\text{partiell diff.bar}\} \supsetneq \{\text{Gâteaux-diff.bar}\} \supsetneq \{(\text{Fréchet})\text{diff.bar}\} \supsetneq \{\text{stetig diff.bar}\} = \{\text{stetig part. diff.bar}\}$$

14.11 Definition V, W normierte Vektorräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$

f zweimal in $x \in D$ differenzierbar

$\iff f$ differenzierbar auf D und

$f' : D \rightarrow \mathcal{B}(V, W)$ differenzierbar in x (wobei $\mathcal{B}(V, W)$ mit der Operatornorm versehen ist) mit Ableitung $f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$

14.12 Satz (Satz von Schwarz) f zweimal in $x \in D$ differenzierbar

$\implies f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ ist symmetrisch, d.h. $\forall u, v \in V$

$$(f''(x)u)v = (f''(x)v)u.$$

Beweis Für $u, v \in V$ ausreichend klein, definiere $g : [0, 1] \rightarrow W$ durch

$$g(t) = f(x + tu + v) - f(x + tu).$$

Nach der Kettenregel ist g differenzierbar und

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x + tu + v)u - f'(x + tu)u \\ &= (f'(x + tu + v) - f'(x))u - (f'(x + tu) - f'(x))u. \end{aligned}$$

Weil f' differenzierbar ist, existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f'(x + tu + v) - f'(x) - f''(x)(tu + v)\| \leq \varepsilon \|tu + v\|$$

und

$$\|f'(x + tu) - f'(x) - f''(x)(tu)\| \leq \varepsilon \|tu\|$$

für $\|tu + v\| < \delta$ und $\|tu\| < \delta$. Somit gilt

$$\begin{aligned} & \|g'(t) - (f''(x)v)u\| \\ & \leq \| (f'(x + tu + v) - f'(x) - f''(x)(tu + v))u \| + \| (f'(x + tu) - f'(x) - f''(x)(tu))u \| \\ & \leq \varepsilon \|tu + v\| \|u\| + \varepsilon \|tu\| \|u\| \leq \varepsilon \|u\| (2\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Schrankensatz auf $t \in [0, 1] \mapsto g(t) - t(f''(x)v)u$ an:

$$\|g(1) - (f''(x)v)u - g(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t) - (f''(x)v)u\| \leq \varepsilon \|u\| (2\|u\| + \|v\|)$$

Da $g(1) - g(0) = f(x + u + v) - f(x + u) - f(x + v) + f(x)$ symmetrisch in u und v ist, gilt nach gleichem Argument auch

$$\|g(1) - g(0) - (f''(x)u)v\| \leq \varepsilon \|v\| (2\|v\| + \|u\|).$$

Somit folgt mit der Dreieckungleichung:

$$\| (f''(x)v)u - (f''(x)u)v \| \leq \varepsilon 2(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|\|v\|)$$

Da ε beliebig klein ist, folgt $(f''(x)v)u = (f''(x)u)v$ zunächst für kleine u, v . Wegen der Linearität folgt es dann aber für alle u, v . \square

Bemerkung Die zweite Ableitung $A = f''(x) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ kann als bilineare Abbildung $\tilde{A} : V \times V \rightarrow W$ aufgefasst werden, indem man definiert:

$$\tilde{A}(v, w) = A(v)w.$$

In der Tat, dann gilt

$$\tilde{A}(v + \lambda v', w) = \tilde{A}(v, w) + \lambda \tilde{A}(v', w) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

und

$$\tilde{A}(v, w + \lambda w') = \tilde{A}(v, w) + \lambda \tilde{A}(v, w').$$

Der Satz von Schwarz besagt dann, dass \tilde{A} symmetrisch ist, d.h.

$$\tilde{A}(v, w) = \tilde{A}(w, v).$$

Die Menge der beschränkten bilinearen Abbildungen wird mit $\mathcal{B}(V, V, W) \cong \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, W))$ bezeichnet und die Norm ist

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} \|\tilde{A}(v, w)\|.$$

Meist werden A und \tilde{A} auch von der Notation her nicht unterschieden, d.h. man schreibt auch $f''(x) = \widetilde{f''(x)} \in \mathcal{B}(V, V, W)$.

Analog wird ein $A \in \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, \mathcal{B}(V, \dots, \mathcal{B}(V, W)) \dots))$ mit k Argumenten V mit einer k -multilinearen Abbildung $\tilde{A} \in \mathcal{B}(U, \dots, V, W)$ identifiziert, welche dann erfüllt, dass

$$\tilde{A}(v_1, \dots, v_\ell + \lambda w_\ell, \dots, v_k) = \tilde{A}(v_1, \dots, v_k) + \lambda \tilde{A}(v_1, \dots, w_\ell, \dots, v_k) \quad , \quad \ell = 1, \dots, k \quad , \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die Norm auf den k -linearen Abbildungen ist wie oben definiert.

14.13 Definition V, W Vektorräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$

Die höheren Ableitungen von f sind iterativ definiert durch:

f ist k -mal auf D differenzierbar mit k -ten Ableitungen gegeben durch k -lineare Abbildungen

$$f^{(k)} : D \rightarrow \mathcal{B}(\underbrace{V, \dots, V}_k, W)$$

$\iff f$ $(k-1)$ -mal differenzierbar und $f^{(k-1)} : D \rightarrow \mathcal{B}(\underbrace{V, \dots, V}_{k-1}, W)$ ist differenzierbar mit

$$\text{Ableitung } (f^{(k-1)})' = f^{(k)}.$$

Falls $f^{(k)} : D \rightarrow \mathcal{B}(V, \dots, V, W)$ stetig ist, heißt f k -mal stetig differenzierbar und die Menge dieser Funktionen wird mit $C^k(D, W)$ bezeichnet.

14.14 Korollar (i) $f \in C^k(D, W) \iff$ alle k -ten partiellen Ableitungen sind stetig.

(ii) Die multilineare Abbildung $f^{(k)}(x)$ ist symmetrisch, d.h. für jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt

$$f^{(k)}(x)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = f^{(k)}(x)(v_1, \dots, v_k) \quad , \quad v_1, \dots, v_k \in V.$$

Begründung (i) und (ii) folgen aus der iterativen Anwendung von Satz 14.9 und Satz 14.12 respektive. □

14.15 Satz (Satz von Taylor) V, W normierte Vektorräume, $D \subset V$ offen, $x \in D$
 f n -mal differenzierbar. Dann gilt für $v \in V$ mit $x + v \in D$

$$f(x + v) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) v^k + o(\|v\|^n) \quad \text{für } \|v\|^n \rightarrow 0.$$

Bemerkung Hierbei ist $f^{(k)}(x)v^k = f^{(k)}(x)(v, \dots, v)$ und $g(v) = o(\|v\|^n)$ heißt, dass $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|^n} \|g(v)\| = 0$.

Beweis Durch Induktion über n . Für $n = 1$ ist die Aussage genau die Definition der Ableitung. Für den Schritt von $n - 1$ nach n betrachten wir

$$g(v) = f(x + v) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) v^k.$$

Um die Ableitung zu berechnen, verwenden wir

Behauptung A k -multilinear von V nach W , A symmetrisch, $h : V \rightarrow W$ definiert durch

$$h(v) = Av^k \implies h'(v) = kAv^{k-1} \in \mathcal{B}(V, W)$$

Begründung Für $\varepsilon \in V$ gilt nach Multilinearität und Symmetrie

$$\frac{1}{\|\varepsilon\|} \|h(v + \varepsilon) - h(v) - h'(v)\varepsilon\| = \frac{1}{\|\varepsilon\|} \|A(v + \varepsilon)^k - Av^k - kA(v^{k-1}, \varepsilon)\|$$

$$\leq \frac{1}{\|\varepsilon\|} \|A\| \sum_{\ell=2}^k \binom{k}{\ell} \|\varepsilon\|^\ell \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

□

Also:

$$g'(v) = f'(x+v) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x) v^{k-1}$$

Jetzt gilt nach dem Schrankensatz

$$\begin{aligned} \|g(v)\| &= \|g(v) - g(0)\| \leq \|v\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'(tv)\| \\ &\leq \|v\| o(\|v\|^{n-1}), \end{aligned}$$

Letzteres nach Induktionsannahme angewandt auf die $(n-1)$ -mal differenzierbare Funktion $t \in [0, 1] \mapsto g'(tv) \in W$. Da $\|v\| o(\|v\|^{n-1}) = o(\|v\|^n)$, folgt der Satz. □

14.16 Definition $f : D \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildung, V normierter Vektorraum, D offen

(i) $x \in D$ kritischer Punkt von $f \iff f'(x) = 0$ (0-Abbildung)

(ii) $w \in \mathbb{R}$ kritischer Wert von $f \iff w = f(x)$ für einen kritischen Punkt x .

14.17 Satz Sei $f : D \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in D$ lokales Extremum von f , d.h. z.B für ein lokales Minimum $\exists \varepsilon > 0$ mit $f(y) \geq f(x) \forall \|y - x\| < \varepsilon$,
 $\implies x$ kritischer Punkt von f .

Beweis Für jedes $v \in V$ hat die eindimensionale Abbildung $t \mapsto f(x + tv)$ bei $t = 0$ ein lokales Extremum, so dass $\partial_v f(x) = 0 \forall v \in V$. Da f differenzierbar ist, gilt nach der Kettenregel $\partial_v f(x) = f'(x)v = 0 \forall v \in V$, d.h. $f'(x)$ ist die 0-Abbildung. □

Sei nun $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in D$ ein kritischer Punkt von f . Nach dem Satz von Taylor gilt dann

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} f''(x) v^2 + o(\|v\|^2).$$

Um zu überprüfen, ob x ein lokales Extremum ist, muss $f''(x)v^2$ berechnet werden. Zunächst ist nach Satz 14.6

$$\begin{aligned}
 f'(x)v &= \langle \text{grad}f(x) \mid v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x)v_j \quad , \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\
 (f''(x)v)w &= (f'(x)v)'w \\
 &= \left\langle \text{grad} \left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x)v_j \right), w \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} f)(x)v_j w_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i} \partial_{x_j} f)(x)v_i w_j \quad (\text{Satz von Schwarz})
 \end{aligned}$$

14.18 Definition $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal partiell differenzierbar in $x \in D$. Dann heißt $\partial^2 f(x) = (\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x))_{i,j=1,\dots,n}$ die Hess'sche Matrix von f in x .

Alternative Schreibweisen sind $\partial^2 f(x) = \text{Hess}(f)(x) = H_f(x) = \nabla^2 f(x)$

Wenn f zweimal differenzierbar ist, ist die Hess'sche Matrix nach dem Satz von Schwarz symmetrisch:

$$(\partial^2 f(x))^t = \partial^2 f(x),$$

hat also gemäß den Ergebnissen der linearen Algebra reelles Spektrum und ist durch eine orthogonale Matrix diagonalisierbar. Zudem gilt nach obiger Rechnung für $f \in C^2(D, \mathbb{R})$:

$$(f''(x)v)w = \langle v \mid \partial^2 f(x)w \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle w \mid \partial^2 f(x)v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Erinnerung an einige Begriffe und Ergebnisse der linearen Algebra: Gegeben sei eine reelle, symmetrische Matrix $A = A^t \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

(i) A positiv, $A > 0 \iff \langle v \mid Av \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$

(ii) A nicht-negativ, $A \geq 0 \iff \langle v \mid Av \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$

Analog werden $A < 0$ und $A \leq 0$ definiert.

Anstelle von "positiv" und "nicht-negativ" wird auch "positiv definit" und "positiv semidefinit" gesagt.

(iii) A indefinit \iff es gibt positive und negative Eigenwerte.

Satz $A > 0 \iff$ alle Eigenwerte von A sind positiv

\iff für $k = 1, \dots, n$ gilt $\det_k((A_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}) > 0$ (Sylvester Kriterium)

Vorteil des Letzteren ist, dass das Spektrum von A nicht berechnet werden muss.

14.19 Satz $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar, D offen

(i) $x \in D$ lokales Maximum (Minimum) $\implies \partial^2 f(x) \leq 0$ ($\partial^2 f(x) \geq 0$)

(ii) $x \in D$ kritischer Punkt von f und $\partial^2 f(x) < 0$ (bzw. $\partial^2 f(x) > 0$)

$\implies x$ strenges lokales Maximum (bzw. Minimum) von f , d.h.

$\exists \delta > 0$ mit $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) $\forall \|y - x\| < \delta, y \neq x$.

(iii) $x \in D$ kritischer Punkt von f und $\partial^2 f(x)$ indefinit $\implies x$ Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

Beweis Alle Aussagen folgen direkt aus dem Satz von Taylor zu zweiter Ordnung:

$$f(y) - f(x) = \langle (x - y) \mid \partial^2 f(x)(x - y) \rangle_{\mathbb{R}^n} + o(\|x - y\|^2)$$

Insbesondere beachte für (iii), dass es Eigenvektoren $v = x - y$ von $\partial^2 f(x)$ zu positiven und negativen Eigenwerten gibt. \square

Bemerkung Wenn $\partial^2 f(x)$ semi-definit ist, ist keine Aussage möglich. Höhere Ordnungen sind notwendig.

Beispiele

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 \\ 2y + x + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(f)(x, y) = 0 &\iff \begin{matrix} 2x + y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 2x + y = -1 \\ 0 + \frac{3}{2}y = -\frac{1}{2} \end{matrix} \\ &\iff y = -\frac{1}{3} \quad x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

einzigster kritischer Punkt $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

Hess'sche $\partial^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$ nach Sylvester

$\implies (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ lokales Minimum

Da $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x + y)^2) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, wächst für $|x|, |y| \rightarrow \omega$, liegt ein globales Minimum vor.

2. $f : \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\sin(y) \end{pmatrix} = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}, y \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\partial^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$$

Also: lokale Minima bei $x \in 2\pi\mathbb{Z}, y \in 2\pi\mathbb{Z}$

lokale Maxima bei $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}, y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$

Sattelpunkte bei $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}, y \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $x \in 2\pi\mathbb{Z}, y \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$

Bemerkung Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt das Vektorfeld $\text{grad}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ an, in welche Richtung die Werte von f am stärksten anwachsen. In Umgebung eines Maximums, Minimums und Sattelpunktes sieht $\text{grad}(f)$ ungefähr so aus:

lokales Maximum

lokales Minimum

Sattelpunkt

Mit Hilfe des Gradienten kann ein weiteres Vektorfeld definiert werden:

$$X(x) = \frac{\text{grad}(f)(x)}{\|\text{grad}(f)(x)\|^2} \quad x \in D$$

Wie für jedes Vektorfeld gehört zu X der Fluss $\Theta_t : D \rightarrow D$, $t \in (-T, T) \subset \mathbb{R}$, definiert als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\partial_t \Theta_t(x) = X(\Theta_t(x)) \quad , \text{quad } x \in D.$$

Wenn $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, so garantiert der Satz von Picard–Lindelöf (später) Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösungen. Es gilt

$$\partial_t f(\Theta_t(x)) = \langle \text{grad}(f)(\Theta_t(x)) \mid \partial_t \Theta_t(x) \rangle = \left\langle \text{grad}(f) \mid \frac{\text{grad}(f)}{\|\text{grad}(f)\|^2} \right\rangle (\Theta_t(x)) = 1.$$

Somit werden die Niveau–Flächen (Linien)

$$\Sigma_E = \{x \in D \mid f(x) = E\}$$

auf Niveau–Flächen abgebildet:

$$\Theta_t(\Sigma_E) = \Sigma_{E+t},$$

vorausgesetzt, es gibt keinen kritischen Wert in $[E, E + t]$. Was genau an den kritischen Werten passiert, wird in der Morse–Theorie untersucht.

15 Nichtlineare Analysis

Erstes Hauptziel ist

15.1 Satz (Satz über die lokale inverse Funktion bzw. Satz der lokalen Umkehrbarkeit)
 V, W Banachräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$ stetig differenzierbar
 Bei $x_0 \in D$ sei $f'(x_0) \in \mathcal{B}(V, W)$ invertierbar mit beschränktem Inversen in $\mathcal{B}(W, V)$
 $\implies \exists$ offene Kugel $B_\delta(x_0) = \{y \in D \mid \|y - x_0\| < \delta\}$, so dass

$$f : B_\delta(x_0) \rightarrow f(B_\delta(x_0))$$

invertierbar ist mit inverser Abbildung $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \rightarrow B_\delta(x_0)$, deren Ableitung stetig ist und gegeben durch

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Falls f k -mal stetig differenzierbar ist, so ist auch f^{-1} k -mal stetig differenzierbar.

Bemerkungen

1. Wenn $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, kann $f'(x_0)$ nur invertierbar sein, wenn $n = m$. Wenn $\dim(V) = \infty$ (bzw. $\dim(W) = \infty$), muss auch $\dim(W) = \infty$ (bzw. $\dim(V) = \infty$) sein.
2. Im Fall $V = W = \mathbb{R}$ ist sogar eine globale Aussage möglich (Korollar 9.9): $f'(x) > 0 \forall x \in I \subset \mathbb{R} \implies f$ invertierbar auf I . Dies ist im Höherdimensionalen nicht möglich.
3. Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann nicht abgeschwächt werden zur Differenzierbarkeit: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar und

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 > 0.$$

Aber $f'(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, so dass f' nicht stetig. In der Tat nimmt f' positive und negative Werte in jeder Umgebung von 0 an, weil $f''(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ für $x = \frac{1}{2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, und $f'(x) = 0$ für diese x . Also ist f nicht lokal monoton und somit nicht lokal umkehrbar bei 0.

Der Beweis von Satz 15.1 verwendet mehrere in sich interessante Hilfsmittel.

15.2 Satz (Fixpunktsatz von Banach) (X, d) vollständiger metrischer Raum
 $f : X \rightarrow X$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h.

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

$\implies f$ hat genau einen Fixpunkt $x \in X$, d.h. $f(x) = x$.

Beweis Sei $x_0 \in X$ beliebig. Definiere $x_n = f(x_{n-1})$ (dies heißt der Orbit von x_0). Dann

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq L d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Zudem nach der Dreiecksungleichung für $n \leq m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n \left(\sum_{k=0}^{m-n} L^k \right) d(x_0, x_1) \leq L^n \frac{1}{1-L} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Somit ist $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in X . Also existiert nach der Vollständigkeit von X ein Limespunkt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Weil f stetig ist, ist x Fixpunkt:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

Sei x' ein zweiter Fixpunkt. Dann

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x'),$$

was wegen $L < 1$ impliziert, dass $d(x, x') = 0$, d.h. $x = x'$ ist. □

15.3 Lemma Seien V, W Banachräume und $A \in \mathcal{B}(V, W)$ invertierbar, d.h. $\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$ mit $AA^{-1} = \mathbb{1}_W$ und $A^{-1}A = \mathbb{1}_V$. Dann sind alle Elemente der offenen Kugel um A mit Radius $r = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

$$B_r(A) = \{B \in \mathcal{B}(V, W) \mid \|A - B\| < r\}$$

invertierbar. Zudem gilt für $B \in B_r(A)$

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|} \\ \|A^{-1} - B^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|} \end{aligned}$$

Außerdem ist $\varphi : B_r(A) \subset \mathcal{B}(V, W) \rightarrow \mathcal{B}(W, V)$ definiert durch $\varphi(B) = B^{-1}$ differenzierbar mit $\varphi'(B)C = -B^{-1}CB^{-1}$ für $C \in \mathcal{B}(V, W)$.

Bemerkung Die erste Aussage kann im Fall $V = W = \mathbb{C}^n$ auch mit Cramer's Regel bewiesen werden.

Beweis Da $B = A - (A - B) = A(\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))$ und

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < 1 \quad \text{für } B \in B_{\frac{1}{\|A^{-1}\|}}(A)$$

folgt, dass $(\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}(A - B))^n \in \mathcal{B}(V)$ als konvergente Neumann-Reihe (Satz 13.11) existiert und die Norm erfüllt:

$$\|\mathbb{1} - A^{-1}(A - B)\|^{-1} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$$

Somit ist auch $B^{-1} = (\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}$ invertierbar und die Abschätzung an $\|B^{-1}\|$ gilt. Weiter ist

$$\begin{aligned} B^{-1} - A^{-1} &= ((\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1} - \mathbb{1}) A^{-1} \\ &= (\mathbb{1} - (\mathbb{1} - A^{-1}(A - B)))(\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1}(A - B)(\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}, \end{aligned}$$

so dass $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|} \|A^{-1}\|$.

Zuletzt gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(B + C) - \varphi(B) - \varphi'(B)C\| &= \|(B + C)^{-1} - B^{-1} + B^{-1}CB^{-1}\| \\ &\leq \|(B + C)^{-1}\| \|B - (B + C) + (B + C)B^{-1}C\| \|B^{-1}\| \leq \|(B + C)^{-1}\| \|B^{-1}\|^2 \|C\|^2 = o(\|C\|) \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 15.1 Es reicht zu zeigen, dass die Funktion

$$g : B_\delta(0) \subset V \rightarrow V \quad g(x) = f'(x_0)^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))$$

für δ ausreichend klein invertierbar ist (dann ist auch f invertierbar). Die Funktion g erfüllt

$$g(0) = 0 \quad g'(0) = \mathbb{1}_V.$$

Also reicht es, den Fall $W = V$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \mathbb{1}_V$ zu betrachten. Weil f stetig differenzierbar ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|f'(x) - \mathbb{1}_V\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \overline{B_\varepsilon(0)} = \{y \in V \mid \|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Betrachte für $y \in V$ die Funktion (mit der Idee, dass der eindeutige Fixpunkt die Gleichung $f(x) = y$ löst):

$$F_y(x) = x + y - f(x) \quad , \quad x \in \overline{B_\varepsilon(0)}$$

Dann gilt nach dem Schrankensatz für $x, x' \in \overline{B_\varepsilon(0)}$

$$\|F_y(x) - F_y(x')\| = \|x - f(x) - (x' - f(x'))\| \leq \|x - x'\| \sup_{t \in [0,1]} \|\mathbb{1} - f'(tx)\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|,$$

so dass F_y Lipschitz-stetig mit Konstante $L \leq \frac{1}{2} < 1$ ist. Außerdem gilt, wenn $x' = 0$ gesetzt wird,

$$\|F_y(x) - y\| = \|F_y(x) - F_y(0)\| \leq \frac{1}{2} \|x\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon,$$

d.h. $F_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \rightarrow \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)}$. Falls jetzt $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$, dann $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)} \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ und somit ist F_y eine Lipschitz-stetige Abbildung auf $\overline{B_\varepsilon(0)}$. Da $\overline{B_\varepsilon(0)}$ als abgeschlossene Menge des vollständigen Raumes V vollständig ist, kann der Banach'sche Fixpunktsatz angewandt werden. Also gibt es $\forall y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ genau einen Fixpunkt $x \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ von F_y , für welchen also gilt

$$x = F_y(x) = x + y - f(x) \iff y = f(x).$$

Für $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ hat die Gleichung $y = f(x)$ also genau eine Lösung und

$$f : \{x \in B_\varepsilon(0) \mid f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\} = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)) \rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

ist also invertierbar. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$ offen und enthält somit eine offene Kugel $B_\delta(0)$, wie im Satz 15.1 behauptet.

Es verbleibt zu zeigen, dass f^{-1} auf $f(B_\delta(0)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ stetig differenzierbar ist. Zunächst gilt $\|f'(x) - \mathbb{1}\| < \frac{1}{2}$ für $x \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$. Also ist $f'(x)$ invertierbar (da $f'(x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (\mathbb{1} - f'(x))^n$) und nach der vorausgesetzten Stetigkeit von $x \mapsto f'(x)$ und Lemma 15.3 ist $x \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)} \mapsto f'(x)^{-1} \in B(V)$ stetig.

Außerdem ist f^{-1} Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten 2 auf $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, da für $x, x' \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ gilt

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &= \|f(x) - f(x') - F_0(x) + F_0(x')\| \\ &\leq \|f(x) - f(x')\| + \frac{1}{2}\|x - x'\| \quad (\text{Lipschitz-Konstante von } F_0 \text{ ist } \frac{1}{2}) \\ \iff \|x - x'\| &\leq 2\|f(x) - f(x')\| \\ \iff \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| &\leq 2\|y - y'\|. \end{aligned}$$

Somit ist auch die Abbildung $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \mapsto (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$ stetig. Nun zeigen wir, dass dies die Ableitung ist:

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y)(y' - y)\| &= \|x' - x - (f'(x))^{-1}(f(x') - f(x))\| \\ &\leq \|f'(x)^{-1}\| \|f'(x)(x - x') - f(x') - f(x)\| \\ &\leq \|f'(x)^{-1}\| \eta \|x' - x\| \quad (\forall \eta > 0 \text{ nach Def. von } f'(x)) \\ &\leq \|f'(x)^{-1}\| \eta 2 \|y' - y\| \quad (\text{nach Lipschitz-Stetigkeit}). \end{aligned}$$

Zuletzt verbleibt die Aussage über die k -fache Differenzierbarkeit zu zeigen. Hierzu wird

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1} \quad x = f^{-1}(y)$$

iterativ unter Verwendung von Lemma 15.3 abgeleitet, z.B.

$$(f^{-1})''(y) = -(f'(x))^{-1} f''(x) (f^{-1})'(y) (f'(x))^{-1}$$

etc. □

Satz 15.1 ist eine lokale Aussage. Folgende Definition ist global.

15.4 Definition V, W Banachräume, $D \subset V$ offen, $f : D \rightarrow W$

f C^k -Diffeomorphismus $\iff f : D \rightarrow f(D)$ bijektiv und f sowie $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ sind k -mal stetig differenzierbar

15.5 Satz (Satz über die implizite Funktion)

Seien V, W Banachräume, $D \subset V \times W$ offen

$F : D \rightarrow W$ k -mal stetig differenzierbar für $k \geq 1$.

Sei $(x_0, y_0) \in D$, so dass $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{B}(W)$ invertierbar mit stetigem Inversen ist.

$\implies \exists \varepsilon > 0$ und ein eindeutiges $G : B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(F(x_0, y_0)) \subset V \times W \rightarrow W$, so dass

$$F(x, G(x, y)) = y.$$

Insbesondere gilt für $g(x) = G(x, F(x_0, y_0))$, $g : B_\varepsilon(x_0) \rightarrow W$,

$$F(x, g(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Dann heißt g die implizite Funktion zu F durch $(x_0, y_0) = (x_0, g(x_0))$.
(Oft wird F so normiert, dass $F(x_0, y_0) = 0$.)

Zudem sind G und g k -mal stetig differenzierbar und

$$g'(x) = -(\partial_y F(x, g(x)))^{-1} \partial_x F(x, g(x)).$$

Beweis Betrachte $f : D \subset V \times W \rightarrow V \times W$ definiert durch

$$f(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Dann

$$\partial f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_V & \partial_x F(x, y) \\ 0 & \partial_y F(x, y) \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\partial_y F(x_0, y_0)$ invertierbar. Also (wie für 2×2 -Matrizen)

$$(\partial f(x_0, y_0))^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_V & -\partial_x F(x_0, y_0)(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \\ 0 & (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Somit existiert nach Satz 15.1 ein $\delta > 0$, so dass f ein lokales Inverses

$$f^{-1} : f(B_\delta(x_0, y_0)) \rightarrow B_\delta(x_0, y_0) \subset V \times W$$

hat, welches k -mal stetig differenzierbar ist. Dies muss von folgender Gestalt sein:

$$f^{-1}(x, y) = (x, G(x, y)) \quad , \quad (x, y) \in f(B_\delta(x_0, y_0))$$

Somit

$$(x, y) = f(f^{-1}(x, y)) = (x, F(x, G(x, y))),$$

d.h.

$$y = F(x, G(x, y)) \quad \forall (x, y) \in f(B_\delta(x_0, y_0)).$$

Nun ist $f(B_\delta(x_0, y_0)) = (f^{-1})^{-1}(B_\delta(x_0, y_0))$ offen (Urbilder stetiger Funktion offener Menge sind offen) und $(x_0, F(x_0, y_0)) \in f(B_\delta(x_0, y_0))$. Somit existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(F(x_0, y_0)) \subset f(B_\delta(x_0, y_0))$ und die erste Aussage folgt. Die letzte folgt aus

$$0 = \partial F(x, g(x)) = \partial_x F(x, g(x)) + \partial_y F(x, g(x))g'(x).$$

□

Beispiele

$$1. F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y) = y^2 - 2y - x^2 = 0$$

$$\iff (y - 1)^2 = 1 + x^2 \quad \iff y = g(x) = 1 \pm \sqrt{1 + x^2}$$

zwei getrennte Lösungen

y

2

x

$$\partial_y F(x, y) = 2(y - 1) \neq 0 \quad \forall y \neq 1$$

2. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y) = y^2 - 2xy - x^4 = 0$
 $\iff (y - x)^2 = x^4 + x^2 \iff y = x \pm x\sqrt{1 + x^2}$
wieder zwei Lösungen, aber nicht mehr getrennt.

y

x

Bei $(0, 0)$ gilt $\partial_y F(0, 0) = 0$.

In der Tat besagt Satz 4 also hier nicht, dass es eine lokal eindeutige Lösung gibt.

3. $F(x, y) = y^2 + x^2 = 0 \iff x = y = 0$

Also keine Lösungsfunktion, sondern nur ein Punkt.

In der Tat ist wieder $\partial_y F(0, 0) = 0$.

15.6 Definition (Untermannigfaltigkeiten des Euklidischen Raumes)

$k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^{n+m}$

\mathcal{M} ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension m und Klasse C^k

$\iff \forall$ Punkte $p \in \mathcal{M}$ gibt es eine offene Umgebung $U = B_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und eine k -mal stetig differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass F' auf U Maximalrang n hat und

$$\mathcal{M} \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Bemerkungen

1. Lokal ist eine Untermannigfaltigkeit also simultane Niveaufläche der Komponentenfunktion F_j von F , d.h.

$$\mathcal{M} \cap U = \bigcap_{j=1}^n \{x \in U \mid F_j(x) = 0\}.$$

Hierbei ist jede Niveau-Fläche $\{x \in U \mid F_j(x) = 0\}$ von Kodimension 1 im \mathbb{R}^{n+m} und Rangbedingung besagt, dass sich diese Hyperflächen alle transvers schneiden. Deswegen ist \mathcal{M} von Kodimension n im \mathbb{R}^{n+m} , also an Dimension m .

2. Wenn $F'(p)$ Maximalrang hat, heißt p ein regulärer Punkt von F , andernfalls ein singulärer oder kritischer Punkt. Dies verallgemeinert die Definition 14.16 zu vektorwertigen Funktionen. In Definition 15.6 tauchen nur reguläre Punkte auf.

15.7 Satz Eine m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit \mathcal{M} besitzt einen Atlas

$$\mathcal{A} = \{\varphi \mid \varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ Homöomorphismus, } U_\varphi \subset \mathcal{M}\}$$

bestehend aus Karten φ , die Folgendes erfüllen:

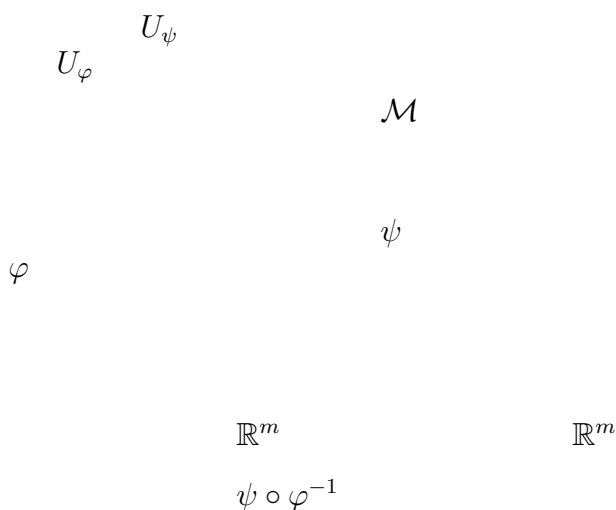
(i) $U_\varphi \subset \mathcal{M}$ offen in \mathcal{M} (\mathcal{M} versehen mit Unterraumtopologie)

(ii) $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi = \mathcal{M}$

(iii) Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ sind die Kartenwechsel

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^m$$

C^k -Diffeomorphismen.



Bemerkung (i), (ii), (iii) bilden genau die Definition einer (abstrakten) C^k -Mannigfaltigkeit. Jede C^k -Untermannigfaltigkeit ist also eine C^k -Mannigfaltigkeit. Umgekehrt besagt der Satz von Whitney, dass jede m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit auch eine C^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2m+1} ist.

Beweis Sei $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offene Umgebung von $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ im $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ von Maximalrang, so dass

$$\mathcal{M} \cap U = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid F(x, y) = 0\}.$$

Nach eventueller Permutation der Argumente können wir annehmen, dass $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$F(x, g(x)) = 0 \quad , \quad \forall x \in V.$$

Nun setze

$$\varphi^{-1} : V \rightarrow \mathcal{M} \quad , \quad \varphi^{-1}(x) = (x, g(x))$$

und

$$\varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad , \quad \varphi(x, g(x)) = x.$$

Um die Kartenwechseleigenschaft nachzuweisen, werden wir φ zu einem Diffeomorphismus $\tilde{\varphi}$ erweitern durch

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x, t) = (x, g(x) + t) \quad , \quad x \in V, t \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Tatsächlich ist

$$(\tilde{\varphi}^{-1})'(x, t) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & g'(x) \\ 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

invertierbar, also $\tilde{\varphi}^{-1}$ lokal bei $(x_0, 0)$ invertierbar (Satz 15.1). Gegeben eine zweite Karte ψ , ist also $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ein lokaler C^k -Diffeomorphismus (auf adäquatem Definitionsbereich). Zudem ist $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, 0)$, so dass die Kartenwechsel lokale C^k -Diffeomorphismen sind. Der Atlas ist durch die Karte zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ gegeben. \square

Nächste Problemstellung: Gegeben eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, bestimme ihre Extrema unter vorgegebenen Nebenbedingungen. Letztere können z.B. durch eine Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben sein, d.h. gesucht sind die Extrema der Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, der Einschränkung von f auf \mathcal{M} . Alternativ können die n Nebenbedingungen auch durch eine globale Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben sein. Die Menge $\{x \in D \mid F(x) = 0\}$ muss nun keine Untermannigfaltigkeit sein, sondern kann neben regulären Teilstücken auch Singularitäten haben. Dann sucht man die lokalen Extrema auf jedem regulären Teil separat und analysiert zudem die Funktionswerte von f bei der Singularität (siehe Beispiel 2. unten).

Relevant für viele Anwendungen: Physik, Optimierung, Wirtschaftswissenschaften

Beispiele

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = ax + by^2 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

Nebenbedingung: $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Diese Nebenbedingung besagt, dass das Extremum auf dem Kreis mit Radius r bestimmt

werden soll. Dieser kann parametrisiert werden durch

$$h : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad h(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dann müssen lediglich die Extrema von

$$\tilde{f}(t) = f \circ h(t) = ar \cos(t) + br^2(1 - \cos^2(t))$$

gesucht werden. Da

$$\tilde{f}'(t) = -ar \sin(t) + 2br^2 \sin(t) \cos(t),$$

liegen sie bei

$$\sin(t) = 0 \iff t = 0, \pi \quad \text{und} \quad \cos(t) = \frac{a}{2rb}.$$

Also sind die Extremwerte zwei der folgenden Zahlen:

$$+ar \quad , \quad -ar \quad , \quad \frac{a^2}{2b} + br^2 \left(1 - \frac{a^2}{4r^2b^2}\right)$$

2. (mit singulärer Nebenbedingung)

$$f(x, y) = x^2 - \frac{4}{5}xy$$

$$\text{Nebenbedingung: } F(x, y) = y^2 - x^3 = 0$$

y

x

Spitzensingularität

Diese besagt: $y^2 = x^3$, $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$

Parametrisierung also möglich (mit zwei Zweigen):

$$\tilde{f}_{\pm}(x) = f(x, \pm x^{\frac{3}{2}}) = x^2 \mp \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

$$\tilde{f}'_{\pm}(x) = 2x \mp 2x^{\frac{3}{2}} = 2x(1 \mp x^{\frac{1}{2}})$$

Also liegen folgende kritische Werte vor:

- (a) $x = 0, y = 0 \quad f(0,0) = 0$ (Wert in der Spitze)
 (b) für + Zeichen: $x = 1, y = 1 \quad f(1,1) = \frac{1}{5}$
 $\tilde{f}_+''(x) = 2 - 3x^{\frac{1}{2}} \quad \tilde{f}_+''(1) = -1 < 0$ lokales Maximum

Asymptotiken: $\tilde{f}(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow \mp\infty$

$$\tilde{f}_- \quad \tilde{f}_+$$

$$\frac{1}{5}$$

x

x

Diese Lösungen basieren auf der Methode der Parametrisierung. Das funktioniert nur, wenn die Nebenbedingungen geometrisch oder analytisch "einfach" sind. Für kompliziertere Fälle gibt es folgende Methode:

15.8 Satz (Lagrange Multiplikatoren) $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (Kosten- oder Energiefunktion), \mathcal{M} m -dimensionale Untermannigfaltigkeit $p \in \mathcal{M} \cap D$ lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung \mathcal{M}
 $\implies \exists$ Lagrange Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\text{grad}(f)(p) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{grad}(F_j)(p), \quad (15.1)$$

wobei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Nebenbedingung lokal parametrisiert, d.h. $\mathcal{M} \cap D = \{x \in D \mid F(x) = 0\}$ (vergleiche Definition 15.6).

Bemerkungen

1. Dies sind $n + m$ Gleichungen (da $\text{grad}(f)(p) \in \mathbb{R}^{n+m}$). Zusammen mit den n Gleichungen $F(p) = 0$ gibt es $2n + m$ Gleichungen für die $2n + m$ Unbekannten $p_1, \dots, p_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Typischerweise ist also die Lösungsmenge diskret. Schwieriger ist die Situation, bei der die lokalen Extrema entartet sind (siehe Beispiel unten).
2. Geometrisch besagt (15.8), dass der Gradient von f in p orthogonal auf \mathcal{M} steht. In der Tat spannen die Vektoren $\text{grad}(F_j)(p)$, $j = 1, \dots, n$, das orthogonale Komplement des Tangentialraumes an \mathcal{M} bei p auf.

$$\text{grad}(f)(p)$$

\mathcal{M}

p

Beweis Sei $p = (x_0, y_0)$ und, ohne Einschränkung,

$$\det_n(\partial_y F(x_0, y_0)) \neq 0.$$

Nach Satz 15.5 existiert dann ein differenzierbares $g : B_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(x, g(x)) = 0$, d.h. $(x, g(x)) \in \mathcal{M}$. Nun betrachte f eingeschränkt auf \mathcal{M} :

$$\tilde{f} : B_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{f}(x) = f(x, g(x))$$

Bei einem lokalen Extremum auf \mathcal{M} bei $p = (x_0, y_0)$ gilt $\tilde{f}'(x_0) = 0$. Also nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}'(x_0) = (\partial_x f(p), \partial_y f(p)) \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ g'(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \partial_x f(p) + \partial_y f(p) g'(x_0) \\ &= \partial_x f(p) - \partial_y f(p) (\partial_y F(p))^{-1} \partial_x F(p) \quad (\text{nach Satz 15.5}) \end{aligned}$$

Nun ist $(\partial_y F(p))^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\partial_y f(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, also $\lambda = \partial_y f(p) (\partial_y F(p))^{-1}$ eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} , die durch einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Es gilt:

$$\partial_x f(p) = \lambda \partial_x F(p) \quad , \quad \partial_y f(p) = \lambda \partial_y F(p)$$

Zusammen ist dies gerade (15.8). □

Beispiel $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \prod_{j=1}^{m+1} x_j^2$

Nebenbedingung: $\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{j=1}^{m+1} x_j^2 = 1 \right\}$ m -Sphäre

f hat als stetige Funktion auf einem Kompaktum globale Extrema. \mathcal{M} ist die Niveaulfläche zu

$$F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x) = \sum_{j=1}^{m+1} x_j^2 - 1 = 0.$$

Es gibt einen Lagrange Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Gleichungen sind

$$\text{grad}(f)(x) = \lambda \text{grad}(F)(x) \quad \text{und} \quad F(x) = 0,$$

d.h.

$$2x_i \prod_{j \neq i} x_j^2 = \lambda 2x_i \quad , \quad i = 1, \dots, m+1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m+1} x_j^2 = 1$$

oder

$$\prod_{j \neq i} x_j^2 = \lambda \quad , \quad i = 1, \dots, m+1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{m+1} x_j^2 = 1.$$

Lösungen: Falls ein $x_i = 0$, z.B. $x_{m+1} = 0$, dann ist $\lambda = 0$ und es gibt nur eine Gleichung für m Unbekannte x_1, \dots, x_m , nämlich

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 = 1.$$

Bei allen Lösungen dieser Gleichungen gilt $f(x) = 0$. Somit ist das Minimum 0 stark entartet (der Wert 0 wird auf $(m-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten angenommen, gegeben durch die $(m-1)$ -Sphären, die man durch Schnitt mit den Ebenen $x_i = 0$ erhält).

Falls alle $x_j \neq 0$, so folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$1 = \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\prod_{j \neq 1} x_j^2}{\prod_{j \neq 2} x_j^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2} \implies x_1^2 = x_2^2.$$

Analog folgt aus den anderen Gleichungen

$$x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_{m+1}^2 = \frac{1}{m+1},$$

Letzteres wegen $\sum_{j=1}^{m+1} x_j^2 = (m+1)x_1^2 = 1$. Also ist der Maximalwert von f gegeben durch $\left(\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$. Er wird an 2^{m+1} Punkten angenommen, deren Komponenten die folgenden sind:

$$x_j = \sigma_j \frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad \sigma_j \in \{-1, 1\}, \quad j = 1, \dots, m+1$$

x_3

x_2 Maxima

entartete Minima

x_1

Bemerkung Nach Reskalierung erhalten wir einen alternativen Beweis von (mit $n = m+1$)

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j^2} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad (\text{geometrisches} \leq \text{arithmetisches Mittel})$$

16 Lebesgue–Maß

Ziel: Konstruktion des Lebesgue–Maßes (parallel dazu Einführung elementarer Begriffe der allgemeinen Maßtheorie)

Dann: Kapitel 17 Lebesgue–Integral (Konvergenzsätze, Satz von Fubini, Transformationsformel)

Kapitel 18 Integrationstechniken: Satz von Fubini und Jacobi'sche Transformationsformel

16.1 Definition Seien $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$ Punkte im \mathbb{R}^d . Definiere

$$(i) \quad a \leq b \iff a_j \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, d$$

Analog: $a < b$

(ii) Offene, halboffene und abgeschlossene Quader sind

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x < b\} = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j)$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x \leq b\}$$

(iii) Das Maß bzw. d -dimensionale Volumen eines halboffenen Quaders ist

$$\mu((a, b]) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) \in [0, \infty).$$

Bemerkung Ausgehend von diesem geometrischen Volumenbegriff soll nun das Maß anderer Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^d$ definiert werden (insbesondere auch solchen, die nicht Vereinigung von disjunkten Quadern sind). Beim Riemann'schen Volumenbegriff betrachtet man Ober- und Untersummen:

$$O(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ disjunkte Quader, } A \subset \bigcup_{n=1, \dots, N} \overset{\circ}{Q}_n \right\}$$

$$U(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ disjunkte Quader, } A \supset \bigcup_{n=1, \dots, N} \overset{\circ}{Q}_n \right\}$$

Dann heißt A Riemann-messbar $\iff O(A) = U(A)$.

Es stellt sich heraus, dass nur relativ wenige Mengen Riemann-messbar sind. Beim Lebesgue'schen Maßbegriff hingegen definiert man

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader} \right\}$$

und nennt dann A Lebesgue-messbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ offenes U mit $A \subset U$ und $\mu^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Es zeigt sich, dass dies weit angenehmere Eigenschaften hat. Eine detaillierte Definition der Lebesgue-Messbarkeit folgt.

16.2 Satz Sei $\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{n=1}^N Q_n \mid Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader im } \mathbb{R}^d, N < \infty \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Es gilt

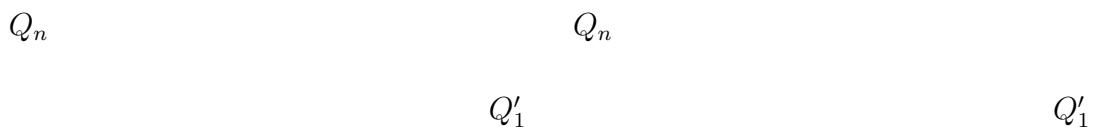
- (i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$
- (iv)

Beweis

- (i) Offensichtlich, da $(a, a] = \emptyset$.
- (ii) Sei $A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ Q_n$ und $B = \bigcup_{m=1, \dots, M}^\circ Q'_m$. Dann

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \bigcup_n^\circ Q_n \setminus \left(\bigcup_m^\circ Q'_m \right) \\ &= \bigcup_n^\circ (\dots ((Q_n \setminus Q'_1) \setminus Q'_2) \dots \setminus Q'_M) \end{aligned}$$

Aber $Q_n \setminus Q'_1 = \bigcup_\ell^\circ Q''_\ell$ ist eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Quadern wie folgendes zweidimensionales Bild plausibel macht:



Dann $(Q_n \setminus Q'_1) \setminus Q'_2 = (\bigcup_\ell Q''_\ell) \setminus Q'_2 = \bigcup_\ell (Q''_\ell \setminus Q'_2) = \bigcup_k Q_k^{(3)}$ für geeignete Quader $Q_k^{(3)}$. Nach Iteration folgt also $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

- (iii) folgt aus (ii), weil $A \cup B = (A \setminus B) \cup^\circ B$ eine disjunkte Vereinigung ist. □

Bemerkung X Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften (i)–(iii) aus Satz 16.2 heißt ein Ring auf X . Beachte, dass auch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

Nun wird μ zunächst auf \mathcal{R} erweitert.

16.3 Definition und Satz Sei $A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q_n \in \mathcal{R}$. Dann definiere das Maß von A als

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \in [0, \infty).$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von A in Quader.

Beweis Sei $A = \bigcup_{m=1, \dots, M}^{\circ} Q'_m$ eine weitere Zerlegung von $A \in \mathcal{R}$. Betrachte die halboffenen Quader(!)

$$Q''_{n,m} = Q_n \cap Q'_m \quad 1 \leq n \leq N \quad , \quad 1 \leq m \leq M.$$

Dann

$$Q_n = \bigcup_{m=1, \dots, M}^{\circ} Q''_{n,m} \quad Q'_m = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q''_{n,m}.$$

Somit gilt offensichtlich

$$\mu(Q_n) = \sum_{m=1}^M \mu(Q''_{n,m}) \quad , \quad \mu(Q'_m) = \sum_{n=1}^N \mu(Q''_{n,m}).$$

Also

$$\sum_{n=1}^N \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu(Q''_{n,m}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \mu(Q''_{n,m}) = \sum_{m=1}^M \mu(Q'_m).$$

□

16.4 Satz Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt Folgendes:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (endliche Additivität) $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{R}$ disjunkt, dann

$$\mu \left(\bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} A_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

(iii) (Monotonie) $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \implies \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(v) Für beliebige $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu \left(\bigcup_{n=1, \dots, N} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

(vi) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkte Folge in \mathcal{R} , $B \in \mathcal{R}$, sodass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(B)$$

Beweis

(i) klar

(ii) Sei $A_n = \bigcup_{m=1, \dots, M_n}^{\circ} Q_{n,m}$ die disjunkte Zerlegung von $A_n \in \mathcal{R}$ in halboffene Quader. Dann hat $A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} A_n$ die disjunkte Zerlegung

$$A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} \bigcup_{m=1, \dots, M_n}^{\circ} Q_{n,m}$$

und nach Satz 16.3 gilt

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} A_n\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \mu(Q_{n,m}) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

(iii) $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) \stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

(iv)

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &\stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(v) Wegen (iv) gilt: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Somit folgt iterativ:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) &\leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) + \mu(A_N) \\ &\leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N) \end{aligned}$$

(vi) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt: $\bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} A_n \subset B$ und somit

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) \stackrel{(ii)}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} A_n\right) \stackrel{(iii)}{\leq} \mu(B).$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung Wenn \mathcal{R} ein Ring auf einer Menge X ist und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt, so heißt μ ein Inhalt.

16.5 Satz (Lebesgue 1905) Seien Q und $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halboffene Quader mit $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Dann

$$\mu(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n).$$

Beweis Die Idee ist, Q ein wenig zu verkleinern und Q_n ein wenig zu vergrößern, so dass ein Kompaktheitsargument erlaubt, sich auf endlich viele Q_n und somit Satz 16.4 (v) zurückzuziehen.

Zunächst gelte ohne Einschränkung

$$\mu(Q) > 0 \quad , \quad \mu(Q_n) > 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) < \infty,$$

denn sonst ist die Aussage trivial.

Sei $Q = (a, b]$ und $Q_n = (a_n, b_n]$, und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle a', b' mit $a < a' < b' < b$, sodass $Q' = (a', b']$ erfüllt

$$\mu(Q) - \varepsilon < \mu(Q') < \mu(Q)$$

und ähnlich a'_n, b'_n mit $a'_n < a_n \leq b_n < b'_n$, so dass für $Q'_n = (a'_n, b'_n]$ gilt

$$\mu(Q_n) \leq \mu(Q'_n) \leq \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Wenn jetzt $\overline{Q} = [a, b]$ den Abschluss und $Q^\circ = (Q)^\circ = (a, b)$ das (offene) Innere bezeichnet, dann gilt

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q'_n)^\circ.$$

Also ist $(Q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung der kompakten Menge $\overline{Q'}$ und somit existiert (nach dem Satz von Heine–Borel) ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset \bigcup_{n=1}^N (Q'_n)^\circ \subset \bigcup_{n=1}^N Q'_n.$$

Deswegen

$$\begin{aligned} \mu(Q) - \varepsilon &< \mu(Q') \stackrel{\text{Satz 16.4 (v)}}{\leq} \sum_{n=1}^N \mu(Q'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q'_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

16.6 Definition Das äußere Lebesgue'sche Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ist definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ halboffene Quader mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}.$$

16.7 Satz μ^* hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) (Monotonie) $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iii) (σ -Subadditivität) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebige Folge von Teilmengen des \mathbb{R}^d . Dann

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(iv) Für jeden halboffenen Quader Q gilt $\mu^*(Q) = \mu(Q)$.

(v) Für jedes $A \subset \mathbb{R}^d$ und jeden halboffenen Quader Q gilt

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus Q) + \mu^*(A \cap Q).$$

Beweis

(ii) gilt, weil jede Überdeckung von B auch Überdeckung von A ist.

(iii) Ohne Einschränkung gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$ (sonst trivial). Sei $\varepsilon > 0$. Für jede A_n existiert gemäß der Definition von $\mu^*(A_n)$ eine Folge $(Q_{n,m})_{m \geq 1}$ disjunkte Quader mit $A_n \subset \bigcup_m Q_{n,m}$ und

$$\mu^*(A_n) \geq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \right) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dann ist $(Q_{n,m})_{n,m \geq 1}$ eine Quaderüberdeckung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und somit $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) $\mu^*(Q) \leq \mu(Q)$ ist trivial, und $\mu^*(Q) \geq \mu(Q)$ folgt aus Satz 16.5.

(v) Zunächst sei A ein halboffener Quader. Dann ist auch $A \cap Q$ ein halboffener Quader (Satz 16.2).

Wähle eine disjunkte Quaderzerlegung $A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q_n$ mit $Q_1 = A \cap Q$. Dann

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\stackrel{(iv)}{=} \mu(A) \stackrel{\text{Satz 16.3}}{=} \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \stackrel{(iv)}{=} \mu(A \cap Q) + \sum_{n=2}^N \mu^*(Q_n) \\ &\stackrel{(ii)}{\geq} \mu(A \cap Q) + \mu^*(A \setminus Q), \quad \text{da } (Q_n)_{n=1, \dots, N} \text{ Überdeckung von } A \setminus Q \\ &\stackrel{(iv)}{=} \mu^*(A \cap Q) + \mu^*(A \setminus Q) \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(A). \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit.

Nun sei A beliebig und $(Q_n)_{n \geq 1}$ eine Quaderüberdeckung von A . Dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) &\stackrel{\text{oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(Q_n \setminus Q) + \mu^*(Q_n \cap Q)) \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{\geq} \mu^*(A \setminus Q) + \mu^*(A \cap Q) \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{\geq} \mu^*(A). \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum über alle Quaderüberdeckungen zeigt dann

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \setminus Q) + \mu^*(A \cap Q) \geq \mu^*(A).$$

□

Bemerkung Sei X eine Menge. Gegeben ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ (oben die halboffenen Quader) und eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ kann μ^* wie in Definition 16.6 eingeführt werden. Dann gelten (i), (ii) und (iii) aus Satz 16.7, was per Definition bedeutet, dass μ^* ein äußeres Maß auf X ist. Diese Konstruktion geht auf Carathéodory (1917) zurück, ebenso wie folgende zentrale Definition, die wiederum für beliebige äußere Maße auf einer Menge X sinnvoll ist.

16.8 Definition $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar $\iff \forall$ Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Dann führe für die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen folgende Notation ein:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ Lebesgue-messbar}\}$$

und definiere das Lebesgue-Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ durch $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Bemerkungen

1. Die Ungleichung $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ gilt nach Satz 16.7 (iii) immer.
2. Mit dem Komplement CA von A kann die Gleichung umgeschrieben werden:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap CA)$$

3. Nach Satz 16.7 (v) ist jeder halboffene Quader Lebesgue-messbar im Sinne von Definition 16.8. Nach Satz 16.7 (iv) ist das Lebesgue-Maß μ also eine Erweiterung des d -dimensionalen Volumens aus Definition 16.1 (zu mehr messbaren Mengen). Beachte zudem, dass \emptyset und \mathbb{R}^d offensichtlich messbar sind.

16.9 Satz (Maßerweiterungssatz) \mathcal{A} hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies CA \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Zudem erfüllt das Lebesgue-Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ neben $\mu(\emptyset) = 0$ die so genannte σ -Additivität:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

wobei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in \mathcal{A} ist.

Bemerkung Wenn ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Eigenschaften (i), (ii), (iii) erfüllt, heißt es σ ma-Algebra auf X . Gemäß Satz 16.9 bilden also die Lebesgue-messbaren Mengen eine σ ma-Algebra. Der folgende Beweis überträgt sich direkt auf den allgemeinen Fall, in dem mit Definition 16.8 μ^* -messbare Mengen zugehörig zu einem gegebenen äußeren Maß μ^* auf X definiert werden (Erinnerung: Ein äußeres Maß ist eine monotone, σ -subadditive Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$).

Beweis (i) klar und (ii) folgt direkt aus obiger Bemerkung.

Behauptung 1 $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Begründung Für beliebiges $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A) && \text{da } A \in \mathcal{A} \\ &= \mu^*((E \setminus A) \setminus B) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*(E \cap A) && \text{da } B \in \mathcal{A} \\ &= \mu^*(E \setminus A \cup B) + \mu^*((E \cap (A \cup B)) \setminus A) + \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A) && \text{Mengen gleich} \\ &= \mu^*(E \setminus A \cup B) + \mu^*(E \cap (A \cup B)) && \text{da } A \in \mathcal{A}^*. \end{aligned}$$

Somit $A \cup B \in \mathcal{A}$. Außerdem, mit (ii):

$$A \cap B = C(CA \cup CB) \in \mathcal{A} \quad , \quad A \setminus B = A \cap CB \in \mathcal{A}$$

□

Behauptung 2 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkte Folge in $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ und $\forall E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu^* \left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n).$$

Begründung Zunächst, da $A_1 \in \mathcal{A}_1$

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) + \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) \\ &= \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1), \end{aligned}$$

so dass nach Iteration

$$\mu^* \left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n).$$

Nun ist $A \supset \bigcup_{n=1}^N A_n$ und die Monotonie des äußeren Maßes μ^* impliziert

$$\mu^*(E \cap A) \geq \mu^* \left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n \right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n) \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

also

$$\mu^*(E \cap A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n).$$

Umgekehrt gilt nach der σ ma-Subadditivität des äußeren Maßes μ^*

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n),$$

somit gilt also die gewünschte Gleichheit.

Es verbleibt, $A \in \mathcal{A}$ zu zeigen. Nach Behauptung 1 ist $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^* \left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n \right) + \mu^* \left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N A_n \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{wegen Monotonie.} \end{aligned}$$

Also im Limes $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{nach obiger Gleichung} \\ &\geq \mu^*(E) \quad \text{nach Subadditivität} \end{aligned}$$

Es gilt also Gleichheit und somit $A \in \mathcal{A}$. □

Behauptung 3 = (iii): $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Begründung (Durch Teleskopieren auf Behauptung 2 zurückzuführen.) Definiere iterativ

$$B_1 = A_1 \quad B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}).$$

Dann sind die B_n disjunkt und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Da nach Behauptung 1 jedes $B_n \in \mathcal{A}$, folgt nach Behauptung 2, dass auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. □

Dies beweist Satz 16.9, denn die σ -Additivität ist der Spezialfall $E = \mathbb{R}^d$ in Behauptung 2. □

16.10 Definition $N \subset \mathbb{R}^d$ Nullmenge $\iff \mu^*(N) = 0$

16.11 Satz (i) Jede Nullmenge ist Lebesgue-messbar.

(ii) $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullmengen $\implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ Nullmenge

(iii) Abzählbare Mengen sind Nullmengen.

(iv) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

Beweis

(i) Für alle $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt nach der Monotonie

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus N) \quad \mu^*(N) \geq \mu^*(N \cap E).$$

Somit

$$\mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(N) \geq \mu^*(E \setminus N) + \mu^*(N \cap E),$$

d.h. N ist messbar.

(ii) Nach der σ -Subadditivität gilt

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(N_n) = 0.$$

(iii)+(iv) Vergleiche Übung. □

Nun wird der Zusammenhang mit der Topologie untersucht.

16.12 Satz Alle offenen und abgeschlossenen Mengen des \mathbb{R}^d sind Lebesgue-messbar.

Beweis Sei U offen und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$, so dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Dann gibt es auch rationale $a, b \in \mathbb{Q}^d$, so dass $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$, d.h. $x \in (a, b) \subset U$. Also:

$$U = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}^d, (a,b]} (a, b]$$

Also ist U abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern und nach Satz 16.9 messbar. Als Komplement von offenen Mengen sind die abgeschlossenen auch messbar. \square

16.13 Satz $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ offenes U mit $A \subset U$ und $\mu^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

Bemerkung Ein Maß auf einem topologischen Raum X heißt von außen regulär genau dann, wenn letztere Eigenschaft für alle messbaren Mengen gilt. Es heißt von innen regulär $\iff \forall$ messbaren A und $\forall \varepsilon > 0 \exists$ abgeschlossenes $K \subset A$ mit $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

Satz 16.13 besagt, dass das Lebesgue-Maß von außen regulär ist. Nachweis der inneren Regularität ist eine Übung.

Beweis " \implies " Sei zunächst $\mu(A) = \mu^*(A) < \infty$.

Dann existiert eine halboffene Quaderüberdeckung $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle offene Quader Q'_n mit $Q_n \subset Q'_n$ und $\mu(Q'_n) \leq \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Setze $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q'_n$ (das ist offen!). Dann

$$\begin{aligned} \mu(A) &> \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(Q'_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\sigma\text{ma-Subadditivität}) \\ &= \mu(U \cap A) + \mu(U \setminus A) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $U \cap A = A$, folgt $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.

Jetzt sei $\mu(A) = \infty$. Dann setze $A_m = A \cap B_m(0)$, wobei $B_m(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < m\}$. Da $\mu(A_m) < \infty$, folgt nach Obigem, dass offenes U_m existiert mit $A_m \subset U_m$ und $\mu(U_m \setminus A_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$.

Setze $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$. Dann $A \subset U$ und $U \setminus A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \setminus A_m$, sodass

$$\mu(U \setminus A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(U_m \setminus A_m) < \varepsilon.$$

" \Leftarrow " Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ beliebig und $\varepsilon > 0$, außerdem U wie in Annahme. Dann

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus U) + \mu^*(E \cap U) \quad (\text{da } U \text{ messbar}) \\ &\geq \mu^*(E \setminus A) - \mu^*(U \setminus A) + \mu^*(E \cap U) \\ &\quad (\text{nach Subadditivität von } E \setminus A = (E \setminus U) \cup ((U \setminus A) \cap E) \subset (E \setminus A) \cup (U \setminus A)) \\ &\geq \mu^*(E \setminus A) - \varepsilon + \mu^*(E \cap A) \quad (\text{Voraussetzung und Monotonie}) \\ &\geq \mu^*(E) - \varepsilon \quad (\text{Subadditivität}). \end{aligned}$$

Da ε beliebig, folgt, dass A messbar ist.

Erinnerung (Übung) Wenn $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ Mengensystem, dann ist

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \text{Algebra}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

eine σ -Algebra und $\sigma(\mathcal{C})$ heißt die von \mathcal{C} erzeugte σ -Algebra. Folgende Definition überträgt sich wieder auf jeden topologischen Raum (X, \mathcal{O}) .

16.14 Definition Sei $\mathcal{O} = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ offen}\}$ die von der euklidischen Metrik erzeugte Topologie auf \mathbb{R}^d . Dann heißt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{O})$ die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^d .

Bemerkung Zudem $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen}\})$. Nach Satz 16.12 gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$. Folgender Satz zeigt

$$\mathcal{A} = \{B \cup N \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu^*(N) = 0\}.$$

16.15 Satz A Lebesgue-messbar $\iff \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und Nullmenge N mit $A = B \dot{\cup} N$.

Beweis " \implies " klar nach Satz 16.11

" \Leftarrow " Da das Komplement CA messbar ist, existiert nach Satz 16.13 eine Folge offener $U_n \supset CA$ mit $\mu(U_n \setminus CA) < \frac{1}{n}$. Da $U_n \setminus CA = A \setminus CU_n$, gilt auch $\mu(A \setminus CU_n) < \frac{1}{n}$. Setze $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} CU_n$ und $N = A \setminus B$. Dann $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und

$$\mu(N) = \mu(A \setminus B) = \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} CU_n\right) \leq \inf_n \mu(A \setminus CU_n) = 0.$$

□

Nun wird das Verhalten des Lebesgue-Maßes unter der affinen Gruppe

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \text{Gl}(\mathbb{R}, d)$$

untersucht. Die Gruppenmultiplikation ist

$$(a, N) \cdot (a', M') = (Ma' + a, MU') \quad a, a' \in \mathbb{R}^d, M, M' \in \text{Gl}(\mathbb{R}, d)$$

und die Gruppenwirkung auf \mathbb{R}^d

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

gegeben durch

$$(a, M) \cdot x = a + Mx.$$

Für Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ schreiben wir auch $MA + a = \{Mx + a \mid x \in A\}$.

16.16 Satz $\forall A \subset \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}^d$ gilt $\mu^*(A + a) = \mu^*(A)$. Außerdem: A messbar $\iff A + a$ messbar.

Beweis Wenn Q Quader ist, dann auch $Q + a$. Zudem $\mu^*(Q) = \mu^*(Q + a)$. Sei $A \subset \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ eine Quaderüberdeckung. Dann $A + a \subset \bigcup_{n \geq 1} (Q_n + a)$ und

$$\mu^*(A + a) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(Q_n + a) = \sum_{n \geq 1} \mu^*(Q_n).$$

Durch Übergang zum Infimum folgt

$$\mu^*(A + a) \leq \mu^*(A).$$

Zudem, da Obiges für jedes a , also insbesondere $-a$ gilt,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A + a - a) \leq \mu^*(A + a).$$

Für $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt nun

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu(E - a) \\ &= \mu^*((E - a) \setminus A) + \mu^*((E - a) \cap A) \quad (\text{da } A \text{ messbar}) \\ &= \mu^*(E \setminus (A + a)) + \mu^*(E \cap (A + a)). \end{aligned}$$

Somit $A + a$ auch messbar. □

16.17 Satz Für jede Matrix $M \in \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ und jedes $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu^*(MA) = |\det(M)| \mu^*(A).$$

Insbesondere ist μ^* unter der Wirkung der orthogonalen Gruppe invariant.

Beweis Falls $\det(M) = 0$, hat M einen nicht trivialen Kern und somit liegt MA in einer Hyperfläche von Kodimension größer oder gleich 1. Also ist $\mu^*(MA) = 0$ (vgl. Übung). Also sei jetzt $\det(M) \neq 0$.

Erinnerung Nach dem Gauss-Algorithmus ist

$$M = S_1 \cdot \dots \cdot S_n D S'_1 \cdot \dots \cdot S'_{n'},$$

wobei D diagonal ist und die S_k, S'_k Scherungen sind, d.h. von der Form $S = \mathbb{1} + \lambda |i\rangle \langle j|$ sind (Eintrag λ in der (i, j) -ten Stelle).

Behauptung 1 Es reicht,

$$\mu^*(MQ) \leq |\det(M)| \mu^*(Q) \quad (16.1)$$

für Diagonalmatrizen und Scherungen zu zeigen.

Begründung Dann, wegen $\det(M, M') = \det(M) \det(M')$,

$$\begin{aligned} \mu^*(MA) &= \mu^*(S_1 \cdot \dots \cdot S_n D S'_1 \cdot \dots \cdot S'_{n'} A) \leq |\det(S_1) \cdot \dots \cdot \det(D) \cdot \dots \cdot \det(S'_{n'})| \mu^*(A) \\ &= |\det(M)| \mu^*(A). \end{aligned}$$

Behauptung 2 (wie in Satz 16.16) Es reicht, (16) für jeden Quader Q zu zeigen.

Begründung Wenn $A \subset \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ eine Quaderüberdeckung ist, dann gilt $MA \subset \bigcup_{n \geq 1} MQ_n$. Nach der σ -Subadditivität von μ^* gilt dann wegen der Voraussetzung

$$\mu^*(MA) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(MQ_n) \leq |\det(M)| \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n).$$

Übergang zum Infimum zeigt

$$\mu^*(MA) \leq |\det(M)| \mu^*(A).$$

$$\text{Nun } \mu^*(A) = \mu^*(M^{-1}MA) \leq |\det(M^{-1})| \mu^*(MA) = \frac{1}{|\det M|} \mu^*(MA). \quad \square$$

Behauptung 3 (16) gilt für Diagonalmatrizen.

Begründung DQ ist wieder ein Quader, dessen d Seitenlängen durch Produkte der Seitenlängen von Q mit den Diagonaleinträgen von D gegeben sind. Also $\mu(DQ) = |\det(D)| \mu(Q)$.

Behauptung 4 (16) gilt für Scherungen.

Begründung Ohne Einschränkung reicht es, eine Scherung in der $(1, 2)$ -Ebene zu betrachten, d.h. für

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Translationsinvarianz reicht es, $Q = (0, b]$ zu betrachten. Faktorisierung gibt

$$Q = ((0, 0), (b_1, b_n)] \times Q' \quad , \quad \mu_d(Q) = \mu_2((0, 0), (b_1, b_2)] \cdot \mu_{d-2}(Q'),$$

Wobei μ_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Jetzt ist

$$SQ = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ((0, 0), (b_1, b_2)] \times Q' = P \times Q',$$

wobei P das Parallelogramm mit Ecken $(0, 0), (b_1, 0), (\lambda b_2, b_2), (b_1 + \lambda b_2, b_2)$ ist. Aber $\mu_2(P) = \mu_2((0, 0), (b_1, b_2)]$. (Elementargeometrie, bzw. überdecke P mit Quadern und betrachte den Limes.)
Somit

$$\mu(SQ) = \mu(Q) = |\det(S)| \mu(Q).$$

□

17 Lebesgue-Integral

Zunächst definieren und untersuchen wir Klassen von Funktionen, die integriert werden können.

17.1 Definition $D \subset \mathbb{R}^d$ Borel-messbar, $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ Funktion

$$(i) \quad f \text{ Borel-messbar} \iff \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \text{ ist } f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ \iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ ist } f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ \text{und } f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$(ii) \quad f \text{ Lebesgue-messbar} \iff \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \text{ ist } f^{-1}(B) \in \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue-messbar}\}$$

$$(iii) \quad f \text{ Treppenfunktion (oder Elementarfunktion)} \\ \iff \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ und } \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}, \\ \text{wobei } \chi_A \text{ die Indikatorfunktion auf } A \text{ ist, d.h.}$$

$$\chi_A(x) = 1 \quad \text{für } x \in A \quad \text{und} \quad \chi_A(x) = 0 \quad \text{für } x \notin A.$$

Bemerkung Treppenfunktionen und Borel-messbare Abbildungen sind Lebesgue-messbar.

17.2 Satz Stetige Abbildungen sind Borel-messbar.

Beweis Sei $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$ die Topologien, welche per Definition die Borel-Algebren erzeugen, d.h. $\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Stetigkeit von f besagt $f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$. Somit $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}))) \subset \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Der Satz folgt also aus folgender allgemeiner Behauptung für den Fall $\mathcal{C} = \mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$.

Behauptung $f : X \rightarrow Y$ Abbildung, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$. Dann gilt für die erzeugten σ -Algebren:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

Begründung Beachte zunächst, dass $f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ tatsächlich eine σ -Algebra ist, weil $C f^{-1}(A) = f^{-1}(CA)$ und $\bigcup_n f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_n A_n)$. Also folgt die Inklusion " \subset " direkt aus $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. Für die Inklusion " \supset " setze

$$\mathcal{D} = \{D \subset \overline{\mathbb{R}} \mid f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}.$$

Offensichtlich ist dann $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, so dass $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$. Also

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{D})) = \{f^{-1}(D) \mid f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})),$$

was den Beweis vervollständigt. □

17.3 Korollar $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\iff \forall c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{f < c\} = \{x \in D \mid f(x) < c\}$ messbar (entweder jeweils im Sinne von Lebesgue oder Borel)

Beweis Die offenen Intervalle und somit die gesamte Topologie wird von den Mengen $\mathcal{C} = \{[-\infty, c) \mid c \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erzeugt (durch endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen). Somit auch $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Da aber $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ nach Obigem, reicht es, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bzw. $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ zu überprüfen, d.h. $f^{-1}([-\infty, c)) = \{f < c\}$ messbar für alle $c \in \mathbb{R}$. \square

Messbarkeit von Funktionen kann etwas allgemeiner definiert werden, so dass z.B. auch vektorwertige Funktionen betrachtet werden können.

17.4 Definition $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Mengen mit σ -Algebren
 $f : X \rightarrow X'$ messbar $\iff f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$

Bemerkung Hintereinanderausführungen messbarer Funktionen sind offensichtlich messbar. Eine Anwendung ist:

17.5 Satz Summen, Produkte, Quotienten, Maxima und Minima endlich vieler \mathbb{R} -wertiger messbarer Funktionen sind messbar (entweder jeweils im Sinne von Borel oder Lebesgue).

Beweis Wir betrachten z.B. Produkt von N messbaren Funktionen $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$. Dann ist $F = (f_1, \dots, f_N) : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ messbar (Details in Übung). Definiere $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ durch $G(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdot \dots \cdot x_N$. Dies ist messbar, also ist auch $G \circ F(x) = \prod_{n=1}^N f_n(x)$ messbar. \square

17.6 Satz $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Folge messbarer Funktionen
 $\implies \inf(f_n), \sup(f_n), \liminf(f_n), \limsup(f_n)$ messbar

Beweis Für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$\{\inf(f_n) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < c\}$$

messbar als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen. Nach Korollar 17.3 ist also $\inf(f_n)$ messbar. Analog $\sup(f_n)$ und $\lim_n \sup(f_n) = \inf_n \sup_{k \geq n}(f_k)$. \square

17.7 Satz $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ Lebesgue-messbar
 $\implies \exists$ monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $f_n|_{CD} = 0$ und $f_n \uparrow f$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ und $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Beweis Setze

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{\{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}\}} \right) + n \chi_{\{f \geq n\}}$$

und beachte, dass die auftretenden Mengen messbar sind.

17.8 Definition (i) Das Lebesgue-Integral einer positiven Treppenfunktion $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n} \geq 0$ ist definiert als

$$\int \mu(dx) f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(A_n).$$

(ii) Sei $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar und positiv und $(f_n)_{n>1}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $f_n|_{CD} = 0$ und $f_n \uparrow f$ (z.B. wie im Satz 17.7). Dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als

$$\int_D \mu(dx) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) f_n(x) = \sup_n \int \mu(dx) f_n(x) \in [0, \infty].$$

Weitere Notationen: $\int_D dx f(x) = \int_D f(x) dx = \mu(f\chi_D)$, wobei Letzteres betont, dass das Integrieren ein lineares Funktional ist.

Bemerkung Das Integral von Funktionen, die nicht positiv sind, wird später definiert.

17.9 Satz Das Integral ist wohl-definiert, d.h. sein Wert ist unabhängig von der Wahl der monotonen Folge von Treppenfunktionen. Es ist linear und monoton, d.h. für messbare $f, g \geq 0$ gilt

$$\int \mu(dx)(f(x) + \lambda g(x)) = \left(\int \mu(dx) f(x) \right) + \lambda \left(\int \mu(dx) g(x) \right)$$

$$f \leq g \implies \int \mu(dx) f(x) \leq \int \mu(dx) g(x)$$

bzw. kurz $\mu(f + \lambda g) = \mu(f) + \lambda \mu(g)$ und $\mu(f) \leq \mu(g)$ für $f \leq g$.

Beweis Behauptung 1 Integral ist linear und monoton auf Treppenfunktionen.

Begründung Seien $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$ und $g = \sum_{k=1}^K \beta_k \chi_{B_k}$ Treppenfunktionen. Ohne Einschränkung sind $(A_n)_{n=1, \dots, N}$ und $(B_k)_{k=1, \dots, K}$ jeweils disjunkt. Setze

$$A_0 = C \left(\bigcup_n A_n \right) \quad B_0 = C \left(\bigcup_k B_k \right)$$

und

$$\alpha_0 = 0 \quad \beta_0 = 0.$$

Dann ist

$$f + \lambda g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (\alpha_n + \lambda \beta_k) \chi_{A_n \cap B_k}$$

eine Treppenfunktion und

$$\begin{aligned}
 \mu(f + \lambda g) &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (\alpha_n + \lambda \beta_k) \mu(A_n \cap B_k) \\
 &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \left(\sum_{k=0}^K \mu(A_n \cap B_k) \right) + \lambda \sum_{k=0}^K \beta_k \left(\sum_{n=0}^N \mu(A_n \cap B_k) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(A_n) + \lambda \sum_{k=1}^K \beta_k \mu(B_k) \\
 &= \mu(f) + \lambda \mu(g).
 \end{aligned}$$

Monotonie folgt analog.

Behauptung 2 Seien f_n, h Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$ und $0 \leq h \leq f$. Dann

$$\mu(h) \leq \lim_n \mu(f_n).$$

Begründung Sei $h = \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \chi_{C_\ell}$ mit messbaren C_ℓ , die paarweise disjunkt sind. Für $\varepsilon > 0$, setze

$$C_{\ell,n} = \{x \in C_\ell \mid f_n(x) \geq \gamma_\ell(1 - \varepsilon)\} \subset C_{\ell,n+1} \subset C_\ell.$$

Da $f_n \uparrow f \geq h$, gilt

$$C_\ell = \bigcup_{h \geq 1} C_{\ell,n} = C_{\ell,1} \overset{\circ}{\cup} \left(\bigcup_{n \geq 2} C_n \setminus C_{n-1} \right)$$

und somit nach σ -Additivität

$$\mu(C_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_{\ell,n}).$$

Nun

$$\begin{aligned}
 \mu(f_n) &\stackrel{\text{Beh.1}}{\geq} \mu \left(\sum_{\ell=1}^L f_n \chi_{C_{\ell,n}} \right), \quad \text{da } f_n \geq \sum_{\ell=1}^L f_n \chi_{C_{\ell,n}} \text{ Treppenfunktion} \\
 &\stackrel{\text{Beh.1}}{=} \sum_{\ell=1}^L \mu(f_n \chi_{C_{\ell,n}}) \\
 &\geq \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell(1 - \varepsilon) \mu(C_{\ell,n}) \quad \text{nach Definition von } C_{\ell,n}.
 \end{aligned}$$

Also im Limes

$$\lim \mu(f_n) \geq (1 - \varepsilon) \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \lim \mu(C_{\ell,n}) = (1 - \varepsilon) \mu(h).$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung. □

Behauptung 3 Seien f_n, g_m Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$ und $g_m \uparrow f$. Dann

$$\lim \mu(f_n) = \lim \mu(g_m).$$

Begründung Da $g_m \leq f$, folgt nach Behauptung 2

$$\mu(g_m) \leq \lim \mu(f_n).$$

Also $\lim \mu(g_m) \leq \lim \mu(f_n)$. Dann vertausche die Rollen. □

Behauptung 4 Linearität und Monotonie für messbare Funktionen.

Begründung Seien $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$, dann $f_n + \lambda g_n \uparrow f + \lambda g$ und somit

$$\mu(f + \lambda g) \stackrel{\text{Beh.3}}{=} \lim \mu(f_n + \lambda g_n) \stackrel{\text{Beh.1}}{=} \lim \mu(f_n) + \lambda \lim \mu(g_n) = \mu(f) + \lambda \mu(g).$$

Für die Monotonie sei zudem $f \leq g$. Setze

$$\tilde{f}_n = \min\{f_n, g_n\} \quad \tilde{g}_n = \max\{f_n, g_n\}.$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_n \leq \tilde{g}_n \quad \text{und} \quad \lim \tilde{f}_n = f \quad \lim \tilde{g}_n = g,$$

so dass

$$\mu(f) = \lim \mu(\tilde{f}_n) \stackrel{\text{Beh.1}}{\leq} \lim \mu(\tilde{g}_n) = \mu(g).$$

□

17.10 Satz (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)

$0 \leq f_n, f$ messbar und $f_n \uparrow f$, d.h. $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim f_n = f \implies \lim \mu(f_n) = \mu(f)$

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren nach Satz 17.7 eine Folge von Treppenfunktionen $(g_{n,k})_{k \geq 1}$ mit $g_{n,k} \uparrow f_n$. Setze

$$h_{n,k} = \max\{g_{1,k}, \dots, g_{n,k}\}.$$

Dann ist $h_{n,k}$ eine Treppenfunktion. Zudem ist $h_{n,k}$ monoton wachsend in beiden Indizes und

$$\begin{aligned} f &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k,k}, & \text{da } h_{n,k} \leq f_n \leq f \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_{n,k} & \text{für festes } n \text{ wegen der Monotonie im ersten Argument} \\ &= f_n. \end{aligned}$$

Somit

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k,k}$$

und

$$\mu(f) \stackrel{\text{Satz 17.9}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(h_{k,k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(f_k) \stackrel{\text{Satz 17.9}}{\leq} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(f) = \mu(f).$$

Bemerkungen

1. $f_n \geq 0$ nicht notwendig, wie später gezeigt werden kann.
2. $f_n \geq 0 \implies \mu(\sum_{n \geq 1} f_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(f_n)$ durch Anwendung von Satz 17.10 auf Teilsummen.

17.11 Satz (Lemma von Fatou) $f_n \geq 0$ messbar.
 $\implies \liminf_n \mu(f_n) \geq \mu(\liminf_n f_n)$

Beweis Für $m \geq n$ gilt

$$f_m \geq \inf_{k \geq n} f_k.$$

Somit nach der Monotonie

$$\mu(f_m) \geq \mu\left(\inf_{k \geq n} f_k\right),$$

also

$$\inf_{m \geq n} \mu(f_m) \geq \mu\left(\inf_{k \geq n} f_k\right)$$

und

$$\begin{aligned} \liminf_n \mu(f_n) &= \lim_n \inf_{m \geq n} \mu(f_m) \\ &\geq \lim_n \mu\left(\inf_{k \geq n} f_k\right) \\ &= \mu\left(\lim_n \inf_{k \geq n} f_k\right) \quad \text{nach Satz 17.10} \\ &= \mu\left(\liminf_n f_n\right). \end{aligned}$$

□

17.12 Definition $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar (falls auf messbarem $D \subset \mathbb{R}^d$ definiert, durch 0 fortsetzen)

f (Lebesgue-) integrierbar $\iff \mu(|f|) < \infty$

Falls f integrierbar ist, definiere positive integrierbare Funktionen

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad f_- = \max\{-f, 0\}$$

und definiere das Lebesgue-Integral als

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-).$$

Alternative Schreibweise ist wiederum $\mu(f) = \int \mu(dx) f(x) = \int f(x) dx \dots$

17.13 Satz Integral ist monoton und linear auf integrierbaren Funktionen.

Beweis Monotonie: $f \leq g$. Dann $0 \leq f_+ \leq g_+$, $0 \leq g_- \leq f_-$. Somit nach der Monotonie für positive Funktionen

$$\mu(f_+) \leq \mu(g_+) \quad \mu(g_-) \leq \mu(f_-)$$

und

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-) \leq \mu(g_+) - \mu(g_-) = \mu(g).$$

Für die Linearität beachte zunächst, dass wegen

$$|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda| |g|$$

auch $f + \lambda g$ integrierbar ist. Für $\lambda \geq 0$ (analog $\lambda < 0$) gilt

$$(f + \lambda g)_+ - (f + \lambda g)_- = f + \lambda g = f_+ + \lambda g_+ - f_- - \lambda g_-,$$

d.h.

$$(f + \lambda g)_+ + f_- + \lambda g_- = (f - \lambda g)_- + f_+ + \lambda g_+.$$

Nach der Linearität für positive Funktionen gilt

$$\mu((f - \lambda g)_+) + \mu(f_-) + \lambda \mu(g_-) = \mu((f + \lambda g)_-) + \mu(f_+) + \lambda \mu(g_+).$$

Umordnung und die Definition des Integrals vervollständigen den Beweis. □

17.14 Satz (Lebesgue's Theorem der majorisierten Konvergenz, "dominated convergence theorem") $f_n, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $|f_n| \leq g$, $\mu(g) < \infty$, und $\lim f_n = f$ existiere. Dann

$$\lim \mu(f_n) = \mu(\lim f_n) = \mu(f).$$

Beweis Es gilt $g + f_n \geq 0$ und $g - f_n \geq 0$. Nach der Linearität und gemäß des Lemmas von Fatou folgt

$$\mu(g) + \liminf \mu(\pm f_n) = \liminf (g \pm f_n) \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \mu(g \pm f) = \mu(g) \pm \mu(f).$$

Somit nach Subtraktion von $\mu(g)$:

$$\mu(f) \leq \liminf \mu(f_n) \quad \text{und} \quad -\mu(f) \leq \liminf \mu(-f_n) = -\limsup(f_n)$$

und zusammen ergibt sich

$$\mu(f) \leq \liminf \mu(f_n) \leq \limsup(f_n) \leq \mu(f).$$

□

Beispiele

1. $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \mu(dx) \frac{n}{x^n + n}$

Nun ist die Vertauschung von Limes und Integral erlaubt, entweder wegen des Satzes der monotonen Konvergenz $\left(\partial_n \frac{n}{x^n + n} = \frac{x^4}{(x^4 + n)^2} > 0 \right)$ oder wegen des Satzes der majorisierten Konvergenz (da $\frac{n}{x^4 + n} \leq 1$). Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^4 + n} = 1$, folgt $I = 2$.

2. $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty \mu(dx) n(1 + x^2 n^2)^{-1}$ für $a > 0$

Da $\frac{n}{1 + x^2 n^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{n} + x^2 n} \leq \frac{1}{x^2 n} \leq \frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ integrierbar auf $[a, \infty)$ ist, kann der Satz der majorisierten Konvergenz angewandt werden. Es folgt $I = 0$.

3. Sei $f_n(x) = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ und $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 > 0 = \int \mu(dx) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Tatsächlich ist die Folge f_n nicht durch eine integrierbare Funktion majorisiert, denn die kleinste obere Schranke $g(x) = \sup_n f_n(x)$ erfüllt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \mu(dx) g(x) \geq \int_{\frac{1}{N}}^1 \mu(dx) g(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \mu(dx) n = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1}.$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ divergiert aber die rechte Seite (harmonische Reihe). Außerdem ist f_n auch nicht monoton, so dass auch der Satz der monotonen Konvergenz nicht angewandt werden kann.

17.15 Definition $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar

$f = g$ im Sinne von Lebesgue fast sicher $\iff \exists$ Nullmenge N mit $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

Genauso: $f \leq g$, $f < g, \dots$ fast sicher

17.16 Satz $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar, $f \geq 0$

(i) $f = 0$ fast sicher $\iff \mu(f) = 0$

(ii) $\mu(f) < \infty \implies f < \infty$ fast sicher

(iii) $f \leq g$ fast sicher $\implies \mu(f) \leq \mu(g)$

(iv) $f = g$ fast sicher $\implies \mu(f) = \mu(g)$

Beweis

(i) Dies ist offensichtlich richtig für Treppenfunktionen. Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone Folge positiver Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$. Dann

$$\begin{aligned} f = 0 \text{ fast sicher} &\iff f_n = 0 \text{ fast sicher } \forall n \in \mathbb{N} && \text{(Monotonie)} \\ &\iff \mu(f_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} && \text{(Treppenfunktionen)} \\ &\iff \lim \mu(f_n) = 0 && \text{(da } \mu(f_n) \text{ monoton)} \\ &\iff \mu(f) = 0 && \text{(nach Definition des Integrals)} \end{aligned}$$

(ii) Falls $\mu(\{f = \infty\}) > 0$, folgt $\mu(f) = \infty$.

(iii) Sei $N = \{f > g\}$. Dann $\mu(N) = 0$ nach Voraussetzung. Somit

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mu(\chi_N f) + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(Linearität)} \\ &= 0 + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(nach (i), da } \chi_N f = 0 \text{ fast sicher)} \\ &\leq \mu(\chi_{N^c} g) && \text{(nach Definition von } N) \\ &\leq \mu(g). \end{aligned}$$

(iv) folgt durch doppelte Anwendung von (iii). □

Erinnerung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ äquidistante Zerlegung Z_N von $[a, b]$
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Untersumme und Obersumme sind dann

$$U_{Z_N}(f) = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

$$O_{Z_N}(f) = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x).$$

Dann definiere $U(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} U_{Z_N}(f)$ nach $O(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} O_{Z_N}(f)$
 f Riemann-integrierbar $\iff U(f) = O(f)$

Dann ist das Riemann-Integral $R\text{-}\int_a^b dx f(x) = U(f) = O(f)$.

17.17 Satz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und messbar

$\implies f$ Lebesgue-integrierbar und $\mu(f) = R\text{-}\int_a^b dx f(x)$

Somit sind alle vom Riemann-Integral bekannten Integrationstechniken anwendbar.

Beweis $|f|$ beschränkt (sonst Ober-/Untersumme = $\infty / -\infty$).

Somit f Lebesgue-integrierbar (da $\mu([a, b]) < \infty$).

Definiere

$$u_N = \sum_{n=1}^N \left(\inf_{[x_{n-1}, x_n)} f \right) \chi_{[x_{n-1}, x_n)}$$

$$o_N = \sum_{n=1}^N \left(\sup_{[x_{n-1}, x_n)} f \right) \chi_{[x_{n-1}, x_n)}.$$

Dann sind u_N bzw. o_N monoton wachsend bzw. fallend. Also ist $0 \leq o_N - u_N$ monoton fallend und somit auch konvergent:

$$0 \leq \lim_N (o_N - u_N) = \lim_N o_N - \lim_N u_N$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu \left(\lim_N (o_N - u_N) \right) && \text{(Monotonie)} \\ &\leq \lim_N \inf \mu(o_N - u_N) && \text{(Fatou)} \\ &= \lim_N \inf \mu(o_N) - \mu(u_N) && \text{(Linearität)} \\ &= \lim_N \inf O_{Z_N}(f) - U_{Z_N}(f) \\ &= 0 && \text{(nach Voraussetzung)}. \end{aligned}$$

Somit $\mu(\lim_N (o_N - u_N)) = 0$ und nach Satz 15 folgt

$$\lim_N o_N = \lim_N u_N \quad \text{fast sicher.}$$

Da $u_N \leq f \leq o_N$, folgt $f = \lim_N u_N$ fast sicher und nach dem Satz für monotone Konvergenz

$$\mu(f) = \mu(\lim_N u_N) = \lim_N \mu(u_N) = R \int_a^b dx f(x).$$

□

18 Integrationstechniken: Satz von Fubini und Jacobi'sche Transformationsformel

Erstes Ziel: Gegeben $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{d+k} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definieren wir für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ zwei Funktionen

$$f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad f_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$f_x(y) = f(x, y) \quad , \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Nun soll gezeigt werden

$$\mu_{d+k}(f) = \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) = \int \mu_k(dy) \mu_d(f_y), \quad (18.1)$$

wobei μ_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Dass hier für integrierbares f alles wohldefiniert ist (z.B. $x \mapsto \mu_k(f_x)$ integrierbar) und die Gleichheit (18) gilt, ist Aussage des Satzes von Fubini. Er ist auch die wichtigste Integrationstechnik für höher dimensionale Integrale, nämlich deren Rückführung auf eindimensionale Integrale.

18.1 Definition $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *doppelintegrierbar*

\iff Für fast alle x und y sind $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $f_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und die Funktionen $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(f_x)$ und $y \in \mathbb{R}^k \mapsto \mu_d(f_y)$ sind integrierbar.

Für eine doppelintegrierbare Funktion sind zwei Doppelintegrale (iterative Integrale) definiert durch

$$\mu_d(\mu_k(f)) = \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) \quad \text{und} \quad \mu_k(\mu_d(f)) = \int \mu_k(dy) \mu_d(f_y).$$

Bemerkungen

1. Es ist unwesentlich, welcher Wert $\mu_k(f_x)$ auf der Nullmenge zugeordnet wird, auf welcher f_x nicht integrierbar ist (nach Satz 17.16). Dies beeinflusst also auch die Integrierbarkeit von $x \mapsto \mu_k(f_x)$ nicht. Analoges gilt für f_y .
2. Im Satz von Fubini beweisen wir die Gleichheit der Doppelintegrale, so dass gilt: f integrierbar $\Rightarrow f$ doppelintegrierbar

18.2 Lemma (i) Die doppelintegrierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum und die Doppelintegrale sind linear, d.h. für doppelintegrierbare f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu_d(\mu_k(f + \lambda g)) = \mu_d(\mu_k(f)) + \lambda \mu_d(\mu_k(g))$$

und analog für das zweite Doppelintegral.

(ii) $f_n \geq 0$ doppelintegrierbar, $f_n \uparrow f$, und es gebe $C < \infty$ mit

$$\mu_d(\mu_k(f_n)) \leq C \quad \mu_k(\mu_d(f_n)) \leq C$$

$\implies f$ doppelintegrierbar und $\lim_n \mu_d(\mu_k(f_n)) = \mu_d(\mu_k(f))$ sowie analog für anderes Doppelintegral.

(iii) $f_n \geq 0$ doppelintegrierbar, $f_n \downarrow f$. Dann gelten die gleichen Folgerungen wie in (ii).

Beweis

(i) folgt nach doppelter Anwendung von Satz 17.13, der besagt, dass integrierbare Funktionen einen Vektorraum bilden und das Integral linear darauf ist.

(ii) Für jedes n existiert eine Nullmenge $N_n \subset \mathbb{R}^d$, so dass $(f_n)_x$ integrierbar ist. Dann ist $N = \bigcup_n N_n$ eine Nullmenge. Setze

$$F_n(x) = \begin{cases} \mu_k((f_n)_x) & x \in \mathbb{R}^d \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}.$$

Dann ist F_n integrierbar (insbesondere messbar). Wegen der Monotonie des μ_k -Integrals gilt $F_n \uparrow F$. Nach Voraussetzung und aufgrund des Satzes der monotonen Konvergenz folgt

$$C \geq \lim_n \mu_d(F_n) = \mu_d(F),$$

d.h. die Limesfunktion F ist μ_d -integrierbar. Zudem gilt für fast alle x :

$$\infty > F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k((f_n)_x) = \mu_k(f_x),$$

Letzteres nach dem Satz der monotonen Konvergenz. Somit ist f_x fast sicher integrierbar und $x \mapsto \mu_k(f_x)$ integrierbar (da F integrierbar). Da Gleiches auch für $\mu_d((f_n)_y)$ gilt, folgt, dass f doppelintegrierbar ist. Außerdem

$$\begin{aligned} \mu_d(\mu_k(f)) &= \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) \stackrel{\text{oben}}{=} \int \mu_d(dx) \lim_n \mu_k((f_n)_x) \\ &= \lim_n \int \mu_d(dx) \mu_k((f_n)_x) \quad (\text{monotone Konvergenz}) \\ &= \lim_n \mu_d(\mu_k(f_n)). \end{aligned}$$

(iii) folgt, wenn (ii) auf $f_1 - f_n$ angewandt wird.

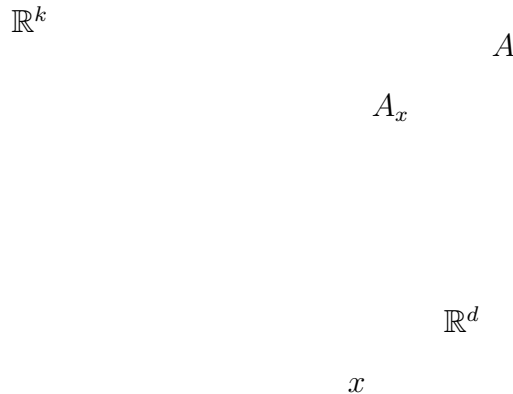
18.3 Satz (Prinzip von Cavalieri) Sei $A \subset \mathbb{R}^{d+k}$ messbar mit $\mu_{d+k}(A) < \infty$. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Menge

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}$$

messbar mit endlichem Maß $\mu_k(A_x)$. Die Funktion $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(A_x)$ ist messbar und

$$\mu_{d+k}(A) = \int \mu_d(dx) \mu_k(A_x).$$

Bild:



Bemerkung Der Satz besagt genau, dass die charakteristische Funktion χ_A doppelintegrierbar ist und die beiden Doppelintegrale gleich $\mu_{d+k}(A)$ sind, d.h.

$$\mu_{d+k}(\chi_A) = \mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \mu_k(\mu_d(\chi_A)).$$

Beweis Behauptung 1 Satz gilt für halboffene Quader $A = Q$.

Begründung Zerlege $Q = Q' \times Q''$ in halboffene Quader $Q' \subset \mathbb{R}^d$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^k$. Dann $\mu_{d+k}(Q) = \mu_d(Q')\mu_k(Q'')$ und $\chi_Q(x, y) = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}(y)$. Zudem $(\chi_Q)_x = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}$. Daher ist $(\chi_Q)_x$ integrierbar für alle x und $\mu_k((\chi_Q)_x) = \chi_{Q'}(x)\mu_k(Q'')$. Diese Funktion in x ist μ_d -integrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_Q)) = \mu_d(Q')\mu_k(Q'') = \mu_{d+k}(Q).$$

Das Gleiche gilt für die umgekehrte Reihenfolge. □

Behauptung 2 Satz gilt für endliche Vereinigung $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_N$ von Quadern.

Begründung Ohne Einschränkung sind die Q_n paarweise disjunkt. Dann $\chi_A = \chi_{Q_1} + \dots + \chi_{Q_N}$. Nach Behauptung 1 sind die χ_{Q_n} doppelintegrierbar und nach Lemma 18.2 (i) ist auch χ_A doppelintegrierbar mit Doppelintegral $\mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \sum_{i=1}^N \mu_d(\mu_k(\chi_{Q_n})) \stackrel{\text{Beh.1}}{=} \sum_{n=1}^N \mu_{d+k}(Q_n) = \mu_{d+k}(A)$. □

Behauptung 3 Satz gilt für offene Mengen A .

Begründung Da die halboffenen Quader eine Basis der Topologie bilden, kann $A = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ als abzählbare Vereinigung von Quadern geschrieben werden. Setze $A_N = \bigcup_{n=1}^N Q_n$. Dann gilt $\chi_{A_N} \uparrow \chi_A$ und die Doppelintegrale sind gleichmäßig beschränkt:

$$\mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) \stackrel{\text{Beh.2}}{=} \mu_{d+k}(A_N) \leq \mu_{d+k}(A) = C < \infty$$

Also ist nach Lemma 18.2 (ii) auch χ_A doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \lim_N \mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) = \lim_N \mu_{d+k}(A_N) = \mu_{d+k}(A).$$

Analoges gilt für das andere Doppelintegral. □

Behauptung 4 Satz gilt für jedes messbare A mit $\mu_{d+k}(A) < \infty$.

Begründung Nach der äußeren Regularität gibt es für jedes n ein offenes $U_n \supset A$ mit $\mu_{d+k}(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Ohne Einschränkung ist $U_n \supset U_{n+1}$. Setze $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ (eine $G\delta$ Menge). Dann ist $\mu_{d+k}(U) = \mu_{d+k}(A)$ und $U \supset A$. Da $\chi_{U_n} \downarrow \chi_U$ und χ_{U_n} nach Behauptung 3 doppelintegrierbar sind, folgt nach Lemma 18.2 (iii), dass χ_U doppelintegrierbar ist und

$$\begin{aligned} \mu_d(\mu_k(\chi_U)) &= \lim_n \mu_d(\mu_k(\chi_{U_n})) \stackrel{\text{Beh.3}}{=} \lim_n \mu_{d+k}(U_n) \\ &= \mu_{d+k}(U) = \mu_{d+k}(A) \end{aligned}$$

und analog für $\mu_k(\mu_d(\chi_U))$.

Nun haben wir die disjunkte Zerlegung $\chi_A = \chi_U - \chi_N$ mit $N = U \setminus A$. Wir zeigen, dass χ_N doppelintegrierbar ist und $\mu_d(\mu_k(\chi_N)) = 0$ sowie $(\chi_N)_x = 0$ für fast alle x . Dann ist $(\chi_A)_x = (\chi_U)_x$ fast sicher und $\mu_k(\chi_A)_x = \mu_k((\chi_U)_x)$ fast sicher. Dies kombiniert mit Lemma 18.2 (i) zeigt dann Behauptung 4.

Es verbleibt also, die Aussagen über die Nullmenge N zu zeigen. Wie oben, konstruiere offenes $W \supset N$ mit $\mu_{d+k}(W) = \mu_{d+k}(N) = 0$. Dann ist nach Behauptung 3 W doppelintegrierbar und $\mu_d(\mu_k(\chi_W)) = 0$. Nach Satz 17.16, gilt dann $(\chi_W)_x = 0$ für fast alle x . Da $\chi_N \leq \chi_W$, ist also auch $(\chi_N)_x = 0$ fast sicher und somit ist χ_N insbesondere doppelintegrierbar. □

Beispiel (Kugelvolumina) Sei

$$B_r^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq r\}$$

die d -dimensionale Kugel bez. der euklidischen Metrik $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^d (x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Dann gilt

$$\mu_d(B_r^d) = r^d \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} & d \text{ gerade} \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d} & d \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dies wird durch Induktion über d bewiesen. Zunächst ist $\mu_1(B_r^1) = 2r$ und $\mu_2(B_r^2) = \pi r^2$ klar, was der Anfang ist. Außerdem gilt nach dem Prinzip von Cavalieri:

$$\mu_d(B_r^d) = \int_{-r}^r \mu_1(dx) \mu_{d-1}((B_r^d)_x),$$

wobei $(B_r^d)_x = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|(x, y)\|_2 < Y\} = B_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{d-1}$. Durch Iteration zeigt dies, dass

$$\mu_d(B_r^d) = \beta_d r^d$$

mit zu berechnenden Koeffizienten $\beta_d > 0$. Diese erfüllen

$$\begin{aligned}\beta_d r^d &= \int_{-r}^r \mu_1(dx) \beta_{d-1} (r^2 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta r \cos(\theta) \beta_{d-1} r^{d-1} \cos(\theta)^{d-1} \quad \text{mit } x = r \sin(\theta), \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= r^d \beta_{d-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta)^d.\end{aligned}$$

Also setze

$$\begin{aligned}I_d &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta)^d \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta) (\cos \theta)^{d-1} \\ &= \sin(\theta) (\cos(\theta))^{d-1} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta) (d-1) \cos(\theta)^{d-2} (-\sin \theta) \\ &\stackrel{d \geq 1}{=} (d-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 - \cos^2(\theta)) \cos(\theta)^{d-2} \\ &= (d-1)(I_{d-2} - I_d) \\ &= \frac{d-1}{d} I_{d-2}.\end{aligned}$$

Somit nach Multiplikation mit dI_{d-1} :

$$\begin{aligned}dI_{d-1}I_d &= (d-1)I_{d-2}I_{d-1} \\ &= I_0 \cdot I_1 \quad (\text{nach Iteration}) \\ &= \pi \cdot 2 \quad (\text{nach Berechnung})\end{aligned}$$

Da

$$\beta_d = I_d \beta_{d-1} = I_d I_{d-1} \beta_{d-2} = \frac{2\pi}{d} \beta_{d-2},$$

folgt mit $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = \pi$ das Ergebnis.

18.4 Satz (Fubini–Tonelli)

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar $\implies f$ doppelintegrierbar und

$$\mu_{d+k}(f) = \mu_d(\mu_k(f)) = \mu_k(\mu_d(f)).$$

Beweis Für jede Indikatorfunktion $f = \chi_A$ ist dies die Aussage des Satzes von Cavalieri. Für eine Treppenfunktion $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$ folgt der Satz dann aus Lemma 18.2 (i) und der Linearität des Integrals. Sei jetzt ein integrierbares $f \geq 0$ gegeben und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$. Dann gilt

$$\mu_k(\mu_d(f_n)) = \mu_d(\mu_k(f_n)) = \mu_{d+k}(f_n) \leq \mu_{d+k}(f) < \infty.$$

Somit ist Lemma 18.2 (ii) anwendbar, also f doppelintegrierbar und

$$\begin{aligned}\mu_d(\mu_k(f)) &= \lim_n \mu_d(\mu_k(f_n)) \\ &= \lim_n \mu_{d+k}(f_n) \quad (\text{da Treppenfunktion}) \\ &= \mu_{d+k}(f) \quad (\text{monotone Konvergenz}) \\ &= \mu_k(\mu_d(f)) \quad (\text{analog})\end{aligned}$$

Falls f eine beliebige integrierbare Funktion ist, zerlege $f = f_+ - f_-$ in Positivteil f_+ und Negativteil f_- , für die separat Obiges gilt. Mit Lemma 18.2 (i) folgt der Satz dann auch für f .

Beispiel $D = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$, $quadf : D \rightarrow \mathbb{R}$, $quadf(x, y, z) = z \sin(x + y)$.
Dann

$$\begin{aligned}\mu_3(f\chi_D) &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^\pi dx z \sin(x + y) = \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy -z \cos(x + y)|_0^\pi \\ &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy 2z \cos(y) \\ &= \int_0^1 dz 2z \sin(y)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^1 dz 4z = 2\end{aligned}$$

18.5 Satz $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

$f \geq 0$ und doppelintegrierbar $\implies f$ integrierbar

Beweis Wähle eine monotone Folge positiver Treppenfunktionen $f_n \uparrow f$. Schränke f_n auf Kugel B_n mit Radius n um 0 ein. Dann ist $g_n = f_n \chi_{B_n}$ integrierbar und $g_n \uparrow f$. Nach dem Satz von Fubini ist g_n doppelintegrierbar und

$$\begin{aligned}\mu_{d+k}(f) &= \lim_n \mu_{d+k}(g_n) \quad (\text{monotone Konvergenz}) \\ &= \lim_n \mu_d(\mu_k(g_n)) \quad (\text{Fubini}) \\ &= \mu_d(\mu_k(f)) \quad (\text{Lemma 18.2= monotone Konvergenz für Doppelintegrale}) \\ &< \infty\end{aligned}$$

□

Beispiel Die Voraussetzung $f \geq 0$ in Satz 18.5 ist notwendig. Tatsächlich gibt es doppelintegrierbare Funktionen, für welche die Doppelintegrale nicht gleich sind und die somit nicht integrierbar sind. Hierzu setze

$$g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x) \quad , \quad x \in [0, 1] \quad ,$$

und

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y) \quad , \quad x, y \in [0, 1].$$

Die Summe ist konvergent, da die Träger der Summanden disjunkt sind. Da $\mu_1(g_n) = 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y) \quad (\text{für jedes } y \text{ nur ein Summand}) \\ &= \int_0^1 dy (1 - 1) g_n(y) = 0, \end{aligned}$$

und

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) = \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) = \int_0^1 dx g_1(x) = 1.$$

18.6 Satz (Jacobi'sche Transformationsformel) Seien $U, U' \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : U \rightarrow U' = \phi(U)$ ein C^1 -Diffeomorphismus (d.h. ϕ invertierbar und ϕ, ϕ^{-1} sind differenzierbar mit stetiger Ableitung). Zudem sei $f : U' \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar
 $\implies f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx') f(x') = \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det(\phi'(x))|.$$

Erinnerung: ϕ' ist die Linearisierung von ϕ , d.h. $\phi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine lineare Abbildung dargestellt durch eine $d \times d$ Matrix. Da ϕ und ϕ^{-1} nach Voraussetzung stetige Ableitungen haben, folgt, dass $|\det \phi'(x)| > 0$.

Beweis Behauptung 1 Es reicht zu zeigen, dass

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx') f(x') \leq \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det \phi'(x)|. \quad (18.2)$$

Begründung Denn diese Ungleichung angewandt auf $\phi^{-1} : U' \rightarrow U$ und $g = (f \circ \phi) |\det \phi'|$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det \phi'(x)| &= \int_{\phi^{-1}(U')} \mu(dx) g(x) \\ &\leq \int_{U'} \mu(dx') (g \circ \phi^{-1})(x') |\det(\phi^{-1})'(x')| \\ &= \int_{U'} \mu(dx') (f \circ \phi \circ \phi^{-1})(x') |\det \phi'(\phi^{-1}(x'))| |\det(\phi^{-1})'(x')| \\ &= \int_{U'} \mu(dx') f(x'), \end{aligned}$$

Letzteres wegen der Kettenregel $\mathbb{1} = (\phi \circ \phi^{-1})' = (\phi' \circ \phi^{-1})(\phi^{-1})'$. □

Behauptung 2 Es reicht, (18) für Indikatorfunktionen auf messbare Mengen zu zeigen.

Begründung Dann gilt (18) wegen der Linearität des Integrals auch für Treppenfunktionen und nach dem Satz der monotonen Konvergenz auch für positive integrierbare Funktionen (da aus $f_n \uparrow f$ auch $(f_n \circ \phi) |\det \phi'| \uparrow (f \circ \phi) |\det \phi'|$ folgt). Eine beliebige integrierbare Funktion wird in Positiv-

und Negativteil zerlegt. □

Somit verbleibt zu zeigen, dass für jedes messbare $A \subset U$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt

$$\mu(\phi(A)) \leq \int_A \mu(dx) |\det \phi'(x)|. \quad (18.3)$$

Falls ϕ linear ist, d.h. $\phi'(x) = \phi$ für alle $x \in U$, folgt (18), sogar die Gleichheit, aus Satz 17.16. Die Grundidee ist jetzt, ϕ lokal durch affine Abbildungen zu approximieren. Hierfür benötigen wir zunächst:

Behauptung 3 Es reicht, (18) zu zeigen unter der zusätzlichen Annahme, dass ϕ erweitert werden kann auf ein Kompaktum $K \supset U$ als ein C^1 -Diffeomorphismus.

Begründung Betrachte, für $f \in \mathbb{N}$,

$$U_k = \left\{ x \in U \mid \|x\| < k \text{ und } d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) < \frac{1}{k} \right\}.$$

Dann ist $\bar{U}_k \subset U$ kompakt und $\bigcup_k U_k = U$. Wenn also (18) für U_k mit $A_k = A \cap U_k$ gilt, dann folgt nach monotoner Konvergenz

$$\mu(\phi(A)) = \lim_k \mu(\phi(A_k)) \leq \lim_k \int_{A_k} \mu(dx) |\det \phi'(x)| = \int_A \mu(dx) |\det \phi'(x)|.$$

□

Somit dürfen wir annehmen, dass ϕ' und $(\phi^{-1})'$ gleichmäßig stetig und uniform beschränkt auf U sind und setzen

$$M = \max_{x \in Q} \max \{ \|\phi'(x)\|, \|(\phi^{-1})'(\phi(x))\|, |\det \phi'(x)| \} < \infty$$

und zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass $\|\phi'(x) - \phi'(y)\| \leq \varepsilon \forall x, y \in U$ mit $d(x, y) < \delta$.

Behauptung 4 (18) gilt für einen Quader $A = Q$.

Beweis Zerlege disjunkt $Q = \bigcup_n Q_n$ in Quader mit Seitenlänge $\leq \delta$. Sei $q_n \in Q_n$ der Mittelpunkt. Nun ist $\phi(Q_n)$ zwar kein Paralleliped, aber es kann verglichen werden mit dem Paralleliped erhalten als affines Bild von Q_n :

$$P_n = \phi(q_n) + \phi'(q_n)(Q_n - q_n)$$

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ & & P'_n \\ q_n & & \phi(q_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q_n & & \phi(Q_n) \end{array}$$

In der Tat, für $x \in Q_n$

$$\begin{aligned} & \|\phi(x) - (\phi(q_n) + \phi'(q_n)(x - q_n))\| \\ &= \left\| \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \phi(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)(x - q_n) \right\| \\ &\leq \int_0^1 dt \|\phi'(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)\| \|x - q_n\| \\ &\leq \varepsilon \delta. \end{aligned}$$

Somit ist $\phi(Q_n)$ enthalten in dem Parallelepiped P'_n , gegeben durch Streckung der Seiten von P_n um den Faktor $1 + \varepsilon$. Also

$$\mu(\phi(Q_n)) \leq \mu(P'_n) \leq (1 + \varepsilon)^d \mu(P_n) = (1 + \varepsilon)^d |\det \phi'(q_n)| \mu(Q_n),$$

Letzteres nach Satz 17.16. Somit (beachte, dass $\phi(Q)$ als stetiges Bild einer Borelmenge eine Borelmenge ist)

$$\mu(\phi(Q)) = \sum_n \mu(\phi(Q_n)) \leq (1 + \varepsilon)^d \sum_n |\det(\phi'(q_n))| \mu(Q_n).$$

Nun konvergiert die Treppenfunktion $\sum_n |\det \phi'(q_n)| \chi_{Q_n}$ gegen $|\det(\phi')| \chi_Q$ und ist beschränkt durch $M \chi_Q$. Somit folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\mu(\phi(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^d \int_Q \mu(dx) |\det(\phi'(x))|.$$

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. □

Behauptung 5 (18) gilt für jede messbare Menge A .

Beweis Sei $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Quaderüberdeckung von A mit $\mu^*(\bigcup_n Q_n \setminus A) < \varepsilon$. Dann ist $(\phi(Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Quaderüberdeckung von $\phi(A)$ und

$$\begin{aligned} \mu^*(\phi(A)) &\leq \sum_n \mu^*(\phi(Q_n)) \\ &\leq \sum_n \int_{Q_n} \mu(dx) |\det \phi'(x)| \quad (\text{nach Beh. 4}) \\ &= \int_{\bigcup_n Q_n} \mu(dx) |\det \phi'(x)| \\ &= \varepsilon \cdot M + \int_A \mu(dx) |\det \phi'(x)|, \end{aligned}$$

d.h.

$$\mu^*(\phi(A)) \leq \int_A \mu(dx) |\det(\phi'(x))|. \tag{18.4}$$

Nun zerlege $A = B \overset{\circ}{\cup} N$ in eine Borelmenge B und Nullmenge N . Dann zeigt (18), dass $\phi(N)$ auch Nullmenge ist und, da $\phi(B)$ eine Borelmenge ist, folgt $\mu^*(\phi(A)) = \mu^*(\phi(B)) = \mu(\phi(B)) =$

$\mu(\phi(A))$, was eingesetzt in (18) die Behauptung zeigt. □

Erstes Standardbeispiel Nach Fubini

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2} e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) e^{-|x|^2}$$

Nun verwende Polarkoordinaten

$$\phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\phi(\psi, r) = (r \cos \psi, r \sin \psi) \quad \phi'(\psi, r) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -r \sin \psi \\ \sin \psi & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) e^{-|x|^2} &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu(dx) e^{-|x|^2} \\ &= \int_{(0, 2\pi) \times \mathbb{R}_{>0}} \mu(dr, d\psi) e^{-r^2} |\det(\phi'(\psi, r))| = \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Somit haben wir folgendes Gauss'sche Integral berechnet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-|x|^2} = \int \pi$$

Zweites Standardbeispiel Um Integrale in \mathbb{R}^3 zu berechnen, die rotationssymmetrisch sind, verwendet man Kugelkoordinaten:

$$\phi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus C,$$

wobei

$$C = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0 \right\}$$

und

$$\phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

x_3

θ

φ

x_2

x_1

Dann

$$\phi'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und somit nach kurzer Rechnung:

$$\det \phi'(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta > 0.$$

Also, wenn ein integrierbares f über eine Kugel $B_R(0)$ mit Radius R integriert wird, dann

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx) f(x) = \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta r^2 \cos(\theta) f(\phi(r, \varphi, \theta)).$$

Insbesondere, wenn $f \circ \phi$ nur von r abhängt, d.h. f rotationssymmetrisch ist und $f \circ \phi(r, \varphi, \theta) = \tilde{f}(r)$,

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx) f(x) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \tilde{f}(r).$$

Drittes Beispiel Seien $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ die symmetrischen $n \times n$ Matrizen mit reellen Einträgen, die als Menge mit dem \mathbb{R}^d , $d = \frac{n(n+1)}{2}$, identisch sind. Somit gibt es das Lebesgue-Maß μ_d auf $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ bez. dessen Matrixintegrale $\int \mu_d(dX) f(X)$ von integrierbaren Funktionen $f : \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet werden können. Zu einem gegebenen invertierbaren $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ betrachten wir nun

$$\phi : \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad , \quad \phi(X) = AXA^t.$$

Diese Abbildung ist linear in X und invertierbar (da $\phi^{-1}(X) = A^{-1}X(A^{-1})^t$). Wegen der Linearität ist $\phi'(X)$ unabhängig von X .

Behauptung $\det(\phi') = \det(A)^{n+1}$, so dass, für $\mathcal{U} \subset \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ und integrierbares f ,

$$\int_{A\mathcal{U}A^t} \mu_d(dX) f(X) = |\det(A)|^{n+1} \int_{\mathcal{U}} \mu_d(dX) f(AXA^t).$$

Diese und ähnliche Identitäten sind wesentlich für die Berechnung von Matrixintegralen.

Begründung Nach dem erweiterten Gauss-Algorithmus kann A durch Addition von zwei Zeilen und Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar in die Identität umgeformt werden, d.h.

$$A = E_1 \cdot \dots \cdot E_J,$$

wobei die E_j Matrizen der folgenden Gestalt sind:

$$E = \mathbb{1} + |\ell\rangle\langle k| \quad \tilde{E} = \mathbb{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|,$$

wobei $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq \ell$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und die Bracket-Notation im \mathbb{R}^n versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt verwandt ist und $|k\rangle$ der k -te Vektor der Standardbasis ist. Somit ist E die Einheitsmatrix bis auf den Eintrag 1 an der Stelle (k, ℓ) und \tilde{E} die Einheitsmatrix bis auf den Eintrag λ an der Stelle (k, k) . Tatsächlich benötigt man $J = n^2$ solcher Matrizen. Jetzt ist

$$\phi(X) = E_1 \cdot \dots \cdot E_J X E_J^t \cdot \dots \cdot E_1^t.$$

Somit reicht es, die Behauptung für E und \tilde{E} zu zeigen, denn dann $\det(\phi') = |\det(E_i)|^{n+1} \cdot \dots \cdot |\det(E_j)|^{n+1} = |\det(A)|^{n+1}$.

Sei $Y = EXE^t$ und E wie oben. Dann, mit $X = (x_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$,

$$\begin{aligned} Y &= (k + |\ell\rangle\langle k|)X(\mathbb{1} + |k\rangle\langle \ell|) \\ &= (x_{i,j} + \delta_{\ell,i}x_{k,j} + x_{i,k}\delta_{\ell,j} + \delta_{i,\ell}\delta_{\ell,j}x_{k,k})_{i,j=1,\dots,n}. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Nun schreibe X als Vektor gegeben durch die Einträge auf und über der Diagonale:

$$\vec{X} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{n,n}, \dots, x_{n-1,n}, x_{n,n})^t \in \mathbb{R}^d$$

und analog \vec{Y} . Dann definiere eine Matrix $M \in \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$ durch $\vec{Y} = M\vec{X}$. Gemäß (18.5) ist $M = \mathbb{1} + D$.

Behauptung D ist eine obere Dreiecksmatrix für $k > \ell$, und eine untere für $k < \ell$, jeweils ohne Eintrag auf der Diagonalen.

Begründung Tatsächlich für $k > \ell$ und $i \leq j$ Folgendes:

Term $x_{i,k}\delta_{\ell,j}$: da $k > \ell = j \geq i$ ist immer der Eintrag $x_{i,k}$ unterhalb von $x_{k,j}$ im Vektor \vec{X}

Term $\delta_{i,\ell}\delta_{\ell,j}x_{k,k}$: da $k > \ell = i = j$ ist der Eintrag $x_{k,k}$ unterhalb des Eintrags $x_{i,j} = x_{i,i}$ im Vektor \vec{X}

Term $\delta_{\ell,i}x_{k,j} = \delta_{\ell,i}x_{j,k}$: da $k > \ell = i \leq j$ ist, falls $k \leq j$, der Eintrag $x_{k,j}$ unterhalb $x_{i,j}$ in \vec{X} (da $k > i$), und falls $k < j$ der Term $x_{j,k}$ ebenfalls (offensichtlich für $j > i$, und falls $i = j$ ist $k > j$) \square

Es folgt

$$\det(\phi') = \det(M) = 1 = \det E = (\det(E))^{n+1}.$$

Nun zu \tilde{E} und $\tilde{Y} = \tilde{E}X\tilde{E}^t$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= (\mathbb{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|)X(\mathbb{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|) \\ &= (x_{i,j}\delta_{i \neq k}\delta_{j \neq k} + \lambda x_{i,j}(\delta_{i \neq k}\delta_{j,k} + \delta_{i,k}\delta_{j \neq k}) + \lambda^2 x_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k})_{i,j=1,\dots,n} \end{aligned}$$

Also ist \tilde{M} in $\vec{\tilde{Y}} = \tilde{M}\vec{\tilde{X}}$ diagonal mit einem Eintrag λ^2 und $(n - 1)$ Einträgen λ . Somit

$$\det(\phi') = \det(M) = \lambda^2 \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1} = \det(\tilde{E})^{n+1}. \quad \square$$

19 Integration über Ränder und der Gauss'sche Satz

Ziel: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit einem Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}\Omega}$, der glatt ist. Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{X} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ zeigen wir dann den Gauss'schen Divergenzsatz

$$\int_{\Omega} \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) = \int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) \left\langle \vec{X} \mid \vec{N} \right\rangle_{\mathbb{R}^d}(y),$$

wobei die Divergenz definiert ist durch

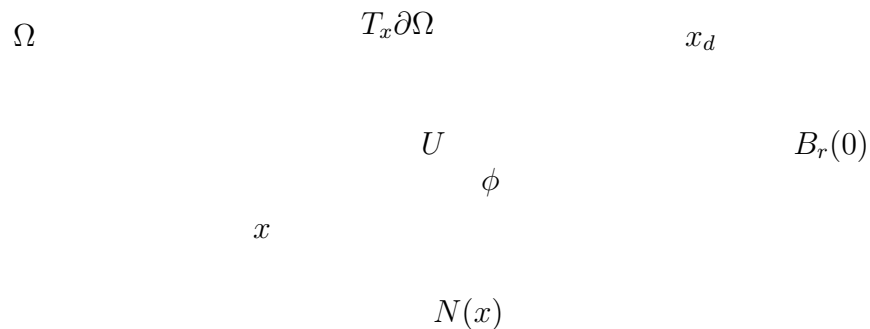
$$\operatorname{div}(\vec{X})(x) = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} X_j)(x),$$

$\vec{N}(x)$ der nach außen zeigende Normalenvektor auf $\partial\Omega$ ist und $\int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy)$ ein Integral über den Rand ist, welches definiert werden muss. Falls $\Omega = Q$ ein offener Quader der Dimension d ist, so ist $\partial\Omega$ die Vereinigung der Seitenflächen und $\mu_{\partial\Omega}$ das $(d-1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß darauf. Der Divergenzsatz ist eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes (wo $d = 1$ ist und $\partial\Omega$ 0-dimensional ist), und ein Spezialfall des Satzes von Stokes $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$, der für Differentialformen ω auf Mannigfaltigkeiten gilt (siehe Literatur).

19.1 Definition Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hat einen k -mal stetig differenzierbaren Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap C\Omega$, wenn jeder Punkt $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ und einen C^k -Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^d$ besitzt, so dass

$$\begin{aligned} \phi(\Omega \cap U) &= B_r(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\} \quad , \quad \phi(C\Omega \cap U) = B_r(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d \leq 0\} \\ \phi(\partial\Omega \cap U) &= B_r(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\} \end{aligned}$$

Bild:



Der Tangentialraum an $\partial\Omega$ bei $x \in \partial\Omega$ ist

$$T_x \partial\Omega = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle \phi'(x)v \mid e_d \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle v \mid \phi'(x)^* e_d \rangle = 0\} \quad , \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Normalenvektor $\vec{N}(x)$ auf $\partial\Omega$ an x ist

$$\vec{N}(x) = -\frac{\phi'(x)^* e_d}{\|\phi'(x)^* e_d\|}$$

Beispiel $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktion mit $\text{grad}f(x) \neq \vec{0} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. Dann hat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$ einen C^1 -Rand $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\}$, denn nach dem Satz für implizite Funktionen gibt es lokal C^1 -Funktionen $\phi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \partial\Omega$. Der Normalenvektor ist dann $\vec{N}(x) = \frac{\text{grad}f}{\|\text{grad}f\|}(x)$ für $x \in \partial\Omega$.

19.2 Lemma Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit stetig differenzierbarem Rand und $\phi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow B_r(0)$ eine C^1 -Abbildung wie in Definition 19.1. Außerdem sei $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Träger enthalten in U . Dann ist

$$\int_{\phi(\partial\Omega \cap U)} \mu_{d-1}(dy) (\|(\phi')^* e_d\| |\det(\phi')|^{-1} f)(\phi^{-1}(y, 0))$$

unabhängig von der Wahl von ϕ .

Beweis Sei $x = \phi^{-1}(y, 0) \in \partial\Omega$. Dann hat die Ableitungsmatrix $\phi'(x)$ bei x folgende Struktur:

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} \phi'(x)|_{T_x\partial\Omega} & 0 \\ 0 & \phi'(x)|_{(T_x\partial\Omega)^\perp} \end{pmatrix} : T_x\partial\Omega \oplus \mathbb{R}N(x) \rightarrow \mathbb{R}^{d-1} \oplus \mathbb{R}e_d$$

Dies bedeutet, dass die lineare Abbildung $\phi(x)$ bez. der Basen der rechts angegebenen Zerlegung dargestellt wird. Also

$$\det(\phi'(x)) = \det(\phi'(x)|_{T_x\Omega}) \langle e_d \mid \phi'(x)N(x) \rangle = -\det(\phi'(x)|_{T_x\Omega}) \|(\phi'(x))^n e_d\|.$$

Wenn I das Integral im Lemma bezeichnet, dann folgt also

$$I = \int_{\phi(\partial\Omega \cap U)} \mu_{d-1}(dy) (|\det(\phi'|_{T\Omega})|^{-1} f)(\phi^{-1}(y, 0)).$$

Wenn nun ψ eine zweite Abbildung wie in Definition 19.1 ist, dann ist $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(\partial\Omega \cap U) = B_r(0) \rightarrow \phi(\partial\Omega \cap U) = B_r(0)$ C^1 -Diffeomorphismus, dessen Einschränkung $\phi \circ \psi^{-1} : B_r'(0) \times \{0\} \rightarrow B_r'(0) \times \{0\}$ mit $B_r'(0) = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|y\| < r\}$ auch ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Somit nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} I &= \int_{\psi(\partial\Omega \cap U)} \mu(dy') (|\det(\phi'|_{T\Omega})|^{-1} f)(\phi^{-1}(\phi \circ \psi^{-1}(y', 0))) \cdot |\det((\phi \circ \psi^{-1})'_{(y', 0)}|_{\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}})| \\ &= \int_{\psi(\partial\Omega \cap U)} \mu(dy') (|\det(\psi'|_{T\Omega})|^{-1} f)(\psi^{-1}(y', 0)). \end{aligned}$$

Letzteres nach der Kettenregel. □

Somit kann das Integral in Lemma 19.2 verwendet werden, um das Integral von $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über den Rand zu definieren, zumindestens lokal, d.h. für Funktionen, die ihren Träger in einer offenen Menge haben, die bijektiv auf das Modell des Randes abgebildet werden. Um eine beliebige Funktion $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zu integrieren, verwendet man nun

19.3 Definition (Zerlegung der Eins) Sei $(U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Dann heißt $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathcal{U} untergeordnete glatte Zerlegung der Eins, falls

- (i) $g_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ist C^∞ mit Träger $\text{supp}(g_n) \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$.
- (ii) Für jedes $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung von x , auf der nur endlich viele g_n ungleich Null sind.
- (iii) $\sum_{n \geq 1} g_n(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

19.4 Satz Zu jeder offenen Überdeckung einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gibt es eine \mathcal{U} untergeordnete glatte Zerlegung der Eins.

Beweis (konstruktiv) $(B_r(x) \cap \Omega)_{r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}^d \cap \Omega}$ ist eine abzählbare Basis der Topologie von Ω (d.h. jede offene Menge ist Vereinigung von Basiselementen). Wir wählen nur solche aus, für die $B_{2r}(x) \cap \Omega \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$ und wählen eine beliebige Abzählung $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von diesen aus. Setze $A_1 = V_1$. Dann ist $\overline{A_1}$ kompakt. Somit existiert ein kleinstes j , so dass $\overline{A_1}$ von V_1, \dots, V_j überdeckt wird. Setze dann $A_2 = \bigcup_{i=1}^j V_i$. Genauso konstruiere iterativ eine Folge offener Mengen $(A_m)_{m \geq 1}$ mit kompaktem Abschluss $\overline{A_m} \subset A_{m+1}$ und $\Omega = \bigcup_{m \geq 1} A_m$. Dann ist die kompakte Menge $\overline{A_m} \setminus A_{m-1}$ enthalten in der offenen Menge $A_{m+1} \setminus \overline{A_{m-2}}$ sobald $m \geq 3$.

Nun ist $(U \cap A_3)_{U \in \mathcal{U}}$ offene Überdeckung von $\overline{A_2}$ und $(U \cap (A_{m+1} \setminus \overline{A_{m-2}}))_{U \in \mathcal{U}}$ offene Überdeckung von $\overline{A_m} \setminus A_{m-1}$. Wir wählen jeweils eine endliche Teilüberdeckung aus. Somit erhalten wir eine lokal endliche Überdeckung $(B_{r_n}(x_n) \cap \Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω , so dass $B_{2r_n}(x_n) \cap \Omega \subset U$ für ein $U \in \mathcal{U}$.

Wir setzen jetzt

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \|x - x_n\| < r_n \\ 0 & , \quad \|x - x_n\| \geq 2r_n \\ \exp\left(\frac{1}{\|x-x_n\|^2 - 4r_n^2} \exp\left(\frac{-1}{\|x-x_n\|^2 - r_n^2}\right)\right) & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$g_n(x) = \frac{h_n(x)}{\sum_{m \in \mathbb{N}} h_m(x)} \geq 0.$$

Beachte, dass in der Summe nur endlich viele Summanden nicht verschwinden. Tatsächlich erfüllen $(g_n)_{n \geq 1}$ dann alle gewünschten Eigenschaften. \square

Bemerkung Falls Ω einen C^1 -Rand $\partial\Omega$ hat, so können Funktionen $(g_n)_{n \geq 1}$ auf $\partial\Omega$ stetig fortgesetzt werden.

19.5 Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit einem C^1 -Rand und $\phi_n : U_n \subset \Omega \rightarrow \phi(U_n)$ als dem zugehörigen Diffeomorphismus. Dann ist das Integral einer stetigen Funktion $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) f(y) = \sum_{n \geq 1} \int_{\phi(\partial\Omega \cap U_n)} \mu_{d-1}(dy) (\|(\phi'_n)^* e_d\| |\det(\phi'_n)|^{-1} g_n f)(\phi_n^{-1}(y, 0)),$$

wobei $(g_n)_{n \geq 1}$ eine $(U_n)_{n \geq 1}$ untergeordnete Zerlegung der Eins ist.

Bemerkung Der Definition liegt die lineare Zerlegung

$$\int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) f(y) = \sum_{n \geq 1} \int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) f(y) g_n(y, 0)$$

zu Grunde. Gemäß Lemma 19.2 ist dann jeder Summand unabhängig von der Wahl des Diffeomorphismus ϕ_n .

19.6 Satz (Gauss'scher Divergenzsatz) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit einem C^2 -Rand $\partial\Omega$. Sei $\vec{X} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld, das auf Ω stetig differenzierbar ist mit partiellen Ableitungen, die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen lassen. Dann

$$\int_{\Omega} \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) = \int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle(y).$$

Beweis Wir werden zu Ende des Beweises sehen, dass es nach Einfügen einer Zerlegung der Eins reicht, den Satz für kleine offenen Mengen zu zeigen, die entweder keinen Rand oder ein Randstück enthalten wie in Definition 19.1, so dass \vec{X} kompakten Träger in der offenen Menge hat. Zuerst betrachten wir eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ ohne Rand, die enthalten ist in einem Quader $Q = [a, b]$. Dann kann \vec{X} auf $[a, b]$ durch Null fortgesetzt werden, so dass \vec{X} auf ∂Q verschwindet. Jetzt

$$\begin{aligned} \int_U \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) &= \int_Q \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) \\ &= \sum_{j=1}^d \int \mu_d(dx) (\partial_{x_j} X_j)(x) \\ &= \sum_{j=1}^d \int dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_d \int_{a_j}^{b_j} dx_j (\partial_{x_j} X_j)(x) \quad (\text{Fubini}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Letzteres nach dem Fundamentalsatz für das Integral über x_j , da ja X_j an den Rändern a_j, b_j verschwindet. Da U keinen Rand hat, verschwindet auch die rechte Seite im Divergenzsatz.

Jetzt betrachten wir einen Teil mit Rand und nehmen zunächst an, dass es durch das Standardmodell gegeben ist. Wiederum kann \vec{X} durch Null erweitert werden auf $Q = Q' \times [0, r]$ mit $Q' = \prod_{j=1}^{d-1} [-r, r]$. Dann zeigt obige Rechnung

$$\begin{aligned} \int_U \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) &= \int_{-r}^r dx_1 \cdots \int_{-r}^r dx_{d-1} \int_0^r dx_d (\partial_{x_d} X_d)(x) \\ &= \int_{-r}^r dx_1 \cdots \int_{-r}^r dx_{d-1} (-X_d)(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) \\ &= \int_{-r}^r dx_1 \cdots \int_{-r}^r dx_{d-1} \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) \\ &= \int_{Q'} \mu_{d-1}(dy) \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle(y) \\ &= \int_{\partial U} \mu_{\partial U}(dy) \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle(y). \end{aligned}$$

Somit gilt der Divergenzsatz für das Standardmodell des Randes. Die Idee ist nun, einen beliebigen Rand mit Hilfe des Diffeomorphismus ϕ aus Definition 19.1 auf ein Standardmodell abzubilden, und

beide Seiten des Divergenzsatzes zu transformieren. Hierbei transformiert sich das Vektorfeld zu einem neuen Vektorfeld \vec{Y} . Also sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ die C^2 -Abbildung mit $\phi(\partial U) = B'_r(0) \times \{0\}$, wobei $B'_r(0)$ die $(d-1)$ -dimensionale Kugel mit Radius r ist. Definiere das transformierte Vektorfeld $\vec{Y} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$\vec{Y} = (|\det(\phi')|^{-1} \phi' \vec{X}) \circ \phi^{-1}.$$

Dann gilt nach Definition 19.1 und wegen $\vec{N}(x) = -\|(\phi')^* e_d\|^{-1} (\phi')^* e_d$

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \mu_{\partial U}(dy) \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle (y) &= \int_{\phi(\partial U)} \mu_{d-1}(dy) \left(\|(\phi')^* e_d\| |\det(\phi')|^{-1} \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle \right) (\phi^{-1}(y, 0)) \\ &= - \int_{\phi(\partial U)} \mu_{d-1}(dy) \left(|\det(\phi')|^{-1} \langle \vec{X} \mid (\phi')^* e_d \rangle \right) (\phi^{-1}(y, 0)) \\ &= - \int_{B'_r(0) \times \{0\}} \mu_{d-1}(dy) \langle \vec{Y} \mid e_d \rangle (y) \\ &= \int_{B'_r(0) \times \{0\}} \mu_{d-1}(dy) \langle \vec{Y} \mid \vec{N} \rangle (y). \end{aligned}$$

Nun transformieren wir die andere Seite und setzen die Definition von \vec{Y} ein:

$$\begin{aligned} \int_U \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) &= \int_{\phi(U)} \mu_d(dx) |\det((\phi^{-1})'(x))| \operatorname{div}(\vec{X})(\phi^{-1}(x)) \\ &= \int_{\phi(U)} \mu_d(dx) |\det(\phi')(\phi^{-1}(x))|^{-1} \operatorname{div}(|\det(\phi')| (\phi')^{-1} (\vec{Y} \circ \phi))(\phi^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Nun muss die Divergenz mit Hilfe der Produktregel ausgerechnet werden. Hierfür benötigen wir folgende allgemeine Tatsachen:

19.7 Lemma Seien $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{X} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $J : \mathbb{R}^d \rightarrow \operatorname{Gl}(d, \mathbb{R})$ stetig differenzierbare Abbildungen. Ferner sei $\partial_j = \partial_{x_j}$. Dann

$$(i) \operatorname{div}(f\vec{X}) = \langle \operatorname{grad}(f) \mid \vec{X} \rangle + f \operatorname{div}(\vec{X})$$

$$(ii) \partial_j J^{-1} = -J^{-1} (\partial_j J) J^{-1}$$

$$(iii) \partial_j \det(J) = \det(J) \operatorname{Tr}(J^{-1} \partial_j J)$$

Beweis

(i)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{X}) &= \sum_j \partial_j (f X_j) = \sum_j (\partial_j f) X_j + \sum_j f \partial_j X_j \\ &= \langle \operatorname{grad}(f) \mid \vec{X} \rangle + f \operatorname{div}(\vec{X}) \end{aligned}$$

(ii) Vergleiche Analysis 2, Lemma 15.3.

(iii)

$$\begin{aligned}\partial_j \det(J) &= \partial_j \exp(\ln(\det(J))) \\ &= \det(J) \partial_j \ln(\det(J)) \\ &= \det(J) \partial_j \operatorname{Tr}(\ln(J)) \\ &= \det(J) \operatorname{Tr}(J^{-1} \partial_j J)\end{aligned}$$

□

Nun Sei $\phi' = J = (J_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ die Jacobimatrix von $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)$, d.h. $J_{i,j} = \partial_j \phi_i$. Nach dem Satz von Schwarz (Satz 14.12, hier geht die C^2 -Eigenschaft ein) gilt

$$\partial_k J_{i,j} = \partial_k \partial_j \phi_i = \partial_j \partial_k \phi_i = \partial_j J_{i,k}.$$

Nun berechnen wir die oben benötigte Divergenz:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\det(J) J^{-1} \vec{Y} \circ \phi) &= \left\langle \operatorname{grad}(\det(J)) \mid J^{-1} \vec{Y} \circ \phi \right\rangle + \det(J) \operatorname{div}(J^{-1} \vec{Y} \circ \phi) \\ &= \det(J) \sum_j \operatorname{Tr}(J^{-1} \partial_j J) (J^{-1} \vec{Y} \circ \phi)_j + \det(J) \sum_j \partial_j (J^{-1} \vec{Y} \circ \phi)_j \\ &= \det(J) \sum_{j,i,k,\ell} (J^{-1})_{ik} \partial_j J_{k,i} (J^{-1})_{j,\ell} Y_\ell \circ \phi - \sum_{j,i,k,\ell} (J^{-1})_{j,k} \partial_i J_{k,j} (J^{-1})_{i,\ell} Y_\ell \circ \phi \\ &\quad + \sum_{j,i} (J^{-1})_{j,i} \partial_j (Y_i \circ \phi) \\ &= \det(J) \sum_{j,i,k} (J^{-1})_{j,i} (\partial_k Y_i) \circ \phi \partial_j \phi_k \\ &= \det(J) \sum_{j,i,k} (J^{-1})_{j,i} (\partial_k Y_i) \circ \phi J_{k,j} \\ &= \det(J) \operatorname{div}(\vec{Y}) \circ \phi\end{aligned}$$

Einsetzen liefert nun also

$$\int_U \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) = \int_{\phi(U)} \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{Y})(x).$$

Somit ist der Beweis des Divergenzsatzes auf die Standardsituation zurückgeführt, die oben schon bewiesen wurde, bis auf das Einfügen der Zerlegung der Eins. Hierzu verwenden wir

$$\begin{aligned}
\int \mu_d(dx) \operatorname{div}(\vec{X})(x) &= \sum_n \int \mu_d(dx) g_n(x) \operatorname{div}(\vec{X})(x) \\
&= \sum_n \int \mu_d \left(\operatorname{div}(g_n \vec{X})(x) - \langle \operatorname{grad} g_n \mid \vec{X} \rangle (x) \right) \\
&= \sum_n \int \mu_d(dx) \operatorname{div}(g_n \vec{X})(x) - \int \mu_d(dx) \left\langle \operatorname{grad} \left(\sum_n g_n \right) \mid \vec{X} \right\rangle (x) \\
&= \sum_n \int \mu_d(dx) \operatorname{div}(g_n \vec{X})(x) \\
&= \sum_n \int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) \langle g_n \vec{X} \mid \vec{N} \rangle (y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \mu_{\partial\Omega}(dy) \langle \vec{X} \mid \vec{N} \rangle (y).
\end{aligned}$$

□

Literatur

- [1] V. Zorich: Analysis I und II, Springer Verlag 2006
- [2] Blatter: Analysis 1, 2 und 3, Springer 1984
- [3] H.-D. Ebbinghaus et. al.: Zahlen. Springer, Berlin 1992
- [4] A. Knauf: Skript zur Analysis 1 und 2
- [5] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov: Special Functions of Mathematical Physics
- [6] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis. Academic Press, 1980
- [7] M. Schmidt: Skript zur Analysis
- [8] M. Lehn, Skript zur Analysis