Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 7 (7.6.2024)

Aufgabe 31: Zeige, dass aus der Existenz einer reellen Zahl $\alpha < 1$ mit $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ folgen würde, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} - \log x\right)$$

existiert. (Hinweis: Partielle Summation. Bemerkung: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass aus der Existenz des obigen Grenzwerts der Primzahlsatz $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1$ folgt. Es wird zwar vermutet, dass $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ für alle $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ gilt, dies wurde bisher aber für kein α bewiesen.)

Aufgabe 32: Für $x > 1$ sei $M(x)$ die Menge der natürlichen Zahlen $n \le x$, die einen Primteiler $p > \sqrt{x}$ besitzen, d.h.

$$M(x) = \{n \le x : \text{ es gibt eine Primzahl } p \text{ mit } p \mid n \text{ und } p > \sqrt{x}\}.$$

Zeige:

(1)
$$M(x) = \bigcup_{\sqrt{x}<p\le x}\left\{k\cdot p : 1 \le k \le \left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\right\}.$$

(2)
$$|M(x)| = \sum_{\sqrt{x}<p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor = \sum_{\sqrt{x}<p\le x}\frac{x}{p} - \sum_{\sqrt{x}<p\le x}\left(\frac{x}{p} - \left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\right).$$

(3)
$$|M(x)| = (\log 2)\cdot x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

(Hinweis: Benutze die Formel für $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$ und eine Abschätzung für $\pi(x)$.)

(4)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{|M(x)|}{x} = \log 2,$$

(Der Anteil der natürlichen Zahlen $\le x$ mit einem Primteiler $> \sqrt{x}$ ist also ungefähr $\log 2 \approx 0.69$.)

Aufgabe 33:

(1) Zeige für eine Funktion $f : [2,\infty) \to (0,\infty)$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$f(x) = \log x + O(1) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

(2) Zeige, dass es eine Konstante c gibt, sodass gilt

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{c\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

(Hinweis: Benutze die Formel für $\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.)

Datei: anazt_u7.tex. Version vom 6.6.2024

Aufgabe 34: $\tau(n)$ bezeichne die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n.

(1) Zeige, dass für $n \geq 2$ gilt
$$\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

(2) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die gilt
$$\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} d = n.$$

(*Bemerkung:* Die additive Form der Bedingung aus (2) lautet
$$\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} d = n.$$
Zahlen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man *vollkommen*. Bis heute gibt es eine Reihe offener Fragen im Zusammenhang mit vollkommenen Zahlen.)

Aufgabe 35: Bestimme die Nullstellen der Dirichlet-Reihe
$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s}.$$
(Hinweis: $(x-1)(1+x+x^2) = x^3 - 1$)