Kettenbrüche – Eine kurze Einführung

Edgar M. E. Wermuth, TH Nürnberg, VIII/2024, Rev. II/2025

0. *Ein Beispiel:* Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{\infty}} (\boldsymbol{\cos n + \sin n})^{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{z^n}$?

Da $\cos n + \sin n = \sqrt{2}\,\cos(n - \pi/4)$ (Additionstheorem und $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$), kann man die Glieder der Reihe schreiben als $(\sqrt{2}\,z)^n \cdot \big(\cos(n - \pi/4)\big)^n$.

Also ist klar, dass die Reihe für $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ konvergiert. Für $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist sie divergent, da die Folge der Werte $\cos(n - \pi/4)$ dicht im Intervall $[-1, 1]$ liegt. Letzteres folgt aus dem Schubfach-Prinzip („Satz von Dirichlet“); siehe *Nachtrag II.*

Noch etwas kniffliger ist der Grenzfall $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Wie verhält sich $\big(\cos(n - \pi/4)\big)^n$?

Da π *irrational*, sogar transzendent ist, gilt $n - \pi/4 \neq k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und damit immer $-1 < \cos(n - \pi/4) < 1$. Wir weisen jetzt nach, dass $\cos(n - \pi/4) > 1 - c/n^2$ mit festem $c > 0$ unendlich oft. Da $\lim_{n\to\infty}\big(1 - \frac{c}{n^2}\big)^n = 1$ (klar wegen $\big(1 - \frac{c}{n^2}\big)^n \geq 1 - \frac{c}{n}$), folgt daraus unmittelbar die *Divergenz* der Reihe für $|z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$; die Schubfach-Überlegung ist dann nicht mehr nötig.

Zum Beweis nutzen wir einen wichtigen Satz von Tschebyscheff (Čebyšëv):
Gegeben eine irrationale Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein beliebiges $\beta \in \mathbb{R}$, gibt es beliebig große $n \in \mathbb{N}$ und dazu passende $m \in \mathbb{Z}$, so dass $|\alpha\, n - m - \beta| < \frac{1}{n}$.

Einen Beweis findet man bei Aleksandr Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover 1997 (Nachdruck), Theorem 24. Dort ist die Abschätzung mit $3/n$ statt $1/n$ formuliert und bewiesen; der Beweis ist am Schluss dieses Textes reproduziert. Eine relativ geringfügige Abänderung des Beweises ergibt die hier angegebene etwas schärfere Fassung; siehe *Nachtrag I.*

Da $\frac{1}{2\pi}$ irrational ist, gibt es nach diesem Satz beliebig große $n \in \mathbb{N}$ und dazu passende $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\left|\frac{1}{2\pi}\,n - m - \frac{1}{8}\right| < \frac{1}{n}$ und damit $n - \frac{\pi}{4} = 2m\pi + \frac{2\pi\varepsilon}{n}$ mit $|\varepsilon| < 1$; $|\varepsilon| < 3$ würde natürlich auch reichen. Für alle hinreichend großen solchen n gilt (Taylorentwicklung, alternierende Reihe):

$$\cos(n - \tfrac{\pi}{4}) = \cos\tfrac{2\pi\varepsilon}{n} = 1 - \tfrac{1}{2!}(\tfrac{2\pi\varepsilon}{n})^2 + \tfrac{1}{4!}(\tfrac{2\pi\varepsilon}{n})^4 - + \cdots > 1 - \tfrac{2\pi^2\varepsilon^2}{n^2}.$$

Damit ist alles bewiesen. ∎

Nachtrag I: Beweis des Tschebyscheff-Satzes. Wir benutzen folgenden von A. Hurwitz (1891) stammenden Satz der Kettenbruch-Lehre (bewiesen unter Punkt **11.** weiter unten, siehe auch **9.**d)):
Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ irrational, gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$; im allgemeinen kann $\sqrt{5}$ durch keinen größeren Vorfaktor ersetzt werden.

Sei α eine Irrationalzahl und $\frac{p}{q}$ ein Bruch (in gekürzter Form) mit $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. Zu beliebig vorgegebenem $\beta \in \mathbb{R}$ gibt's offenbar ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $|q\beta - t| \leq \frac{1}{2}$.
Es gibt ganze Zahlen n, m mit $pn - qm = t$; solche findet man bekanntlich leicht mit dem (erweiterten) Euklidschen Algorithmus. Da dann auch $p(n + kq) - q(m + kp) = t$, kann man o.B.d.A. voraussetzen, dass $\varepsilon q \leq n < (1 + \varepsilon)q$, bei beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$.
Es folgt, mit $|\delta| < 1/\sqrt{5}$ und $|\delta'| \leq 1/2$,

$$|\alpha n - m - \beta| = \left|\frac{p\,n}{q} + \frac{\delta\,n}{q^2} - m - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{q}\right| = \left|\frac{\delta\,n}{q^2} - \frac{\delta'}{q}\right| < \frac{n}{\sqrt{5}q^2} + \frac{1}{2q} < \frac{1}{n}\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{5}} + \frac{1+\varepsilon}{2}\right)$$

Da $\frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{5}} + \frac{1+\varepsilon}{2} < 1$ für $\varepsilon < 0.0374065...$, da außerdem beim Bruch $\frac{p}{q}$ nach dem Satz von Hurwitz der Nenner $q \in \mathbb{N}$ beliebig groß gewählt werden kann und damit auch $n \geq 0.0374\,q$, ist alles bewiesen. ∎

Nachtrag II: Per Schubfachprinzip beweisen wir, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\boldsymbol{\cos(n - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi\varepsilon}{m}}$ mit $\boldsymbol{|\varepsilon| < 1}$. Für große m gilt $|\sqrt{2}\,z|\,\cos\frac{\pi\varepsilon}{m} > 1$ im Falle $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, und es folgt die Divergenz der Reihe für $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Gegeben m, teilen wir das Intervall $[0, 2\pi)$ in m gleiche Teile $[i \cdot \frac{2\pi}{m}, (i+1) \cdot \frac{2\pi}{m})$ $(0 \le i < m)$. Wir betrachten nun die $m+1$ Werte

$$k \mod 2\pi := k - \lfloor \tfrac{k}{2\pi} \rfloor \cdot 2\pi \in [0, 2\pi) \quad (1 \le k \le m+1).$$

Mindestens *zwei* dieser Werte liegen in ein und demselben Teilintervall, d.h.
$k_1 \mod 2\pi,\ k_2 \mod 2\pi \in [i \cdot \frac{2\pi}{m}, (i+1) \cdot \frac{2\pi}{m})$ (Schubfachprinzip!), und damit o.B.d.A.

$$0 < \left(k_1 - \left\lfloor \frac{k_1}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right) - \left(k_2 - \left\lfloor \frac{k_2}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi\right) < \frac{2\pi}{m},$$

$$0 < k + l \cdot 2\pi < \frac{2\pi}{m} \qquad (\star)$$

mit $k := k_1 - k_2$, $\ l := \lfloor \frac{k_2}{2\pi} \rfloor - \lfloor \frac{k_1}{2\pi} \rfloor$; dabei $0 < |k| \le m$. Multiplikation von $k + l \cdot 2\pi$ aus $(\star)$ mit einer passend gewählten natürlichen Zahl k' ergibt

$$k'(k + l \cdot 2\pi) \in \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{m}\right).$$

Mit $n := k'\,k$ also $n + k'\,l \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right)$ und somit $\cos(n - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi\varepsilon}{m}$, wobei $|\varepsilon| < 1$.

Implizit sind wir zuletzt davon ausgegangen, dass $k > 0$. Im Falle $k < 0$ wählen wir die natürliche Zahl k' so, dass

$$k'(k + l \cdot 2\pi) \in \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{m}, \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{m}\right),$$

setzen $n := -k'\,k$ und erhalten

$$-n + (k'\,l - 1)2\pi + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right),$$

also $\cos(-n + \pi/4) = \cos(n - \pi/4) = \cos(\pi\varepsilon/m)$. ∎

Man beachte, dass die weiter oben angegebene Folgerung aus dem Satz von Tschebyscheff eine *weit stärkere* Aussage ist, weil hier – anders als dort – ja n eventuell viel größer als m ausfallen kann. Für den Grenzfall $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist die stärkere Aussage erforderlich, da z.B. $(1 - \frac{c}{m^2})^{m^2} \to \mathrm{e}^{-c} \ne 1$ $(m \to \infty)$.

Nun folgt – Punkte **1.** bis **15.** – eine Einführung in den Kalkül der **Kettenbrüche**.

In vielen neueren Lehrbüchern der höheren Mathematik bzw. Analysis findet man so gut wie nichts über Kettenbrüche; trotz ihrer großen theoretischen wie rechenpraktischen Relevanz gehören sie nicht mehr zum Kanon dessen, was die Studierenden in den Anfangssemestern *auf jeden Fall* lernen. Eine bedauerliche und auch etwas unverständliche Entwicklung angesichts der engen Beziehung zum geläufigen Euklidschen Algorithmus. Für diejenigen, die sich noch nie mit dem Thema befasst haben, geben wir einen eher knapp formulierten, aber dennoch gehaltvollen ersten Überblick – als Anregung, mal in weitergehende Werke zu schauen.

Neben dem zitierten Buch von Khinchin seien noch folgende Bücher genannt: a) der umfassende Klassiker *Die Lehre von den Kettenbrüchen* von Oskar Perron; b) *An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition*, von Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery, Wiley 1991 – ebenfalls ein Klassiker. Im letztgenannten Werk wird der erwähnte Hurwitzsche Satz auf zwei verschiedene Weisen bewiesen: zum einen mittels sogenannter *Farey-Brüche*, zum anderen – in einer etwas verschärften Version (É. Borel, 1903) – mittels des Kettenbruch-Kalküls.

Eine gute *kurze* Einführung in die Kettenbrüche, mit interessanten Beispielen, Anwendungen und historischen Anmerkungen, allerdings *ohne* den zitierten Hurwitzschen Satz, findet man im Band I von Karl Strubeckers herausragender, insgesamt vierbändiger *Einführung in die höhere Mathematik*, Oldenbourg Verlag, München/Wien ^{2}1966.

1. Ein endlicher *regulärer* Kettenbruch, mit $a_0 \in \mathbb{R},\ a_i > 0\,(1 \le i \le n)$, sieht so aus:

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Ein *unendlicher* Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ ist nichts anderes als die *Folge* der Kettenbrüche $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Klar: $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, [a_k, \ldots, a_n]]$ $(1 \le k \le n)$.

2. Grundlegend ist die folgende *Rekursionsformel* für die *Näherungsbrüche* $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$:

$$\text{Mit } \boldsymbol{p_0} := a_0,\ \boldsymbol{q_0} := 1 \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}} \\ \boldsymbol{q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \end{array} \right. \text{ gilt } [a_0, a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.$$

Wir zeigen die Rekursionsformeln $p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1},\ q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$ per Induktion für $k \ge 1$, wobei noch die Startwerte p_1, q_1 nachgeliefert werden:
$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}$, also $\boldsymbol{p_1} = a_0a_1 + 1$, $\boldsymbol{q_1} = a_1$. Ferner $[a_0, a_1, a_2] = [a_0, a_1 + \frac{1}{a_2}]$, und nach der unmittelbar vorherigen Formel folgt $[a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0\left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)+1}{a_1+\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2a_1a_0+a_2+a_0}{a_2a_1+1}$, was den Induktionsanfang $p_2 = a_2p_1 + p_0,\ q_2 = a_2q_1 + q_0$ ergibt. Analog der Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_k + \tfrac{1}{a_{k+1}}] &= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}. \end{aligned}$$

Dabei war $[a_0, a_1, \ldots, a_k] = \frac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$ die Induktionsannahme. ∎

3. Aus der Rekursionsformel folgt unmittelbar $p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = -\left(p_kq_{k-1} - q_kp_{k-1}\right)$ und damit

$$\boldsymbol{p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = (-1)^k}, \quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_kq_{k+1}}, \quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}a_{k+1}}{q_{k-1}q_{k+1}}.$$

Es folgt $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots,\ \ \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \cdots,\ \ \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$; und im Spezialfall $a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{N}\,(k > 0)$ – dem Fall *einfacher* Kettenbrüche, auf den wir uns von jetzt an beschränken werden – sind insbesondere $p_k \in \mathbb{Z}$ und $q_k \in \mathbb{N}$ stets *teilerfremd*. Auch p_k und p_{k+1}, ebenso q_k und q_{k+1} sind bei einfachen Kettenbrüchen stets teilerfremd.
Mit $F_0 = F_1 := 1,\ F_{n+1} := F_n + F_{n-1}\,(n \in \mathbb{N})$ (*Fibonacci-Folge*) ergibt die Rekursionsformel für die q_k durch triviale Induktion $q_k \ge F_k$, was mit $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{k+1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{k+1}\Big)$ ein rasches Wachstum der Näherungsnenner q_k impliziert. Also ist klar, dass im Falle eines unendlichen einfachen Kettenbruchs die Schachtelung der Intervalle $[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}]$ schnell konvergiert. Jeder *einfache* unendliche Kettenbruch konvergiert also gegen eine reelle Zahl ξ.

4. Sei umgekehrt irgendein $\xi \in \mathbb{R}$ vorgegeben; wir überlegen, welcher einfache Kettenbruch genau diese Zahl einschachtelt. Dazu betrachten wir nacheinander $\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$, $\xi_1 > 1$; dann $\xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}$ mit $a_1 \in \mathbb{N}$, $\xi_2 > 1$; usw. Falls dabei irgendwann $\xi_k = a_k \in \mathbb{N}$, brechen wir ab und erhalten $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$, andernfalls geht's unendlich oft weiter. Ist $\xi = \frac{p}{q}$ rational, *muss* der Prozess abbrechen, da $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ für $q_{2k} \ge q$ den Widerspruch $\frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}} > \frac{1}{qq_{2k}}$ ergäbe.
Es gilt (hier zwar reguläre, aber nicht unbedingt *einfache* Näherungsbrüche)

$$\xi = [a_0, \xi_1] = [a_0, a_1, \ldots, a_k, \xi_{k+1}] = \frac{\xi_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\xi_{k+1}q_k + q_{k-1}},$$

also $\xi_{k+1}\big(\xi q_k - p_k\big) = p_{k-1} - \xi q_{k-1}$. Dies gilt, so lange $\xi_{k+1} > 1$.
Da $\big(\xi q_k - p_k\big)q_{k-1} - \big(p_{k-1} - \xi q_{k-1}\big)q_k = p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \neq 0$, folgt

$$\boldsymbol{\xi_{k+1} = \frac{p_{k-1} - \xi q_{k-1}}{\xi q_k - p_k}}, \quad \text{also} \quad \boldsymbol{\big|p_{k-1} - \xi q_{k-1}\big| > \big|\xi q_k - p_k\big|}\,.$$

Dies gilt erst dann nicht mehr, wenn $\xi_{k+1} = 1$, also $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_k, 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_k + 1]$.

5. Der *Kehrwert* zu $\xi > 1$. Sei $\eta := 1/\xi$ mit $\xi > 1$. Wir entwickeln η in einen Kettenbruch: $\eta = \eta_0 = 0 + \frac{1}{\eta_1} = 0 + \frac{1}{\xi}$ (!!) $= 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{\xi_1}} = \cdots$ Also ($[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ bezeichnet, falls existent, auch den *Grenzwert* der Näherungsbruch-Folge):

$$\xi = [a_0, a_1, a_2, \ldots] > 1 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{\xi} = [0, a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

Sind $\frac{p_n}{q_n}$ die Näherungsbrüche zu ξ und $\frac{r_n}{s_n}$ die zu $\eta = 1/\xi$, gilt $r_0 = 0,\ s_0 = 1$ und

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = [0, [a_0, \ldots, a_n]] = 0 + \frac{1}{[a_0, \ldots, a_n]} = \frac{q_n}{p_n} \quad (n \geq 0)\,.$$

6. Zur *Eindeutigkeit* der Kettenbruchentwicklung: Wegen $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k\pm1}}{q_{2k\pm1}}$ und $[a_0, a_1, \ldots, a_n + 1] = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ ist $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ für gerade n eine streng *wachsende*, für ungerade n eine streng *fallende* Funktion von $a_n \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$[a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}, m] \geq [a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}, 1] = [a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1} + 1] \geq [a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1} + n]$
$[a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k} + m] \geq [a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k} + 1] = [a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}, 1] \geq [a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}, n]$
Ganz links steht bei beiden Ungleichungsketten ein *linker* Intervallschachtelungs-Randpunkt, ganz rechts ein *rechter*. Nur im Falle $m = n = 1$ fallen die beiden Randpunkte zusammen. Wenn der Kettenbruch an dieser Stelle *nicht aufhört* (d.h. wenn nicht gilt $\xi = [a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}, 1] = [a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1} + 1]$ bzw. $\xi = [a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k} + 1] = [a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}, 1]$), gehören die beiden Näherungsbrüche $[a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}]$ und $[a_0, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1} + n]$ bzw. die Näherungsbrüche $[a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k} + m]$ und $[a_0, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}]$ zu *verschiedenen* dargestellten reellen Zahlen.

7. Zur *Optimalität* der Approximation durch die Näherungsbrüche: Mit $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ folgt $\frac{1}{q q_n} \leq \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$, also $q > q_{n+1}$. Analog im Falle $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n}$. Für gerade n gibt es also im Intervall $(\frac{p_n}{q_n}, \xi]$ nur rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit Nennern $> q_{n+1}$, und im Intervall $[\xi, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$ nur rationale Zahlen mit Nennern $> q_n$. Bei ungeradem n gelten analoge Aussagen.
Es gibt daher *keinen* Bruch $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ mit $q \leq q_n$ und $\big|\xi - \frac{p}{q}\big| \leq \big|\xi - \frac{p_n}{q_n}\big|$. In diesem Sinne sind die Näherungsbrüche *optimale rationale Annäherungen* an ξ. (Gibt's kein q_{n+1}, gilt $\frac{p_n}{q_n} = \xi$.)

Aber auch einige Brüche $\frac{i\,p_{n+1} + p_n}{i\,q_{n+1} + q_n}$ mit $0 \leq i \leq a_{n+2}$, die man *Neben-Näherungsbrüche* nennt, haben diese Optimalitäts-Eigenschaft. Sie wachsen (bei ungeradem n: *fallen*) mit i schrittweise von $\frac{p_n}{q_n}$ bis $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$. Wegen $(p_n + i\,p_{n+1})q_{n+1} - (q_n + i\,q_{n+1})p_{n+1} = q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$ sind Zähler und Nenner der Neben-Näherungsbrüche ebenfalls teilerfremd. Sei nun angenommen, dass $\big|\xi - \frac{p}{q}\big| \leq \big|\xi - \frac{i\,p_{n+1} + p_n}{i\,q_{n+1} + q_n}\big|$. Der Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ und der Neben-Näherungsbruch $\frac{i\,p_{n+1} + p_n}{i\,q_{n+1} + q_n}$ liegen auf verschiedenen Seiten von ξ. Daher folgt:
$\big|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big| \underset{(*)}{\leq} \big|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big| + \big|\xi - \frac{p}{q}\big| \underset{(*)}{\leq} \big|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\big| + \big|\xi - \frac{i\,p_{n+1} + p_n}{i\,q_{n+1} + q_n}\big| = \frac{1}{q_{n+1}(i\,q_{n+1} + q_n)}$ und damit auch $|p\,q_{n+1} - q\,p_{n+1}| \leq q/(i\,q_{n+1} + q_n)$. Ist nun $\frac{p}{q}$ *verschieden* vom Haupt- wie vom Neben-Näherungsbruch, ist eine der beiden Ungleichungen $(*)$ streng, und es folgt $q > i\,q_{n+1} + q_n$. Im Falle $p = p_{n+1},\ q = q_{n+1}$ folgt dies so *nicht*: Der Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ist für kleine i eine optimalere Approximation als die ersten der Neben-Näherungsbrüche der betrachteten Reihe, da z.B. $\left|\frac{i\,p_{n+1} + p_n}{i\,q_{n+1} + q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}(i\,q_{n+1} + q_n)} > \frac{2}{q_{n+1}q_{n+2}}$, falls $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n > 2(i\,q_{n+1} + q_n)$.

8. Ein *schärferer* Ausdruck optimaler Annäherung ergibt sich, wenn wir $\big|\xi - \frac{p}{q}\big| = \frac{c}{q}$ betrachten. Speziell sei $\big|\xi - \frac{p_n}{q_n}\big| = \frac{c_n}{q_n}$, d.h. $\boldsymbol{c_n := |\xi\, q_n - p_n|}$. Dann gilt $c_n < \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_n(a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$. Für beliebiges $q \in \mathbb{N}$ gibt es trivialerweise stets ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $|\xi q - p| \leq 1/2$, also $\big|\xi - \frac{p}{q}\big| \leq \frac{1/2}{q}$; die

Näherungsbrüche liefern rasch wachsende q_n und p_n mit $|\xi q_n - p_n| = c_n < 1/q_n$. Mehr noch gilt sogar für zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche stets $c_n < \frac{1}{2q_n}$ oder $c_{n+1} < \frac{1}{2q_{n+1}}$, d.h.

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{oder} \quad \left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}\,. \tag{\#}$$

Klar: Sind alle $a_n \geq 2$, gilt diese recht starke Annäherung sogar für *alle* Näherungsbrüche. Der Beweis von (#) ist simpel: $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$. Falls also $\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2}$, folgt $\left|\xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$. (Dabei wurde die ganz einfache Ungleichung $ab < (a^2 + b^2)/2 \ \ (a \neq b)$ benutzt.)

Außerdem zeigt die letzte Ungleichung unter 4., dass stets $\boldsymbol{c_{n+1} < c_n}$.

Einzige Ausnahme: $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_n, 1]$; in diesem speziellen Fall gilt ja (nach 4.) $a_{n+1} = 1 = \frac{p_{n-1} - \xi\, q_{n-1}}{\xi\, q_n - p_n}$, also $c_{n+1} = 0,\ c_n = c_{n-1}$. Vereinbart man, bei solchem ξ stets die alternative Darstellung $\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$ zu verwenden, also *mit 1 endende endliche Kettenbruchentwicklungen auszuschließen*, hat man erstens – nach 6. – *generelle Eindeutigkeit der Darstellung reeller Zahlen durch einfache Kettenbrüche* und vermeidet zweitens die Ausnahme bei der Beziehung $c_{n+1} < c_n$.

Wir schließen also von jetzt an Darstellungen $\xi = [a_0, \ldots, a_n, 1]$ aus. **(!!)**

Wir nennen einen gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ eine *rationale Bestapproximation* an die Zahl $\xi \in \mathbb{R}$, wenn $|b\,\xi - a| > |q\,\xi - p|$ gilt für *jeden anderen* Bruch $\frac{a}{b}$ mit $b \leq q$. D.h.: Der Bruchteil von $\frac{1}{q}$, um den sich $\frac{p}{q}$ von ξ unterscheidet (nämlich der Bruchteil $\frac{|q\,\xi - p|}{q}$), ist *kleiner* als der entsprechende Bruchteil bei allen anderen Brüchen $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ mit Nennern $b \leq q$; es gilt ja immer $\boldsymbol{\xi = \frac{p \pm |q\,\xi - p|}{q}}$. Im wesentlichen entsprechen die rationalen Bestapproximationen genau den Näherungsbrüchen.

9. Dies zeigen wir nun, indem wir nachweisen:

a) *Jede rationale Bestapproximation an $\xi \in \mathbb{R}$ ist ein Näherungsbruch zu ξ.*

b) *Jeder Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ $(n \geq 1)$ ist eine rationale Bestapproximation.*

c) *Gilt $b \in \mathbb{N} \ \wedge\ |b\,\xi - a| < c_n$ für ein $n \geq 1$, folgt $b \geq q_{n+1}$.*

d) *Gilt $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch zu ξ.*

Aussage b) ist *schärfer* als die zu Anfang von 7. diskutierte Optimalitätsaussage: Denn wenn $|q\,\xi - p| \leq |q_n\,\xi - p_n|$ nur für $q > q_n$ erfüllbar ist, dann gilt erst recht $\frac{1}{q}|q\,\xi - p| \leq \frac{1}{q_n}|q_n\,\xi - p_n|$ nur für $q > q_n$.

Beweis von a):

Sei $\frac{p}{q}$ verschieden von allen Näherungsbrüchen $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$ zu ξ.

Erster Fall: $\frac{p}{q} < \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$. Wegen $q\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = |q\,\xi - p| > |\xi - a_0| = |1 \cdot \xi - a_0|$ ist $\frac{p}{q}$ keine Bestapproximation. (Beachte $a_0 \leq \xi$ und $q \geq 1$.)

Zweiter Fall: $\frac{p}{q} > \frac{p_1}{q_1}$. Da $|q\,\xi - p| = q\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > q\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$ und $|1 \cdot \xi - a_0| = \frac{1}{\xi_1} \leq \frac{1}{a_1}$, ist $\frac{p}{q}$ keine Bestapproximation.

Dritter Fall: $\frac{p}{q}$ liegt echt zwischen zwei Näherungsbrüchen $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$. Dann gilt $|q_{n+1}\,\xi - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}}$ einerseits, andererseits aber $\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q\,q_n}$, also $q > q_{n+1}$ und $|q\,\xi - p| = q\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq q\left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q_{n+2}}$; d.h. $\frac{p}{q}$ ist keine Bestapproximation. Vierter Fall: $\frac{p}{q}$ liegt echt zwischen $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \xi$. Dann gilt $|q\,\xi - p| = q\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q_{n+1}}$ und wieder $\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q\,q_n}$, also $q > q_{n+1}$; da $|q_{n+1}\xi - p_{n+1}| = 0$, ist $\frac{p}{q}$ keine Bestapproximation. (Bei Khinchins Beweis seines Theorem 16 – an dem wir uns hier orientiert haben – *fehlt* dieser (einfache) vierte Fall, der nur bei *irrationalem* ξ nicht vorkommt.)

Insgesamt ist gezeigt: *Höchstens* die Näherungsbrüche sind rationale Bestapproximationen an ξ.

Beweis von b):

Nun zeigen wir, dass es rationale Bestapproximationen *tatsächlich gibt*, nämlich *alle* Näherungsbrüche, evtl. mit Ausnahme von $\frac{p_0}{q_0}$; z.B. im Falle $\xi \geq a_0 + \frac{1}{2}$ gilt $|1 \cdot \xi - (a_0 + 1)| \leq |1 \cdot \xi - a_0|$.

Sei $\frac{p_n}{q_n}$ mit $n \geq 1$ Näherungsbruch zu ξ. Wir wollen beweisen, dass $|q\,\xi - p| > |q_n\,\xi - p_n|$ für alle $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ mit $1 \leq q \leq q_n$.

Es gibt nur endlich vielen Paare (p,q) mit $q \in \{1,2,\ldots,q_n\}$ und $|q\,\xi - p| \le |q_n\,\xi - p_n|$. Der Fall $\frac{p_n}{q_n} = \xi$ ist trivial, da dann auch $\frac{p}{q} = \xi$ gelten muss, also $q = q_n, p = p_n$.
Andernfalls sei $(\tilde p, \tilde q)$ unter den betrachteten Paaren so gewählt, dass $|\tilde q\,\xi - \tilde p|$ minimal ausfällt und $\tilde q$ der kleinstmögliche q-Wert ist, für den dieses Minimum angenommen wird. Es gibt zu $\tilde q$ kein zweites $\tilde p'$, bei dem ebenfalls das Minimum angenommen wird:
Wegen $\frac{p_n}{q_n} \ne \xi$ gilt ja $\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ (bzw. $= \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2q_n^2}$ im Sonderfall $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \xi$, $a_{n+1} \ge 2$), also auch $|\tilde p' - \tilde p| = |(\tilde p' - \xi\,\tilde q) - (\tilde p - \xi\,\tilde q)| \le 2|p_n - \xi\,q_n| < \frac{2}{q_{n+1}}$ (bzw. $< \frac{1}{q_n}$) und daher $\tilde p' = \tilde p$.
Das bedeutet $|\tilde q\,\xi - \tilde p| < |q\,\xi - p|$ für alle $(p,q) \ne (\tilde p, \tilde q)$ mit $q \le \tilde q$; d.h.: $\frac{\tilde p}{\tilde q}$ ist eine rationale Bestapproximation zu ξ, also nach a) ein Näherungsbruch. Wäre $\tilde q = q_k$ mit $k < n$, folgte $|\tilde q\,\xi - \tilde p| = c_k > c_n$, ein Widerspruch; also $\tilde q = q_n$.
Damit ist gezeigt, dass der Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ eine rationale Bestapproximation ist.

Beweis von c):
Da $c_n > 0$ nach Voraussetzung, gibt es noch einen Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Ist dieser $= \xi$, gilt $\xi = [a_0,\ldots,a_n,a_{n+1}]$ mit $a_{n+1} \ge 2$. (Siehe 8.)
Da $\frac{p_n}{q_n}$ eine rationale Bestapproximation zu ξ, gibt's kein $\frac{a}{b} \ne \frac{p_n}{q_n}$ mit $|b\,\xi - a| \le c_n$ und $b \le q_n$. Also gilt $b > q_n$. Wegen $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \frac{c_n}{b} = \frac{q_n}{b}\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|$ liegt somit $\frac{a}{b}$ näher an ξ als $\frac{p_n}{q_n}$.
Liegt $\frac{a}{b}$ auf *derselben* Seite von ξ wie $\frac{P_n}{q_n}$, folgt $\frac{1}{b\,q_n} \le \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ und damit $b \ge q_{n+1}$. Gilt $\frac{a}{b} = \xi$, ist es ein *späterer* Näherungsbruch; also folgt $b \ge q_{n+1}$.
Liegt $\frac{a}{b}$ auf der *anderen* Seite von ξ und ist $\ne \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, gilt einerseits $\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \ge \frac{1}{b\,q_{n+1}}$, andererseits nach Voraussetzung $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \frac{c_n}{b} = \frac{q_n}{b}\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{b\,q_{n+1}}$; also liegt $\frac{a}{b}$ zwischen $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ und ξ, und es folgt $\frac{1}{b\,q_n} \le \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ und damit $b > q_{n+1}$.

Beweis von d):
Sei $\frac{a}{b} \ne \frac{p}{q}$ und gelte $b \le q$. Dann folgt $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| = \left|\left(\frac{p}{q} - \frac{a}{b}\right) + \left(\xi - \frac{p}{q}\right)\right| > \frac{1}{bq} - \frac{1}{2q^2}$, also auch $|b\,\xi - a| > \frac{1}{q} - \frac{b}{2q^2} \ge \frac{1}{2q}$. Folglich ist $\frac{p}{q}$ rationale Bestapproximation und damit nach a) ein Näherungsbruch. ■

10. Die folgenden *extremen* Beispiele (möglichst kleine a_k!) zeigen, dass (#) im allgemeinen nicht mehr sehr verbessert werden kann. (Siehe aber 11.)
Sei $F := [1,1,1,\ldots] = \lim\limits_{n\to\infty}[\underbrace{1,\ldots,1}_{n}] = [1, \lim\limits_{n\to\infty}[\underbrace{1,\ldots,1}_{n}]] = 1 + \frac{1}{F}$, also $F^2 = F + 1$, $F = \frac{1+\sqrt5}{2}$. Die Näherungsbrüche zu F sind $1, 2, \frac32, \frac53, \frac85, \ldots, \frac{p_n}{q_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \ldots$ (Fibonacci-Zahlen!).
Es gilt $\boldsymbol{F_k = \left(F^{k+1} - (-F)^{-k-1}\right)/\sqrt5}$. Etwas allgemeiner sind folgende Kettenbrüche:

$$\boldsymbol{G := [a_0, a_1, \ldots, a_n, 1, 1, 1, \ldots]} = [a_0,\ldots,a_n,F] = \tfrac{p_{n-1}+F\,p_n}{q_{n-1}+F\,q_n}$$

mit $[a_0,\ldots,a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ $(0 \le k \le n)$ und
$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0,\ldots,a_n,\underbrace{1,\ldots,1}_{k}] = [a_0,\ldots,a_n,\frac{F_k}{F_{k-1}}] = \frac{p_{n-1}+F_k\,p_n/F_{k-1}}{q_{n-1}+F_k\,q_n/F_{k-1}} = \frac{F_{k-1}\,p_{n-1}+F_k\,p_n}{F_{k-1}\,q_{n-1}+F_k\,q_n}$. Die letzte Darstellung von $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ ist die *in gekürzter Form* (d.h.: $q_{n+k} = F_{k-1}\,q_{n-1} + F_k\,q_n$) wegen

$$\begin{aligned}&(F_{k-1}\,p_{n-1} + F_k\,p_n)(F_k\,q_{n-1} + F_{k+1}\,q_n) - (F_{k-1}\,q_{n-1} + F_k\,q_n)(F_k\,p_{n-1} + F_{k+1}\,p_n)\\ &= \cdots = (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})(F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1}) = (-1)^{n+k}\,.\end{aligned}$$

Da auch $G = [a_0,\ldots,a_n,\underbrace{1,\ldots,1}_{k},F] = \frac{p_{n+k-1}+p_{n+k}F}{q_{n+k-1}+q_{n+k}F}$, folgt

$$q_{n+k}^2\left(G - \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}\right) = \frac{(-1)^{n+k}\,q_{n+k}}{q_{n+k-1} + q_{n+k}F} = \frac{(-1)^{n+k}}{F + \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k}}},$$

und wegen $F_k - F\cdot F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt5}\left(-(-F)^{-k-1} - (-F)^{-k+1}\right) =: \varepsilon_k \to 0$ und damit auch

$\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k}} = \frac{F_{k-2}q_{n-1}+F_{k-1}q_n}{F_{k-1}q_{n-1}+F_k q_n} = \frac{q_{n+k-1}}{F\,q_{n+k-1}+\varepsilon_{k-1}q_{n-1}+\varepsilon_k q_n} \to \frac{1}{F}\ (k\to\infty)$ ergibt sich mit $F+F^{-1}=\sqrt{5}$

$$\left|G-\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}\right| = \frac{C_k}{q_{n+k}^2} \quad \text{mit} \quad C_k \to \frac{1}{\sqrt{5}}\ (k\to\infty)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass für die Kettenbruchentwicklungen aller reellen Zahlen vom Typ G die Abschätzung $|G-\frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{c\,q_k^2}$ im Falle $c > \sqrt{5} = 2.236..$ stets für höchstens *endlich viele* k zutrifft.

11. Umso bemerkenswerter ist der nun folgende Hurwitzsche Satz, hier in der von Émile Borel ein wenig verschärften Fassung formuliert:

Ist ξ irrational und $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\ge 0} = ([a_0,a_1,\ldots,a_n])_{n\ge 0}$ die Folge der Näherungsbrüche zu ξ, so gilt $\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}$ für jeweils mindestens einen von drei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen.

Beweis:[1]

Vorab bemerken wir, dass die für $x\ge 1$ monoton wachsende Funktion $f(x)=x+1/x$ genau an der Stelle $x=\frac{1}{2}\big(\sqrt{5}+1\big)=F$ (siehe 10.) den Wert $\sqrt{5}$ annimmt (quadratische Gleichung), also
$x>1 \ \wedge\ 2<x+1/x<\sqrt{5} \quad\Leftrightarrow\quad 1<x<F,$ und $1<x<F \Leftrightarrow 1>1/x>1/F=\frac{1}{2}\big(\sqrt{5}-1\big)$.

Für zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ zu ξ gelte *nicht* die Ungleichung

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2} \tag{$*$}$$

Da die Näherungsbrüche auf verschiedenen Seiten von ξ liegen, folgt

$$\frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}+\frac{1}{\sqrt{5}\,q_{n+1}^2} \le \left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\xi-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\left(\xi-\frac{p_n}{q_n}\right)+\left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\xi\right)\right| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\,q_{n+1}}$$

und damit $\frac{q_{n+1}}{q_n}+\frac{q_n}{q_{n+1}} < \sqrt{5}$; *strenge* Ungleichung, da die linke Seite rational ist. Gemäß der Vorbemerkung folgt $\frac{q_{n+1}}{q_n} < F$.

Nun nehmen wir an, $(*)$ sei für *drei* aufeinanderfolgende Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ nicht erfüllt. Nach dem soeben Bewiesenen folgt $q_n/q_{n+1} > 1/F$ und $q_{n+2}/q_{n+1} < F$. Gemäß der Nenner-Rekursionsformel für Näherungsbrüche gilt $q_{n+2}/q_{n+1} = a_{n+2}+q_n/q_{n+1}$ und damit

$$F > \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} > a_{n+2}+\frac{1}{F} \ge 1+\frac{1}{F} = F\,,$$

ein *Widerspruch*! Damit ist der Satz von Hurwitz bewiesen. ∎

Die *Irrationalität* von ξ wird bei der Argumentation nicht gebraucht; sie ist nur wichtig für die Schlussfolgerung, es gebe *unendlich viele verschiedene* Brüche, die $(*)$ erfüllen.

Man kann den Satz auch mittels elementarer Eigenschaften der sogenannten *Farey-Brüche* beweisen. Unter der *Farey-Reihe der Ordnung n* versteht man die Gesamtheit der gekürzten Brüche mit Nenner $\le n$ aus dem Intervall $[0,1]$, nach steigender Größe angeordnet. Der Satz von Hurwitz lässt sich dann so formulieren: *Ist $\xi\in(0,1)$ eine Irrationalzahl und sind $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ benachbarte Farey-Brüche n-ter Ordnung mit $\frac{a}{b}<\xi<\frac{c}{d}$, so unterscheidet sich einer der drei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{c}{d}$ um weniger als $\frac{1}{\sqrt{5}\,N^2}$ von ξ (N der Nenner des Bruchs).* Dass es damit *unendlich viele verschiedene* so gute rationale Approximationen an ξ gibt, folgt aus $\left|\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}\right| \le \frac{1}{b(n+1)}$, $\left|\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}\right| \le \frac{1}{d(n+1)}$. Der Beweis ist sehr gut dargestellt im relativ kurzen den Farey-Brüchen gewidmeten Kapitel 6 des Buches von Niven, Zuckerman und Montgomery. Dieses Buch ist eine sehr gehaltvolle und dennoch lesbare Einführung in die elementare Zahlentheorie, vielleicht die beste überhaupt; die Autoren sind recht prominente Experten.

12. Das 18. Kapitel seiner *Einleitung in die Analysis des Unendlichen* (*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748); Nachdruck der deutschen Ausgabe von 1885: Springer, Berlin 1983) widmete Leonhard Euler den Kettenbrüchen. Im Anschluss an eine Arbeit aus dem Jahre 1737 (veröffentlicht 1744) war dies die wohl erste Lehrbuch-Darstellung des Kettenbruch-Kalküls, wenn auch Kettenbruch-Ansätze schon im 17. Jahrhundert vorkamen und vereinzelt bis in die Antike zurückreichen. Lagrange griff den Impuls Eulers auf und trug wesentliche Schritte bei zum Ausbau der Theorie. – Die fundamentalen *Rekursionsformeln* aus 2. findet man

[1]Wir folgen im wesentlichen der eleganten Darstellung bei Niven, Zuckerman, and Montgomery.

schon bei Euler, ebenso die Identität $p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = (-1)^k$. Letztere verknüpfte Euler mit der Darstellung der durch den Kettenbruch approximierten Zahl als rasch konvergierende alternierende *Reihe*:

$$\xi = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0q_1} - \frac{1}{q_1q_2} + \frac{1}{q_2q_3} - \frac{1}{q_3q_4} + - \cdots$$

Die Partialsummen dieser Reihe sind natürlich nichts anderes als die Näherungsbrüche der Kettenbruch-Entwicklung, die Reihe also eine Darstellung desselben Grenzprozesses.
Zu Anfang konstatierte Euler, die Theorie sei noch wenig entwickelt, werde aber bald sehr ausgedehnt genutzt werden, da sie „der Arithmetik und der gemeinen Algebra nicht zu unterschätzende Hülfsmittel“ zur Verfügung stelle. Hoffentlich gerät diese Einsicht des großen Meisters, untermauert durch *seine* Entdeckungen und die vieler anderer Mathematiker, bei einigen heutigen Mathematik-Lehrern nicht zu sehr in Vergessenheit.

13. *Drei Beispiele:*

a) Die Quadratwurzel aus 2. Wegen $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$, also $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ und damit $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \cdots$ folgt $\boldsymbol{\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]}$.
Die ersten Näherungsbrüche: $1, \frac{3}{2}, \boldsymbol{\frac{7}{5}}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \boldsymbol{\frac{99}{70}}, \ldots, \frac{p_{11}}{q_{11}} = \boldsymbol{\frac{19601}{13860}}, \ldots, \frac{p_{23}}{q_{23}} = \frac{768398401}{543339720}, \ldots$

Nun *Heronsches Wurzelziehen* gemäß $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2/x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mit $x_0 = \frac{7}{5}$ (wegen $\frac{49}{25} \approx 2$): $x_1 = \frac{99}{70}$, $x_2 = \frac{19601}{13860} = \mathbf{1.41421356}421\ldots$, $x_3 = \frac{p_{23}}{q_{23}} < \sqrt{2} + 2.78 \cdot 10^{-17}$;
exakt gilt $\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$.
Die Heron-Iteration durchläuft nur Näherungsbrüche: Ist $x_k = \frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch, gilt $|\sqrt{2} - x_k| < \frac{1}{(1+\sqrt{2})q^2}$ (siehe die Formel aus 4. für $\xi = [a_0, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$); mit $x_{k+1} = \frac{p^2+2q^2}{2pq}$ (*teilerfremd* für ungerades p) folgt $|x_{k+1} - \sqrt{2}| = \frac{(x_k-\sqrt{2})^2}{2x_k} < \frac{1}{8p^2q^2}$, falls $\frac{p}{q} < \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.457\ldots$. Nach 9. (Aussage d)) ist also auch x_{k+1} Näherungsbruch. Expliziter: $p_0 = q_0 = 1, p_1 = 3, q_1 = 2$,
$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n, q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n \;\Rightarrow\; p_n = \frac{1}{2}(\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1})$, $q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$ mit $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Daher: $\boldsymbol{x_k = \frac{p_n}{q_n}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_{k+1}} = \frac{p_n^2+2q_n^2}{2p_nq_n} \boldsymbol{= \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}}$.
Es gilt hier $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}$; mit der Monotonie der Iterationsfunktion $f(x) = (x + 2/x)/2$ und ihrer beiden Umkehrungszweige $f^{-1}(y) = y \pm \sqrt{y^2 - 2}$ $(y \geq \sqrt{2})$ folgt für ***ungerades*** n:

$$\boldsymbol{f\left(\left[\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}, \frac{p_n}{q_n}\right]\right) = \left[\frac{p_{2n+5}}{q_{2n+5}}, \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right], \quad f\left(\frac{1+p_{2n+3}}{q_{2n+3}}\right) = \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}, \quad \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \frac{1+p_{2n+3}}{q_{2n+3}} < \frac{p_n}{q_n}}.$$

So erkennt man, dass es neben den Näherungsbrüchen auch *viele andere Startwerte* der Heron-Iteration gibt, die letztlich zu Näherungsbruch-Iterationen führen; in jedem Intervall $\left[\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}, \frac{p_n}{q_n}\right]$ z.B. schon unendlich viele! Die einfachsten solchen Startwerte sind $x_0 = 2$ und $x_0 = \frac{10}{7}$.

Ist man an einer Auswahl guter Näherungen für $\sqrt{2}$ mit *möglichst kleinen Nennern* interessiert, sollte man außer den Näherungsbrüchen noch die Neben-Näherungsbrüche beachten und eventuell auch noch die Farey-Reihen zu Rate ziehen.

b) Einen recht prominenten *sehr guten Näherungswert für* π ergibt

$$[3, 7, 15, 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \mathbf{\frac{355}{113}} = \frac{p_3}{q_3}\,,$$

da $a_4 = 292$. Benutzt man diese Näherung, um den Umfang eines Kreises mit Radius 1 km, also etwa 6.28 km Länge, zu berechnen, beträgt der Fehler nur rund einen halben Millimeter. Ein weiterer Näherungsbruch zu π, explizit als Kettenbruch dargestellt:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{84}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

(Siehe z.B. Perron I, S.36.) Es ist *keine* Regelmäßigkeit der Kettenbruch-Entwicklung von π bekannt, während $\mathrm{e} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots]$ (Perron I, S. 124; von Euler entdeckt und erstmals bewiesen) und

$\frac{e-1}{2} = [0, 1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \ldots]$ (Euler: *Introductio*, § 381).

c) Die *Nullstelle der Gleichung* $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$.
Im Jahre 1769 publizierte Joseph Louis Lagrange eine Arbeit, in der er diese Nullstelle in einen Kettenbruch entwickelt — genau 100 Jahre, nachdem Isaac Newton anhand derselben Gleichungswurzel das später nach ihm benannte Verfahren demonstrierte. Beide Arbeiten sind auszugsweise wiedergegeben in der ausführlich kommentierten Quelltext-Sammlung *A History of Algorithms*, Jean-Luc Chabert et al, Springer 1999 (urspr. frz. 1994). Da die Vorgehensweise von Lagrange gewissermaßen *parallel* zu der von Newton ist, beginnen wir mit letzterer.

Es gilt $f(2) = -1,\ f(3) = 16$. Also gibt's eine Nullstelle $x_0 = 2 + \varepsilon_1$ mit kleinem $\varepsilon_1 > 0$. Dass es *nur die eine* Nullstelle gibt, zeigt eine sehr einfache Betrachtung des Kurvenverlaufs. Im folgenden bezeichnet $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ein beschränktes Vielfaches von ε^2, einen Term „zweiter Ordnung“ in ε.
$(2+\varepsilon_1)^3 - 2(2+\varepsilon_1) - 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad f(2) + 10\,\varepsilon_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_1^2) = 0$. Also $\varepsilon_1 = 0.1 + \varepsilon_2,\ x_0 = 2.1 + \varepsilon_2$.
$(2.1+\varepsilon_2)^3 - 2(2.1+\varepsilon_2) - 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad f(2.1) + 11.23\,\varepsilon_2 + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2) = 0$. Mit $f(2.1) = 0.061$ folgt
$\varepsilon_2 = -0.00543 + \varepsilon_3,\ x_0 = 2.09457 + \varepsilon_3$. Einsetzen dieses x_0-Wertes und Ausmultiplizieren:
$f(2.09457) + 11.16167\,\varepsilon_3 + \mathcal{O}(\varepsilon_3^2) = 0$. Mit $f(2.09457) = 0.00020669476699$ folgt
$\varepsilon_3 = -0.000018518 + \varepsilon_4,\ x_0 = \mathbf{2.094551482} + \varepsilon_4$. Usw. (Dabei $\varepsilon_4 = \mathcal{O}(\varepsilon_3^2) = \mathcal{O}(\varepsilon_2^4) = \mathcal{O}(\varepsilon_1^8)$.)
Der Zusammenhang mit der vertrauten *Newton-Iterationsvorschrift* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ wird deutlich, wenn wir beachten, dass $10 = f'(2),\ 11.23 = f'(2.1),\ 11.16167 = f'(2.09457)$, usw. Newtons *rein algebraisch-rechnerische* Original-Formulierung (Abkürzungen wie $f(2.1)$ oder $\mathcal{O}(\varepsilon_2^2)$ kommen *nicht* vor) lässt diese Iterationsvorschrift gar nicht erkennen; sie wurde erst viel später so allgemein formuliert. Von Tangenten ist auch überhaupt noch nicht die Rede.

Nun aber zur Lagrangeschen Kettenbruch-Entwicklung der Nullstelle. Zu dem Zweck nennen wir die Nullstelle jetzt ξ_0. Dann gilt also $\boldsymbol{\xi_0 = 2 + \frac{1}{\xi_1}}$ mit $\xi_1 > 1$. Mit $\big(2+\frac{1}{\xi_1}\big)^3 - 2\big(2+\frac{1}{\xi_1}\big) - 5 = 0$ folgt nach etwas Umformung $\xi_1^3 - 10\,\xi_1^2 - 6\,\xi_1 - 1 = 0$. Wie bei der ursprünglichen kann es auch bei dieser Gleichung nur genau eine Lösung geben, und diese, sieht man leicht, liegt zwischen 10 und 11. Also $\boldsymbol{\xi_1 = 10 + \frac{1}{\xi_2}}$ mit $\xi_2 > 1$. Umformen von $\big(10+\frac{1}{\xi_2}\big)^3 - 10\big(10+\frac{1}{\xi_2}\big)^2 - 6\big(10+\frac{1}{\xi_2}\big) - 1 = 0$ ergibt $61\,\xi_2^3 - 94\,\xi_2^2 - 20\,\xi_2 - 1 = 0$, und es folgt $\boldsymbol{\xi_2 = 1 + \frac{1}{\xi_3}}$. Mit Einsetzen und Umformen folgt $54\,\xi_3^3 + 25\,\xi_3^2 - 89\,\xi_3 - 61 = 0$ und $\boldsymbol{\xi_3 = 1 + \frac{1}{\xi_4}}$. Weiter ergibt sich: $\boldsymbol{\xi_4 = 2 + \frac{1}{\xi_5},\ \xi_5 = 1 + \frac{1}{\xi_6},\ \xi_6 = 3 + \frac{1}{\xi_7},\ \xi_7 = 1 + \frac{1}{\xi_8},\ \xi_8 = 1 + \frac{1}{\xi_9},\ \xi_9 = 12 + \frac{1}{\xi_{10}},\ \xi_{10} = 3 + \frac{1}{\xi_{11}},\ \xi_{11} = 5 + \frac{1}{\xi_{12}},\ \xi_{12} = 1 + \frac{1}{\xi_{13}}, \ldots}$ Es folgt die Kettenbruch-Entwicklung (bei Lagrange die ersten zehn Werte)

$$\boldsymbol{x_0 = \xi_0 = [2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, 3, 5, 1, \ldots]}$$

Dahinter steckt allerdings *einiger* Rechenaufwand, da ja immer wieder eingesetzt und umgeformt werden muss und dabei die Gleichungskoeffizienten immer größer werden. Die letzte der angeführten Rekursionsbeziehungen, also $\xi_{12} = 1 + \frac{1}{\xi_{13}}$, beruht z.B. auf der Gleichung

$$743335\,\xi_{12}^3 - 1015576\,\xi_{12}^2 - 460110\,\xi_{12} - 45667 = 0\,.$$

Die zugehörigen Näherungsbrüche (Lagrange nennt die ersten zehn):
$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \frac{50552}{24135},\ \frac{269175}{128512},\ \frac{319727}{152647}$$
Dies sind nun alles *exakte rationale Schranken* für die Lage der Nullstelle x_0 von $x^3 - 2x - 5 = 0$. Es gilt beispielsweise $0 < \dfrac{16415}{7837} - x_0 < \dfrac{1}{7837 \cdot 24135} \approx 5.3 \cdot 10^{-9}$ und $\dfrac{16415}{7837} = 2.09455148653821\ldots$, also *exakt* $x_0 = 2.09455148\ldots$. Nach 3. haben wir stets

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q_n(q_{n+1} + q_n/a_{n+2})}} < \boldsymbol{\Big|\xi - \frac{p_n}{q_n}\Big|} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q_n\,q_{n+1}}}\,.$$

Also z.B. $(n = 9)$ $\ \frac{16415}{7837} - x_0 > \frac{1}{7837(24135+7837/5)} \approx 4.96 \cdot 10^{-9}$. Die letzten beiden angeführten Näherungsbrüche zeigen: $\boldsymbol{2.094551481522 < x_0 < 2.094551481574}$.

14. Ein endlicher *allgemeiner* Kettenbruch sieht folgendermaßen aus:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} := b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots \, \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

Wir benutzen wie im Fall der regulären Kettenbrüche die Bezeichnung

$$\frac{p_k}{q_k} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_k|}{|b_k}$$

für die *Näherungsbrüche* und leiten für diese *Rekursionsformeln* her. Dabei nutzen wir die offensichtlich richtige Beziehung

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_k|}{|b_k} + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_k|}{|b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}}\,.$$

Wegen

$$b_0 = \frac{b_0}{1},\ b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1},\ b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} = \frac{b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_0 a_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

lautet die Rekursion:

$$\boldsymbol{p_0 = b_0,\ q_0 = 1;\quad p_1 = b_0\, b_1 + a_1,\ q_1 = b_1;}$$
$$\boldsymbol{p_{k+1} = p_k\, b_{k+1} + p_{k-1}\, a_{k+1},\ q_{k+1} = q_k\, b_{k+1} + q_{k-1}\, a_{k+1}}$$

Der Induktionsbeweis gleicht völlig dem im Fall der regulären Kettenbrüche; entscheidende Umformung:

$$\frac{p_{n-1}\big(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\big) + p_{n-2}\, a_n}{q_{n-1}\big(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\big) + q_{n-2}\, a_n} = \frac{b_{n+1}(p_{n-1}b_n + p_{n-2}a_n) + a_{n+1}p_{n-1}}{b_{n+1}(q_{n-1}b_n + q_{n-2}a_n) + a_{n+1}q_{n-1}}$$

Aus den Rekursionsformeln folgt $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = -a_{k+1}(p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k)$, also

$$\boldsymbol{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1},\quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^k \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{q_k q_{k+1}}}\,.$$

Nur die ersten Anfänge eines komplexen *Kettenbruch-Kalküls*, der umfassend dargestellt ist bei Perron. Auch *Funktionen* werden durch Kettenbrüche erfasst. Nur als Kostprobe zwei Beispiele allgemeiner (nicht-regulärer) Kettenbruch-Entwicklungen:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{9|}{|2} + \frac{25|}{|2} + \frac{49|}{|2} + \frac{81|}{|2} + \frac{121|}{|2} + \frac{169|}{|2} + \cdots$$
$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}, \frac{76}{105}, \frac{789}{945}, \frac{7734}{10395}, \frac{110937}{135135}, \frac{1528920}{2027025}, \ldots \quad (n \geq 1)$$
$$\ln(1+x) = \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|2-x} + \frac{4x|}{|3-2x} + \frac{9x|}{|4-3x} + \frac{16x|}{|5-4x} + \frac{25x|}{|6-5x} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

Die Konvergenzbetrachtungen bei allgemeinen Kettenbrüchen sind um einiges komplizierter als bei einfachen Kettenbrüchen. Es gibt eine ganze Reihe verschiedener Kriterien, siehe Perron; wir gehen hier nicht darauf ein.

Wir tragen nur noch ein *allgemeines Konvergenzkriterium* für *reguläre* (aber nicht unbedingt *einfache*) Kettenbrüche nach:

Ist $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *ein regulärer Kettenbruch mit* $a_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$*, so konvergieren die Näherungsbrüche* $\frac{p_n}{q_n}$ *genau dann gegen eine reelle Zahl* ξ*, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Beweis:

Zunächst sei daran erinnert, dass die Rekursionsformeln aus 2. auch für nicht-einfache Kettenbrüche unter den jetzt gegebenen Voraussetzungen allgemein gelten, ebenso die Identitäten zu Anfang von 3., insbesondere

$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\, q_{n+1}}$, und die Ungleichungen

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots\,, \quad \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \cdots\,, \quad \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \frac{p_{2k}}{q_{2k}}\,.$$

Aus $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, also $q_{n+1} > q_{n-1}$ ergibt sich die wachsende Monotonie der beiden Teilfolgen $\big(q_{2n}\big)$ und $\big(q_{2n+1}\big)$; sie streben entweder gegen endliche Grenzwerte oder gegen ∞. Insbesondere $q_{2n} > 1 = q_0$ $(n > 0)$ und $q_{2n+1} > a_1 = q_1$ $(n > 0)$, also auch $q_{2n} \geq a_{2n}a_1 + q_{n-1}$, $q_{2n+1} \geq a_{2n+1} + q_{n-1}$ und damit

$$q_{2n} \geq (a_{2n} + a_{2n-2} + \cdots + a_2)\, a_1 + 1, \quad q_{2n+1} \geq a_{2n+1} + a_{2n-1} + \cdots + a_1\,. \qquad (*)$$

Wenn also $\sum a_k = \infty$, strebt nach $(*)$ mindestens eine der beiden Teilfolgen $\big(q_{2n}\big)$ und $\big(q_{2n+1}\big)$ gegen unendlich, und es folgt $\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} \to 0$, die Intervallschachtelung der Näherungsbrüche konvergiert.

Die Intervallschachtelung konvergiert nur dann *nicht*, wenn *beide* Teilfolgen $\big(q_{2n}\big)$ und $\big(q_{2n+1}\big)$ beschränkt und damit konvergent sind. Dann folgt aber wegen $(*)$ auch die Konvergenz von $\sum a_k$. ■

Beispielsweise ist also $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots]$ ein konvergenter unendlicher Kettenbruch, allerdings ein *sehr langsam* konvergierender: Mit dem Mathematik-System MAXIMA – von Hand kann man sowas ja nicht mehr ausrechnen – ergeben sich die Werte $[\frac{p_{200}}{q_{200}}, \frac{p_{201}}{q_{201}}] \approx [1.74007087, 1.7638795]$ und $[\frac{p_{500}}{q_{500}}, \frac{p_{501}}{q_{501}}] \approx [1.747147, 1.75674]$. Die exakten Brüche sind in diesem Fall exorbitant; man kann sie nicht mehr hinschreiben. Es gilt ja schon $\frac{p_{51}}{q_{51}} = \frac{20366508031303413701803955 1957}{113247569744023213356136249387}$.

15. *Entwicklung von Funktionen in reguläre Kettenbrüche.*
In Anlehnung an die sehr kurze elegante Darstellung bei Camille Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Tome I, 3ième éd.*, Paris 1909, no. 386-393,[2] schildern wir die Entwicklung eines bestimmten Typs von Potenzreihen in einen regulären Kettenbruch.

Vorab, als motivierender Hintergrund, sei der Zusammenhang des klassischen „Euklidschen Algorithmus" (schon Aristoteles bekannt unter dem Namen *Wechselwegnahme*[3]) mit der unter 4. formulierten schrittweisen Kettenbruch-Entwicklung explizit dargestellt. Dazu setzen wir $\xi = \xi_0 = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (nicht unbedingt teilerfremd), ferner $m =: r_{-1}$, $n =: r_0$, $r_i := \frac{r_{i-1}}{\xi_i}$ $(i > 0)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} \quad &\Leftrightarrow \quad r_{-1} = a_0\, r_0 + r_1 \\
\xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2} \quad &\Leftrightarrow \quad r_0 = a_1\, r_1 + r_2 \\
\xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3} \quad &\Leftrightarrow \quad r_1 = a_2\, r_2 + r_3 \\
&\vdots \\
\xi_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} \quad &\Leftrightarrow \quad r_{n-2} = a_{n-1}\, r_{n-1} + r_n \\
\xi_n = a_n + 0 \quad &\Leftrightarrow \quad r_{n-1} = a_n\, r_n + 0
\end{aligned}$$

Beim Euklidschen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (m, n) gilt $r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$, $a_i = r_{i-1} \operatorname{div} r_i$ $(i \geq 0)$, $0 < r_i < r_{i-1}\,(1 \leq i \leq n)$, $r_{n+1} = 0$, $r_n = (m, n)$.

Da es auch im Ring der *Polynome* – wie in dem der ganzen Zahlen – eine Division mit Rest gibt, hat man einen völlig analogen Euklidschen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome. Den Einheiten ± 1 bei den Zahlen entsprechen die nichtverschwindenden Konstanten bei den Polynomen, die a_i sind Polynome, und zwar $\operatorname{grad} a_i \geq 1\,(i \geq 1)$; denn für die Reste gilt ja $\operatorname{grad} r_i < \operatorname{grad} r_{i-1}\,(i \geq 1)$. Sind die ursprünglichen Polynome r_{-1} und r_0 teilerfremd, ist r_n eine Konstante $\neq 0$, anerenfalls gilt $\operatorname{grad} r_n \geq 1$, und

[2]Dieser vielgerühmte *Cours d'Analyse*, ein zwar nicht leicht lesbares, aber auch für heutige Mathematiker noch sehr lehrreiches monumentales Meisterwerk, ist noch immer erhältlich bei Éditions Jacques Gabay. Wer mit etwas schlechterer Reproduktions-Qualität zufrieden ist, kann es als PDF aus dem Internet herunterladen; siehe die französische Wikipedia-Seite zu Camille Jordan.

[3]Wir zitieren Euklid (eigentlich Eukleides, ca. 340-270 v.Chr.): *Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Zahlen abwechselnd immer die kleinere von der größeren weg, so müssen, wenn niemals ein Rest die vorangehende Zahl genau misst, bis die Einheit übrigbleibt, die ursprünglichen Zahlen gegeneinander prim sein.* (VII. Buch, § 1). Ferner: *Misst, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.* (X. Buch, § 2). Übersetzung von Clemens Thaer; siehe: Euklid, *Die Elemente, Buch I-XIII*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1980. – Dieser wohl älteste bis heute benutzte effiziente Algorithmus wurde unabhängig auch in China und Indien entdeckt, aber erst Jahrhunderte später. Und noch etliche Jahrhunderte lang gab es nichts dem wissenschaftlich-logischen Aufbau der *Elemente* Vergleichbares in der überlieferten chinesischen wie indischen Mathematik-Literatur.

r_n ist ein *echter* Faktor von r_{n-1}.

Übersetzt in den Kettenbruch-Algorithmus, ist ξ_0 jetzt eine rationale Funktion, a_0 ist ein Polynom, eventuell auch $a_0 \equiv 0$, aber alle anderen a_i sind Polynome positiven Grades, und die $\xi_i = \frac{r_{i-1}}{r_i}$ $(i \geq 1)$ sind rationale Funktionen mit kleinerem Nennergrad; d.h.: $\frac{1}{\xi_{i+1}}$ ist jeweils der gebrochene Anteil von ξ_i, was bedeutet, dass ξ_{i+1} einen *kleineren* Nennergrad als ξ_i besitzt. Daher endet es mit $\xi_n = a_n$.

Jede rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ können wir in die Gestalt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n-k}\, x^{n-k}$ bringen. Denn jedem Nennerfaktor $(x-\alpha)\,(\alpha \neq 0)$ entspricht die geometrische Reihe $\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^k$. Und das Produkt aus dem Zählerpolynom $p(x)$ und allen den einzelnen Nennerfaktoren entsprechenden Reihen ergibt dann eine Reihe der angegebenen Gestalt, die konvergiert, sofern $|x|$ die Beträge aller Nennernullstellen übertrifft. (Gibt's keine Nennernullstelle $\neq 0$, liegt keine Reihe vor, sondern nur eine endliche Summe.) Der ganzrationale Anteil von $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist $\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\, x^{n-k}$. Haben p und q reelle Koeffizienten, treten die Nennernullstellen paarweise konjugiert komplex auf und alle Koeefizienten c_k sind reell, da $\sum_{k\geq 0}\alpha_k\, x^k \cdot \sum_{l\geq 0}\bar{\alpha}_l\, x^l$ für reelle x stets reell ausfällt und damit reelle Taylorkoeffizienten an der Stelle 0 besitzt.

Sei nun eine Funktion $\boldsymbol{\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n-k}\, x^{n-k}}$ gegeben, mit reellen oder komplexen Koeffizienten c_k. Es muss nicht unbedingt eine *rationale* Funktion sein, aber die Reihe sei für $|x| > M$ *konvergent*, mit irgendeinem $M > 0$. Bekanntlich kann man dann die Koeffizienten durch die komplexen Kurvenintegrale $c_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C f(z)\, z^{-k-1}\mathrm{d}z$ ausdrücken, wobei C ein im Gegenuhrzeigersinn durchlaufener Kreis um 0 mit Radius $> M$ ist. Dieses funktionentheoretische Faktum, das den *umkehrbar eindeutigen Zusammenhang* zwischen f und den Koeffizienten der Reihenentwicklung von f herstellt, wird aber hier nicht weiter benötigt. Nun zum Kettenbruch.

$\boldsymbol{\xi(x) = a_0(x) + \frac{1}{\xi_1(x)}}$, wobei $a_0(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\, x^{n-k}$. Da $\xi(x) \not\equiv a_0(x)$, gilt mit $n_1 \geq 1$, $c_{-n_1} \neq 0$:

$$\xi_1(x) = \frac{1}{\sum\limits_{k=n_1}^{\infty} c_{-k}\, x^{-k}} = \frac{x^{n_1}}{c_{-n_1}}\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-n_1-k}}{c_{-n_1}}x^{-k}} = \frac{x^{n_1}}{c_{-n_1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-n_1-k}}{c_{-n_1}}\, x^{-k}\right)^n$$

Da die Reihendarstellung von $\xi(x)$ für $|x| > M$ absolut konvergiert, gibt es ein $M_1 \geq M$, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{-n_1-k}/c_{-n_1}| \cdot |x|^{-k} < 1 \ (|x| > M_1),$$

und für solche x ist die geometrische Reihe rechts absolut konvergent und darf beliebig ausmultipliziert und umgeordnet werden. Weshalb sich ergibt:

$$\boldsymbol{\xi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c^{(1)}_{n_1-k}\, x^{n_1-k}}$$

mit (Cauchy-Produkt!)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c^{(1)}_{n_1}}\, c_{-n_1} &= 1,\\
c^{(1)}_{n_1}\, c_{-n_1-1} + \boldsymbol{c^{(1)}_{n_1-1}}\, c_{-n_1} &= 0,\\
c^{(1)}_{n_1}\, c_{-n_1-2} + c^{(1)}_{n_1-1}\, c_{-n_1-1} + \boldsymbol{c^{(1)}_{n_1-2}}\, c_{-n_1} &= 0,\\
c^{(1)}_{n_1}\, c_{-n_1-3} + c^{(1)}_{n_1-1}\, c_{-n_1-2} + c^{(1)}_{n_1-2}\, c_{-n_1-1} + \boldsymbol{c^{(1)}_{n_1-3}}\, c_{-n_1} &= 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dies kann man nun iterieren gemäß $\xi_k(x) = a_k(x) + \frac{1}{\xi_{k+1}(x)}$ mit $\operatorname{grad} a_k = n_k \geq 1$. Im Falle einer rationalen Funktion $\xi(x)$ tritt nach endlich vielen Schritten $\xi_n(x) = a_n(x) + 0$ ein, und die Iteration ist beendet; der Fall wurde schon diskutiert.
Anderenfalls kann man die Iteration beliebig fortsetzen. Wir betrachten die Näherungsbrüche

$$[a_0] := a_0(x),\ [a_0, a_1] := a_0(x) + \frac{1}{a_1(x)},\ [a_0, a_1, a_2] := a_0(x) + \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x)}}, \ldots .$$

Dies sind nun alles rationale Funktionen, deren Nenner nur insgesamt endlich viele Nullstellen besitzen, sofern man nur endlich viele Näherungsbrüche betrachtet. Die *rein algebraischen* unter den Überlegungen aus 2. und 3. bleiben also gültig. Setzen wir $[a_0, a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ mit Polynomen p_n und q_n, gilt demnach weiterhin

$$p_0 = a_0,\ q_0 \equiv 1,\ p_1 = a_0\, a_1 + 1,\ q_1 = a_1,\ \boldsymbol{p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}},\ \boldsymbol{q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

und auch

$$\boldsymbol{p_{k+1} q_k - q_{k+1} p_k = (-1)^k},\quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}},\quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1} a_{k+1}}{q_{k-1} q_{k+1}}\,.$$

Die rekursiv definierten $p_k(x)$, $q_k(x)$ sind also *teilerfremde* Zähler- und Nennerpolynome der Näherungsbrüche $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, und auch p_k, p_{k+1} sowie q_k, q_{k+1} sind stets teilerfremd. Auch

$$\boldsymbol{\xi(x) = [a_0(x), \ldots, a_k(x),\ \xi_{k+1}(x)] = \frac{\xi_{k+1}(x)\, p_k(x) + p_{k-1}(x)}{\xi_{k+1}(x)\, q_k(x) + q_{k-1}(x)}}$$

gilt analog zum konstanten Fall. Was sich schwerlich übertragen lässt, sind die Intervallschachtelungs-Eigenschaften: Wir haben ja gar keine Vorzeichen-Informationen hinsichtlich der a_k, p_k, q_k.

Ein der Situation angepasstes Maß der Annäherung: *der Grad des Verschwindens im Unendlichen*. Darunter sei folgendes verstanden:
Gilt $f(x) = c_0\, x^m + c_1\, x^{m-1} + c_2\, x^{m-2} + \cdots = \sum_{i\geq 0} c_i\, x^{m-i}$ ($|x| > R$) und analog $g(x) = \sum_{i\geq 0} d_i\, x^{n-i}$ ($|x| > R$), so folgt aus $|f(x) - g(x)| \leq M\, |x|^{-k}$, dass alle Potenzen x^j mit $j > -k$ bei f und g dieselben Koeffizienten haben. Kurz ausgedrückt: $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(x^{-k})$; d.h.: die Entwicklung von $f - g$ umfasst nur Potenzen, die für $|x| \to \infty$ mindestens so stark abfallen wie x^{-k}. Je größer k, desto weniger unterscheiden sich gewissermaßen f und g.

Die Rekursionsformeln für die Näherungsnenner und -zähler zeigen: $\operatorname{grad} p_0 = n$, $\operatorname{grad} p_1 = n + n_1$, $\operatorname{grad} p_k = n + n_1 + \cdots + n_k$ $(k \geq 1)$, ferner $\operatorname{grad} q_0 = 0$, $\operatorname{grad} q_k = n_1 + \cdots + n_k$ $(k \geq 1)$. Folglich

$$\boldsymbol{\frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)} - \frac{p_k(x)}{q_k(x)} = \mathcal{O}\big(x^{-2(n_1+\cdots+n_k)-n_{k+1}}\big)}$$

und auch

$$\boldsymbol{\xi(x) - \frac{p_k(x)}{q_k(x)} = \frac{(-1)^k}{q_k(x)\big(\xi_{k+1}(x)\, q_k(x) + q_{k-1}(x)\big)} = \mathcal{O}\big(x^{-2(n_1+\cdots+n_k)-n_{k+1}}\big)}\,.$$

Der Näherungsbruch $\frac{p_k}{q_k}$ besitzt den Nennergrad $\operatorname{grad} q_k(x) = n_1 + \cdots + n_k$ und stimmt – als Reihe entwickelt – in den führenden $2(n_1 + \cdots + n_k) + n_{k+1} - 1$ Termen mit $\xi(x)$ überein.

Es gilt nun in Analogie zum konstanten Fall eine *Optimalitäts*-Aussage. Um sie etwas bequemer zu formulieren, benutzen wir die Abkürzung $\boldsymbol{\nu_k} := n_1 + \cdots + n_k$.
Ist $\frac{p(x)}{q(x)}$ *eine rationale Funktion mit* $\xi(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \mathcal{O}\big(x^{-2\nu-1}\big)$, *wobei* $\nu_k \leq \operatorname{grad} q = \nu < \nu_{k+1}$, *so folgt* $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_k(x)}{q_k(x)}$.
Also *nur* die Näherungsbrüche stimmen so gut mit $\xi(x)$ überein, dass mindestens die ersten 2ν führenden Terme der Reihenentwicklung (ν der Nenner-Grad) gleich sind.
Der *Beweis* ist ganz einfach:
Einerseits gilt $\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p\, q_k - q\, p_k}{q\, q_k}$, und dies ist entweder $\equiv 0$ oder hat als Reihe den führenden Term x^{-k} mit $k \leq \nu + \nu_k$. Andererseits gilt aber $\frac{p}{q} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p}{q} - \xi + \xi - \frac{p_k}{q_k} = \mathcal{O}(x^{-2\nu-1}) + \mathcal{O}(x^{-\nu_k-\nu_{k+1}})$. Da weder $\nu + \nu_k \geq 2\nu + 1$ noch $\nu + \nu_k \geq \nu_k + \nu_{k+1}$, folgt $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$.
Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion

$$\exp(1/x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^{-k}\,.$$

Für diese ergibt sich die Kettenbruch-Entwicklung

$$[1, x - 1/2, 12x, 5x, 28x, 9x, 44x, 13x, 60x, 17x, 76x, 21x, 92x, ...]$$

Beispielsweise gilt $\frac{p_3(x)}{q_3(x)} =$

$$= 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x + \frac{1}{5x}}} = \frac{x^3 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{10}\, x + \frac{1}{120}}{x^3 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{10}\, x - \frac{1}{120}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{120x^5} + \frac{1}{720x^6} + \frac{1}{4800x^7} + \cdots$$

Erst der x^{-7}-Term weicht von dem der dargestellten Funktion $\exp(1/x)$ ab (da ja $7! = 5040$). Bei einer grafischen Darstellung im Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ unterscheiden sich die Funktion und ihre rationale Approximation praktisch nicht. Übrigens: Setzt man $x = 1$, ergibt sich *nicht* der einfache Kettenbruch für die Eulersche Zahl e! Dennoch *gilt* (man beachte $a_{2k} = 16k - 4$, $a_{2k+1} = 4k + 1$ $(k \geq 1)$)

$$\mathbf{e = [1, \frac{1}{2}, 12, 5, 28, 9, 44, 13, 60, 17, 76, 21, 92, 25, 108, 29, 124, 33, 140, \ldots]}$$

Schon $\frac{p_5}{q_5} - \mathrm{e} = \frac{49171}{18089} - \mathrm{e} < 2.77 \cdot 10^{-10}$, und $\frac{p_9}{q_9} - \mathrm{e} = \frac{28875761731}{10622799089} - \mathrm{e} < 4.66 \cdot 10^{-22}$.

Die Tatsache, dass praktisch alle $a_k(x)$ bei $\exp(1/x)$ von erster Ordnung sind, ist kein seltener Ausnahmefall, sondern in gewissem Sinne die Regel. Dies sieht man, wenn man *auf direktem Wege* eine approximierende rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ zu $\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n-k}\, x^{n-k}$ mit $\frac{p}{q} - \xi = \mathcal{O}(x^{-2\nu-1})$, $\nu := \operatorname{grad} q(x)$, bestimmt. Dazu ist $\boldsymbol{\xi(x)\, q(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{-\nu-1})}$ zu erfüllen. Mit $q(x) = d_0 + d_1\, x + \cdots + d_\nu\, x^\nu$ ergibt sich $\xi(x)\, q(x) =$

$$\begin{aligned} &= p(x) + \big(c_{-1}\, d_0 + c_{-2}\, d_1 + \cdots + c_{-\nu-1} d_\nu\big) x^{-1} + \big(c_{-2}\, d_0 + c_{-3}\, d_1 + \cdots + c_{-\nu-2} d_\nu\big) x^{-2} + \\ &\quad \cdots + \big(c_{-\nu}\, d_0 + c_{-\nu-1}\, d_1 + \cdots + c_{-2\nu} d_\nu\big) x^{-\nu} + \big(c_{-\nu-1}\, d_0 + c_{-\nu-2}\, d_1 + \cdots + c_{-2\nu-1} d_\nu\big) x^{-\nu-1} + \cdots \end{aligned}$$

Das Polynom $p(x)$ erhält man, *nachdem* die Koeffizienten d_i von $q(x)$ bestimmt sind. Letztere müssen $\sum_{i=0}^{\nu} c_{-j-i} d_i = 0$ $(1 \leq j \leq \nu)$ und $\sum_{i=0}^{\nu} c_{-\nu-1-i} d_i = c$ erfüllen. Falls die Koeffizienten-Determinante $D_\nu := \|c_{-1-i-j}\|_{\substack{0 \leq i \leq \nu \\ 0 \leq j \leq \nu}}$ *nicht* verschwindet, sozusagen der *Normal*fall, gibt es genau eine Lösung, die proportional zu c ist. Die sich ergebende rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ *ist ein Näherungsbruch*; das besagt die unmittelbar vor dem Beispiel $\exp(1/x)$ formulierte Optimalitätsaussage. Gilt $D_\nu \neq 0$ für alle ν, gibt's zu jedem ν einen Näherungsbruch, also $n_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Zum Schluss einige ergänzende Hinweise zur empfohlenen Literatur:

Die englische Übersetzung des Khinchin-Buches ist im Internet frei verfügbar, aber die preiswerte Dover-Ausgabe hat ein deutlich *besseres* tadelloses Schriftbild. Das *exzellente* Zahlentheorie-Buch von Niven, Zuckerman und Montgomery (Fifth Edition, 1991) ist ebenfalls im Internet erhältlich, sogar in einer recht guten Reproduktion. Das Perron-Buch (dritte Auflage in 2 Bänden, 1954, 1957) steht für Opac-Zugangsberechtigte als PDF-Download zur Verfügung.

Es folgen noch zwei Reproduktionen:

a) Die Seiten 39, 40 von A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, mit dem Beweis des Tschebyscheff-Satzes. Das Schriftbild ist das der frei online verfügbaren Version. (Für diesen Beweis von Theorem 24 braucht man den Satz von Hurwitz *nicht*; es reicht die triviale Abschätzung $|\xi - p_n/q_n| < 1/q_n^2$ für beliebige Näherungsbrüche. Der Hurwitzsche Satz spielt nur für den Nachweis der Schranke $1/x$ statt $3/x$ eine Rolle.)

b) Der kurze Abschnitt über Kettenbrüche aus Camille Jordans *Cours d'Analyse*, *Tome I, 3ième édition*. Schon durch diese kleine Kostprobe erhält man einen ersten Eindruck von der Eleganz und Dichte, die dieses Werk eines der größten Mathematiker auszeichnet.

nected with it, and has been the subject of continued intensive study, especially by the Soviet arithmetic school.

The first basic feature distinguishing the non-homogeneous case from the homogeneous one is that it is possible to make the quantity $|\alpha x - y - \beta|$ arbitrarily small for arbitrary β by a suitable choice of x and y only if the number α is irrational (whereas, in the homogeneous case, the quantity $|\alpha x - y|$ can be made arbitrarily small for *any* α). In fact, if $\alpha = a/b$, where $b > 0$ and a are integers, then, by setting $\beta = 1/2b$, we obtain, for arbitrary integers x and y,

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{2(ax - by) - 1}{2b}\right| \geqslant \frac{1}{2b},$$

since $|2(ax - by) - 1|$, being an odd integer, is at least equal to unity.

Thus, in all that follows, we shall assume α to be irrational. With this understanding, we shall now show that not only is it also possible to make the quantity $|\alpha x - y - \beta|$ arbitrarily small, but the analogy with the homogeneous case can be extended considerably further.

THEOREM 24 (Chebyshev). *For an arbitrary irrational number α and an arbitrary real number β, the inequality $|\alpha x - y - \beta| < 3/x$ has an infinite set of solutions in integers x and y (where $x > 0$).*[6]

PRELIMINARY REMARK. Obviously, this result is completely analogous to the corresponding problem for homogeneous equations, expressed in Theorem 21. The difference consists only in the fact that here, instead of $1/\sqrt{5}$, we have 3. The order of the approximation is the same as before. We note also that the number 3 is not the best possible and that the exact value of the greatest lower bound of the set of numbers that would verify Theorem 24 is considerably less than 3.

PROOF. Let p/q be an arbitrary convergent of α. We then have

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad (0 < |\delta| < 1); \tag{38}$$

also, for any real β, we can find a number t such that

$$|q\beta - t| \leqslant \frac{1}{2},$$

[6] A simple proof of a somewhat stronger theorem is found in Khinchin's article, "Printsip Dirikhle v teorii diofantovykh priblizhenii" ("Dirichlet's principle in the theory of Diophantine approximations"), *Uspekhi matematicheskikh nauk*, **3**, No. 3, 17–18 (1948). Further refinements are contained in Khinchin's article, "O zadache Chebysheva" ("On a problem of Chebyshev"), *Izvestiya akad. nauk SSSR. ser. matem.*, **10**, 281–294 (1946). (B. G.)

so that

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \qquad (|\delta'| \leqslant 1). \tag{39}$$

Since p and q have no common divisors other than ± 1, there exists a pair of integers x and y such that

$$\frac{q}{2} \leqslant x < \frac{3q}{2}, \qquad px - qy = t.$$

For if r/s is the convergent immediately preceding p/q,

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \qquad q(\varepsilon rt) - p(\varepsilon st) = t\varepsilon^2 = t,$$

and for an arbitrary integer k,

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t;$$

but k can be chosen so that

$$\frac{q}{2} \leqslant x = kq - \varepsilon st < \frac{3q}{2}.$$

Then, on the basis of equations (38) and (39),

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q}\right|$$
$$= \left|\frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q}\right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

and since

$$q > \frac{2}{3}x,$$

we have

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x}.$$

Finally, since q can be chosen arbitrary large and since $x \geq q/2$, it follows that x can be arbitrarily large. This proves the theorem.

But the problem of an approximate solution to equation (37) in whole numbers can be put in a different, and somewhat more natural, form. Since the crux of the problem is to make the quantity $|\alpha x - y - \beta|$ as small as possible with as large integral values of x and y as possible, it is most natural to state the problem in the following manner. We know (from Theor. 24) that, for any positive number n (no

Posant $x = -1 + h$, on trouverait de même

$$2m = 2\left(2\cos\frac{\pi}{2m}\right)^2 \cdots \left[2\cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2.$$

Multiplions ces deux égalités et extrayons la racine carrée; il viendra

$$m = 2^{m-1}\sin\frac{\pi}{m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$$

et, par suite,

$$C = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.m^{\frac{1}{2}}.$$

VII. — Fractions continues.

386. Soit A une quantité réelle et positive quelconque; on pourra évidemment poser

$$A = a_0 + \frac{1}{A_1},$$

a_0 étant un entier, et A_1 une quantité > 1.

On pourra poser de même

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{A_2},$$

a_1 étant un entier au moins égal à 1, et A_2 une quantité > 1.

Continuant ainsi, on obtiendra pour A un développement en *fraction continue*, tel que

$$A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

Ce développement sera évidemment limité si A est commensurable, illimité dans le cas contraire.

On nomme *réduites* de la fraction continue les fractions

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$
$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}, \quad \dots$$

387. Théorème. — *On a généralement*

$$(1) \qquad \begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{cases}$$

Cette formule est vérifiée pour $n = 2$ par les valeurs ci-dessus de P_2 et de Q_2. Nous allons d'ailleurs montrer que, si elle est vraie pour un nombre n, elle le sera pour $n+1$.

En effet, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ se déduit de $\frac{P_n}{Q_n}$ par le changement de a_n en $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$. On aura donc

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)P_{n-1} + P_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$
$$= \frac{a_{n+1}(a_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1}}{a_{n+1}(a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}P_n + P_{n-1}}{a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}.$$

On voit par les formules (1) que les quantités Q_n croissent au delà de toute limite quand n augmente. En effet, a_n étant au moins égal à 1, on aura

$$Q_n \geqq Q_{n-1} + Q_{n-2} \geqq Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-2} \geqq 2Q_{n-2}.$$

On déduit encore des formules (1) la relation

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n = -(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}),$$

et, comme $P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1$, on aura

$$(2) \qquad P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}.$$

On voit par là que P_n et Q_n n'ont aucun diviseur commun. *Les réduites sont donc des fractions irréductibles.*

On a enfin

$$(3) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n}{Q_{n-1}Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n}.$$

388. Les quantités $\frac{P_n}{Q_n}$ convergent vers A. En effet, si dans

l'identité (3), qui peut s'écrire ainsi

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(a_n Q_{n-1} + Q_{n-2})},$$

on change a_n en $a_n + \frac{1}{A_{n+1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ étant évidemment changé en A, il viendra

$$(4) \qquad A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}\left(Q_n + \frac{1}{A_{n+1}} Q_{n-1}\right)}.$$

Les quantités Q croissant indéfiniment quand n augmente, cette différence décroîtra indéfiniment. D'ailleurs, $\frac{1}{A_{n+1}}$ étant compris entre 0 et 1, cette différence sera comprise entre les deux limites suivantes :

$$\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1})}.$$

Changeant n en $n+1$, on trouvera de même que $A - \frac{P_n}{Q_n}$ est compris entre

$$\frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_{n+1} + Q_n)}.$$

Ces deux quantités sont de signe contraire aux précédentes et moindres en valeur absolue; car on a

$$Q_n > Q_{n-1}, \qquad Q_{n+1} \overline{\gtrless} Q_n + Q_{n-1},$$

d'où

$$Q_n Q_{n+1} > Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1}).$$

Donc A *est compris entre deux réduites consécutives quelconques et plus rapproché de la dernière.*

389. *Une réduite quelconque* $\frac{P_n}{Q_n}$ *est plus rapprochée de* A *qu'une fraction quelconque* $\frac{P}{Q}$ *dont le dénominateur est moindre que* Q_n.

Supposons, en effet, que $\frac{P}{Q}$ soit plus voisin de A que $\frac{P_n}{Q_n}$; $\frac{P}{Q}$ tombera nécessairement entre $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$. On aura donc

$$\left|\frac{P}{Q} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{PQ_{n-1} - P_{n-1}Q}{Q_{n-1}Q}\right| < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Mais $PQ_{n-1} - P_{n-1}Q$ est un entier qui ne peut s'annuler; car on aurait

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

et cette fraction est moins approchée de A que $\frac{P_n}{Q_n}$. On aura donc

$$|PQ_{n-1} - P_{n-1}Q| \overline{\gtrless} 1,$$

et l'inégalité ne pourra avoir lieu que si

$$Q > Q_n,$$

contrairement à l'hypothèse faite.

390. Considérons maintenant une fonction A développable en série suivant les puissances entières et décroissantes d'une variable x. On pourra poser

$$A = a_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots,$$

a_0 désignant un polynome en x, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des constantes.

Posons

$$\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots = \frac{1}{A_1}.$$

Si α_{μ_1} est le premier coefficient qui ne s'annule pas, A_1 deviendra infini d'ordre μ_1 avec x. En le développant suivant les puissances décroissantes de x, il viendra donc

$$A_1 = a_1 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots,$$

a_1 étant un polynome de degré μ_1.

Posons de même

$$\frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots = \frac{1}{A_2};$$

on en déduira

$$A_2 = a_2 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots,$$

a_2 étant un polynome en x du premier degré au moins.

Continuant ainsi, on obtiendra un développement

$$A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

limité si A est une fraction rationnelle, illimité dans le cas contraire; a_1, a_2, ... étant des polynomes dont les degrés en x, que nous désignerons par μ_1, μ_2, ..., sont au moins égaux à l'unité.

391. Considérons les réduites

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \qquad \ldots$$

Les relations (1) subsisteront avec toutes leurs conséquences.

On en déduit tout d'abord que le degré ν_n du polynome Q_n est égal à $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$.

La relation (2) montre ensuite que *la fraction algébrique* $\frac{P_n}{Q_n}$ *est irréductible.*

On voit enfin, par la relation (4), que la différence $A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est d'ordre $-\nu_{n-1} - \nu_n$ par rapport à x. Car Q_{n-1} est d'ordre ν_{n-1}, et $Q_n + \frac{1}{A_n} Q_{n-1}$ est évidemment d'ordre ν_n, comme son premier terme Q_n.

D'ailleurs, $\nu_n > \nu_{n-1}$; donc l'ordre de $A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ sera $< -2\nu_{n-1}$.

392. Nous allons démontrer que, réciproquement, toute fraction $\frac{P}{Q}$ telle que la différence $A - \frac{P}{Q}$ soit d'ordre $< -2\nu$, ν étant le degré du dénominateur Q, est nécessairement égale à l'une des réduites précédentes.

En effet, considérons la série des nombres ν_1, ν_2, ...; soit ν_{n-1} le dernier nombre de cette suite qui ne surpasse pas ν. On aura, par hypothèse,

$$A - \frac{P}{Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right),$$

en désignant, pour abréger, par $\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right)$ une expression d'ordre $-(2\nu + 1)$ au plus par rapport à x.

On a, d'autre part,

$$A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \left(\frac{1}{x^{\nu_{n-1}+\nu_n}}\right),$$

d'où

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}Q - PQ_{n-1}}{Q_{n-1}Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) + \left(\frac{1}{x^{\nu_{n-1}+\nu_n}}\right).$$

Or on a

$$\nu_n > \nu \geqq \nu_{n-1}.$$

Donc le second membre de l'égalité précédente sera d'ordre inférieur à $-(\nu + \nu_{n-1})$. Donc il doit en être de même du premier. Mais le dénominateur $Q_{n-1}Q$ est d'ordre $\nu + \nu_{n-1}$. Donc le numérateur doit être d'ordre < 0. Mais c'est un polynome, et son ordre ne peut être < 0 que s'il s'annule identiquement.

On aura donc

$$P_{n-1}Q - PQ_{n-1} = 0,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \begin{cases} P = kP_{n-1}, \\ Q = kQ_{n-1}, \end{cases}$$

k étant un polynome d'ordre $\nu - \nu_{n-1}$.

On voit par là que $\frac{P}{Q}$ ne sera irréductible que si $\nu = \nu_{n-1}$, auquel cas le facteur k se réduit à une constante.

393. Proposons-nous de déterminer directement une fraction $\frac{P}{Q}$ dont le dénominateur Q soit de degré ν, et telle qu'on ait

$$A - \frac{P}{Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right).$$

On en déduit, en chassant le dénominateur,

$$AQ = P + \left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right).$$

Il faut donc que, dans le produit AQ, les termes en $\frac{1}{x}, \dots, \frac{1}{x^\nu}$ disparaissent.

Soit, comme précédemment,

$$A = a_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots,$$

et posons

$$Q = B_0 + B_1 x + \dots + B_\nu x^\nu.$$

Le coefficient C_λ du terme en $\frac{1}{x^\lambda}$, dans le produit AQ, sera évidemment donné par la formule

$$C_\lambda = \alpha_\lambda B_0 + \alpha_{\lambda+1} B_1 + \dots + \alpha_{\lambda+\nu} B_\nu.$$

Nous aurons à satisfaire aux conditions suivantes :

$$(6)\qquad C_1 = 0, \quad \dots, \quad C_\nu = 0.$$

1° Si le déterminant

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{\nu+1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{\nu+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \dots & \alpha_{2\nu+1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, ces équations détermineront, sans ambiguïté, les rapports des inconnues B ; la fonction Q sera déterminée à un facteur constant près ; on obtiendra la valeur correspondante de P en calculant la partie entière du produit AQ ;

2° Si Δ_ν est nul, les équations (6) ne détermineront pas complètement les rapports des coefficients B, et le polynome Q contiendra plusieurs constantes arbitraires.

Dans tous les cas, les constantes arbitraires disparaîtront du rapport $\frac{P}{Q}$, en vertu de la relation

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

que nous avons trouvée plus haut.

On voit par ce qui précède que la condition $\Delta_\nu \gtrless 0$ exprime qu'il existe une réduite de degré ν. Si donc tous les déterminants Δ_1, Δ_2, ... sont différents de zéro, ce qui aura lieu en général, les nombres $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ formeront la série complète des nombres entiers, et, par suite, les degrés μ_1, $\mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ des polynomes $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ seront égaux à l'unité.

VIII. — Maxima et minima.

394. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x. On dit que $f(x)$ est *maximum* pour $x = a$, si l'on peut déterminer une quantité ε telle qu'on ait

$$f(a+h) - f(a) < 0$$