# Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

# Übungsblatt 11 (5.7.2024)

**Aufgabe 51:** In der Vorlesung wurde folgende Gleichung gezeigt:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \qquad \text{für} \qquad \mathrm{Re}\,(s) > 0, s \neq 1.$$

Zeige:

$$\zeta(s) = -\int_0^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \qquad \text{für} \qquad 0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1.$$

**Aufgabe 52:** In der Vorlesung wurde bewiesen, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{\psi(x)}{x} - 1\right)\frac{dx}{x}$$

existiert. Berechne seinen Wert.

**Aufgabe 53:** Zeige, dass für die Funktion

$$A(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor - 1}\frac{x^2}{\lfloor x \rfloor} \quad (x \geq 1)$$

das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^2} dx$$

existiert, berechne seinen Wert und zeige, dass $\frac{A(x)}{x}$ nicht gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 54:** Aus der Vorlesung wissen wir: Ist $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ beschränkt und auf jedem kompakten Teilintervall Riemann-integrierbar, so existiert für $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ das folgende uneigentliche Integral und definiert dort eine analytische Funktion $G(s)$:

$$G(s) = \int_0^\infty F(u)e^{-su} du \qquad \text{für} \qquad \mathrm{Re}\,(s) > 0.$$

Bestimme in den folgenden Fällen $G(s)$ und untersuche, ob sich $G(s)$ zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen lässt. Existiert das uneigentliche Integral für $s = 0$? Was sagt der Korevaar-Newman-Taubersatz dazu?

(1) Für ein vorgegebenes $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei $F(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq u \leq \lambda, \\ 0 & \text{für } u > \lambda. \end{cases}$

(2) $F(u) = 1$.

(3) $F(u) = \cos u$.

---

Datei: anazt_u11.tex. Version vom 4.7.2024

**Aufgabe 55:**

(1) Zeige, dass die Dirichletreihe
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^s}$$
die Konvergenzabszisse $\sigma_k = 1$ hat. Durch
$$f(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^s} \text{ für } \mathrm{Re}\,(s) > 1$$
wird also für $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ eine analytische Funktion $f(s)$ definiert.

(2) Zeige, dass sich $f(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen lässt.

(3) Bestimme die Polstellen von $f(s)$.

(4) Bestimme die Nullstellen von $f(s)$.

(5) Zeige, dass die Funktionalgleichung $f(2-s) = -f(s)$ gilt.