Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 10 (28.6.2024)

In der Vorlesung wurde folgende Gleichung gezeigt:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx \text{ für } \mathrm{Re}\,(s) > 0, s \neq 1.$$

Aufgabe 46:

(1) Zeige (beispielsweise mit Hilfe partieller Summation), dass für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{N^{s-1}} - s\int_1^N \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx.$$

(2) Zeige für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{Re}\,(s) > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| s\int_N^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx\right| \leq \frac{|s|}{\sigma N^\sigma}.$$

(3) Zeige, dass für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} + s\int_N^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx \text{ für } \mathrm{Re}\,(s) > 0, s \neq 1.$$

Aufgabe 47:

(1) Zeige (mit Hilfe von Aufgabe 46), dass für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+it}} = \zeta(1+it) + \frac{\sin(t\log N) + i\cos(t\log N)}{t} + (1+it)\int_N^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{2+it}}dx.$$

(2) Beweise für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\frac{1}{|t|} - \frac{\sqrt{1+t^2}}{N} \leq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+it}} - \zeta(1+it)\right| \leq \frac{1}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{N}.$$

(3) Beschreibe für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Verhalten der Folge

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+it}}\right)_{N\geq 1}.$$

Aufgabe 48: Für Funktionen $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, die beschränkt und auf jedem kompakten Intervall Riemann-integrierbar sind, betrachten wir folgende Eigenschaften:

(A) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx = \lim_{X\to\infty}\int_1^X \frac{f(x)}{x}dx$ existiert.

(B) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, d.h. $f(x)$ konvergiert für $x \to \infty$ gegen 0.

Zeige an Hand von Beispielen, dass weder (A)$\Longrightarrow$(B) noch (B)$\Longrightarrow$(A) gilt.

Datei: anazt_u10.tex. Version vom 27.6.2024

Aufgabe 49:

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiere für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ gegen die Funktion $f(x)$.
Zeige: Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 1-} f(x)$ und gilt $a_n \geq 0$ für alle n, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(2) Zeige an einem Beispiel, dass die Aussage in (1) nicht mehr richtig sein muss, wenn man die Voraussetzung $a_n \geq 0$ weglässt.

(Die Aussage in (1) ist ein einfaches Beispiel eines sogenannten Tauber-Satzes.)

Aufgabe 50: (In dieser Aufgabe darf der Primzahlsatz ($\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$) verwendet werden.) Zeige:

(1) Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt
$$\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} \sim \frac{a}{b}.$$

(2) Zu $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a < b$ gibt es ein $x_{a,b} \in \mathbb{R}$, sodass
$$\pi(ax) < \pi(bx) \text{ für alle } x \geq x_{a,b}$$
gilt. Insbesondere enthält dann für jedes $x \geq x_{a,b}$ das Intervall $[ax, bx]$ eine Primzahl.

(3) Zu $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a < b$ gibt es Primzahlen p, q mit
$$a < \frac{p}{q} < b.$$

(4) Jede positive reelle Zahl lässt sich beliebig gut durch den Quotienten zweier Primzahlen approximieren.

(5) Bestimme Primzahlen p, q mit $\frac{p}{q} = 3.14\ldots$. ($\frac{p}{q}$ approximiert also $\pi = 3.14159265358979\ldots$.)