KAPITEL 5

Die Integralsätze von Gauß und Stokes

Für ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

definiert man die **Divergenz** des Vektorfelds durch

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz des Vektorfelds ist also eine skalare Funktion. Auf die Bedeutung der Divergenz werden wir später eingehen.

Beispiel: Für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sin(x) + ye^z \\ \cos(x)y - z^2 \\ xyz + e^{-x} \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin(x) + ye^z) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x)y - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz + e^{-x}) = \\ &= \cos(x) + \cos(x) + xy = xy + 2\cos(x). \end{aligned}$$

Bemerkung: Definiert man den sogenannten **Nabla-Operator** ∇ durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

so kann man formal das Skalarprodukt mit einem Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

betrachten und erhält

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z = \mathrm{div}(\mathbf{F}).$$

Bemerkung: Wir werden im Folgenden kompakte Teilmengen G des $\mathbb{R}^3$ betrachten. Dabei soll sich der Rand ∂G aus stückweise glatten Flächen zusammensetzen. Die Parametrisierungen sollen dabei so gewählt werden, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

Der Satz von Gauß verbindet Oberflächenintegrale mit Volumenintegralen:

Datei: al_int5.tex. Version vom 3.2.2020

Satz (Integralsatz von Gauß). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, sodass sich der Rand ∂G aus stückweise glatten Flächen zusammensetzt. (Die Normalenvektoren von ∂G sollen nach außen zeigen.) Sei $\mathbf{F}$ ein (auf G) stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:*

$$\int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F}) d(x,y,z).$$

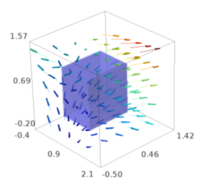
Beispiel: Sei W der Würfel

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

und $\mathbf{F}$ das durch

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sin(x) + ye^z \\ \cos(x)y - z^2 \\ xyz + e^{-x} \end{pmatrix}$$

definierte Vektorfeld.



Wir wollen

$$\int_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

berechnen. Der Rand ∂W besteht aus 6 Seiten, die Berechnung wird also etwas aufwändiger. Stattdessen verwenden wir den Satz von Gauß. Wir haben bereits $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = xy + 2\cos(x)$ berechnen und erhalten damit

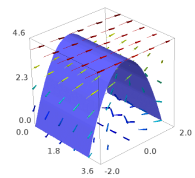
$$\begin{aligned}
\int_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_W \operatorname{div}(\mathbf{F})\, d(x,y,z) = \int_W (xy + 2\cos(x)) d(x,y,z) = \\
&= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{z=0}^1 (xy + 2\cos(x)) dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (xy + 2\cos(x)) dy \right) dx = \int_{x=0}^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 + 2\cos(x) y \right]_{y=0}^1 dx = \\
&= \int_{x=0}^1 (\frac{1}{2} x + 2\cos(x)) dx = \left[\frac{1}{4} x^2 + 2\sin(x) \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4} + 2\sin(1).
\end{aligned}$$

Beispiel: Sei G die Menge

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - y^2\}$$

und $\mathbf{F}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix}.$$



(In der Skizze fehlen die Seitenteile und der Boden von G.) Wir berechnen den Fluss von $\mathbf{F}$ durch ∂G mit dem Satz von Gauß. Es ist

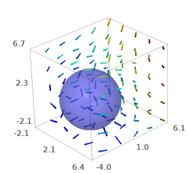
$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = -1 - x + 3 = 2 - x.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F}) d(x,y,z) = \int_{x=0}^{3} \left(\int_{y=-2}^{2} \left(\int_{z=0}^{4-y^2} (2-x) dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{3} \left(\int_{y=-2}^{2} [(2-x)z]_{z=0}^{4-y^2} \, dy \right) dz = \int_{x=0}^{3} \left(\int_{y=-2}^{2} (2-x)(4-y^2) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{3} (2-x) \left[4y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-2}^{2} dx = \int_{x=0}^{3} (2-x) \cdot \frac{32}{3} \, dx = \frac{32}{3} \left[2x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{3} = \\
&= \frac{32}{3} \cdot \left(6 - \frac{9}{2} \right) = 16.
\end{aligned}$$

Beispiel: Sei S die Oberfläche der Kugel mit Mittelpunkt $(3,-1,2)$ und Radius 3 und $\mathbf{F}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ -xz - y \\ y^2 + 2z \end{pmatrix}.$$



Dann ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3.$$

Das Volumen der Kugel K ist $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3$, sodass wir mit dem Satz von Gauß für den Fluss von $\mathbf{F}$ durch S erhalten

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_K 3 d(x,y,z) = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

Überlegung: Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld und $\mathbf{x}_0$ ein Punkt im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen sehen, was die Divergenz $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ bedeutet. Sei $\varepsilon > 0$ klein und K_ε die Kugel mit Mittelpunkg $\mathbf{x}_0$ und Radius ε. Sei S_ε die Oberfläche der Kugel. Die Kugel K_ε hat das Volumen $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\int_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{K_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{F}) d(x,y,z) \approx \int_{K_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) d(x,y,z) = \operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

und damit

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) \approx \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

wobei $\mathbf{n}$ das Feld der Normalenvektoren bezeichnet. Man beachte, dass $\mathbf{n}$ immer nach außen zeigt. Wir versuchen eine Interpretation:

- Ist $\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) > 0$, so gilt „öfter“ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} > 0$, es fließt also mehr aus S_ε heraus als hinein. (Man spricht von einer Quelle.)
- Ist $\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) < 0$, so gilt „öfter“ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} < 0$, es fließt also mehr in S_ε hinein als heraus. (Man spricht von einer Senke.)
- Ist $\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) = 0$, so fließt genauso viel in S_ε hinein wie hinaus.

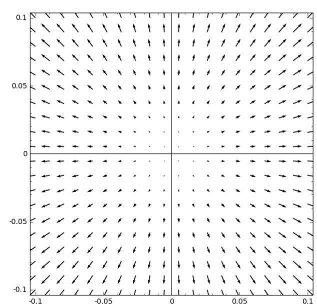
„Alles, was aus einem Bereich mehr ab- als zufließt, muss dort in Quellen entstehen. Fließt mehr zu als ab, muss es Senken geben, also Bereiche negativer Divergenz. Für den Fall, dass in B weder Quellen noch Senken sind, lässt sich das kurz und prägnant formulieren: Zufluss gleich Abfluss.“ (Mathematik, S.1018)
„Die Divergenz ist ein Maß für die Quelldichte eines Vektorfelds.“ (Mathematik, S.1002)

Beispiele: Der besseren Veranschaulichung wegen betrachten wir Vektorfelder in der Ebene. Was passiert im Nullpunkt?

(1) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

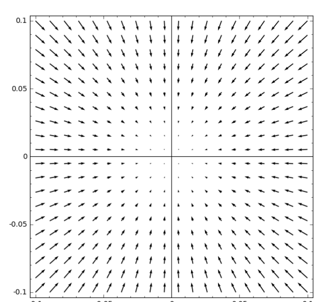
hat Divergenz 2, in $(0, 0)$ ist also eine Quelle.



(2) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

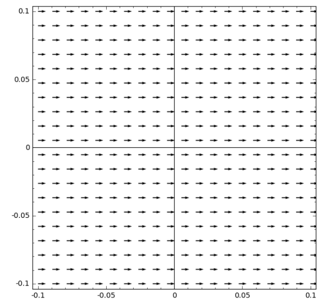
hat Divergenz -2, in $(0, 0)$ ist also eine Senke.



(3) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

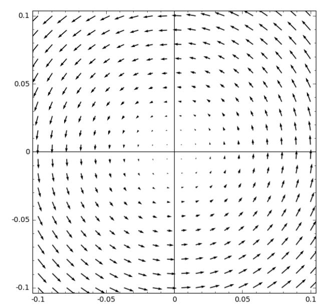
hat Divergenz 0, in $(0, 0)$ ist weder eine Quelle noch eine Senke.



(4) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hat Divergenz 0, in $(0, 0)$ ist weder eine Quelle noch eine Senke.



Für ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

definiert man die **Rotation** des Vektorfelds durch

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{F_z}{\partial y} - \frac{F_y}{\partial z} \\ \frac{F_x}{\partial z} - \frac{F_z}{\partial x} \\ \frac{F_y}{\partial x} - \frac{F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die Formeln lassen sich eventuell leichter merken, wenn man sie mit dem Nabla-Operator ∇ schreibt:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_z}{\partial y} - \frac{F_y}{\partial z} \\ \frac{F_x}{\partial z} - \frac{F_z}{\partial x} \\ \frac{F_y}{\partial x} - \frac{F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}(\mathbf{F}).$$

Beispiel: Für

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -1 \\ z \end{pmatrix}.$$

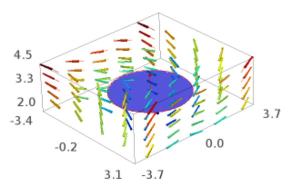
Satz (Stokes). *Sei S eine stückweise glatte Fläche mit stückweise glattem Rand ∂S und $\mathbf{F}$ ein auf S stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. (Dabei ist die Kurve ∂S so parametrisiert, dass sie den nach außen weisenden Normalenvektor der Fläche im mathematisch positiven Sinn umläuft.) Dann gilt*

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Beispiel: Sei K die Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ mit der Ebene $z = 3$, wobei die Orientierung so gewählt werden soll, dass die z-Achse in mathematisch positivem Sinn umlaufen werden soll. Außerdem sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.



- Wir wählen

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le t \le 2\pi \quad \text{ und } \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 2\cos(t) - 3 \\ 6\cos(t) \\ 4\sin(t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -4\cos(t)\sin(t) + 6\sin(t) + 12\cos(t)^2, \end{aligned}$$

und damit

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} \left(-4\cos(t)\sin(t) + 6\sin(t) + 12\cos(t)^2\right) dt = \cdots = 12\pi.$$

- Wir berechnen die Rotation des Vektorfelds:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Kreisfläche S parametrisieren wir so:

$$\mathbf{\Phi}(r, t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le r \le 2, 0 \le t \le 2\pi.$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix},$$

also zeigt der Normalenvektor in die gewünschte Richtung. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} -r\cos(t) + 2r\sin(t) \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} d(r,t) = \\ &= \int_{r=0}^{2} \left(\int_{t=0}^{2\pi} 3r dt \right) dr = 6\pi \int_{r=0}^{2} r dr = 6\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{2} = 12\pi. \end{aligned}$$

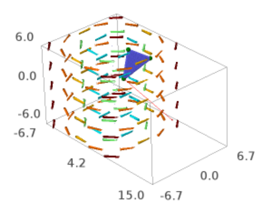
Dieses Ergebnis bestätigt den Satz von Stokes.

Beispiel: Gegeben seien die drei Punkte

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Sei K die aus Strecken bestehende geschlossene Kurve von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ nach $\mathbf{c}$ und zurück nach $\mathbf{a}$. Das Kurvenintegral

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

soll berechnet werden, wobei wir den Satz von Stokes verwenden wollen. K ist die Randkurve des Dreiecks Δ mit den Ecken $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Unter Verwendung von $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}$ parametrisieren wir das Dreieck mit

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \Phi(u,v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Der zugehörige Normalenvektor ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Anwendung des Satzes von Stokes brauchen wir die Rotation von $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial\Delta} \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = \int_\Delta \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_D \operatorname{rot}(\mathbf{F})(\Phi(u,v))\cdot(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v})d(u,v) = \\
&= \int_D \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\-4\\1\end{pmatrix} d(u,v) = 2\int_D d(u,v) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Sicherheitshalber berechnen wir das Kurvenintegral auch direkt: Wir parametrisieren zunächst die drei Strecken, wobei t jeweils von 0 bis 1 läuft:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ab}(t) &= \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \begin{pmatrix}1+t\\1+4t\\1+2t\end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\gamma_{ab}(t))\cdot\gamma_{ab}'(t) = \begin{pmatrix}-1-4t\\1+t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = 3, \\
\gamma_{bc}(t) &= \mathbf{b}+t(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \begin{pmatrix}2-t\\5-3t\\3+2t\end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\gamma_{bc}(t))\cdot\gamma_{bc}'(t) = \begin{pmatrix}-5+3t\\2-t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = -1, \\
\gamma_{ca}(t) &= \mathbf{c}+t(\mathbf{a}-\mathbf{c}) = \begin{pmatrix}1\\2-t\\5-4t\end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\gamma_{ca}(t))\cdot\gamma_{ca}'(t) = \begin{pmatrix}-2+t\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix} = -1.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{t=0}^1 \mathbf{F}(\gamma_{ab}(t))\cdot\gamma_{ab}'(t)dt + \int_{t=0}^1 \mathbf{F}(\gamma_{bc}(t))\cdot\gamma_{bc}'(t)dt + \int_{t=0}^1 \mathbf{F}(\gamma_{ca}(t))\cdot\gamma_{ca}'(t)dt = \\
&= 3-1-1 = 1.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt also mit dem oben ermittelten überein.

Bemerkung: Sei $A\subseteq\mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand ∂A sich aus stückweise glatten Kurven zusammensetzt. Wir können A als Fläche in $\mathbb{R}^3$ betrachten und folgende Parametrisierung verwenden:

$$\Phi : A\to\mathbb{R}^3 \text{ mit } \Phi(x,y) = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Seien $g(x,y)$ und $h(x,y)$ auf A stetig partiell differenzierbare Funktionen. Wir definieren das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix}g\\h\\0\end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g(x,y)\\h(x,y)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A}\begin{pmatrix}g(x,y)\\h(x,y)\\0\end{pmatrix}\cdot d\mathbf{s} &= \int_A \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_A \operatorname{rot}(\mathbf{F})(\Phi(x,y))\cdot(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y})d(x,y) = \\
&= \int_A (\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y})d(x,y).
\end{aligned}$$

Dies ist aber genau die Aussage des Satzes von Green, wenn man das erste Kurvenintegral in der Ebene aufschreibt.

Überlegungen: Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld mit Rotation $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$. Sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt im $\mathbb{R}^3$, in dem das Vektorfeld definiert ist. Sei $\mathbf{n}$ der normierte Vektor, der in die gleiche Richtung wie $\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)$ zeigt:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) = \|\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\|\,\mathbf{n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ klein und S_ε eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$, Radius ε und normiertem Normalenvektor $\mathbf{n}$. Dann gilt mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_{S_\varepsilon} \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot d\boldsymbol{\sigma} \approx \int_{S_\varepsilon} \mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_\varepsilon} \|\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \\ &= \|\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\| \int_{S_\varepsilon} d\sigma = \|\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\|\cdot\pi\varepsilon^2,\end{aligned}$$

also

$$\|\mathrm{rot}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)\| \approx \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Ist $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Kreises ∂S_ε, so ist

$$\int_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt.$$

Die Rotation ist also groß, wenn $\mathbf{F}(\gamma(t))$ möglichst in die gleiche Richtung wie die Tangentenrichtung $\gamma'(t)$ zeigt. Dies legt nahe, dass die Rotation etwas mit den „Dreheigenschaften“ des Vektorfelds zu tun hat. („Die Rotation eines Vektorfelds misst dessen (lokale) Wirbeldichte.“ (Mathematik, S.1000))

Beispiele: Wir betrachten nochmals die schon bei der Divergenz betrachteten Beispiele, schreiben sie aber 3-dimensional, damit die Rotation berechnet werden kann.

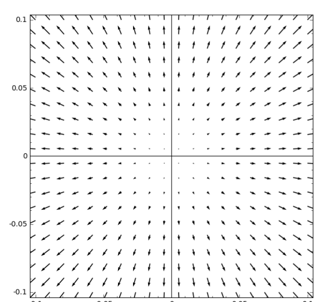
(1) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat Rotation

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier „dreht sich nichts“ im Nullpunkt.



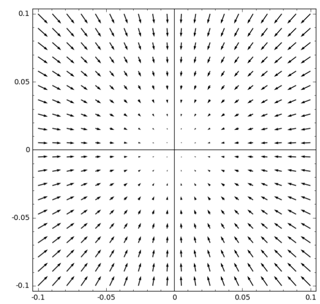
(2) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat Rotation

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch hier „dreht sich nichts“ im Nullpunkt.

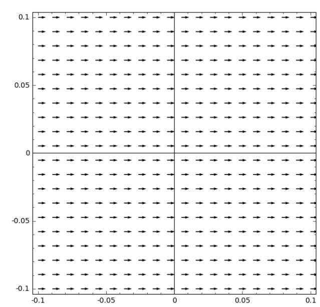


(3) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat Rotation

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



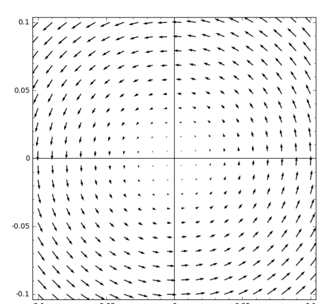
(4) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat Rotation

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist eine Drehung zu sehen.



(5) Wir betrachten die Vektorfelder

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(\mathbf{F}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei $\mathbf{F}_2$ ist eine Drehung zu sehen.