

Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Übungsblatt 7 (3.6.2026)

Aufgabe 31:

- (1) Zeige, dass für $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \mid m, \\ 0, & \text{falls } n \nmid m. \end{cases}$$

- (2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Benutze (1) und die (offensichtliche) Rekursionsformel $v_p(n!) = v_p((n-1)!) + v_p(n)$, um die Formel

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

durch Induktion zu beweisen. (Die Formel wurde in der Vorlesung bereits durch Abzählen bewiesen.)

Aufgabe 32: Folgere aus Schinzels Hypothese H, dass es für jedes $n \geq 2$ unendlich viele Primzahl- n -Tupel $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ gibt mit

$$p_{i+1} = 2p_i \pm 1 \text{ für } i = 1, \dots, n-1.$$

(Hinweis: Aufgabe 21)

Aufgabe 33: Sei $a \in \mathbb{N}$ und $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, was insbesondere $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ impliziert. Zeige:

- (1) Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a$ gilt

$$f(b) + \int_a^b f(t) dt \leq \sum_{n=a}^b f(n) \leq f(a) + \int_a^b f(t) dt.$$

- (2) Es gilt:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt < \infty.$$

Aufgabe 34:

- (1) Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert. (Hinweis: Bestimme eine Stammfunktion von $\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ und wende Aufgabe 23 an.)

(2) Zeige mit Hilfe von Teilaufgabe (1), dass die Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

divergiert. (Hinweis: Es ist erlaubt, die in der Vorlesung hergeleitete Abschätzung $p_n \leq 2.165 n \log n$ für $n \geq 2$ zu verwenden.)

Aufgabe 35: Sei $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots$ die Folge der Primzahlen und

$$s_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad \text{also} \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 5, \quad s_3 = 10, \quad s_4 = 17, \quad s_5 = 28, \quad \dots$$

Zeige, dass immer eine Quadratzahl zwischen s_n und s_{n+1} liegt. (Hinweis: Zeige durch Induktion, dass $4s_n < (p_{n+1} - 1)^2$ für $n \geq 4$ gilt, und folgere, dass $\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n} > 1$ gilt.)