

Lineare Differenzen- Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine kurze
vollständige Theorie

© Edgar M.E. Wermuth
Fakultät AMP, TH Nürnberg
SS 2008/2012/2015

a) Gleichungen erster Ordnung

Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \lambda x_n &= f_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{x_n}{\lambda^n} &= \lambda^{-n-1} f_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ \Leftrightarrow \frac{x_n}{\lambda^n} - \frac{x_0}{\lambda^0} &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k-1} f_k \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \lambda^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} f_k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit beliebigem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Die erhaltene Darstellung gilt trivialerweise auch für $\lambda = 0$.

b) Gleichungen zweiter Ordnung

Sei $b \neq 0$ und $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, also $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n &= f_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ \Leftrightarrow (x_{n+2} - \lambda_2 x_{n+1}) - \lambda_1 (x_{n+1} - \lambda_2 x_n) &= f_n \\ \stackrel{a)}{\Leftrightarrow} x_{n+1} - \lambda_2 x_n &= \lambda_1^n (x_1 - \lambda_2 x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^{n-1-k} f_k \end{aligned}$$

$$x_{n+1} - \lambda_2 x_n = \lambda_1^n (x_1 - \lambda_2 x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^{n-1-k} f_k$$

$$\stackrel{a)}{\Leftrightarrow} x_n = \lambda_2^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2^{n-1-k} \cdot \left(\lambda_1^k (x_1 - \lambda_2 x_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-i} f_i \right)$$

Nun gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^k \lambda_2^{n-1-k} = \begin{cases} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ n \lambda_1^{n-1}, & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

und (Summationsreihenfolge vertauschen)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2^{n-1-k} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-i} f_i &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} \lambda_1^{k-1-i} \lambda_2^{n-1-k} f_i, \end{aligned}$$

weshalb man erhält:

$$x_n = \lambda_1^n \frac{x_1 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^n \frac{x_1 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda_1^{n-1-k} - \lambda_2^{n-1-k}}{\lambda_1 - \lambda_2} f_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$x_n = \lambda_1^n x_0 + n \lambda_1^{n-1} (x_1 - \lambda_1 x_0) + \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) \lambda_1^{n-2-k} f_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$.

Spezialfall: a, b reell, aber $b - a^2/4 > 0$,
 $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \sqrt{b - a^2/4}$. Mit $\omega := \arccos \frac{-a}{2\sqrt{b}}$
 und damit $\omega \in (0, \pi)$ also in diesem Fall

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{b} e^{\pm i\omega}, \quad \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = b^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\sin n\omega}{\sin \omega}$$

und daher für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} x_n &= b^{(n-1)/2} \frac{\sin n\omega}{\sin \omega} x_1 - b^{n/2} \frac{\sin (n-1)\omega}{\sin \omega} x_0 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} b^{(n-2-k)/2} \frac{\sin (n-1-k)\omega}{\sin \omega} f_k \end{aligned}$$

Dabei wurde die Umformung

$$\lambda_1^n \frac{x_1 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^n \frac{x_1 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} x_1 - \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} b x_0$$

der allgemeinen homogenen Lösung benutzt.

c) Der Rekursionsschritt

Angenommen, für Gleichungen k -ter Ordnung

$$x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n$$

(mit $a_0 \neq 0$) habe man schon eine durch k Anfangsbedingungen eindeutig bestimmte Lösungsformel.

Mit

$$\lambda^{k+1} + a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda^k + b_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0)(\lambda - \lambda_0)$$

ergibt sich gemäß Abschnitt a):

$$x_{n+k+1} + a_k x_{n+k} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\Leftrightarrow x_n = \lambda_0^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0^{n-1-k} \cdot y_k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit der eindeutigen Lösung y_n von

$$y_{n+k} + b_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + b_1 y_{n+1} + b_0 y_n = f_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und $y_i = x_{i+1} - \lambda_0 x_i \quad (0 \leq i \leq k-1)$.

In Abschnitt b) wurde der erste Rekursions-schritt explizit durchgerechnet. *Existenz und Eindeutigkeit* der Lösung jedes Anfangswert-problems ist per Induktion mitbewiesen.

d) Die allgemeine homogene Lösung

Wir wollen zeigen: Für $a_0 \neq 0$ sowie

$$\lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_l)^{k_l}$$

mit lauter verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ gilt

$$x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\Leftrightarrow x_n = (c_{10} + c_{11}n + \dots + c_{1,k_1-1}n^{k_1-1})\lambda_1^n + \dots + (c_{l0} + c_{l1}n + \dots + c_{l,k_l-1}n^{k_l-1})\lambda_l^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit beliebigen Konstanten $c_{10}, \dots, c_{l,k_l-1}$

Dass $x_n = n^i \lambda_1^n$ für $0 \leq i \leq k_1 - 1$ die ho-mogene DifferenzenGL erfüllt, wenn λ_1 k_1 -fache Nullstelle des charakteristischen Poly-noms ist, sieht man wohl auf direktestem Weg durch Bilden der Ableitungen

$$(\lambda \frac{d}{d\lambda})^i (\lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n),$$

die für $0 \leq i \leq k_1 - 1$ an der Stelle λ_1 ver-schwinden.

Dass *alle* Lösungen so darstellbar sind, zeigt per Induktion die Rekursionsformel: Beim Ein-setzen in diese entstehen Ausdrücke der Form $\lambda_0^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} k^i (\frac{\lambda_\nu}{\lambda_0})^k$ mit $\lambda_0 = \lambda_\nu$ oder $\neq \lambda_\nu$; man beachte, dass für $i \in \mathbb{N}$ bzw. $\in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^i = \frac{n^{i+1}}{i+1} - \frac{n^i}{2} + \text{niedrigere Potenzen von } n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^i \lambda^k = \lambda^n \left(\frac{n^i}{\lambda-1} - \frac{i \lambda n^{i-1}}{(\lambda-1)^2} + \text{niedr. Potenzen v. } n \right)$$

für $\lambda \neq 1$. Diese beiden Formeln folgen – per Induktion über i – unmittelbar aus

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^i \lambda^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^i \lambda^{k+1} - n^i \lambda^n$$

$$= \sum_{l=0}^i \lambda \binom{i}{l} \sum_{k=0}^{n-1} k^l \lambda^k - n^i \lambda^n.$$

e) Ansatz in Form der rechten Seite

Ist $x_n^{[p]}$ eine spezielle („partikuläre“) Lösung der inhomogenen DifferenzenGL (rechte Seite f_n), so ergibt

$$x_n = x_n^{[p]} + x_n^{[h]}$$

mit beliebigen homogenen Lösungen $x_n^{[h]}$ gemäß Abschnitt d) die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DifferenzenGL (wegen Linearität).

Bei gewissen einfachen Inhomogenitäten f_n gibt es *eine* Partikulärlösung „in Form der rechten Seite“, mit anderen Koeffizienten. Man braucht nicht die allgemeinen Lösungsformeln aus b) und c) und gelangt besonders schnell zur Lösungsgesamtheit.

Es geht um rechte Seiten der Gestalt

$$f_n = \alpha^n p_0(n)$$

mit $\alpha \neq 0$ und einem Polynom p_0 . Natürlich (Linearität!) sind auch *Summen* solcher Ausdrücke wie z.B. $f_n = n^2 \sin n = \frac{n^2}{2i} (e^{in} - e^{-in})$ zulässig.

Mit der „Operator-Schreibweise“

$$\Delta x_n := x_{n+1} - x_n, (\Delta - \lambda)x_n := \Delta x_n - \lambda x_n,$$

$$Tx_n := x_{n+1}, \Delta^{k+1} := \Delta \Delta^k, T^{k+1} := TT^k$$

$$\text{gilt } \Delta^k = (T - 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i T^{k-i},$$

$$\Delta(x_n \cdot y_n) = (\Delta x_n)y_n + (\Delta x_n)(\Delta y_n) + x_n(\Delta y_n).$$

Mit dieser Notation und

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

lautet die DifferenzenGL

$$(T - \lambda_1)(T - \lambda_2) \dots (T - \lambda_n)x_n = \alpha^n p_0(n)$$

oder (Δ ifferenzen- statt *T*ranslations-Operator)

$$(\Delta + 1 - \lambda_1) \dots (\Delta + 1 - \lambda_n)x_n = \alpha^n p_0(n).$$

Da $\Delta(\alpha^n g_n) = \alpha^n \cdot (\alpha \Delta + \alpha - 1)g_n$ für jede Folge g_n , ergibt der Ansatz

$$x_n^{[p]} = \alpha^n p_1(n)$$

in der DifferenzenGL (um α^n gekürzt)

$$(\alpha \Delta + \alpha - \lambda_1) \dots (\alpha \Delta + \alpha - \lambda_n)p_1(n) = p_0(n).$$

Wegen $\text{grad}(\alpha \Delta - \lambda)p = \text{grad } p \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ ist dabei $p_1(n) = n^r (c_0 + c_1 n + \dots + c_s n^s)$ mit $r = \text{Anzahl } \lambda_i, \text{ die } = \alpha \text{ sind}$ (*Resonanzgrad*), sowie $s = \text{grad } p_0$ zu setzen. Dann gibt's offenbar *genau ein* passendes p_1 .

(Erst $c_s \neq 0$, dann $c_{s-1}, \dots$, dann c_0 sind durch p_0 festgelegt.)

f) Variation der Konstanten

Es gibt ein allgemeines Verfahren, die Lösungen inhomogener linearer DifferenzenGlen (mit $a_0 \neq 0$)

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = f_n$$

mittels der Lösungsgesamtheit $c_1x_n^{[1]} + \dots + c_kx_n^{[k]}$ der zugehörigen homogenen DifferenzenGL ($f \equiv 0$) zu finden, die Lagrangesche Methode der *Variation der Konstanten*: Man setzt

$$x_n = c_n^{[1]}x_n^{[1]} + \dots + c_n^{[k]}x_n^{[k]}$$

in die DifferenzenGL ein. Um die Analogie zu den DGLen besser hervortreten zu lassen, benutzen wir die *Differenzenoperator-Schreibweise*, also

$$\begin{aligned} & (T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \dots + a_1T + a_0)x_n \\ &= ((\Delta + 1)^k + a_{k-1}(\Delta + 1)^{k-1} + \dots + a_1(\Delta + 1) + a_0)x_n \\ &= \Delta^k x_n + b_{k-1}\Delta^{k-1}x_n + \dots + b_1\Delta x_n + b_0x_n = f_n. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für $1 \leq i \leq k$

$$\Delta^k x_n^{[i]} + b_{k-1}\Delta^{k-1}x_n^{[i]} + \dots + b_1\Delta x_n^{[i]} + b_0x_n^{[i]} = 0.$$

Wir beachten nun $\Delta(u_n \cdot v_n) = \Delta u_n \cdot v_{n+1} + u_n \cdot \Delta v_n$.

Damit $\Delta x_n = \sum_{i=1}^k (\Delta c_n^{[i]} \cdot x_{n+1}^{[i]} + c_n^{[i]} \cdot \Delta x_n^{[i]})$.

Wir fordern $\sum_{i=1}^k \Delta c_n^{[i]} \cdot x_{n+1}^{[i]} = 0$ und erhalten

$$\Delta^2 x_n = \sum_{i=1}^k (\Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta x_{n+1}^{[i]} + c_n^{[i]} \cdot \Delta^2 x_n^{[i]}).$$

Wir fordern $\sum_{i=1}^k \Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta x_{n+1}^{[i]} = 0$ und erhalten

$$\Delta^3 x_n = \sum_{i=1}^k (\Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta^2 x_{n+1}^{[i]} + c_n^{[i]} \cdot \Delta^3 x_n^{[i]}).$$

Usw. bis:

Wir fordern $\sum_{i=1}^k \Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta^{k-2} x_{n+1}^{[i]} = 0$ und erhalten

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=1}^k (\Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[i]} + c_n^{[i]} \cdot \Delta^k x_n^{[i]}).$$

Wir fordern $\sum_{i=1}^k \Delta c_n^{[i]} \cdot \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[i]} = f_n$ (!) und erhalten

$$\Delta^k x_n + b_{k-1}\Delta^{k-1}x_n + \dots + b_1\Delta x_n + b_0x_n = f_n$$

wegen $\sum_{j=0}^k b_j \Delta^j x_n^{[i]} = 0$ ($1 \leq i \leq k$) (mit $b_k := 1$).

Insgesamt ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{[1]} & \dots & x_{n+1}^{[k]} \\ \Delta x_{n+1}^{[1]} & \dots & \Delta x_{n+1}^{[k]} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[1]} & \dots & \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[k]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_n^{[1]} \\ \Delta c_n^{[2]} \\ \vdots \\ \Delta c_n^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Mit der Cramerschen Regel und der zum DGL-Fall analogen Definition der *Wronski-Determinante*

$$W_n = \begin{vmatrix} x_{n+1}^{[1]} & \dots & x_{n+1}^{[k]} \\ \Delta x_{n+1}^{[1]} & \dots & \Delta x_{n+1}^{[k]} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[1]} & \dots & \Delta^{k-1} x_{n+1}^{[k]} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{n+1}^{[1]} & \dots & x_{n+1}^{[k]} \\ x_{n+2}^{[1]} & \dots & x_{n+2}^{[k]} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n+k}^{[1]} & \dots & x_{n+k}^{[k]} \end{vmatrix}$$

sowie der Determinanten $W_n^{[i]}$ ergibt sich

$$c_n^{[i]} = c_0^{[i]} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{W_j^{[i]}}{W_j} \quad (1 \leq i \leq k, n \in \mathbb{N}_0).$$

Die Überlegungen benutzen nirgends, dass die Koeffizienten a_i bzw. b_i *konstant* sind, gelten also auch bei *variablen* Koeffizienten.

Mit dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{k-1} \end{vmatrix} \cdot W_n = (-1)^k a_0 W_n$$

und damit $W_n = (-1)^{nk} a_0^n W_0 \neq 0$, da die Spalten von W_0 *jeden* Startwerte-Vektor $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})^T$ erzeugen können und $a_0 \neq 0$. (Im Falle von n *abhängiger* a_0 gilt $W_n = (-1)^{nk} W_0 \prod_{k=1}^n a_{0,k} \neq 0$, falls *alle* $a_{0,n} \neq 0$.)

Es ist also die Wronski-Determinante von k verschiedenen Lösungen der homogenen Gleichung genau dann für ein und damit für alle n ungleich 0, wenn es eine *Lösungs-Basis* ist.

g) Systeme erster Ordnung

Man kann eine lineare DifferenzenGL k -ter Ordnung auch in Matrix-Vektor-Form schreiben, indem man die Bezeichnungen

$$\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{f}_n := (0, \dots, 0, f_n)^T \in \mathbb{R}^k$ einführt; $\det A = (-1)^k a_0$.

Damit lautet die DifferenzenGL

$$\mathbf{x}_{n+1} = A \mathbf{x}_n + \mathbf{f}_n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wir nehmen dies zum Anlass, *ganz allgemein* solche vektoriellen linearen DifferenzenGlen erster Ordnung zu betrachten, mit einer beliebigen quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und beliebiger Vektor-Folge $(\mathbf{f}_n)$ aus $\mathbb{R}^k$.

Im homogenen Fall $\mathbf{f}_n \equiv \mathbf{0}$ folgt einfach $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$, und im Allgemeinfall $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} \mathbf{f}_i$. Es kommt also darauf an, möglichst einfach die *Potenzen der Koeffizientenmatrix* A zu bestimmen.

Ist A *diagonalisierbar*, d.h. im Falle der Existenz einer Eigenvektorbasis $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$, $A\mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$ ($1 \leq i \leq k$), folgt mit $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$, $A = B \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) B^{-1}$:

$$\mathbf{x}_n = B \left(\operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n) B^{-1} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{diag}(\lambda_1^{n-1-i}, \dots, \lambda_k^{n-1-i}) B^{-1} \mathbf{f}_i \right)$$

Im Falle der zu Anfang betrachteten speziellen Matrix A gilt übrigens: $\det(A - \lambda E) = (-1)^k (\lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)$ (A Begleitmatrix des Polynoms).

Ist A *nicht* diagonalisierbar, kann man z.B. mit dem Ansatz am Schluss des Abschnittes g) des Skripts zu linearen DGLen eine Formel für die Potenzen A^n bestimmen.

h) Erzeugende Funktionen

Anhand einiger Beispiele sei exemplarisch die Methode der erzeugenden Funktionen demonstriert, die sich den formalen Potenzreihenkalkül und das umfangreiche Arsenal bekannter Potenzreihenentwicklungen zunutze macht und nicht nur bei *linearen* Rekursionen anwendbar ist.

1) Die Fibonacci-Folge.

Diese ist gegeben durch

$$F_0 = F_1 := 1, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wir definieren die *erzeugende Funktion*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

(Alternative: $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$, sog. z -Transformation.) Es folgt

$$z f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} z^n, \quad z^2 f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n, \quad \text{also}$$

$$(1 - z - z^2) f(z) = 1 + (F_1 - F_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) z^n$$

und daher

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}z} \left(\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z} \right). \end{aligned}$$

Mit der bekannten Formel $(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (geometrische Reihe) folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) z^n. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Zum Vergleich noch zwei andere Herleitungen dieser Formel.

Zunächst der *Potenz-Ansatz*.

Aus $x_n = \lambda^n$ und $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ und damit $\lambda = 0$ (triviale Lösung) oder $\lambda^2 = \lambda + 1$ (*charakteristisches Polynom* der DifferenzenGL).

Das Polynom hat zwei verschiedene Nullstellen, nämlich

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Also gibt es die Lösungen $x_n = \lambda_1^n$, $x_n = \lambda_2^n$ und damit auch $x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ der Fibonaccischen DifferenzenGL. Durch die Anfangsbedingungen $x_0 = x_1 = 1$ werden die Koeffizienten c_1, c_2 festgelegt:

$$\begin{aligned} n=0: c_1 + c_2 &= 1; \quad n=1: c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1, \\ \text{woraus } (\lambda_2 - \lambda_1)c_1 &= \lambda_2 - 1, \quad c_1 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \text{ und} \\ c_2 &= \frac{\sqrt{5} - \lambda_1}{\sqrt{5}} = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}}, \text{ also } \boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})} \text{ folgt.} \end{aligned}$$

Nun die *Matrizen-Methode*.

Mit $\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ folgt $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{x}_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Um die Potenzen von A zu bestimmen, ermitteln wir die Eigenwerte und Eigenvektoren. $\det(A - \lambda E) = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$. Die Nullstellen, also die Eigenwerte, kennen wir schon: λ_1 und λ_2 .

Wegen $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ folgt

$$A \begin{pmatrix} -\lambda_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_i + 1 \end{pmatrix} = \lambda_{3-i} \begin{pmatrix} -\lambda_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

und daher

$$A^n \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Mit $\begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$ somit

$$\sqrt{5} A^n = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

und wegen $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$ schließlich

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2} \end{pmatrix}$$

Es gilt also auch $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = F_{n-1}A + F_{n-2}E$.

Mit $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ lässt sich die Fibonacci-Folge eindeutig für negative n fortsetzen; damit gilt $F_{-1} = 0$ und ansonsten $F_{-n} = (-1)^n F_{n-2}$ ($n \geq 2$).

$A^n = F_{n-1}A + F_{n-2}E$ kann man auch leicht unmittelbar per Induktion aus $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A + E$ folgern, und

wegen $A^m A^n = A^{m+n}$ folgt

$$\begin{pmatrix} F_{m-2} & F_{m-1} \\ F_{m-1} & F_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n-2} & F_{m+n-1} \\ F_{m+n-1} & F_{m+n} \end{pmatrix} \text{ und}$$

damit insbesondere

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_{n-1} + F_m F_n.$$

Es gibt *unzählige* Beziehungen zwischen den Fibonacci-Zahlen.

Durch mehrfache Anwendung der Rekursionsformel ergibt sich z.B. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2)$, woraus mit $F_2 F_0 - F_1^2 = 1$ per Induktion folgt („Cassini-Identität“, schon Kepler bekannt):

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1} \left(\begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = \det A^{n+1} \right).$$

2) Die Legendre-Polynome.

Diese Polynome $P_n(x)$ lassen sich rekursiv definieren durch

$$\begin{aligned} P_0(x) &:= 1, \quad P_1(x) := x, \\ P_{n+1}(x) &:= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Für festes x ist es eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit *variablen* Koeffizienten. $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{15}{6}x^3 - \frac{3}{2}x$, ...

Für die erzeugende Funktion

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n \geq 1} n P_n(x) \cdot z^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) P_{n+1}(x) \cdot z^n \\ &= x + \sum_{n \geq 1} (n+1) P_{n+1}(x) \cdot z^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2xz \cdot f'(z) + x \cdot f(z) &= \sum_{n \geq 1} (2n+1)x P_n(x) \cdot z^n + x, \\ (z \cdot f(z))' &= (\sum_{n \geq 0} P_n(x) \cdot z^{n+1})' = \sum_{n \geq 0} (n+1) P_n(x) \cdot z^n, \\ \text{also } z \cdot (z f(z))' &= \sum_{n \geq 1} n P_{n-1}(x) \cdot z^n \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z) - 2xz f'(z) - x f(z) + z(z f(z))' &= \sum_{n \geq 1} \underbrace{((n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x))}_{=0} z^n, \\ \text{d.h. } f'(z)(1 - 2xz + z^2) &= (x - z)f(z). \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung für $f(z)$.

Mit $\frac{x-z}{1-2xz+z^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln |1-2xz+z^2|$ folgt

$$f(z) = c e^{-\frac{1}{2} \ln |1-2xz+z^2|} = \frac{c}{\sqrt{|1-2xz+z^2|}}.$$

Wegen $1-2xz+z^2 = (x-z)^2 + 1-x^2$ kann man für $-1 < z < 1$ und $-1 \leq x \leq 1$ die Betragsstriche weglassen und erhält mit $f(0) = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = (1+z(z-2x))^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} z^k (z-2x)^k$$

(binomische Reihe!). Nun gilt

$z^k (z-2x)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-2x)^{k-j} z^{k+j}$, und mit $n := k+j$, $j = n-k$, $k-j = 2k-n$ sowie $k \leq n \leq 2k \Leftrightarrow n/2 \leq k \leq n$ sieht man:

Wird die Reihe nach Potenzen von z sortiert, wird z^n insgesamt mit $\sum_{n/2 \leq k \leq n} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n}$ multipliziert. Also folgt:

$$P_n(x) = \sum_{n/2 \leq k \leq n} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n}$$

Damit haben wir eine explizite Darstellung der Legendre-Polynome bestimmt. Mit $(-2)^{2k-n} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} = \frac{1}{n! 2^n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!}$ folgt eine andere *sehr elegante* Darstellung der Polynome:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

(Rodrigues-Formel, nach Benjamin Olinde Rodrigues).

Zur Rolle dieser Formel und zur Bedeutung der Legendre-Polynome Ausführlicheres in einem „Exkurs“ am Schluss.

Nun noch ein *nichtlineares* Rekursions-Beispiel.

3) Klammerungs-Möglichkeiten.

Ist $\circ$ eine *Verknüpfung* auf einer Menge M , also eine Abbildung, die jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen von M ein Element $a \circ b$ zuordnet, so erhält eine Verknüpfungskette $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$ erst dann einen wohlbestimmten Sinn, wenn man durch Klammerung diesen Ausdruck auf *Paarverknüpfungen* reduziert.

Z.B.: $(a_1 \circ a_2) \circ a_3$ und $a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$ sind die beiden Möglichkeiten der Klammerung bei einer Dreier-Kette, und $((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ a_4$, $(a_1 \circ (a_2 \circ a_3)) \circ a_4$, $(a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ a_4)$ sowie $a_1 \circ ((a_2 \circ a_3) \circ a_4)$, $a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ a_4))$ die 5 Möglichkeiten bei einer Vierer-Kette. Nur bei *assoziativen* Verknüpfungen ist das Ergebnis unabhängig von der Klammerung. Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ und die Multiplikation der Oktonionen (auch: Cayley-Zahlen oder Oktaven genannt) sind Beispiele für *nichtassoziative* Verknüpfungen.

Sei nun K_n die Anzahl der Klammerungsmöglichkeiten bei Kettenlänge n . Dann gilt also $K_3 = 2, K_4 = 5$, und wir vereinbaren noch $K_1 = K_2 = 1$, weil es ja genau eine eindeutige Bedeutung für a_1 und $a_1 \circ a_2$ gibt – auch wenn man gar keine Klammern braucht.

Damit ist folgende Rekursionsformel sofort klar:

$$K_n = K_1 K_{n-1} + K_2 K_{n-2} + K_3 K_{n-3} + \dots + K_{n-1} K_1$$

(Es gibt $K_i K_{n-i}$ Klammerungen des Typs $(a_1 \dots a_i) \circ (a_{i+1} \dots a_n)$.)

Dies ist eine *nichtlineare* Differenzengleichung. Für solche ist es im allgemeinen aussichtslos, eine „geschlossene“ Formel zu finden. Trotzdem gibt es in diesem Fall eine solche: $K_n = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{n\sqrt{\pi n}} (n \rightarrow \infty)$. Man könnte versuchen, diese Formel – sofern man sie irgendwie erraten und bei kleinen n -Werten bestätigt hat – anhand der Rekursionsformel per Induktion zu beweisen. Ein Induktionsbeweis ist jedoch hier allem Anschein nach *sehr schwierig*.

Aber mit der Methode der erzeugenden Funktionen kann man die Formel leicht *finden* und *beweisen*!

Mit $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} K_n z^n$ gilt

$$(f(z))^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_l z^l K_m z^m = \sum_{n=2}^{\infty} (K_1 K_{n-1} + \dots + K_{n-1} K_1) z^n$$

$$= f(z) - z.$$

Also $(f(z))^2 - f(z) + z = 0$ und damit $f(z) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-4z}$.

Da $f(0) = 0$, folgt $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4z)^n$. Mit etwas Umformung und Koeffizientenvergleich ergibt sich schließlich

$$K_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!} (-1)^n \cdot 4^n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n-1}.$$

Um die *Konvergenz* der betrachteten Potenzreihen muss man sich keine Gedanken machen, wenn man sich auf den algebraischen *Kalkül der formalen Potenzreihen* beruft. (Man kann aber $K_n < \frac{c}{n^{3/2}} a^n$ für hinreichend kleines c und großes a per Induktion aus der Rekursionsformel folgern, da $\frac{1}{k^{3/2}(n-k)^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} (\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{(n-k)^{3/2}})$.)

Gut lesbare Einführung zum Thema erzeugende Funktionen:

Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology, Second Edition*, Academic Press, New York 1994.

Exkurs: Ergänzende Bemerkungen zu den Legendre-Polynomen

1) Ausgehend von der Rodrigues-Formel $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ zeigen wir: Die P_n besitzen die Eigenschaften

(*) $\int_{-1}^1 P_m \cdot P_n = 0 \ (m \neq n), \quad P_n(1) = 1 \ (n \in \mathbb{N}_0)$
(Orthogonalität bzgl. des Skalarprodukts $(f, g) := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ im Vektorraum $C[-1, 1]$ der auf $[-1, 1]$ stetigen Funktionen sowie Normierung).

Durch $(n+1)$ -fache partielle Integration folgt für $m > n$:

$$\int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx$$

$$= \dots = (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}(x^2-1)^m \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(x^2-1)^n dx = 0,$$

da $\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}(x^2-1)^m \Big|_{x=\pm 1} = 0 \ (1 \leq k \leq m)$ und $n+1 \leq m$.

Die Normierung ergibt sich aus der Leibnizschen Produktregel für Ableitungen, $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, aus der folgt:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left((x+1)(x-1)^n \right) \Big|_{x=1} = \binom{n}{0} \left((x+1)^n \right)^{(0)} \left((x-1)^n \right)^{(n)} \Big|_{x=1} = 2^n n!$$

Aus der Rodrigues-Formel folgt auch, dass P_n als n -te Ableitung eines *geraden* Polynoms gerade oder ungerade ist, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

2) Wir wissen nun, dass die durch die Rodrigues-Formel definierten Polynome (*) erfüllen, also ein System von *Orthogonal-Polynomen* darstellen. Umgekehrt zeigen wir jetzt, dass die Bedingungen (*) das Polynom-System *charakterisieren*, also eindeutig festlegen, wenn man unter P_n jeweils irgendein Polynom vom Grade $\leq n$ versteht. In diesem Sinne ist also (*) *äquivalent* zur Rodrigues-Formel.

Sind $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ Polynome jeweils vom Grad $\leq 0, 1, \dots, n, \dots$, für die (*) gilt, so sind sie zunächst einmal – wegen der zweiten, der Normierungs-Bedingung – sämtlich vom Nullpolynom verschieden, außerdem untereinander orthogonal im Sinne des weiter oben definierten Integral-Skalarproduktes.

Ist $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ eine *verschwindende* Linearkombination, ergibt das Skalarprodukt mit P_k den Wert $\lambda_k \int_{-1}^1 |P_k|^2$, ist andererseits $= 0$. Also verschwinden alle λ_k ; d.h.: $P_0, P_1, \dots, P_n$ sind *linear unabhängig* im Vektorraum der Polynome. Da dies für alle n gilt, muss jedes P_n *genau* vom Grade n sein. Da es außerdem im Unterraum der Polynome vom Grade $\leq n$ nur *eine* zu P_0 bis P_{n-1} senkrechte Richtung geben kann (aus Dimensionsgründen), ist jedes P_n durch die Normierung eindeutig bestimmt, also genau mit dem durch die Rodrigues-Formel definierten Polynom identisch.

3) Wir zeigen: P_n hat n einfache Nullstellen in $(-1, 1)$.

Das Polynom $p_n(x) := (x^2-1)^n$ hat zwei jeweils n -fache Nullstellen: ± 1 . Nach dem Satz von Rolle hat p'_n eine *einfache* Nullstelle $\xi \in (-1, 1)$, außerdem $(n-1)$ -fache Nullstellen bei ± 1 . Also hat, wiederum nach Rolle, p''_n je eine einfache Nullstelle in $(-1, \xi)$ und $(\xi, 1)$, außerdem $(n-2)$ -fache Nullstellen bei ± 1 . Usw. Schließlich ergibt sich: $p_n^{(n)} = n! 2^n P_n$ hat n einfache Nullstellen in $(-1, 1)$.

4) Wir beweisen die *dreigliedrige Rekursionsformel* der P_n .

Offenbar gibt es eine Darstellung

$$P_{n+1}(x) = axP_n(x) + bP_n(x) + cP_{n-1}(x) + dP_{n-2}(x) + \dots$$

Das Skalarprodukt dieser Darstellung von P_{n+1} mit P_n ergibt

$$0 = a \int_{-1}^1 x P_n^2(x) dx + b \int_{-1}^1 P_n^2 + 0 = b \int_{-1}^1 P_n^2$$

und damit $b = 0$, da $x P_n^2(x)$ eine *ungerade* Funktion ist.

Das Skalarprodukt mit P_{n-2} ergibt $0 = d \int_{-1}^1 P_{n-2}^2$, also $d = 0$;

Analoges gilt für alle P_k mit $k \leq n-2$.

Fazit: $P_{n+1}(x) = ax P_n(x) + c P_{n-1}(x)$, eine *dreigliedrige* Rekursion!

Aus der Rodrigues-Formel folgt $P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + c_n x^{n-2} + \dots$

Wegen $\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{2n+1}{n+1}$ also $a = \frac{2n+1}{n+1}$.

Mit $1 = P_{n+1}(1) = a + c$ ergibt sich schließlich $c = -\frac{n}{n+1}$.

(Auch auf andere Klassen von Orthogonal-Polynomen, bei denen man Skalarprodukte *mit Gewichtsfunktionen* zugrundelegt, ist die Methode der Rodrigues-Formel – *mit Gewicht* – anwendbar; es ergeben sich ähnliche *dreigliedrige Rekursionsformeln*.)

5) Wir bestimmen $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$. Dazu integrieren wir

$$2^{2n} (n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$$

n -mal partiell und erhalten

$$(-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n (2n)! dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx =: (2n)! I_n.$$

Nun gilt $I_0 = 2$ und $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ (partielle Integration!), also

$$I_n = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ und damit: } \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

6) Die Legendre-Polynome sind *Lösungen einer DGL*, die wir nun herleiten. Aus der Leibniz-Produktregel folgt nach etwas Umformung:

$$\begin{aligned} x f^{(n+1)} &= ((x f)' - (n+1) f)^{(n)}, & x^2 f^{(n+2)} &= \\ &= ((x^2 f)'' - 2(n+2)(x f)' + (n+2)(n+1) f)^{(n)} \text{ und damit} \\ (x^2 - 1) f^{(n+2)} + 2x f^{(n+1)} - n(n+1) f^{(n)} &= \left(((x^2 - 1) f)'' - 2(n+1)(x f)' \right)^{(n)}. \end{aligned}$$

Mit $f(x) = (x^2 - 1)^n$ daher: $(x^2 - 1) P_n'' + 2x P_n' - n(n+1) P_n = 0$.

7) Durch ein wenig Umformung ergibt sich mit der erzeugenden

$$\text{Funktion: } \frac{1}{|R e^{i\Phi} - r e^{i\varphi}|} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos(\Phi - \varphi)) \quad (R > r > 0).$$

8) Die Legendre-Polynome spielen in mancherlei Zusammenhang eine wichtige Rolle, z.B. bei elektrischen Potentialen und in der Quantentheorie (Stichworte: Schrödingergleichung, kugelsymmetrische Probleme, Kugelflächenfunktionen,...).

Wir beschränken uns exemplarisch auf *ein* rechenpraktisches Anwendungsgebiet, nämlich *Gaußsche Quadraturformeln*.

Es geht um die *näherungsweise* Berechnung von bestimmten Integralen durch eine gewichtete Summe von Funktionswerten:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n)$$

Wie sind die Stützstellen $x_1, \dots, x_n$ und die Gewichte zu wählen, damit die Näherungsformel für Polynome bis zu einem möglichst hohen Grad *exakt* richtig ist?

Das Lagrange-Polynom $L(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Lambda_k(x)$ mit $\Lambda_k(x) := \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ stimmt an den Stützstellen mit f überein, ist also

identisch mit f , wenn dieses selbst Polynom vom Grade $< n$ ist.

Die Formel ist also genau dann *exakt* für *alle* Polynome $< n$ -ten Grades, wenn sie für die Polynome Λ_k *exakt* ist, also die Gewichte $w_k = \int_{-1}^1 \Lambda_k(x) dx$ gewählt werden. Mit diesen w_k optimieren wir nun die Wahl der Stützstellen.

Ist f irgendein Polynom, hat $f(x) - L(x)$ die Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, so dass also $f(x) - L(x) = q(x) \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ mit einem Polynom q . Daher $\int_{-1}^1 f - \int_{-1}^1 L = \int_{-1}^1 q(x) \prod_{k=1}^n (x - x_k) dx$. Dies verschwindet für alle Polynome q bis zum Grade $n-1$, *wenn* $x_1, \dots, x_n$ die Nullstellen von P_n sind! *Das* ist die optimale Stützstellen-Wahl u. ergibt die *Gauß/Legendre-Quadraturformeln*. Polynome f bis Grad $2n-1$ werden *exakt* integriert, insbes. $\int_{-1}^1 \Lambda_k^2 = w_k > 0$.

Exkurs II**: Ein Satz von Henri Poincaré

Die Legendre-Polynome sind ein Beispiel für die Lösung einer linearen Differenzengleichung mit *variablen* Koeffizienten „in geschlossener Form“, insofern man durch eingehende Analyse so genaue Kenntnisse über die Eigenschaften der Lösungsfunktionen zusammengetragen hat, dass sie den bekannten elementaren Funktionen an die Seite gestellt werden können. Dies ist auch ganz allgemein die Rolle der sogenannten *speziellen Funktionen* im Zusammenhang mit der Lösung von DGLen: Die Lösungen wichtiger DGLen wurden von vielen Mathematikern gründlich erforscht und ihre Theorie in umfangreichen Handbüchern zusammengestellt und damit das Reich „bekannter“ Funktionen wesentlich erweitert.

Es gelingt aber auch, allgemeine *qualitative* Eigenschaften vom Spezialfall der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten auf solche mit variablen Koeffizienten zu übertragen. Henri Poincaré ist der wohl bedeutendste Begründer der qualitativen Theorie der DGLen und DifferenzenGlen. Exemplarisch sei hier einer seiner Sätze im einfachsten nichttrivialen Fall dargestellt.

Zunächst betrachten wir die Rekursion $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ mit der Lösungsgesamtheit $u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ oder $u_n = (c_1 + c_2n)\lambda_1^n$, je nachdem, ob $\lambda^2 = a\lambda + b$ zwei verschiedene Wurzeln λ_1, λ_2 oder eine Doppelwurzel λ_1 besitzt. Eine *nichtverschwindende* Lösung ist durch $|c_1| + |c_2| > 0$ gekennzeichnet. Dann gilt $u_n \neq 0$ für fast alle n , und es existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, mit *Ausnahme* des Spezialfalles $|\lambda_1| = |\lambda_2| \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$. Zu letzterem ein *Gegenbeispiel*:

Eine Lösung von $u_{n+2} = 2u_{n+1} - (1 + \tan^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}})u_n$ ist $u_n = (1 + \tan^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}})^{n/2} \cos n \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, und die Folge $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ hat *alle* reellen Zahlen als Häufungspunkte! Um das einzusehen, benutzt man, dass $\sqrt{2}$ irrational ist und für beliebiges irrationales θ die Folge der Werte $n\theta - \lfloor n\theta \rfloor$ dicht in $[0, 1]$ liegt. Wir belassen es bei dieser angedeuteten Begründung. Man kann sich auch *experimentell* durch einen Computer-Plot der Werte $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ davon überzeugen.

Nun der Satz von Poincaré (aus: *Sur les Équations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Différences finies*, Amer. Journal of Math. 7 (1885), 203-258).

Ein Satz von Henri Poincaré

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen reeller oder komplexer Zahlen, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Die Gleichung $\lambda^2 = a\lambda + b$ habe zwei Wurzeln λ_1, λ_2 mit $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Dann gilt für jede Lösung u_n der DifferenzenGL

$$u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n \quad (n \geq 0) \quad (*),$$

die nicht schließlich verschwindet (d.h.: es wird $u_n \neq 0$ für unendlich viele n vorausgesetzt):

(i) $u_n \neq 0$ für fast alle n ;

(ii) es existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ und ist gleich λ_1 oder gleich λ_2 .

Eine qualitative („asymptotische“) Aussage über die nichttrivialen Lösungen von (*): Sie wachsen ähnlich wie die nichttrivialen Lösungen der DifferenzenGL $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda e^{\delta_n} \Rightarrow u_n = u_0(\lambda e^{\varepsilon_n})^n$, $\varepsilon_n = \frac{\delta_1 + \dots + \delta_n}{n}$. Aber z.B. die Lösung $x_n = \frac{1}{n!}$ der Rekursion $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}x_{n-2}$ fällt *superexponentiell*. – Da man nur die *Grenzwerte* von a_n und b_n kennt, kann bei verschiedensten Anfangswerten u_0, u_1 die Folge der u_n schließlich verschwinden; deshalb die *Voraussetzung* hinsichtlich des Nichtverschwindens.

Der Satz gilt analog für DifferenzenGlen *höherer* Ordnung.

Beweis:

Als Ersatz für die im Falle *konstanter* Koeffizienten mögliche Zerlegung $u_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ in zwei Anteile mit λ_1 - bzw. λ_2 -Wachstum *definieren* wir eine dem in etwa entsprechende Zerlegung einer Lösung $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von (*) durch

$$u_n := v_n + w_n, \quad u_{n+1} := \lambda_1 v_n + \lambda_2 w_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Wir drücken nun v_{n+1} , w_{n+1} durch v_n, w_n aus:

Zum einen $u_{n+1} = v_{n+1} + w_{n+1} = \lambda_1 v_n + \lambda_2 w_n$, wegen (*) zum anderen $u_{n+2} = \lambda_1 v_{n+1} + \lambda_2 w_{n+1} = (a_n \lambda_1 + b_n) v_n + (a_n \lambda_2 + b_n) w_n$. Es gilt $c_n := a_n \lambda_1 + b_n \rightarrow a \lambda_1 + b = \lambda_1^2$, $d_n := a_n \lambda_2 + b_n \rightarrow a \lambda_2 + b = \lambda_2^2$ für $n \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir:

$$v_{n+1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - c_n}{\lambda_2 - \lambda_1} v_n + \frac{\lambda_2^2 - d_n}{\lambda_2 - \lambda_1} w_n = \lambda_1 v_n + \frac{\lambda_2^2 - c_n}{\lambda_2 - \lambda_1} v_n + \frac{\lambda_2^2 - d_n}{\lambda_2 - \lambda_1} w_n,$$

$$w_{n+1} = \frac{\lambda_2 \lambda_1 - d_n}{\lambda_1 - \lambda_2} w_n + \frac{\lambda_1^2 - c_n}{\lambda_1 - \lambda_2} v_n = \lambda_2 w_n + \frac{\lambda_2^2 - d_n}{\lambda_1 - \lambda_2} w_n + \frac{\lambda_1^2 - c_n}{\lambda_1 - \lambda_2} v_n.$$

Man erkennt, dass die v_n und die w_n im wesentlichen bei jedem Schritt um den Faktor λ_1 bzw. λ_2 wachsen, so dass „im Normalfall“ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} + w_{n+1}}{v_n + w_n}$ gegen λ_1 streben sollte; dies bleibt aber nun noch zu präzisieren.

Wir setzen $\varepsilon_n^2 := \max\left(\left|\frac{\lambda_1^2 - c_n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|, \left|\frac{\lambda_2^2 - d_n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|\right)$ (klar: $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$))) und zeigen als erstes:

(I) Mit passend gewähltem $\vartheta \in (0, 1)$ folgt für alle hinreichend großen n aus $v_n \neq 0$ und, sofern $\varepsilon_n > 0$, $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon_n}$, dass auch $v_{n+1} \neq 0$ und $\left|\frac{w_{n+1}}{v_{n+1}}\right| < \max\left(\varepsilon_n, \vartheta \left|\frac{w_n}{v_n}\right|\right)$.

Beweis von (I): Im Falle $\varepsilon_n = 0$ gilt einfach $v_{n+1} = \lambda_1 v_n \neq 0$ und $\frac{w_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{w_n}{v_n}$. Sei also $1 > \varepsilon_n > 0$ und $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon_n}$. Dann ergibt sich $|v_{n+1}| \geq |v_n| (|\lambda_1| - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n^2 \left|\frac{w_n}{v_n}\right|) \geq |v_n| (|\lambda_1| - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n) > 0$ für alle hinreichend großen n . Gilt nun $|w_n| < \varepsilon_n |v_n|$, folgt für hinreichend große n : $\left|\frac{w_{n+1}}{v_{n+1}}\right| \leq \varepsilon_n \frac{|\lambda_2| + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n}{|\lambda_1| - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n} < \varepsilon_n$; gilt $\varepsilon_n \leq \left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon_n}$, folgt

$\left|\frac{w_{n+1}}{v_{n+1}}\right| \leq \frac{|w_n|(|\lambda_2| + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n)}{|v_n|(|\lambda_1| - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n)} < \vartheta \left|\frac{w_n}{v_n}\right|$ für große n . Dies beweist (I).

Setzen wir nun $\delta_n := \max(\frac{1}{n}, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots)$ und wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\varepsilon_n < 1$ ($n \geq N$) und $\frac{|\lambda_2| + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n}{|\lambda_1| - \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n} < \vartheta < 1$ ($n \geq N$) mit einem festen ϑ , ergibt sich per Induktion:

(II) Gilt $v_n \neq 0$, $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{1}{\delta_n}$ für ein $n \geq N$, folgt $v_{n+k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $\left|\frac{w_{n+k}}{v_{n+k}}\right| < \max\left(\vartheta^k \left|\frac{w_n}{v_n}\right|, \vartheta^{k-1} \varepsilon_n, \vartheta^{k-2} \varepsilon_{n+1}, \dots, \vartheta \varepsilon_{n+k-2}, \varepsilon_{n+k-1}\right)$ und damit insbesondere $\left|\frac{w_{n+k}}{v_{n+k}}\right| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Nun eine Fallunterscheidung. 1. *Fall:* Es gibt beliebig große n mit $v_n \neq 0$ und $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{1}{\delta_n}$. Dann folgt nach (II) $v_n \neq 0$ für fast alle n , $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| \rightarrow 0$, also $u_n = v_n + w_n \neq 0$ für fast alle n und $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 w_n/v_n}{1 + w_n/v_n} \rightarrow \lambda_1$. 2. *Fall:* $v_n \neq 0$ für unendlich viele n , aber $\left|\frac{w_n}{v_n}\right| \geq \frac{1}{\delta_n}$ für fast alle diese n . Da unendlich viele u_n ungleich 0 sind, tritt niemals $u_n = u_{n+1} = 0$ ein, also auch *nie* $v_n = w_n = 0$. Für $v_n = 0$ somit immer $u_n = w_n \neq 0$, für $v_n \neq 0$ $u_n = w_n(\frac{v_n}{w_n} + 1) \neq 0$ und damit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \lambda_2, & \text{falls } v_n = 0, \\ \frac{\lambda_2 + \lambda_1 v_n/w_n}{1 + v_n/w_n}, & \text{sonst} \end{cases} \rightarrow \lambda_2$ ($n \rightarrow \infty$), da $\left|\frac{v_n}{w_n}\right| \leq \delta_n$. 3. *Fall:* Für fast alle n $v_n = 0$, also $u_n = w_n$, $u_{n+1} = \lambda_2 w_n$. ■

In mehreren Arbeiten (Journal f. reine u. angew. Math. 136 (1909), 17-37; 137 (1910), 6-64; 147 (1917), 36-53) vertiefte Oskar Perron den Satz und untersuchte, wann (und *ob* überhaupt) die verschiedenen Fälle auftreten. Poincarés Beweis lässt das offen. – Instrukтив folgendes einfache Perronsche *Beispiel*: $u_{n+2} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) u_n$. Es folgt $u_{2n} = u_0(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdots (1+\frac{1}{2n-1})$ und $u_{2n+1} = u_1(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4}) \cdots (1-\frac{1}{2n})$. Da $|u_{2n}| \rightarrow \infty$ für $u_0 \neq 0$ und $u_{2n+1} \rightarrow 0$, kann $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *niemals* existieren. ($a=0, b=1, \lambda_{1,2} = \pm 1$). Siehe H. Meschkowski, *Differenzengleichungen*, Göttingen 1959 (M. A. Jewgrafows Beweis des Perronschen Satzes (1953)); ferner S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 32005.