KAPITEL 5

Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung: Existenz, Eindeutigkeit, Randverhalten

1. Einführung

(1) Im $\mathbb{R}^n$ verwenden wir (meist) Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und schreiben

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Für eine reelle Variable verwenden wir meist t.

(2) Ist $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, so definiert

$$x' = f(t, x)$$

eine **Differentialgleichung 1. Ordnung** oder ein **Differentialgleichungssystem 1. Ordnung**. Ist

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

so kann man das Differentialgleichungssystem auch so schreiben:

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' & = & f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Hängt f nicht von t ab, d.h. hat man nur $f = f(x)$, so spricht man von einem **autonomen Differentialgleichungssystem**.

(3) Eine **Lösung der Differentialgleichung (des Differentialgleichungssystems)** ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, sodass gilt

$$(t, \varphi(t)) \in D \text{ für alle } t \in I$$

und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ für alle } t \in I.$$

(4) Ist $(t_0, x_0) \in D$, so versteht man unter einem **Anfangswertproblem** die Gleichungen

$$x' = f(t, x) \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Eine **Lösung des Anfangswertproblems** ist eine auf einem offenen und t_0 enthaltenden Intervall I definierte und differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(t, \varphi(t)) \in D \text{ für alle } t \in I, \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ für alle } t \in I \quad \text{und} \quad \varphi(t_0) = x_0$$

wieder unter der Voraussetzung $(t, \varphi(t)) \in D$ für alle $t \in I$.

(5) Es gibt auch andere geläufige Bezeichnungen: Statt x' findet man auch $\dot{x}$, statt $t, x, x_1, \ldots, x_n$, auch $x, y, y_1, \ldots, y_n$.

Datei: al_dgl5.tex. Version vom 17.12.2020

Beispiele:

(1) Im 4. Kapitel haben wir uns mit linearen Differentialgleichungssystemen beschäftigt:

$$f(t,x) = A(t)x + b(t),$$

wo $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall definierte und stetige Funktionen sind.

(2) Im 3. Kapitel haben wir lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung betrachtet, die sich in ein lineares Differentialgleichungssystem umwandeln lassen.

Beispiel: (Räuber-Beute-Modelle in der Populationsbiologie - die Lotka-Volterra Gleichungen)

- Die Anzahl der Individuen in der Beutepopulation zum Zeitpunkt t werde mit $x(t)$, die Anzahl der Individuen in der Räuberpopulation mit $y(t)$ bezeichnet.
- Gäbe es keine Räuber, so würde die Beutepopulation exponentiell wachsen:

$$x'(t) = ax(t) \text{ mit einer Konstanten } a > 0.$$

- Gäbe es keine Beute, so würde die Räuberpopulation exponentiell abnehmen:

$$y'(t) = -by(t) \text{ mit einer Konstanten } b > 0.$$

- Beim Zusammentreffen von Räubern und Beute ändert sich die Situation: Je mehr Räuber es gibt, desto weniger wächst die Beutepopulation:

$$x'(t) = (a - cy(t))x(t) \text{ mit einer Konstanten } c > 0.$$

Je mehr Beute es gibt, desto mehr wächst die Räuberpopulation:

$$y'(t) = (-b + dx(t))y(t) \text{ mit einer Konstanten } d > 0.$$

- Wir erhalten also das Differentialgleichungssystem

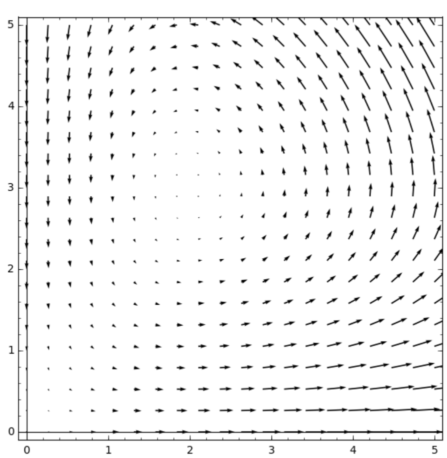
$$\begin{aligned} x' &= (a - cy)x \\ y' &= (-b + dx)y \end{aligned}$$

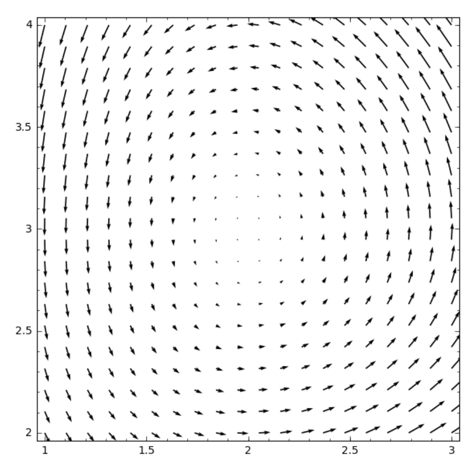
Kennt man zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahlen $x(0)$ und $y(0)$, so ist die Hoffnung, dass die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ durch das Differentialgleichungssystem bestimmt sind.

- In der Skizze wurde in jedem Punkt (x, y) der Vektor

$$\begin{pmatrix} (a - cy)x \\ (-b + dx)y \end{pmatrix}$$

angehängt. (Werte: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$) Die Pfeile sollten die Richtung der Lösungskurve angeben. Man spricht auch von Richtungsfeld.





2. Lipschitz-Stetigkeit

In der Analysis (Knauf. Analysis 2. S.67) wird eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) als **Lipschitz-stetig** bezeichnet, wenn eine Zahl $L \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass gilt

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X.$$

Beispielsweise ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, wenn es eine Zahl $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^m,$$

wobei jeweils die eukldische Norm zur Abstandsmessung verwendet wird.

Im Folgenden benötigen wir eine etwas speziellere Bedingung:

Definition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion (mit $f = f(t, x)$).*

(1) *Man nennt f* **global Lipschitz-stetig bzgl.** *x, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \textit{ für alle } (t, x), (t, y) \in D$$

gilt. (Man sagt auch, f erfüllt eine globale Lipschitz-Bedingung bzgl. x.)

(2) *Man nennt f* **lokal Lipschitz-stetig bzgl.** *x, wenn es zu jedem $(t_0, x_0) \in D$ eine offene Umgebung $U_{(t_0,x_0)} \subseteq D$ von (t_0, x_0) und ein $L_{(t_0,x_0)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_{(t_0,x_0)}\|x - y\| \textit{ für alle } (t, x), (t, y) \in U_{(t_0,x_0)}$$

gilt. (Man sagt auch, f erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x.)

Beispiele:

(1) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, x) = |x|$ ist wegen

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

global Lipschitz-stetig bzgl. x (Dreiecksungleichung).

(2) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, x) = t|x|$ ist wegen

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \big|t|x| - t|y|\big| = |t|\Big||x| - |y|\Big| \leq |t||x - y|$$

offensichtlich lokal Lipschitz-stetig.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t, x) = x^2$. Mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

sieht man, dass f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist. f ist nicht global Lipschitz-stetig.

(4) Sei $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t, x) = \sqrt{x}$. Es ist

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Für $\delta > 0$ und $x, y \in (\delta, \infty)$ gilt $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 2\sqrt{\delta}$, und damit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \cdot |x - y| \text{ für alle } x, y \in (\delta, \infty).$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, sieht man, dass f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist. Wäre f global Lipschitz-stetig, so gäbe es eine Zahl $L > 0$ mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in (0, \infty).$$

Dann würde aber

$$\frac{1}{L} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ für alle } x, y \in (0, \infty) \text{ mit } x \neq y$$

folgen, was natürlich nicht sein kann, da x und y beliebig nahe an die 0 kommen können.

(5) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten

$$f : I \times R^n \to \mathbb{R} \text{ mit } f(t,x) = A(t)x + b(t).$$

Dann gilt für $t \in I$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)x - A(t)y\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\|\|x-y\|.$$

Als stetige Funktion ist A auf kompakten Teilintervallen von I beschränkt, woraus sofort die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. x folgt.

Bemerkung: Ist $f = f(t,x)$ lokal (oder global) Lipschitz-stetig bezüglich x, so muss f noch nicht stetig sein, wie folgendes Beispiel zeigt: Für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$f(t,x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) \cdot x = \begin{cases} x & \text{für } t \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gilt

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t)(x-y)\| \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t)\|x-y\| \leq \|x-y\|,$$

sodass f global Lipschitz-stetig bzgl. x ist. Natürlich ist f nicht stetig.

Der folgende Satz gibt ein nützliches hinreichendes Kriterium um die lokale Lipschitz-Stetigkeit zu zeigen.

Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \ldots, f_n)^t : D \to \mathbb{R}^n$ mit $f_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$. Existieren dann die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ und sind sie stetig, so ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.*

Beweis:

- Sei $(t_0, x_0) \in D$ und U eine kompakte Umgebung von (t_0, x_0) in D der Gestalt

  $$U = \{(t,x) : |t - t_0| \leq \varepsilon, \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} \subseteq D.$$

  Die vorausgesetzte Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ und die Kompaktheit von U bewirkt, dass eine Zahl $K > 0$ existiert mit

  $$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right| \leq K \text{ für alle } (t,x) \in U \text{ und alle } i,j.$$

- Seien nun $(\widetilde{t}, p), (\widetilde{t}, q) \in U$. Wegen der Gestalt von U ist dann auch die Verbindungsstrecke in U, d.h.

  $$(\widetilde{t}, p + t(q-p)) \in U \text{ für alle } t \in [0,1].$$

- Wir wählen jetzt $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir betrachten

  $$g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } g(t) = f_i(\widetilde{t}, p + t(q-p)) = f_i(\widetilde{t}, p_1 + t(q_1 - p_1), \ldots, p_n + t(q_n - p_n)).$$

  g ist differenzierbar (nach der Kettenregel):

  $$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{t}, p + t(q-p)) \cdot (q_j - p_j).$$

  Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert ein $\xi \in (0,1)$ mit

  $$\frac{g(1) - g(0)}{1-0} = g'(\xi),$$

  also

  $$f_i(\widetilde{t}, q) - f_i(\widetilde{t}, p) = g'(\xi),$$

und damit

$$\begin{aligned} |f_i(\widetilde{t},p) - f_i(\widetilde{t},q)| &= |g'(\xi)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{t}, p + \xi(q-p)) \cdot (q_j - p_j) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{t}, p + \xi(q-p)) \right| |q_j - p_j| \leq \sum_{j=1}^{n} K|p_j - q_j| = \\ &= K \sum_{j=1}^{n} |p_j - q_j| = K\|p-q\|_1 \leq K\sqrt{n}\|p-q\|_2 = \\ &= \sqrt{n}K\|p-q\|. \end{aligned}$$

- Es folgt

$$\|f(\widetilde{t},p) - f(\widetilde{t},q)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(\widetilde{t},p) - f_i(\widetilde{t},q)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} nK^2\|p-q\|^2} = nK\|p-q\|.$$

  Da die letzte Abschätzung für alle $(\widetilde{t},p), (\widetilde{t},q) \in U$ gilt, folgt die lokale Lipschitz-Stetigkeit bzgl. x. ■

Beispiel: Wir betrachten das frühere Beispiel

$$f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(t,x) = \sqrt{x}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

stetig auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, also f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x.

Bemerkungen:

(1) Die Voraussetzungen des Satzes implizieren noch nicht die Stetigkeit von f, wie man am Beispiel

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(t,x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } t \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

sehen kann.

(2) Der Satz liefert nur ein hinreichendes Kriterium. So ist der Satz beispielsweise nicht auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(t,x) = |x|$$

anwendbar, da f in $(t,0)$ nicht nach x differenzierbar ist. Aber f ist sogar global Lipschitz-stetig (bzgl. x).

Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times R^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ist die Einschränkung $f|_K$ von f auf K global Lipschitz-stetig, d.h. es existiert eine Zahl $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \text{ für alle } (t,x),(t,y) \in K$$

gilt.

Beweis: Da f als stetig und K als kompakt vorausgesetzt wurde, existiert eine Zahl M mit

$$\|f(t,x)\| \leq M \text{ für alle } (t,x) \in K.$$

Insbesondere folgt

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq 2M \text{ für alle } (t,x),(t,y) \in K.$$

Angenommen, die Einschränkung von f auf K ist nicht global-Lipschitz stetig bzgl. x. Dann existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ Elemente $(t_n,x_n),(t_n,y_n) \in K$ mit

$$\|f(t_n,x_n) - f(t_n,x_n)\| > n\|x_n - y_n\|.$$

(Insbesondere gilt dann $x_n \neq y_n$.) Da K kompakt ist, besitzt (t_n, x_n) eine konvergente Teilfolge, die wir o.E. mit (t_n, x_n) identifizieren können. Sei

$$(t_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} (t_n, x_n).$$

Wegen

$$n\|x_n - y_n\| < \|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| \leq 2M$$

konvergiert auch y_n gegen x_0. Da f lokal Lipschitz-stetig ist, existiert ein $L_{(t_0,x_0)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine offene Umgebung $U_{(t_0,x_0)}$ von (t_0, x_0) mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_{(t_0,x_0)}\|x - y\| \text{ für alle } (t, x), (t, y) \in U_{(t_0,x_0)}.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty}(t_n, x_n) = (t_0, x_n) = \lim_{n\to\infty}(t_n, y_n)$$

existiert ein n_0 mit

$$(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in U_{(t_0,x_0)} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Es folgt

$$n\|x_n - y_n\| < \|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| \leq L_{(t_0,x_0)}\|x_n - y_n\| \text{ für alle } n \geq n_0,$$

ein offensichtlicher Widerspruch, da immer $x_n \neq y_n$ gilt. Also muss es eine Zahl L geben mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \text{ für alle } (t, x), (t, y) \in K.$$

Dies war zu zeigen. ■

3. Eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen

Wir haben bereits Beispiele für die nichteindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen kennengelernt. Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0$$

hat (neben anderen) die Lösungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(t) = \begin{cases} (\frac{t}{2})^2 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist nicht lokal Lipschitz-stetig, was man beispielsweise am Verhalten von

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \sqrt{n} \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

sehen kann. Solche Phänomene gibt es nicht, wenn man lokale Lipschitz-Stetigkeit voraussetzt.

Satz (Eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Sei $(t_0, x_0) \in D$. Seien*

$$\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n$$

zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

(Dabei sollten I_φ, I_ψ Intervalle sein, die t_0 enthalten.) Dann gilt

$$\varphi(t) = \psi(t) \text{ für alle } t \in I_\varphi \cap I_\psi.$$

Beweis: Sei $I = I_\varphi \cap I_\psi$. Wir definieren

$$\sigma : I \to \mathbb{R} \text{ mit } \sigma(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|^2 = (\varphi(t) - \psi(t)) \cdot (\varphi(t) - \psi(t)).$$

Es gilt

$$\sigma'(t) = 2\,(\varphi(t) - \psi(t)) \cdot (\varphi'(t) - \psi'(t)) = 2\,(\varphi(t) - \psi(t)) \cdot (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))).$$

Es folgt

$$|\sigma'(t)| \leq 2\|\varphi(t) - \psi(t)\|\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|.$$

Sei $J \subseteq I$ ein kompaktes Intervall mit $t_0 \in J$. Nun ist

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in J\} \cup \{(t, \psi(t)) : t \in J\}$$

eine kompakte Teilmenge von D. Die Einschränkung von f auf diese Teilmenge ist global Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Zahl $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\| \text{ für alle } t \in J.$$

Es folgt

$$|\sigma'(t)| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|^2 = L\sigma(t) \text{ für alle } t \in J.$$

Es ist $\sigma(0) = 0$. Aus einem früheren Lemma folgt

$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in J.$$

Also folgt

$$\psi(t) = \psi(t) \text{ für alle } t \in J.$$

Da I durch kompakte, t_0 enthaltende Intervalle überdeckt werden kann, folgt

$$\varphi(t) = \psi(t) \text{ für alle } t \in I.$$

Dies beweist die Behauptung. ■

FOLGERUNG. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig. Seien*

$$\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}^n \quad \textit{und} \quad \psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n$$

Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = f(t, x),$$

wobei I_φ und I_ψ offene Intervalle sind. Dann sind entweder die Graphen von φ und ψ disjunkt, d.h.

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in I_\varphi\} \cap \{(t, \psi(t)) : t \in I_\psi\} = \emptyset,$$

oder φ und ψ stimmen so weit möglich überein, d.h.

$$I_\varphi \cap I_\psi \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad \varphi(t) = \psi(t) \textit{ für alle } t \in I_\varphi \cap I_\psi.$$

Beweis: Seien die Graphen von φ und ψ nicht disjunkt. Dann gibt es

$$t_0 \in I_\varphi \cap I_\psi \text{ mit } \varphi(t) = \psi(t).$$

Also lösen φ und ψ das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = \varphi(t_0) = \psi(t_0).$$

Die Behauptung folgt dann aus dem vorangegangenen Satz. ■

Anwendung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig. $x' = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Sind $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0$, so sind

$$\varphi_1(t) = x_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = x_2$$

(triviale) Lösungen der Differentialgleichung. Ist nun φ eine Lösung der Differentialgleichung mit $x_1 < \varphi(0) < x_2$, so gilt

$$x_1 < \varphi(t) < x_2 \text{ für alle } t, \text{ für die } \varphi(t) \text{ definiert ist.}$$

4. Umwandlung der Differentialgleichung in eine Integralgleichung - Picard-Iteration

Bemerkung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ wird gegeben durch n Funktionen $f_i : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Sind die einzelnen Funktionen f_i über das Intervall $[a, b]$ integrierbar, so definiert man

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden benötigen wir folgende Abschätzung:

Lemma. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann gilt*

$$\| \int_a^b f(t)dt\| \leq | \int_a^b \|f(t)\|dt|.$$

Beweis: Wir setzen o.E. $a \leq b$ voraus. Wir schreiben

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad w_i = \int_a^b f_i(t)dt \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \int_a^b f(t)dt.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i \int_a^b f_i(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n w_i f_i(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b w \cdot f(t)dt \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \|w\|\|f(t)\|dt = \|w\| \int_a^b \|f(t)\|dt. \end{aligned}$$

Ist $w = 0$, so ist nichts zu zeigen, andernfalls folgt

$$\| \int_a^b f(t)dt\| = \|w\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt,$$

die Behauptung. ■

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung, so gilt

$$\varphi(t) - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi'(u)du = \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u))du,$$

also

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u))du,$$

d.h. φ löst die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u))du.$$

Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig.*

(1) *Löst* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

so gilt

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u))du \text{ für alle } t \in I.$$

(2) *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein* t_0 *enthaltendes Intervall,* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *stetig mit* $(t,\varphi(t)) \in D$ *für alle* $t \in I$*, sodass gilt*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u)du \text{ für alle } t \in I,$$

dann ist φ *differenzierbar und löst das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Beweis:

(1) Den Teil (1) haben wir bereits bewiesen.
(2) Sei umgekehrt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u))du.$$

Dann ist auch $u \mapsto f(u,\varphi(u))$ stetig, also

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u))du$$

differenzierbar mit Ableitung $f(t,\varphi(t))$. Daher ist auch φ differenzierbar mit Ableitung

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)).$$

Natürlich gilt $\varphi(t_0) = x_0$. ■

Idee zur Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$**,** $x(t_0) = x_0$**:** Wir definieren rekursiv eine Funktionenfolge $\varphi_k(t)$ durch

$$\varphi_0(t) = x_0$$

und

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi_k(u))du.$$

Dies nennt man auch **Picard-Iteration**. Die Hoffnung ist, dass die Funktionenfolge $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ zumindest in der Nähe von $t = t_0$ gegen eine Lösung der Differentialgleichung konvergiert.

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

Wir starten mit

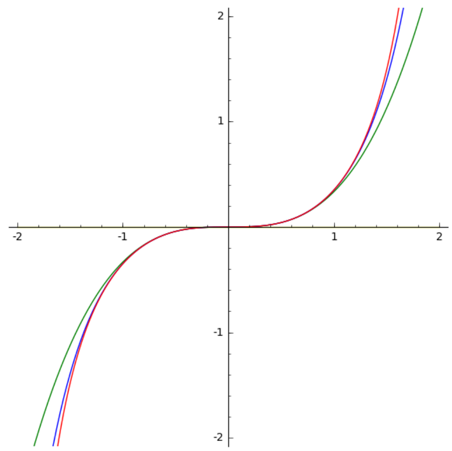
$$\varphi_0(t) = 0$$

und haben die Rekursionsformel

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t (u^2 + \varphi_k(u)^2)du.$$

Man findet:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7, \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7 + \frac{2}{2079}t^{11} + \frac{1}{59535}t^{15}.$$



(φ_0 ist gelb, φ_1 grün, φ_2 blau, φ_3 rot.)

Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} x' & = & (3-y)x \\ y' & = & (-2+x)y \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{array}$$

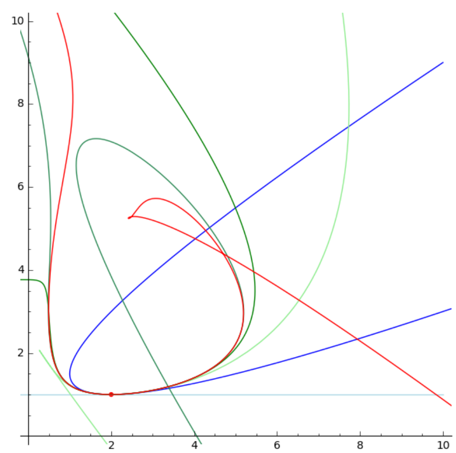
Die Rekursionsformeln lauten dann

$$\begin{aligned} x_{i+1}(t) &= 2 + \int_0^t (3 - y_i(u))x_i(u)du, \\ y_{i+1}(t) &= 1 + \int_0^t (-2 + x_i(u))y_i(u)du. \end{aligned}$$

Man erhält

$$x_1(t) = 2 + 4t, \quad y_1(t) = 1, \quad x_2(t) = 2 + 4t + 4t^2, \quad y_2(t) = 1 + 2t^2, \quad \ldots$$

Wir haben hier die Funktionen bis $(x_6(t), y_6(t))$ zeichnen lassen.



Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen die Picard-Iteration auf die homogene lineare Differentialgleichung $x' = Ax$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ anwenden, die wir natürlich schon gelöst haben:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= x_0 + \int_0^t A\varphi_0(u)du = x_0 + \int_0^t Ax_0 du = x_0 + tAx_0 = (I + tA)x_0, \\ \varphi_2(t) &= x_0 + \int_0^t A(I + uA)x_0 du = x_0 + tAx_0 + \frac{1}{t^2}A^2x_0 = (I + tA + \frac{1}{2}A^2)x_0. \end{aligned}$$

Weiter machen

5. Der Satz von Picard-Lindelöf

Für $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir

$$Z_{a,b}(t_0, x_0) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

$Z_{a,b}(t_0, x_0)$ ist eine kompakte Menge, die zylinderartig aussieht.

Satz (Picard-Lindelöf, quantitative Version). *Gegeben sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, eine stetige Funktion*

$$f : Z_{a,b}(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n,$$

Zahlen $M, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass gilt:

- *$\|f(t,x)\| \leq M$ für alle $(t,x) \in Z_{a,b}(t_0,x_0)$.*
- *$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$ für alle $(t,x_1),(t,x_2) \in Z_{a,b}(t_0,x_0)$.*

Sei

$$\widetilde{a} = \min(a, \frac{b}{M}) \text{ mit } \widetilde{a} = a \text{ im Fall } M = 0.$$

Durch die Vorschrift (Picard-Iteration)

$$\varphi_0(t) = x_0 \quad \text{und} \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi_k(u))du$$

werden dann rekursiv Funktionen φ_k definiert mit folgenden Eigenschaften:

(1) *φ_k ist auf dem Intervall $[t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}]$ definiert.*
(2) *$\|\varphi_k(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}]$.*
(3) *$\varphi_k : [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}] \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*
(4) *$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$ für $t \in [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}]$ und alle $k \geq 0$.*
(5) *Die Funktionenfolge (φ_k) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi : [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}] \to \mathbb{R}^n$.*
(6) *Die Funktion φ löst das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.*
(7) *Es gilt*

$$\|\varphi(t) - \varphi_k(t)\| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq ML^k \frac{\widetilde{a}^{k+1}}{(k+1)!} \text{ für alle } t \in [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}].$$

Beweis:

(1),(2),(3) Wir beweisen durch Induktion: Für $k = 0$ gelten offensichtlich die Aussagen (1),(2),(3). Wir setzen nun voraus, dass (1),(2),(3) bereits für φ_k gelten. Wegen (2) ist $(t, \varphi_k(t)) \in Z_{a,b}(t_0, x_0)$ für alle $t \in [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}]$, sodass $f(t, \varphi_k(t))$ definiert ist. Also ist durch die angegebene Formel auch φ_{k+1} definiert. Mit φ_k und f ist dann auch $t \mapsto f(t, \varphi_k(t))$ stetig, also auch φ_{k+1}. Nun gilt weiter für $t \in [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}]$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+1}(t) - x_0\| &= \|\int_{t_0}^t f(u, \varphi_k(u))du\| \leq |\int_{t_0}^t \|f(u, \varphi_k(u))\|du| \leq \\ &\leq |\int_{t_0}^t M du| = M|t - t_0| \leq M\widetilde{a} \leq M \cdot \frac{b}{M} = b, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung natürlich auch im Fall $M = 0$ gilt.

(4) Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Für $k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| &= \|\varphi_1(t) - x_0\| = \|\int_{t_0}^t f(u, x_0)du\| \leq |\int_{t_0}^t \|f(u, x_0)\|du \leq \\ &\leq |\int_{t_0}^t M du| = M|t - t_0|, \end{aligned}$$

die Behauptung ist also richtig für $k = 0$. Sei nun

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

bereits gezeigt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+2}(t)-\varphi_{k+1}(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t}\Big(f(u,\varphi_{k+1}(u))-f(u,\varphi_k(u))\Big)du\| \le \\
&\le |\int_{t_0}^{t}\|f(u,\varphi_{k+1}(u))-f(u,\varphi_k(u))\|du| \le \\
&\le |\int_{t_0}^{t}L\cdot\|\varphi_{k+1}(u)-\varphi_k(u)\|du| \le \\
&\le |\int_{t_0}^{t}L\cdot ML^k\frac{|u-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}du| = ML^{k+1}\frac{|t-t_0|^{k+2}}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.

(5),(6) Es ist

$$\varphi_k(t)-x_0=\varphi_k(t)-\varphi_0(t)=\sum_{i=0}^{k-1}(\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)).$$

Wir betrachten die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t))$: Es gilt für $t\in[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}]$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\| &\le \sum_{i=0}^{\infty}ML^i\frac{|t-t_0|^{i+1}}{(i+1)!}=\frac{M}{L}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|)^{i+1}}{(i+1)!}= \\
&= \frac{M}{L}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|)^i}{i!}=\frac{M}{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|)^i}{i!}-1\right)= \\
&= \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)\le\frac{M}{L}\left(e^{L\widetilde{a}}-1\right).
\end{aligned}$$

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium konvergiert daher die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t))$ gleichmäßig auf dem Intervall $[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}]$. Dies bedeutet, dass die Folge der Partialsummen, also $\varphi_k(t)-x_0$ und damit auch $\varphi_k(t)$ gleichmäßig auf $[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}]$ konvergiert. Sei

$$\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)$$

die Grenzfunktion. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist die Grenzwert $\varphi(t)$ ebenfalls stetig und natürlich gilt auch

$$\|\varphi(t)-x_0\|\le b \text{ für alle } t\in[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}],$$

also

$$(t,\varphi(t))\in Z_{a,b}(t_0,x_0) \text{ für alle } t\in[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}].$$

Daher ist $f(t,\varphi(t))$ für $t\in[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}]$ definiert. Nun gilt

$$\|f(t,\varphi(t))-f(t,\varphi_k(t))\|\le L\|\varphi(t)-\varphi_k(t)\|.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $\varphi_k(t)$ impliziert dann auch die gleichmäßige Konvergenz von $f(t,\varphi_k(t))$, sodass man Integration und Limesbildung vertauschen darf:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}f(u,\varphi(u))du &= \int_{t_0}^{t}f(u,\lim_{k\to\infty}\varphi_k(u))du=\int_{t_0}^{t}\lim_{k\to\infty}f(u,\varphi_k(u))du= \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(u,\varphi_k(u))du=\lim_{k\to\infty}(\varphi_{k+1}(t)-x_0)=\varphi(t)-x_0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt nach unseren Vorüberlegungen, dass $\varphi(t)$ das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[t_0-\widetilde{a},t_0+\widetilde{a}]$ löst. Da f global Lipschitz-stetig ist, ist die Lösung auch eindeutig bestimmt.

(7) Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Für $k=0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)-\varphi_0(t)\| &= \|\varphi(t)-x_0\|=\|\int_{t_0}^{t}f(u,\varphi(u))du\|\le|\int_{t_0}^{t}\|f(u,\varphi(u))\|du|\le \\
&\le |\int_{t_0}^{t}Mdu|=M|t-t_0|.
\end{aligned}$$

Es nun $k \geq 0$ und die Aussage bereits für k gezeigt. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - \varphi_{k+1}(t)\| &= \|\int_{t_0}^t f(u, \varphi(u))du - \int_{t_0}^t f(u, \varphi_k(u))du\| = \\
&= \|\int_{t_0}^t (f(u, \varphi(u)) - f(u, \varphi_k(u)))du\| \leq \\
&\leq |\int_{t_0}^t \|f(u, \varphi(u)) - f(u, \varphi_k(u))\|du| \leq \\
&\leq |\int_{t_0}^t L\|\varphi(u) - \varphi_k(u)\|du| \leq |\int_{t_0}^t L \cdot ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}du| = \\
&= ML^{k+1}\frac{|t-t_0|^{k+2}}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung durch Induktion. Der zweite Teil der Abschätzung mit $\widetilde{a}$ ist wegen $|t - t_0| \leq \widetilde{a}$ dann trivial. ■

Erstellen!

Satz (Picard-Lindelöf, qualitative Version). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Dann besitzt jedes Anfangswertproblem*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \textit{mit} \quad (t_0, x_0) \in D$$

eine eindeutig bestimmte lokale Lösung, d.h. es gibt ein $\widetilde{a} > 0$ und eine Lösung $\varphi : [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems, und diese ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Man wähle $a, b > 0$ mit $Z_{a,b}(t_0, x_0) \subseteq D$. Da f als lokal Lipschitz-stetig bzgl. x vorausgesetzt war, ist die Einschränkung auf die kompakte Menge $Z_{a,b}(t_0, x_0)$ sogar global Lipschitz-stetig bzgl. x, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \text{ für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in Z_{a,b}(t_0, x_0).$$

Da f stetig ist, ist f auf der kompakten Menge $Z_{a,b}(t_0, x_0)$ beschränkt, d.h. es gibt eine Zahl $M > 0$ mit

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ für alle } (t, x) \in Z_{a,b}(t_0, x_0).$$

Nun kann man die quantitative Version von Picard-Lindelöf anwenden und erhält eine Lösung

$$\varphi : [t_0 - \widetilde{a}, t_0 + \widetilde{a}] \to \mathbb{R}^n$$

des Anfangswertproblems. Dass die Lösung auf diesem Intervall eindeutig bestimmt hat, haben wir bereits früher gesehen. ■

Wir erwähnen noch eine Folgerung, die wir später für einen Beweis benötigen:

Folgerung. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x und $(t_0, x_0) \in D$. Dann gibt es eine Umgebung U von (t_0, x_0) und ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für jedes Paar $(\tau, \xi) \in U$ das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

eine Lösung

$$\varphi_{(\tau,\xi)} : [\tau - \delta, \tau + \delta] \to \mathbb{R}^n.$$

besitzt. (Wichtig ist, dass δ unabhängig von (τ, ξ) ist.)

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$Z_{a,b}(t_0, x_0) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Die Stetigkeit von f impliziert wegen der Kompaktheit von $Z_{a,b}(t_0, x_0)$, dass eine Zahl $M \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ für alle } (t, x) \in Z_{a,b}(t_0, x_0).$$

Da f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist, existiert wegen der Kompaktheit von $Z_{a,b}(t_0, x_0)$ eine Zahl $L > 0$ mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\| \text{ für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in Z_{a,b}(t_0, x_0).$$

Sei

$$U = Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(t_0, x_0) \text{ und } \delta = \min(\frac{a}{2}, \frac{b}{2M}).$$

Sei

$$(\tau, \xi) \in Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(t_0, x_0)$$

beliebig gegeben. Wir wenden die quantitative Version des Satzes von Picard-Lindelöf auf

$$f : Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(\tau, \xi) \to \mathbb{R}^n$$

an. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(\tau, \xi) \subseteq Z_{a,b}(t_0, x_0)$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ für alle } (t, x) \in Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(\tau, \xi)$$

und

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\| \text{ für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in Z_{\frac{a}{2},\frac{b}{2}}(\tau, \xi).$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf sind also erfüllt. Mit

$$\delta = \min(\frac{a}{2}, \frac{b}{2M})$$

erhalten wir eine Lösung

$$\varphi_{(\tau,\xi)} : [\tau - \delta, \tau + \delta] \to \mathbb{R}^n$$

des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi,$$

die wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit eindeutig bestimmt ist. Dies wollten wir zeigen. ■

Wir erwähnen hier noch einen Satz, der ohne Lipschitz-Stetigkeit auskommt.

Satz (Peano). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für jedes $(t_0, x_0) \in D$ besitzt dann das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

(mindestens) eine lokale Lösung, d.h. es existieren $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$, $\beta = \beta(t_0, x_0) > 0$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(t, \varphi(t)) \in D \quad \text{ und } \quad \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{ für alle } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Bemerkung: Betrachtet man das Anfangswertproblem

$$xx' = 1, \quad x(0) = 0,$$

so ist klar, dass es keine Lösung hat. Existenzaussagen, die für $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ gelten, lassen sich also nicht unbedingt verallgemeinern.

6. Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

In der zuvor angegebenen Fassung sagt der Satz von Picard-Lindelöf, dass jedes Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ lokal eindeutig lösbar ist, wenn f stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist. Nicht klar ist dabei, was global passiert.

LEMMA. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sind*

$$\varphi_1 : [t_1, t_0] \to \mathbb{R}^n \quad \textit{und} \quad \varphi_2 : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$$

Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ und gilt

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0),$$

so löst auch

$$\varphi : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n \ \textit{mit}\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \textit{für } t \in [t_1, t_0], \\ \varphi_2(t) & \textit{für } t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

die Differentialgleichung.

Beweis: Zunächst ist φ eine stetige Funktion. Natürlich löst φ die Differentialgleichung in allen Punkten $t \neq t_0$. Nun gilt aber

$$\varphi_1'(t_0) = f(t_0, \varphi_1(t_0)) = f(t_0, \varphi_2(t_0)) = \varphi_2'(t_0),$$

also ist auch φ in t_0 differenzierbar und löst dort die Differentialgleichung. ∎

SATZ (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Sei $(t_0, x_0) \in D$. Dazu existiert ein eindeutig bestimmtes, t_0 enthaltendes, offenes Intervall $(t_-, t_+) \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq t_- < t_0 < t_+ \leq \infty$ und folgenden Eigenschaften:*

(1) *Es existiert auf (t_-, t_+) eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, d.h. eine differenzierbare Funktion $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$, sodass gilt*

$$(t, \varphi(t)) \in D \quad \textit{und} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \textit{für alle } t \in (t_-, t_+) \quad \textit{und} \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

(2) *Ist $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so gilt $J \subseteq (t_-, t_+)$ und $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in J$.*

(t_-, t_+) wird das **maximale Existenz- oder Lösungsintervall** *genannt, φ die* **(eindeutig bestimmte), maximale Lösung** *des Anfangswertproblems. t_- und t_+ nennt man auch* **Entweichzeiten**.

Beweis:

- Wir definieren

$$t_- = \inf\{t_1 \in \mathbb{R} : \text{ das Anfangswertproblem hat eine Lösung auf } [t_1, t_0]\}$$

  und

$$t_+ = \sup\{t_2 \in \mathbb{R} : \text{ das Anfangswertproblem hat eine Lösung auf } [t_0, t_2]\}.$$

- Da das Anfangswertproblem nach dem Satz von Picard-Lindelöf lokal um $t = t_0$ lösbar ist, gilt

$$t_- < t_0 < t_+.$$

- Sei $t_0 < t < t_+$. Dann existiert ein t_2 mit $t < t_2 \leq t_+$ und eine Lösung des Anfangswertproblems $\varphi_1 : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\varphi(t) = \varphi_1(t).$$

  Ist $\varphi_2 : [t_0, \widetilde{t}_2] \to \mathbb{R}^n$ eine andere Lösung mit $t < \widetilde{t}_2 \leq t_+$, so liefert der Eindeutigkeitssatz $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ auf $[t_0, \min(t_2, \widetilde{t}_2)$. Damit ist $\varphi(t)$ eindeutig definiert und erfüllt natürlich die Differentialgleichung.
- Analog können wir φ auf dem Intervall $(t_-, t_0]$ definieren.
- Gäbe es eine Lösung φ auf dem Intervall $[t_0, t_+]$ mit $t_+ < \infty$, so wäre $(t_+, \varphi(t_+))$ in D, also erhielte man mit dem Satz von Picard-Lindelöf eine Lösung auf einem Intervall $[t_+ - \delta, t_+ + \delta]$, die natürlich auf $[t_+ - \delta, t_+]$ mit der ursprünglichen Lösung übereinstimmt. Damit hätte man eine Lösung auf $[t_0, t_+ + \delta]$, was der Definition von t_+ widerspricht. Analoges gilt für t_-.

- Sei $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ irgendeine Lösung des Anfangswertproblems. Wegen unseres Eindeutigkeitssatzes folgt sofort $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $J \cap (t_-, t_+)$. Wäre $J \not\subseteq (t_-, t_+)$, so erhielte man eine Lösung auf $J \cup (t_-, t_+)$, was der Maximilät widerspräche. ■

7. Randverhalten

Es gibt im Allgemeinfall keine einfache Formel für das maximale Lösungsintervall der maximalen Lösung. Der folgende Satz macht aber eine wesentliche Aussage dazu.

Satz (Randverhalten maximaler Lösungen). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ sei die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) *Fall $\partial D = \emptyset$, d.h. $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: Für t_+ gibt es zwei Möglichkeiten:*
   - $t_+ = \infty$.
   - $t_+ < \infty$. *Dann gilt* $\lim_{t \uparrow t_+} \|\varphi(t)\| = \infty$.

   Analog gibt es für t_- zwei Möglichkeiten:
   - $t_- = -\infty$.
   - $t_- > -\infty$. *Dann gilt* $\lim_{t \downarrow t_-} \|\varphi(t)\| = \infty$.

(2) *Fall $D \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d.h. $\partial D \neq \emptyset$: Für t_+ gibt es drei Möglichkeiten:*
   - $t_+ = \infty$.
   - $t_+ < \infty$ *und* $\lim_{t \uparrow t_+} \|\varphi(t)\| = \infty$.
   - $t_+ < \infty$ *und* $\lim_{t \uparrow t_+} \mathrm{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = 0$. *(Ist $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und gibt es eine Folge t_n mit $t_n \uparrow t_+$ und $\varphi(t_n) \to \widetilde{x}$, so gilt $(t_+, \widetilde{x}) \in \partial D$.)*

   Analog gibt es für t_- drei Möglichkeiten:
   - $t_- = -\infty$.
   - $t_- > -\infty$ *und* $\lim_{t \downarrow t_-} \|\varphi(t)\| = \infty$.
   - $t_- > -\infty$ *und* $\lim_{t \downarrow t_-} \mathrm{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = 0$.

Beweisskizze: Wir betrachten die maximale Lösung

$$\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$$

des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R} \times R^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x sein soll. Wir schauen uns nur den rechten Rand t_+ an.

(1) Ist $t_+ = \infty$, so ist die Lösung auf ganz $[t_0, \infty)$ definiert. Hier ist nichts zu zeigen.
(2) Wir betrachten nun den Fall $t_+ < \infty$. Wir wissen bereits, dass φ nicht in t_+ definiert ist. Wir betrachten, wie sich $\varphi(t)$ für $t \to t_+$ verhält.
   (a) Fall: $\lim_{t \to t_+} \|\varphi(t)\| = \infty$, d.h. für alle $M \geq 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass gilt
   $$\|\varphi(t)\| \geq M \text{ für alle } t \in (t_+ - \varepsilon, t_+).$$
   (b) Wenn dies nicht der Fall ist, gibt es ein $M \geq 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in (t_+ - \frac{1}{k}, t_+)$ existiert mit
   $$\|\varphi(t_k)\| \leq M.$$
   Die Folge $(\varphi(t_k))_{k \geq 1}$ ist beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge. O.E. konvergiert die Folge selbst, d.h. es gibt ein $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit
   $$\lim_{k \to \infty} \varphi(t_k) = \widetilde{x}.$$

(i) Angenommen, es wäre $(t_+, \widetilde{x}) \in D$. Nach einer Folgerung aus der quantitativen Version des Satzes von Picard-Lindelöf gibt es eine Umgebung U von $(t_+, \widetilde{x})$ in D und ein $\delta > 0$, sodass für jedes Paar $(\tau, \xi) \in U$ das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\varphi_{(\tau,\xi)} : [\tau - \delta, \tau + \delta] \to \mathbb{R}^n$$

besitzt. O.E. gilt $(t_k, \varphi(t_k)) \in U$. Also gibt es eine Lösung

$$\varphi_k : [t_k - \delta, t_k + \delta] \to \mathbb{R}^n$$

des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_k) = \varphi(t_k).$$

Da aber auch $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist, und zwar sogar die maximale Lösung, folgt

$$[t_k - \delta, t_k + \delta] \subseteq (t_-, t_+), \qquad \text{also insbesondere} \qquad t_k + \delta \leq t_+.$$

Da $\delta > 0$ unabhängig von k ist, erhält man für $k \to \infty$ den Widerspruch $t_+ + \delta \leq t_+$. Die Annahme ist also falsch, der Fall $(t_+, \widetilde{x}) \in D$ ist unmöglich.

(ii) Falls $(t_+, \widetilde{x}) \notin D$, so ist der Punkt als Grenzwert von $(t_n, \varphi(t_n))$ im Rand von D, d.h.

$$(t_+, \widetilde{x}) \in \partial D.$$

Es folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Etwas vereinfacht ausgedrückt kann man sagen, dass maximale Lösungen **von Rand zu Rand** laufen.

Beispiele: Die folgenden Beispiele zeigen verschiedenes Randverhalten im Fall $t^+ < \infty$.

(1) Das Anfangswertproblem

$$x' = tx^2, \quad x(0) = 1$$

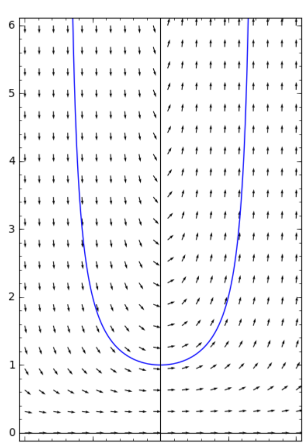
ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, d.h. $D = \mathbb{R}^2$. Wir hatten die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}t^2}$$

mit dem maximalen Definitionsintervall

$$(t_-, t_+) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

gefunden. Hier gilt also $\lim_{t \uparrow t_+} |\varphi(t)| = \infty$.



(2) Das Anfangswertproblem

$$x' = -\frac{1}{x}, \quad x(0) = 1$$

ist definiert für $x \neq 0$, also auf $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Als Lösung findet man

$$\varphi(t) = \sqrt{1-2t}$$

mit dem maximalen Definitionsintervall

$$(t_-, t_+) = (-\infty, \frac{1}{2}).$$

Es gilt

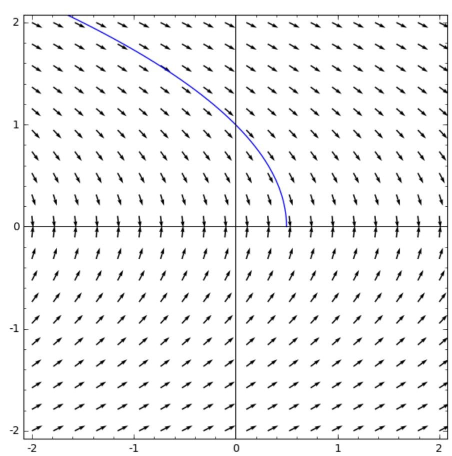
$$\lim_{t \uparrow \frac{1}{2}} (t, \varphi(t)) = (\frac{1}{2}, 0) \in \partial D.$$

($(\frac{1}{2}, 0)$ ist ein Randpunkt von D.) Wir drücken es noch anders aus: Es ist $\partial D = \mathbb{R} \times \{0\}$ und

$$\text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = \sqrt{1-2t}$$

und

$$\lim_{t \uparrow t_+} \text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = 0.$$



(3) Das Anfangswertproblem

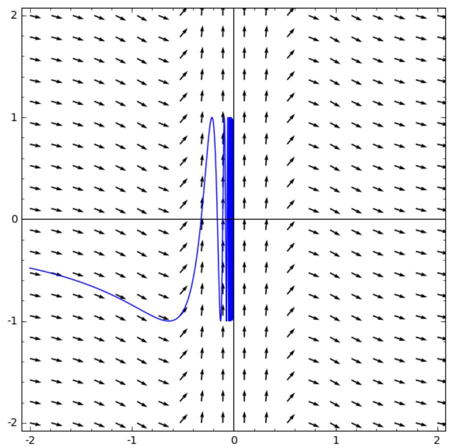
$$x' = -\frac{1}{t^2} \cos(\frac{1}{t}), \quad x(-\frac{1}{\pi}) = 0$$

ist definiert für $t \neq 0$, also auf $D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Als Lösung findet man

$$\varphi(t) = \sin(\frac{1}{t})$$

mit dem maximalen Lösungsintervall

$$(t_-, t_+) = (-\infty, 0).$$



Für $t \uparrow t_+$ divergiert $\varphi(t)$; die Häufungspunkte sind $(0, c)$ mit $-1 \leq c \leq 1$, also Randpunkte von D. Noch etwas genauer: Es ist $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}$ und

$$\text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = |t|$$

und

$$\lim_{t \uparrow t_+} \text{Abstand}((t, \varphi(t)), \partial D) = 0.$$

Der folgende Satz liefert ein nützliches Kriterium:

Satz. *Seien $D = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Außerdem gebe es stetige Funktionen*

$$\alpha, \beta : (a, b) \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

sodass gilt

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t) \text{ für alle } t \in (a, b) \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Man nennt f in diesem Fall **linear beschränkt***.) Dann ist für jedes $(t_0, x_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ auf ganz (a, b) definiert, d.h.*

$$(t_-, t_+) = (a, b).$$

Beweis:

(1) Wir betrachten zunächst $t \in [t_0, t_+)$. Es gilt

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u)) du,$$

also

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(u, \varphi(u))\| du \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (\alpha(u)\|\varphi(u)\| + \beta(u)) du.$$

Wir definieren

$$\lambda : [t_0, t_+) \to \mathbb{R} \text{ mit } \lambda(t) = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (\alpha(u)\|\varphi(u)\| + \beta(u)) du,$$

sodass insbesondere $\|\varphi(t)\| \leq \lambda(t)$ gilt. Es folgt

$$\lambda'(t) = \alpha(t)\|\varphi(t)\| + \beta(t),$$

und damit

$$\lambda'(t) \leq \alpha(t)\lambda(t) + \beta(t).$$

Sei $A(t)$ eine Stammfunktion von $\alpha(t)$. Wir definieren eine neue Funktion $\mu(t)$ durch den Ansatz

$$\lambda(t) = e^{A(t)}\mu(t).$$

Dann gilt:

$$\lambda'(t) \leq \alpha(t)\lambda(t) + \beta(t) \iff \alpha(t)e^{A(t)}\mu(t) + e^{A(t)}\mu'(t) \leq \alpha(t)e^{A(t)}\mu(t) + \beta(t) \iff$$
$$\iff e^{A(t)}\mu'(t) \leq \beta(t) \iff \mu'(t) \leq e^{-A(t)}\beta(t).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \mu(t_0) + (\mu(t) - \mu(t_0)) = \mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu'(u)du \leq \\ &\leq \mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(u)}\beta(u)du,\end{aligned}$$

also

$$\lambda(t) \leq e^{A(t)}\left(\mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(u)}\beta(u)du\right),$$

und wegen $\|\varphi(t)\| \leq \lambda(t)$

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{A(t)}\left(\mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(u)}\beta(u)du\right),$$

wobei die rechte Seite auf ganz $[t_0, b)$ definiert ist. Wir wollen zeigen, dass $t_+ = b$ gilt. Wäre $t_+ < b$, so gäbe es zwei Möglichkeiten:

- Fall: Die Lösung $\{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0, t_+)\}$ kommt dem Rand beliebig nahe. Dann müsste $b < \infty$ sein. Aber wegen $t_+ < b$ hat die Lösung eine Abstand $\geq b - t_+$ vom Rand. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- Fall: $\lim_{t \uparrow t_+} \|\varphi(t)\| = \infty$. Da die rechte Seite unserer Abschätzung aber für alle $t \in [t_0, b)$ definiert ist, kann dieser Fall nicht eintreten.

Es gilt also $t_+ = b$.

(2) Analog zeigt man $t_- = a$. ■

Beispiel: Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x' = -t^5 x \cos x + e^t, \quad x(0) = 1.$$

Offensichtlich ist $f(t, x) = -t^5 x \cos x + e^t$ linear beschränkt. Daher ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Eine Anwendung des letzten Satzes ist folgendes Ergebnis, das wir schon bei den linearen Differentialgleichungen oft verwendet haben.

Folgerung. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x' = A(t)x$$

und die auf ganz I definierten Lösungen:

$$\mathcal{L} = \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t)\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

Beweis: Wir haben früher gezeigt, dass $\mathcal{L}$ ein Vektorraum der Dimension $\leq n$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass die Dimension tatsächlich n ist. Sei $f : I \times \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(t, x) = A(t)x.$$

Natürlich ist f stetig. Wegen

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\|\|x_1 - x_2\| \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

ist f auch lokal Lipschitz-stetig, sodass jedes Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung besitzt. Wegen

$$\|f(t, x)\| = \|A(t)x\| \leq \|A(t)\|\|x\|$$

ist f linear beschränkt, sodass alle maximalen Lösungen auf dem ganzen Definitionsintervall I definiert sind. Seien $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonischen Einheitsvektoren. Sei $\varphi_i : I \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = e_i.$$

Wir schreiben die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ spaltenweise in eine Matrix:

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)| \dots |\varphi_n(t)).$$

Wegen

$$\Phi(t_0) = (\varphi_1(t_0)| \dots |\varphi_n(t_0)) = (e_1| \dots |e_n) = I$$

ist $\Phi(t)$ die Hauptfundamentalmatrix in $t = t_0$. Dies beweist die Behauptung. ■

Auch der folgende Satz liefert ein nützliches Kriterium:

Satz. *Sei $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D_0 \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

(Man beachte, dass f nicht von t abhängt, dass es sich also um eine autonome Differentialgleichung handelt.) Gibt es dann eine kompakte Teilmenge $K \subseteq D_0$ mit

$$\varphi((t_-, t_+)) \subseteq K,$$

so gilt schon

$$(t_-, t_+) = \mathbb{R},$$

d.h. die Lösung φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Beweis:

(1) Ist $\partial D_0 \neq \emptyset$, so nimmt die stetige Funktion

$$K \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{Abstand}(x, \partial D_0)$$

ihr Minimum δ auf der kompakten Menge K an. Dies kann nicht 0 sein, d.h. $\delta > 0$. Dann gilt

$$\text{Abstand}((t, \varphi(t), \partial(\mathbb{R} \times D_0)) \geq \delta.$$

Es bleiben für das Randverhalten also nur die Möglichkeiten

$$t_+ = \infty$$

oder

$$t_+ < \infty \text{ und } \lim_{t \uparrow t_+} \|\varphi(t)\| = \infty.$$

Da aber das Bild von φ in einer kompakten Menge enthalten ist, kann der zweite Fall nicht eintreten. Also gilt $t_+ = \infty$ und ganz analog $t_- = -\infty$. ■

Auch die folgende Eigenschaft ist bei der Untersuchung von Differentialgleichung manchmal hilfreich:

Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig.*

(1) *Ist $\varphi : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$x' = f(x),$$

sodass $\varphi(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen Punkt $p \in D$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = p \text{ mit } p \in D,$$

so gilt

$$f(p) = 0.$$

(2) *Ist $\varphi : (-\infty, t_0] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$x' = f(x),$$

sodass $\varphi(t)$ für $t \to -\infty$ gegen einen Punkt $p \in D$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = p \text{ mit } p \in D,$$

so gilt

$$f(p) = 0.$$

(Lokale Lipschitz-Stetigkeit von f wird hier nicht vorausgesetzt.)

Beweis:

(1) (a) Da f in p stetig ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$x \in D \text{ und } \|x - p\| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \|f(x) - f(p)\| < \varepsilon.$$

Da φ für $t \to \infty$ gegen p konvergiert, existiert zu jedem $\delta > 0$ ein t_1 mit

$$t \geq t_1 \quad\Longrightarrow\quad \|\varphi(t) - p\| < \delta.$$

Zusammengesetzt finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, dazu ein t_ε mit der Eigenschaft

$$t \geq t_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \|f(\varphi(t)) - f(p)\| < \varepsilon.$$

(b) Nun gilt für $t \geq t_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|f(p)\|(t - t_\varepsilon) &= \|(t - t_\varepsilon)f(p)\| = \|\int_{t_\varepsilon}^t f(p)du\| = \\
&= \|\int_{t_\varepsilon}^t f(\varphi(u))du - \int_{t_\varepsilon}^t (f(\varphi(u)) - f(p))du\| \leq \\
&\leq \|\int_{t_\varepsilon}^t f(\varphi(u))du\| + \int_{t_\varepsilon}^t \|f(\varphi(u)) - f(p)\|du \leq \\
&\leq \|\int_{t_\varepsilon}^t \varphi'(u)du\| + \int_{t_\varepsilon}^t \varepsilon du = \|\varphi(t) - \varphi(t_\varepsilon)\| + \varepsilon(t - t_\varepsilon) \leq \\
&\leq \|\varphi(t)\| + \|\varphi(t_\varepsilon)\| + \varepsilon(t - t_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|\varphi(t)\| \geq (\|f(p)\| - \varepsilon)(t - t_\varepsilon) - \|\varphi(t_\varepsilon)\|.$$

Wäre $f(p) \neq 0$, so würde man bei Wahl von $\varepsilon < \|f(p)\|$ sofort $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = \infty$ erhalten, was wegen $\varphi(t) \to p$ nicht sein kann. Daher folgt $f(p) = 0$, wie behauptet.

(2) Definiert man $\psi : [-t_0, \infty)$ durch $\psi(t) = \varphi(-t)$, so gilt

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -f(\varphi(-t)) = (-f)(\psi(t))$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = p.$$

Wendet man (1) auf ψ und $-f$ an, so folgt $-f(p) = 0$, also $f(p) = 0$, wie behauptet. ∎

Beispiel: (nach F2012/2/4) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = f(x) \text{ mit } f(x) = x(x-2)e^{\cos x} \quad \text{und} \quad x(0) = 1.$$

- Da $f(x) = x(x-2)e^{\cos x}$ stetig differenzierbar ist, besitzt das Anfangswertproblem nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung

$$\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}.$$

- Die Differentialgleichung $x' = f(x)$ hat die konstanten Lösungen $\varphi_0, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$\varphi_0(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = 2.$$
Da $(0,1)$ im Graphen von φ, aber nicht in den Graphen von φ_0 und φ_2 liegt, sind die Graphen disjunkt, sodass mit dem Zwischenwertsatz sofort
$$0 < \varphi(t) < 2 \text{ für alle } t \in (t_-, t_+)$$
folgt.
- Da φ beschränkt ist, folgt aus dem Satz über das Randverhalten sofort
$$(t_-, t_+) = (-\infty, \infty),$$
weil es keine anderen Möglichkeiten gibt.
- Aus $0 < \varphi(t) < 2$ folgt $f(\varphi(t)) < 0$, also $\varphi'(t) < 0$. Daher ist φ streng monoton fallend. Wegen $0 < \varphi(t) < 2$ existieren daher $x_+ = \lim_{t\to\infty} \varphi(t)$ und $x_- = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$. Nach einem vorangegangenen Satz folgt $f(x_-) = f(x_+) = 0$. Da φ streng monoton fallend ist, ergibt sich dann
$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0.$$