**Exkurs: Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit Methoden aus der Analysis**

**Bemerkungen:**

(1) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dies ist gleichwertig damit, dass jedes nichtkonstante Polynom aus $\mathbb{C}[x]$ eine Nullstelle besitzt. Das wollen wir im Folgenden beweisen.

(2) Der Beweis rechnet recht explizit mit Polynomen. Als nichttriviales Resultat aus der Analysis benützen wir, dass jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt.

Lemma (A). *Ist $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $\geq 1$, so existiert zu jeder Zahl $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zahl $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft:*

$$|z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \geq M.$$

Die Aussage folgt aus sofort aus folgender technischen Version des Lemmas:

Lemma. *Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, also $a_n \neq 0$, und $A = \max(|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|)$. Dann gilt die Implikation*

$$|z| \geq \max\left(1, \frac{2nA}{|a_n|}\right) \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

*Beweis:* Für $|z| \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} |a_{n-1} z^n n - 1 + \cdots + a_1 z + a_0| &\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leq \\ &\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z|^{n-1} + |a_0||z|^{n-1} \leq \\ &\leq A|z|^{n-1} + \cdots + A|z|^{n-1} + A|z|^{n-1} = \\ &= nA|z|^{n-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt für $|z| \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|a_n z^n + \left(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right)\right| \geq \\ &\geq |a_n z^n| - \left|a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \geq \\ &\geq |a_n||z|^n - nA|z|^{n-1} = \\ &= |a_n||z|^n \cdot \left(1 - \frac{nA}{|a_n||z|}\right) = |a_n||z|^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{|z| - \frac{2nA}{|a_n|}}{2|z|}\right), \end{aligned}$$

und damit

$$|z| \geq \max\left(1, \frac{2nA}{|a_n|}\right) \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n,$$

wie behauptet. ∎

Lemma (B). *Ist $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) \neq 0$, so gibt es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit*

$$|f(z_1)| < |f(z_0)|.$$

Die Aussage ergibt sich sofort aus folgender technischen Version des Lemmas.

Lemma. *Sei $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) \neq 0$. Sei*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=d}^{n} b_k (z - z_0)^k$$

*die Taylorreihenentwicklung von $f$ um $z_0$ mit $b_d \neq 0$. Sei*

$$f(z_0) = |f(z_0)| \cdot e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad b_d = |b_d| \cdot e^{i\beta}.$$

*Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass*

$$|f(z_0 + re^{i \cdot \frac{\pi + \alpha - \beta}{d}})| < |f(z_0)| \text{ für alle } r \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < r \leq \varepsilon.$$

Datei: kt_fs_algebra_analysis.tex. Version vom 19.6.2024

*Beweis:* Wir schreiben über die Ungleichungen, welche Eigenschaften wir brauchen für $r \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
|f(z_0 + re^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}})| &= \left| f(z_0) + \sum_{k=d} b_k \cdot r^k e^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}\cdot k} \right| = \\
&= \left| |f(z_0)| \cdot e^{i\alpha} + |b_d| \cdot e^{i\beta} \cdot r^d \cdot e^{i(\pi+\alpha-\beta)} + \sum_{k=d+1}^{n} b_k \cdot r^k \cdot e^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}\cdot k} \right| = \\
&= \left| e^{i\alpha} \cdot \big(|f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d\big) + \sum_{k=d+1}^{n} b_k \cdot r^k \cdot e^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}\cdot k} \right| \leq \\
&\leq \big| |f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d \big| + \sum_{k=d+1}^{n} |b_k| \cdot r^k \overset{|b_d|\cdot r^d \leq |f(z_0)|}{=} \\
&= |f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d + \sum_{k=d+1}^{n} |b_k| \cdot r^k \overset{r\leq 1}{\leq} \\
&\leq |f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d + r^{d+1} \cdot \sum_{k=d+1}^{n} |b_k| = \\
&= |f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d \cdot \left(1 - r \cdot \frac{1}{|b_d|} \sum_{k=d+1}^{n} |b_k|\right) \overset{r \leq \frac{|b_d|}{\sum_{k=d}^{n} |b_k|}}{\leq} \\
&\leq |f(z_0)| - |b_d| \cdot r^d.
\end{aligned}$$

Ist nun $r \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < r \leq 1, \quad |b_d| \cdot r^d \leq |f(z_0)|, \quad r \leq \frac{|b_d|}{\sum_{k=d}^{n} |b_k|},$$

so folgt

$$|f(z_0 + re^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}})| < |f(z_0)|.$$

Wir können also

$$\varepsilon = \min\left(1, \frac{|f(z_0)|^{1/d}}{|b_d|^{1/d}}, \frac{|b_d|}{\sum_{k=d}^{n} |b_k|}\right)$$

wählen. Damit folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung:** Das vorangegangene Lemma zeigt, dass es im Fall $f(z_0) \neq 0$ immer eine von $z_0$ ausgehende Halbgerade gibt, nämlich $\{z_0 + re^{i\cdot\frac{\pi+\alpha-\beta}{d}} : r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, auf der $|f(z)|$ zunächst kleiner als $|f(z_0)|$ ist.

SATZ (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann besitzt $f(z)$ eine Nullstelle, es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$.*

*Beweis:* Ist $f(0) = 0$, so können wir $z_0 = 0$ wählen und sind fertig. Wir betrachten den Fall $f(0) \neq 0$. Aus Lemma (A) folgt die Existenz eines $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft

$$|z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \geq 2|f(0)|.$$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ist kompakt, die (stetige) Funktion $f$ nimmt darauf ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| \leq R$ und

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq R.$$

Aus der Wahl von $R$ und $|f(z_0)| \leq |f(0)| < 2|f(0)|$ folgt sofort

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wäre $f(z_0) \neq 0$, so könnte man nach Lemma (B) ein $z_1 \in \mathbb{C}$ finden mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, ein Widerspruch. Also folgt $f(z_0) = 0$, und wir haben eine Nullstelle von $f$ gefunden. ■