Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 9 (21.6.2024)

Aufgabe 41: Mit φ wird hier die Eulersche φ-Funktion bezeichnet. Zeige:

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

(2) Für die Dirichlet-Reihe
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$
sind die Konvergenzabszissen 2, d.h. $\sigma_k = \sigma_a = 2$.

(3) Für $\mathrm{Re}\,(s) > 2$ gilt
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

(Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.)

Aufgabe 42: Sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$F_n = \{f(x) \in \mathbb{F}_p[x] : f(x) \text{ ist irreduzibel vom Grad } n \text{ und hat höchsten Koeffizienten } 1\}.$$
In der Algebra zeigt man die Zerlegung
$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} \prod_{f(x) \in F_d} f(x).$$

(1) Zeige, dass für alle n
$$|F_n| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) p^d$$
gilt. (Hinweis: Vergleiche die Grade in obiger Polynomidentität und wende die Möbiusschen Umkehrformeln an.)

(2) Berechne explizit $|F_\ell|$ für eine Primzahl ℓ.

(3) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ (mindestens) ein irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{F}_p[x]$ existiert.

Aufgabe 43:

(1) Sei G eine multiplikativ geschriebene abelsche Gruppe und $a : \mathbb{N} \to G$ eine Abbildung. Durch
$$b(n) = \prod_{d|n} a(d)$$
wird eine Abbildung $b : \mathbb{N} \to G$ definiert. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a(n) = \prod_{d|n} b(d)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

Datei: anazt_u9.tex. Version vom 20.6.2024

(2) Sei K ein Körper. Durch

$$\Phi_1(x) = x - 1 \quad \text{und} \quad \Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(x)} \text{ für } n > 1$$

werden rekursiv Elemente $\Phi_n(x)$ des Quotientenkörpers von $K[x]$ definiert. Zeige, dass gilt

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

Aufgabe 44: Zeige, dass folgende Beziehungen zwischen zwei Funktionen $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ äquivalent sind:

$$g(x) = \sum_{n \le x} f(\frac{x}{n}) \text{ für alle } x \ge 1$$

und

$$f(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) g(\frac{x}{n}) \text{ für alle } x \ge 1.$$

Aufgabe 45: Zeige, dass für alle $x \ge 1$ folgende Aussagen gelten:

(1)

$$\sum_{n \le x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1.$$

(2)

$$\left| \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \le \frac{1}{x} \left(1 + \sum_{n \le x} |\mu(n)| \right).$$

(3)

$$\left| \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \le 1.$$

(Hinweis: Für (1) verwende man die Inversionsformeln der vorangegangenen Aufgabe.)