Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 11 (26.6.2024-3.7.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P51:

(1) Für $a \in \mathbb{N}$ sei

$$E(a) = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = a\}.$$

Bestimme

$$E(1), \quad E(2), \quad E(3), \quad E(4).$$

(2) Welche Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ haben Grad ≤ 4 über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe P52: Folgende Cosinus-Werte werden ab und zu benutzt:

α	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{12}$
α in Grad	90^0	60^0	45^0	30^0
$\cos(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Zeige:

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \cos(72^0) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(Hinweis: $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ist eine primitive 5-te Einheitswurzel. In $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.)

Aufgabe P53:

(1) Zeige: Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, so gilt

$$\Phi_{pq}(1) = 1.$$

(2) Was ist $\Phi_{p^2}(1)$ für eine Primzahl p?

Aufgabe P54: (Staatsexamensaufgabe)
Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass $p - 1 = p_1 \cdot \cdots \cdot p_n$ Produkt der paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass es genau 2^n verschiedene Untergruppen in $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ gibt.
(b) Sei $\zeta_p \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenkörper in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$.

Datei: kt_u11.tex. Version vom 24.6.2024

Aufgabe P55: (Staatsexamensaufgabe)
Sei p eine ungerade Primzahl und sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ hat genau einen Zwischenkörper Z vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$.
(b) Komplexe Konjugation induziert ein Element der Ordnung 2 in der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.
(c) Der Körper Z aus (a) ist genau dann ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, wenn $p \equiv 1 \bmod 4$.

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H31: Sei $n \geq 3$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeige:

$$\mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}).$$

Aufgabe H32: (Teil einer Staatsexamensaufgabe)
Sei $p \geq 3$ prim und $\zeta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Ist ζ eine p-te Einheitswurzel, so ist $-\zeta$ eine $2p$-te Einheitswurzel.
(ii) Genau dann ist ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, wenn $-\zeta$ eine primitive $2p$-te Einheitswurzel ist.
(iii) Es ist $\Phi_{2p}(X) = \Phi_p(-X)$. (Mit $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ bezeichnen wir das n-te Kreisteilungspolynom.)

Aufgabe H33: Sei $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

(1) Berechne ζ^k für $k = 1, \ldots, 8$ und skizziere diese Zahlen in der komplexen Zahlenebene. Zeige, dass ζ eine primitive 8-te Einheitswurzel ist.
(2) Was ist $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$?
(3) Beschreibe die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$. (Als Kreisteilungskörper ist $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ natürlich galoissch.)
(4) Zeige, dass i und $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ liegen.
(5) Bestimme alle nichttrivialen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$ und die zugehörigen Fixkörper.
(6) Erstelle das Unterkörperdiagramm von $\mathbb{Q}(\zeta)$.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 3.7.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen