

# Mathematik für Physiker 3

Hermann Schulz-Baldes, Dept. Mathematik

Assistenz: Tom Stoiber, Dept. Mathematik

Vorlesung, Wintersemester 2018

# Termine

## Vorlesungstermine

Mi 10:15 – 12:00 Uhr    Raum: H13    Hermann Schulz-Baldes

Do 08:15 – 10:00 Uhr    Raum: HH    Hermann Schulz-Baldes

## Videoaufzeichnung aus WS2016 über StudOn

## Großübung

Mo 12:15 – 14:00 Uhr    Raum: H12    Tom Stoiber

## Übungstermine

Gruppe 1                    Mo 08:15 – 10:00    Raum: U4    Refik Mansuroglu

Gruppe 2                    Mo 10:15 – 12:00    Raum: HE    Kevin Haas

Gruppe 3 (Eng.)            Mo 10:15 – 12:00    Raum: HE    Nikolay Martynchuk

# Regeln

## Anmeldung

- Melden Sie sich in Studon zu Veranstaltung und Übungen an (ab 12:00 am 17.10.). Beachten Sie Anmeldefristen für Klausur

## Übungen

- Die Übungsblätter werden freitags auf Studon bereitgestellt.
- Die Abgabe bis Montag 12:00 in Übungskasten (Cauerstr. 11)
- Es werden nur leserliche und ordentliche Abgaben akzeptiert
- Es sind Zweierabgaben gestattet, solange beide die gleiche Übungsgruppe besuchen
- Zu Semesterende sind 50% der Gesamtpunktzahl vorzuweisen

## Klausur

- Die Klausur findet am 12.02.2019, 8:00-9:30, in H12-H13 statt
- Einsicht am 13.2.2019 von 09:30 bis 10:30 in Ü2 (Mathematik)
- Nachklausur 18.04.2019, 10:00-11:30 in H12
- Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt

# Überblick

- Gewöhnliche Differentialgleichungen  
Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen  
Phasenporträt  
Stabilitätsanalyse
- Maß- und Integrationstheorie  
 $\sigma$ -Algebren und Maße  
Lebesgue-Integral  
Konvergenzsätze, Satz von Fubini, Transformationsformel
- Fourierreihen und Fouriertransformation
- Tensoralkül auf Mannigfaltigkeiten  
Differentialformen  
Sätze von Stokes und Gauss
- Funktionentheorie  
Holomorphe und analytische Funktionen  
Residuenkalkül

# Literatur

**Es gibt viele gute Quellen zu obigen Themen!**

Wählen Sie nach Ihrem Geschmack aus, z.B.

Deitmar, *Analysis*, bei Springer Spektrum 2014

Zorich: *Analysis I und II*, Springer Verlag 2006

Knauf: *Klassische Mechanik*, Springer Verlag 2011

Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag 2011

Werner: *Einführung in die höhere Analysis*, Springer Verlag 2006

Lehn: *Skript zur Analysis III*, 2003

... Skripte zur Ana und LA von mir sind auf Studon

und es gibt weiter die Folien auch auf Studon

# 1 Differentialgleichungen

## Was ist eine Differentialgleichung?

### Definition 1.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist, mit  $x' = \partial_t x$ ,

$$x' = f(t, x)$$

eine (vektorwertige explizite) gewöhnliche Differentialgleichung (DGL).

Lösung ist differenzierbares  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf offenem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit

$$\text{Graph}(\phi) = \{(t, \phi(t)) \mid t \in I\} \subset U$$

und

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t))$$

### Beispiel 1.2

Sei  $n = 1$ . Dann ist  $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(t) = e^{\lambda t}$  Lösung von  $x' = \lambda x$

# Lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

## Theorem 1.3 (Satz von Picard-Lindelöf)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und global Lipschitz in  $x$ :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle  $(t, x), (t, y) \in U$  und uniformen  $L > 0$ .

Zu Anfangsbedingungen  $(t_0, x_0) \in U$  existiert  $\epsilon > 0$  und genau eine Lösung  $\phi : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems (AWP):

$$x' = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0$$

## Bemerkung 1.4

Genauer: für kurze Zeiten  $|t - t_0|$  erfüllt die differenzierbare Lösung  $\phi$

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \phi(t_0) = x_0$$

## Beweis der Eindeutigkeit

Seien  $\phi$  und  $\psi$  zwei Lösungen des AWP auf  $[t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0]$

Betrachte  $\eta(\epsilon) = \phi(t_0 + \epsilon) - \psi(t_0 + \epsilon)$  und setze  $M = \sup_{|\epsilon| \leq \epsilon_0} \|\eta(\epsilon)\|$

$$\begin{aligned}\|\eta(\epsilon)\| &= \left\| \int_0^\epsilon ds (\phi'(t_0 + s) - \psi'(t_0 + s)) \right\| \\ &= \left\| \int_0^\epsilon ds [f(t_0 + s, \phi(t_0 + s)) - f(t_0 + s, \psi(t_0 + s))] \right\| \\ &\leq \epsilon L \sup_{|s| \leq |\epsilon|} \|\phi(t_0 + s) - \psi(t_0 + s)\| \\ &\leq \epsilon_0 L M\end{aligned}$$

Nach Maximieren über linke Seite folgt somit  $M \leq \epsilon_0 L M$

Wenn  $\epsilon_0 < \frac{1}{L}$ , folgt also  $M = 0$

Also  $\eta = 0$  und somit  $\phi = \psi$  auf  $[t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0]$  □



# Beweis der Existenz

Jede Lösung  $\phi$  des AWP  $x' = f(x, t)$  und  $x(t_0) = x_0$  erfüllt

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(s, \phi(s))$$

wie Differenzieren zeigt

Umgekehrt: Lösung dieser Integralgleichung ist  $C^1$  (Hauptsatz)

Somit: Lösung der Integralgleichung wieder Lösung des AWP

Betrachte den Integraloperator  $F : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$

$$(F\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(s, \phi(s)) \quad t \in I = [t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0]$$

Gesucht sind also Fixpunkte von  $F$

# Erinnerung an Hilfsmittel

## Satz 1.5 (Fixpunktsatz von Banach, MP2)

$(Y, d)$  vollständiger metrischer Raum

$F : Y \rightarrow Y$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $K < 1$ , d.h.

$$d(F(y), F(z)) \leq K d(y, z) \quad , \quad \forall y, z \in Y$$

$\implies F$  hat genau einen Fixpunkt  $y_0 \in Y$ , d.h.  $F(y_0) = y_0$

Hier  $Y = C(I, B_R)$  mit  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$  mit Metrik

$$d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_\infty = \sup_{t \in I} \|\phi(t) - \psi(t)\| = \max_{t \in I} \|\phi(t) - \psi(t)\|$$

Dann ist  $(C(I, B_R), d)$  vollständig (siehe MP2, Satz 11.26)

Noch zu zeigen für obigen Integraloperator  $F$  und passende  $\epsilon_0, R$ :

- $F : C(I, B_R) \rightarrow C(I, B_R) \subset C(I, \mathbb{R}^n)$
- $F$  Kontraktion

# Nachweis der Kontraktionseigenschaft von $F$

Für  $\phi \in C(I, B_R)$  und  $t \in I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  gilt

$$\|(F\phi)(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t ds \|f(s, \phi(s))\| \leq \|x_0\| + \epsilon_0 C \leq R$$

wobei  $C = \|f\|_\infty$  und Letzteres gilt für  $R$  ausreichend groß. Nun:

$$\begin{aligned} d(F(\phi), F(\psi)) &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t ds [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] \right\| \\ &\leq \epsilon_0 L \sup_{s \in I} \|\phi(s) - \psi(s)\| \\ &< \frac{1}{2} d(\phi, \psi) \end{aligned}$$

für  $\epsilon_0$  ausreichend klein. Somit ist Picard-Lindelöf bewiesen □

## Bemerkung 1.6

Eindeutigkeit folgt auch aus der Eindeutigkeit im Fixpunktsatz

## Beispiel 1.7

Sei  $n = 1$  und  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom. Dann hat das AWP

$$x' = p(x) \quad , \quad x(0) = c$$

eine eindeutige Lösung für kurze Zeiten. In der Tat ist  $p$  Lipschitz.

Berechnung: Trennung der Variablen  $\frac{dx}{p(x)} = dt$  und Integration

$$t + C = \int dt = \int \frac{dx}{p(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Letzteres kann mit Partialbruchzerlegung bestimmt werden

Integrationskonstante  $C$  aus Anfangsbedingung berechnen

Dann Auflösen nach  $t$

Zum Beispiel:  $p(x) = x^2$  und  $c = 1$

Dann  $t - 1 = -x^{-1}$ , also ist *die* (eindeutige) Lösung  $x(t) = \frac{1}{1-t}$

Beachte: Lösung existiert nur für  $t < 1$

Durch maximale Fortsetzung der Lösungen erhält man:

### Satz 1.8

Sei  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig in  $t$  und Lipshitz-stetig in  $x$ .  
Dann hat das AWP

$$x' = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \in U$$

ein maximales offenes Existenzintervall  $I_{(t_0, x_0)} = (T_-, T_+) \subset \mathbb{R}$

### Beispiel 1.9

Zum AWP  $x' = x^2$  mit  $x(0) = 1$  ist  $I_{(0,1)} = (-\infty, 1)$ .

Zum AWP  $x' = x$  mit  $x(0) = 1$  ist  $I_{(0,1)} = \mathbb{R}$  mit Lösung  $x(t) = e^t$

### Definition 1.10

Wenn maximales Existenzintervall für alle Anfangsbedingungen ganz  $\mathbb{R}$  ist, heißt DGL vollständig

Obige **Lösungsmethode**: Trennung der Variablen und Integration immer, wenn rechte Seite faktorisiert:

$$x' = g(x)h(t)$$

Dann

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int dt h(t)$$

Existenzaussage in Beispiel 1.7 ist Spezialfall von:

### Satz 1.11

Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  total differenzierbar (MP2). Dann hat das AWP

$$x' = f(t, x) \quad (x(0), 0) = (c, 0) \in U$$

eine eindeutige Lösung für kurze Zeiten

**Beweis:** Differenzierbare Funktionen sind Lipshitz-stetig



# Picard Iteration

Im Beweis vom Fixpunktsatz von Banach betrachtet man die Folge

$$y_{n+1} = F(y_n) \quad , \quad n \geq 1$$

wobei  $y_1 \in Y$  eine Anfangsbedingung ist

Es wird dann gezeigt, dass diese Folge immer gegen ein  $y_0$  konvergiert

Angewandt auf obige Situation erhält man eine Folge von Funktionen:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds f(s, x_n(s)) \quad , \quad x_0(t) = x_0$$

Sie konvergiert exponentiell in  $n$  (für kleine  $t$ ) gegen Lösung der DGL

Dies ist eine (numerische) Methode die Lösung der DGL zu bestimmen, genannt die Picard Iteration

# Verallgemeinerung von Picard-Lindelöf

Mit im Wesentlichen dem gleichen Beweis gilt Folgendes:

## Satz 1.12

*Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum)*

*Sei  $U \subset \mathbb{R} \times V$  offen und  $f : U \rightarrow V$  stetig und global Lipschitz in  $x$ :*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

*für alle  $(t, x), (t, y) \in U$  und uniformen  $L > 0$ .*

*Zu Anfangsbedingungen  $(t_0, x_0) \in U$  existiert  $\epsilon > 0$  und genau eine Lösung  $\phi : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow V$  des Anfangswertproblems (AWP):*

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

Insbesondere, gilt dies also für lineare Gleichungen auf einem Hilbert-Raum, also auch für die Schrödingergleichung  $i\partial_t\psi = H\psi$



# Satz von Peano

Existenz von Lösungen unter schwächeren Voraussetzungen:

## Satz 1.13

Sei  $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$  offen,  $(t_0, x_0) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann hat AWP

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

eine Lösung.

**Beweis:** siehe z.B. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* □

Eindeutigkeit der Lösung nicht gegeben (wenn nicht Lipschitz):

## Beispiel 1.14

Betrachte das (skalare autonome) AWP

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0 \in \mathbb{R}$$

Eine Lösung ist  $x(t) = t^3$ . Eine andere Lösung ist  $x(t) = 0$

# Implizite DGL

## Definition 1.15

Eine DGL heißt implizit, wenn sie von folgender Form ist:

$$g(t, x, x') = 0$$

Lösungen allgemeiner impliziter DGL sind nicht eindeutig:

## Beispiel 1.16

$$(x')^2 - 2tx' + x = 0$$

Dies impliziert:

$$x' = t \pm \sqrt{t^2 - x}$$

falls  $t^2 \geq x$  (sonst keine reelle Lösung)

Also: lokal zwei Lösungen für Anfangsbedingungen  $(t_0, x_0)$  mit  $t_0^2 \geq x_0$   
(für jedes Vorzeichen Lipschitz-stetige rechte Seite)

# Zeitabhängige DGL = DGL mit Zusatzkomponente

Zu DGL

$$x' = f(t, x)$$

mit explizit zeitabhängigen  $f$  gehe über zu:

$$y = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad F(y) = \begin{pmatrix} f(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist DGL äquivalent zu

$$y' = F(y)$$

was also zeitunabhängig ist

## Definition 1.17

Eine zeitunabhängige DGL heißt auch autonom.

# DGL höherer Ordnung

Bis jetzt nur DGL erster Ordnung, d.h. mit erster Ableitung  $x' = x^{(1)}$

## Definition 1.18

Eine explizite DGL  $k$ -ter Ordnung ist von der Form

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf offenem  $U \subset \mathbb{R}^{1+nk}$

Lösung ist  $k$ mal diffbares  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf offenem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit

$$\text{Graph}(\phi) = \{(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k-1)}(t)) \mid t \in I\} \subset U$$

und

$$\phi^{(k)}(t) = f(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k-1)}(t))$$

## Bemerkung 1.19

Für Banachraum-wertige DGL  $k$ ter Ordnung ersetze  $\mathbb{R}^n$  durch  $V$

## Beispiel 1.20

Sei  $n = 1$ . Schwingungsgleichung:

$$m x'' + r x' + k x = 0$$

mit Masse  $m > 0$ , Dämpfungskonstante  $r > 0$ , Federkonstante  $k > 0$

Dies ist eine skalare DGL zweiter Ordnung

Für  $r = 0$  ist eine Lösung (Verifikation durch Einsetzen)

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Frequenz}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  Integrationskonstanten so dass

$$x(0) = b \quad , \quad x'(0) = a\omega$$

Also hier: zwei Anfangsbedingungen (weil zweiter Ordnung)

**Fragen:** Lösung eindeutig? Existenz von Lösungen für höhere DGL?

# Umformulierung in System erster Ordnung

Setze

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(k-2)} \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Dann

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}) \iff y' = F(t, y)$$

Anfangsbedingungen:

$$x^{(j)}(t_0) = x_j \text{ für } j = 0, \dots, k-1 \iff y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt also: Picard-Lindelöf für zugehöriges System

### Satz 1.21

Die explizite DGL  $k$ ter Ordnung

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

hat lokal eindeutige Lösungen, wenn  $f$  stetig in  $t$  und Lipshitz-stetig in  $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$  ist.

### Beispiel 1.22

Schwingungsgleichung wie oben:

$$m x'' + r x' + k x = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ -\frac{r}{m} x' - \frac{k}{m} x \end{pmatrix}$$

Also  $F(x, x') = A \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$  linear und durch Matrixmultiplikation gegeben.

## Erinnerung: Lineare Differentialgleichung (MP2)

Zu  $A \in \text{Mat}(N \times N, \mathbb{C})$  betrachte lineare autonome DGL:

$$x' = Ax \quad , \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^N$$

Lineare Abbildungen sind Lipschitz, also eindeutige Lösungen

Lösungen gegeben durch Funktionalkalkül von  $A$ :

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Berechnung durch Diagonalisierung oder Jordan'sche Normalform:

$$e^{tA} = M^{-1} e^{t(D+J)} M = M^{-1} e^{tD} e^{tJ} M$$

wobei  $D$  diagonal und  $J$  nilpotent (Summe von Jordan-Blöcken) mit

$$A = M^{-1}(D + J)M \quad , \quad [D, J] = DJ - JD = 0$$



## Zeitgeordnetes Produkt

Nun  $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \text{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$  zeitabhängig. Betrachte DGL:

$$x' = A(t)x \quad , \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{K}^N$$

Wiederum rechte Seite Lipschitz, also Lösung eindeutig

Aber Berechnung durch Spektraltheorie *nicht* möglich.

Übergang zu Zusatzkomponente nicht hilfreich (Verlust der Linearität)

Lösung wird formell geschrieben als:

$$x(t) = T \exp\left(\int_0^t ds A(s)\right) x_0$$

wobei  $T$  "zeitgeordnet" bedeutet. Explizit bedeutet dies:

$$x(t) = \left( \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t ds_n \int_0^{s_n} ds_{n-1} \cdots \int_0^{s_2} ds_1 A(s_n) \cdots A(s_1) \right) x_0$$

Hierbei Summe konvergent. Ableiten zeigt in der Tat obige DGL

## Beispiel 1.23

Schwingung mit oszillierender Federkonstante  $k(t) = k(2 + \cos(\omega t))$ :

$$m x'' + r x' + k(t) x = 0$$

Dann

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}(2 + \cos(\omega t)) & -\frac{r}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

Also: linear, aber nicht autonom (mit zeitabhängiger Matrix)

Es ist möglich, Zeit als Zusatzkomponente einzufügen

(wie vor Definition 1.17), aber dann DGL nicht mehr linear:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ -\frac{k}{m}(2 + \cos(\omega t)) x - \frac{r}{m} x' \\ 1 \end{pmatrix} \neq A \begin{pmatrix} x \\ x' \\ t \end{pmatrix}$$

# Fundamentallösung linearer DGL

## Definition 1.24

$$\Phi(t, t') = T \exp \left( \int_{t'}^t ds A(s) \right) \in \text{Mat}(N \times N, \mathbb{C})$$

heißt Fundamentallösung zu zeitabhängiger linearer DGL  $x' = A(t)x$

Wenn  $A(t) = A$  konstant, dann  $\Phi(t, t') = e^{(t-t')A}$

Dies erfüllt offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

## Satz 1.25

Die Fundamentallösung zu jeder zeitabhängiger linearer DGL erfüllt:

- (i)  $\partial_t \Phi(t, t') = A(t)\Phi(t, t')$  (DGL)
- (ii)  $\Phi(t, t')\Phi(t', t'') = \Phi(t, t'')$  (Verknüpfungsregel)
- (iii)  $\Phi(t, t) = \mathbf{1}_N$  (Anfangsbedingung)

Mathematische Theorie für beliebige Operatoren  $A(t)$ : siehe Yoshida

## Variation der Konstanten

Nun sei zudem eine (stetige) Inhomogenität  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$  gegeben:

$$x' = A(t)x + h(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^N$$

Auch hier kann die Lösung noch berechnet werden mit dem Ansatz:

$$x(t) = \Phi(t, 0)c(t) \quad , \quad c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \partial_t(\Phi(t, 0)c(t)) = A(t)\Phi(t, 0)c(t) + \Phi(t, 0)c'(t) \\ &= A(t)x(t) + \Phi(t, 0)c'(t) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0)c'(t) = h(t) &\iff c'(t) = \Phi(t, 0)^{-1}h(t) = \Phi(0, t)h(t) \\ &\iff c(t) = c + \int_0^t ds \Phi(0, s)h(s) \end{aligned}$$

Einsetzen in Ansatz und Vergleich mit Anfangsbedingung zeigt  $c = x_0$

Da  $\Phi(t, 0)\Phi(0, s) = \Phi(t, s)$  folgt:

### Satz 1.26

*Eindeutige Lösung der inhomogenen linearen DGL  $x' = A(t)x + h(t)$  mit Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  ist*

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t ds \Phi(t, s)h(s)$$

*wobei  $\Phi(t, s)$  Fundamentallösung des homogenen Problems ist.*

Für Spezialfall  $A(t) = A$  konstant:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t ds e^{(t-s)A}h(s)$$

# Vektorfelder und Flüsse

Von linearen DGL zurück zu allgemeinem Fall

## Definition 1.27 (Dynamisches System)

Funktion  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  heißt auch (autonomes) Vektorfeld auf  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Für Zeitintervall  $I$  ist der Fluss  $\Phi : I \times U \rightarrow U$  die Lösung des AWP:

$$\Phi_t(x) = x(t) \quad , \quad x(0) = x, \quad x' = f(x)$$

$\Phi$  heißt auch kontinuierliches dynamisches System

$t \in I \mapsto \Phi_t(x) \in U$  heißt Integralkurve (oder Trajektorie oder Orbit) von  $f$

## Bemerkung 1.28

$f \in C^1 \implies f$  Lipshitz  $\implies$  Lösungen und Fluss existieren lokal

Gleichung  $x' = f(x)$  besagt: Fluss (Lösungen) immer tangential zu  $f$

Dies liefert eine **geometrische Interpretation** der Lösungen

## Beispiel 1.29 (Wieder Schwingungsgleichung)

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}x' \end{pmatrix}$$

Definiere Impuls  $p = mx'$  und Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p \\ -kx - \frac{r}{m}p \end{pmatrix}$$

Dann:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}' = f(x, p)$$

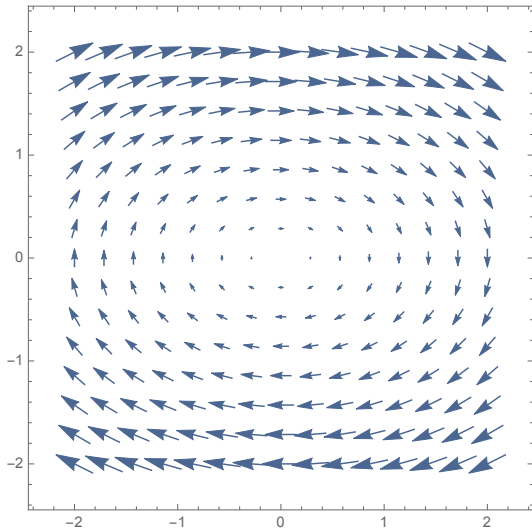
Für  $r = 0$  wurde Fluss in Beispiel 1.20 angegeben:

$$\Phi_t(x, p) = \begin{pmatrix} \frac{p}{\omega m} \sin(\omega t) + x \cos(\omega t) \\ p \cos(\omega t) - m x \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Plot des Vektorfeldes (mit Mathematica)

Setze  $m = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0$

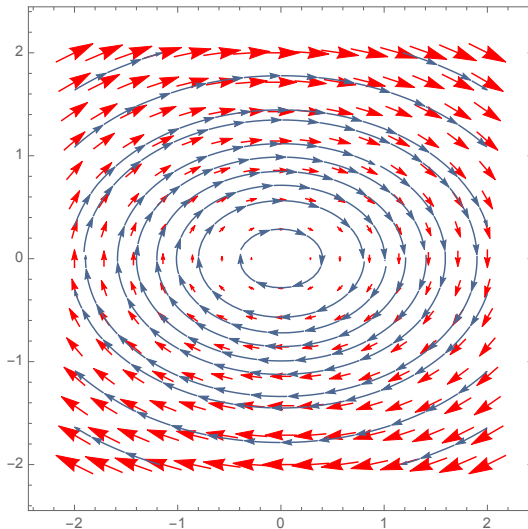
```
VectorPlot[{p, -0.5 x}, {x, -2, 2}, {p, -2, 2}]
```





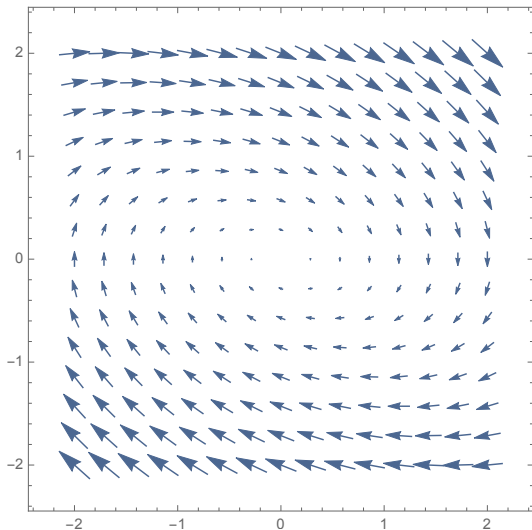
# Plot des Vektorfeldes und des Flusses

Gleiche Parameter  $m = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0$



# Plot des Vektorfeldes mit Reibung

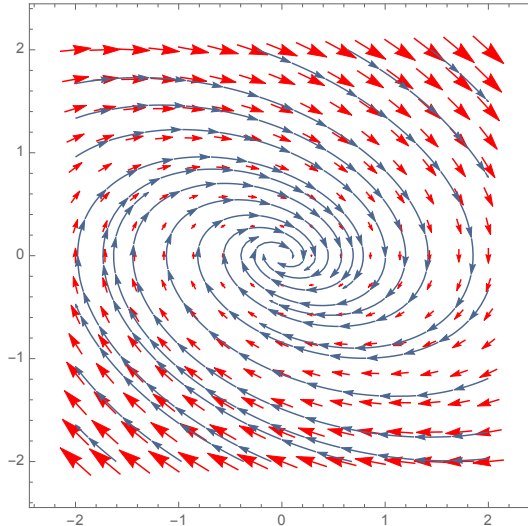
Setze  $m = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0.4$



Was sind jetzt die Lösungskurven?

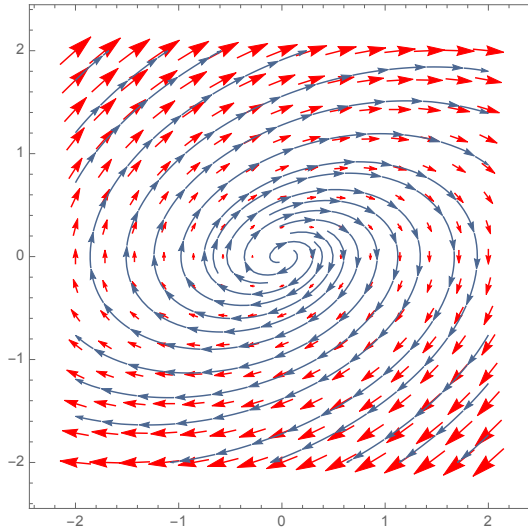
# Plot des Vektorfeldes mit Reibung und des Flusses

Gleiche Parameter  $m = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0.4$



# Fall mit negativer Reibung (getriebenes Pendel)

Parameter jetzt  $m = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = -0.4$



# Vollständige Flüsse

## Definition 1.30

Ein dynamisches System heißt vollständig, wenn für jede Anfangsbedingung  $x \in U$  maximales Existenzintervall  $I_x$  ganz  $\mathbb{R}$  ist

## Bemerkung 1.31

Wenn Trajektorien  $U$  verlassen, ist das System nicht vollständig  
Vollständigkeit immer verletzt, wenn Lösungen explodieren (Bsp 1.7)

## Beispiel 1.32

Flüsse zu linearen DGL sind immer vollständig (siehe oben).

Verallgemeinerung (Beweis z.B. im Buch von Knauf):

## Satz 1.33

*Wenn  $f$  global Lipschitz auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\|$  für ein  $L$  und alle  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , dann ist zugehöriger Fluss vollständig*

# Eigenschaften des Flusses

## Satz 1.34

Sei  $\Phi$  Fluss zu Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Dann gelten Flussgleichungen:

$$\Phi_0(x) = x \quad , \quad \Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x)$$

für alle  $x \in U$  und  $s, t + s \in I_x$ . Zudem:  $\partial_t \Phi_t(x) = f(\Phi_t(x))$

## Satz 1.35 (Hauptsatz zu gewöhnlichen DGL)

Sei Vektorfeld  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$   $k$ -mal stetig differenzierbar  
 $\implies$  Fluss  $\Phi$  auch  $k$ -mal stetig differenzierbar (in  $t$  und  $x$ )

Beweis: Modifikation von Picard-Lindelöf, z.B. Knauf *Klass. Mech.*

## Bemerkung 1.36

Insbesondere: Trajektorien hängen stetig von Anfangsbedingungen ab  
Dies ist eine Stabilitätsaussage

## Umparametrisierung der Zeit

Sei  $\Phi$  Fluss zu Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$

Weiter sei  $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  differenzierbar und betrachte

$$y' = \rho(y) f(y)$$

Also ändert  $\rho$  nur die Länge, aber nicht die Richtung des Vektorfeldes

### Satz 1.37

Zu  $x(t) = \Phi_t(x)$  Orbit zu  $x$  und  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lösung des skalaren AWP

$$r'(t) = \rho(x(r(t))) \quad , \quad r(0) = 0$$

Dann ist  $y(t) = x(r(t)) = \Phi_{r(t)}(x)$  Lösung mit  $y(0) = x$

**Beweis:** Da  $r'(t) > 0$  ist  $r$  monoton wachsend. Zudem:

$$\partial_t y(t) = \partial_t x(r(t)) = x'(r(t)) r'(t) = f(x(r(t))) \rho(x(r(t))) = \rho(y(t)) f(y(t))$$



# Verallgemeinerungen

## Definition 1.38

Gegeben Halbgruppe  $G$  mit Eins  $e$  und Menge  $M$  (meist metrisch)  
Abbildung  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  ist dynamisches System falls

$$\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{gh} \quad , \quad \Phi_e = \text{id}_M$$

## Bemerkung 1.39

$G = \mathbb{R}$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$ : vollständiges dynamisches System wie oben  
Oft auch  $M$  Mannigfaltigkeit (dann Lösungen lokal in Karten)

## Beispiel 1.40

Wenn  $G = \mathbb{N}$ , spricht man von diskreter Dynamik mit diskreter Zeit  
Sie ist charakterisiert durch Abbildung  $F = \Phi_1 : M \rightarrow M$   
weil  $\Phi_t = F \circ \Phi_{t-1} = F \circ \dots \circ F$  für  $t \in \mathbb{N}$   
Wenn  $F$  invertierbar, dann  $G = \mathbb{Z}$  möglich



# Fixpunkte, periodische Orbits, invariante Mengen

## Definition 1.41

Sei  $\Phi$  Fluss zu Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$

$I_x$  maximales Definitionsintervall zu Anfangsbedingung  $x$

- (i)  $x \in U$  ist Ruhelage, wenn  $\Phi_t(x) = x$  für alle  $t$
- (ii) Der Orbit zu  $x \in U$  ist  $t \in I_x \mapsto \Phi_t(x)$
- (iii) Ein Orbit heißt periodisch, wenn ein  $T > 0$  existiert mit  $\Phi_T(x) = x$   
Das minimale  $T$  mit dieser Eigenschaft heißt dann die Periode.
- (iv) Ein Menge  $M \subset U$  heißt invariant (für positive Zeiten),  
wenn  $\Phi_t(M) \subset M$  für  $t \geq 0$

## Beispiel 1.42 (Schwingungsgleichung)

$(0, 0)$  ist Ruhelage für alle Reibungen  $r \in \mathbb{R}$

Periodische Orbits für  $r = 0$ , alle mit gleicher Periode  $T = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}$

# Stabilität von Lösungen

## Definition 1.43

Sei  $\Phi$  Fluss zu Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  auf  $U$

- (i) Lösung  $t \in [0, \infty) \mapsto \Phi_t(x)$  heißt (Lyapunov) stabil, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit:

$$\|x - y\| < \delta \quad \implies \quad \sup_{t \geq 0} \|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\| < \epsilon$$

- (ii) Lösung  $t \in [0, \infty) \mapsto \Phi_t(x)$  heißt asymptotisch stabil, wenn ein  $\delta > 0$  existiert mit:

$$\|x - y\| < \delta \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\| = 0$$

- (iii) Eine Lösung heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

# Erste Beispiele

## Beispiel 1.44 (Schwingungsgleichung)

Schon oben:  $(0, 0)$  ist Ruhelage für alle Reibungen  $r$

- (i)  $(0, 0)$  stabil für  $r \geq 0$
- (ii)  $(0, 0)$  asymptotisch stabil für  $r > 0$
- (iii)  $(0, 0)$  instabil für  $r < 0$

Ohne Reibung,  $r = 0$ , viele periodische Orbits

Diese periodischen Orbits sind stabil, aber nicht asymptotisch stabil

## Bemerkung 1.45

Für allgemeine dynamische Systeme: analoge Begrifflichkeiten

Z.B.: Im Banach'schen Fixpunktsatz induziert die Kontraktion  $F$  eine diskrete Dynamik  $\Phi_n = F^{\circ n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  (wie oben)

Jede Lösung asymptotisch stabil und konvergiert gegen den Fixpunkt

# Ruhelagen bei linearen dynamischen Systemen

## Satz 1.46

Sei  $A \in \text{Mat}(N \times N, \mathbb{C})$  mit Eigenwerten  $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$

Fluss  $\Phi$  zu  $x' = Ax$  hat Ruhelage  $0 \in \mathbb{C}^N$  (eindeutig wenn alle  $z_k \neq 0$ )

Setze  $\gamma = \max_{k=1, \dots, K} \Re(z_k)$

(i) Falls  $\gamma < 0$ , ist  $0$  asymptotisch stabil

(ii) Falls  $\gamma > 0$ , ist  $0$  instabil

**Beweis:** Zu beliebiger Anfangsbedingung  $x$  und  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(x)\| &= \|e^{tA}x\| = \|M^{-1}e^{tD}e^{tJ}Mx\| \leq \|M^{-1}\| \|e^{tD}\| \|e^{tJ}\| \|M\| \|x\| \\ &\leq C_1 \|e^{tD}\| C_2 e^{\epsilon t} C_3 C_4 = C e^{\gamma t} e^{\epsilon t} \end{aligned}$$

weil  $e^{tJ}$  ein Polynom in  $t$  ist.

Wenn  $\gamma > 0$ , existiert  $v$  mit  $e^{tA}\lambda v = \lambda e^{t\gamma} v \rightarrow \infty$  für alle  $\lambda > 0$ .

Also enthält jede Umgebung von  $0$  Punkte, die explodieren. □

## Linearisierung um Ruhelage

Nun betrachte beliebige autonome DGL auf  $\mathbb{R}^n$  mit Ruhelage bei  $x_f$ :

$$x' = f(x) \quad , \quad f(x_f) = 0$$

Linearisierung bei  $x_f$  ist  $A = \nabla f(x_f) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ . Also:

$$x' = A(x - x_f) + R(x) \quad , \quad R(x) = f(x) - A(x - x_f)$$

### Lemma 1.47

Lösung für Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  erfüllt:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t ds e^{(t-s)A} R(x(s))$$

**Beweis:** Ansatz  $x(t) = e^{At} c(t)$  und Anfangsbedingung führt auf

$$e^{At} c'(t) = R(x(t)) \quad \implies \quad c(t) = x_0 + \int_0^t ds e^{-sA} R(x(s))$$



Lemma hilfreich wenn kombiniert mit:

### Lemma 1.48 (Gronwall Ungleichung)

Sei  $a \geq 0$  und  $f, g \in C([0, t_1], \mathbb{R}_{\geq 0})$ . Aus

$$f(t) \leq a + \int_0^t ds f(s)g(s)$$

für  $t \in [0, t_1]$  folgt

$$f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t ds g(s)\right)$$

**Beweis:** Sei  $a > 0$ . Setze  $h(t) = a + \int_0^t ds f(s)g(s)$ . Dann  $h(t) \geq 0$  und

$$h'(t) \leq f(t)g(t) \leq h(t)g(t) \implies \ln\left(\frac{h(t)}{a}\right) \leq \int_0^t ds g(s)$$

Für  $a = 0$  gilt Ergebnis für jedes  $a = \epsilon$ , also  $f = 0$ . □

# Stabilität von Ruhelagen

## Satz 1.49

Betrachte  $x' = f(x)$  mit Ruhelage  $x_f$ , d.h.  $f(x_f) = 0$

Sei  $A = \nabla f(x_f) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  und seien  $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$  Eigenwerte

Setze  $\gamma = \max_{k=1, \dots, K} \Re e(z_k)$

Wenn  $\gamma < 0$ , so existiert offene Menge  $B$  mit  $x_f \in B$

(genannt das Attraktionsbassin von  $x_f$ ) mit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x_f \quad \text{für alle } x \in B$$

d.h. insbesondere:  $x_f$  ist asymptotisch stabil

Zudem kann  $B$  als invariante Menge gewählt werden

Also: lineare Terme dominieren lokal die Nichtlinearitäten

**Beweis:** Durch Verschieben um  $x_f$  können wir  $x_f = 0$  annehmen  
Wieder für  $R(x) = f(x) - Ax$  existiert nach Definition der Ableitung  
ein  $\delta$  beliebig klein mit, für  $x$  ausreichend klein,

$$\|R(x)\| \leq \delta \|x\|$$

Nach Lemma 1.47 erfüllt Lösung für Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$ :

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &= \left\| e^{At} x_0 + \int_0^t ds e^{(t-s)A} R(x(s)) \right\| \\ &\leq C e^{(\gamma+\epsilon)t} + \int_0^t ds C e^{(t-s)(\gamma+\epsilon)} \delta \|x(s)\|\end{aligned}$$

Multipliziere mit  $e^{-(\gamma+\epsilon)t}$  und wende Gronwall auf  $e^{-(\gamma+\epsilon)t} \|x(t)\|$  an:

$$\|x(t)\| \leq C e^{(\gamma+\epsilon)t} \exp\left(\int_0^t ds C\delta\right) = C e^{(\gamma+\epsilon+C\delta)t}$$

Für  $\delta \leq \frac{\gamma}{2C}$  folgt also exponentieller Abfall in  $t$ , d.h.  $x(t) \rightarrow 0 = x_f$  □



## Verfeinerung

Obiger Beweis zeigt grob:

nicht-lineare Dynamik fast gleich der Dynamik der Linearisierung

Tatsächlich **ist** Dynamik linear, bei geeigneter Wahl der Koordinaten:

### Satz 1.50 (Hartman-Grobman Theorem)

*Gleiche Situation wie in Satz 1.49 mit  $x_f = 0$*

*Dann  $\exists$  Umgebung  $B$  von  $x_0$  und Homomorphismus  $\varphi : B \rightarrow \varphi(B)$  mit*

$$\varphi \circ \Phi_t = e^{tA} \circ \varphi \quad \text{auf } B$$

Für einen Beweis: siehe Literatur

### Bemerkung 1.51

Auch für periodische Orbits gibt es eine Stabilitätsanalyse, basierend auf der Poincaré-Rekurrenzabbildung

### Definition 1.52 (Lyapunov-Funktion)

Sei  $\Phi$  Fluss zu Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  auf  $U$

$L : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (strikte) Lyapunov-Funktion von  $\Phi$  auf  $U$

$\iff t \mapsto L(\Phi_t(x))$  (strikt) monoton fallend

### Satz 1.53

Wenn  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $\langle \nabla L(x) | f(x) \rangle \leq 0$  ( $< 0$ ) für  $x \in U$ ,  
so ist  $L$  (strikte) Lyapunov-Funktion

**Beweis:**

$$\partial_t L(\Phi_t(x)) = \langle \nabla L(\Phi_t(x)) | \partial_t \Phi_t(x) \rangle = \langle \nabla L(\Phi_t(x)) | f(\Phi_t(x)) \rangle \leq 0$$

□

### Bemerkung 1.54

Anschaulich: Vektorfeld  $f$  zeigt auf jeder Niveaufläche

$N = \{x \in U \mid L(x) = a\}$  von Lyapunov Funktion  $L$  ins Innere von  $N$

### Satz 1.55

Wenn  $L$  Lyapunov-Funktion zu  $\Phi$ , dann ist für alle  $a \in \mathbb{R}$   
 $\{x \in U \mid L(x) \leq a\}$  invariante Menge für den Fluss  $\Phi$

### Satz 1.56

Wenn Lyapunov-Funktion  $L$  strikt ist und eindeutiges Minimum  $x_f$  hat,  
dann ist  $x_f$  eine asymptotisch stabile Ruhelage

### Beispiel 1.57 (Schwingung mit Reibung $r > 0$ )

Lyapunov-Funktion  $L(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$  (Energie ohne Dissipation)

$$\langle \nabla L | f \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} kx \\ \frac{p}{m} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p \\ -kx - \frac{r}{m} p \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{r p^2}{m^2} < 0$$

Also Nullstelle  $(0, 0)$  von  $V$  ist asymptotisch stabile Ruhelage für  $r > 0$

# Erster Spezialfall: Gradientenfelder

## Definition 1.58

Ein Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  heißt Gradientenfeld auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  falls Funktion  $H \in C^2(U, \mathbb{R})$  existiert mit  $f = \nabla H$  wobei  $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})^T$ .  
Der zugehörige Fluss heißt Gradientenfluß

## Satz 1.59

*Entweder ist ein Orbit einer Gradienten-DGL eine Ruhelage, oder  $H$  steigt entlang der Lösungskurve streng monoton.*

**Beweis:** Sei  $\Phi_t(x)$  Lösung, d.h.  $\partial_t \Phi_t(x) = (\nabla H)(\Phi_t(x))$ . Also

$$\partial_t H(\Phi_t(x)) = \langle (\nabla H)(\Phi_t(x)) | \partial_t \Phi_t(x) \rangle = \|\nabla H(\Phi_t(x))\|^2 > 0$$

es sei denn  $\nabla H(\Phi_t(x)) = 0$  (Ruhelage). □

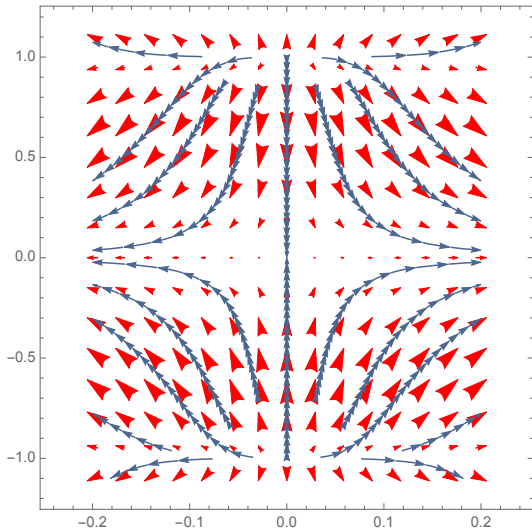
## Korollar 1.60

*Außer Ruhelagen haben Gradientenflüsse keine periodische Orbits*

## Beispiel:

$$H(x_1, x_2) = (x_1)^2 + ((x_2)^2 - 1)^2, \quad \nabla H(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2((x_2)^2 - 1))$$

(Instabile) Ruhelagen  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$



## Weiteres Gradientenfeld (Zeitumparametrisierung)

Multiplikation von  $\nabla H$  mit  $\rho(x) = \|\nabla H(x)\|^{-2}$  führt zu

$$f = \frac{\nabla H}{\|\nabla H\|^2}$$

Dieses Gradientenfeld wird in der *Morse Theorie* verwandt wegen:

### Satz 1.61

Der Fluss  $\Phi_t$  von  $f$  bildet Niveaulinien  $N_a = \{x \in U \mid H(x) = a\}$  von  $H$  auf Niveaulinien von  $H$  ab:  $\Phi_t(N_a) = N_{a+t}$

**Beweis:** Unabhängig von  $x$  gilt

$$\partial_t H(\Phi_t(x)) = \langle \nabla H(\Phi_t(x)) | \partial_t \Phi_t(x) \rangle = \langle \nabla H(\Phi_t(x)) | f(\Phi_t(x)) \rangle = 1$$

□

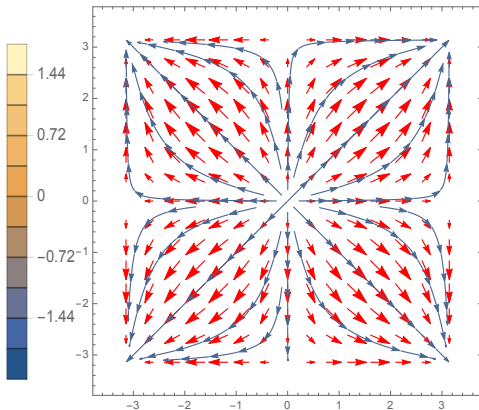
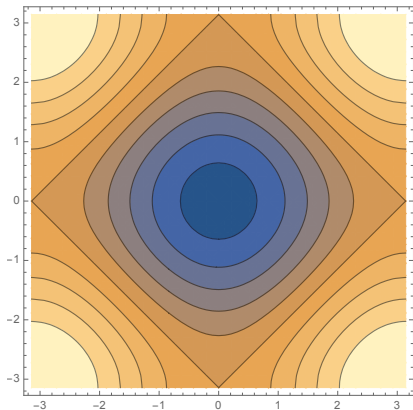
### Bemerkung 1.62

Hiermit werden Änderungen der Topologie (Form) von  $N_a$  untersucht

# Beispiel

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi) \times 2 \mapsto H(x_1, x_2) = -\cos(x_1) - \cos(x_2)$$

Plot der Niveaulinien und des Gradientenflusses



Gradient ohne  $\|\nabla H\|^{-2}$  geplottet da sonst nur Singularitäten sichtbar  
Fluss erreicht von fast überall in endlicher Zeit Maximum  $(\pi, \pi)$  von  $H$

## Zweiter Spezialfall: hamiltonsche Vektorfelder

Kleine, aber entscheidende Änderung an Gradientenfeldern führt zu:

### Definition 1.63

Sei  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  sogenannter Phasenraum mit  $n$  Freiheitsgraden

Punkte darin seien bezeichnet mit  $x = (q, p) \in U$

Ein Vektorfeld  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{2n})$  heißt hamiltonsch auf  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  falls eine Hamiltonfunktion  $H \in C^2(U, \mathbb{R})$  existiert mit

$$f = J \nabla H \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} , \quad \nabla = \begin{pmatrix} \nabla_q \\ \nabla_p \end{pmatrix}$$

Der zugehörige Fluss heißt hamiltonsch, und DGL auch:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}' = J \nabla H(q, p) = \begin{pmatrix} \nabla_p H(q, p) \\ -\nabla_q H(q, p) \end{pmatrix}$$

Dimension immer gerade in hamiltonschen Gleichungen



## Beispiel 1.64 (Schwingung ohne Reibung)

$n = 1$  und  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$ . Dann hamiltonsche DGL

$$J \nabla H(q, p) = J \begin{pmatrix} k q \\ \frac{1}{m} p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p \\ -k q \end{pmatrix} = f(q, p) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}'$$

Schwingungsgleichung mit Reibung ist *nicht* hamiltonsch

## Beispiel 1.65 (Allgemeiner: Teilchen im Kraftfeld im $\mathbb{R}^3$ )

$F = -\nabla_q V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  konservatives Kraftfeld zu Potential  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Newton's Bewegungsgleichung  $m\ddot{q} = F(q)$  (autonome DGL 2. Ord.)

Umschreiben in System 1. Ord. auf  $\mathbb{R}^6$  (mit  $p = m\dot{q}$  anstelle  $\dot{q}$ ):

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ F(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -\nabla_q V(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p \\ -\nabla_q \end{pmatrix} \left( \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q) \right) = J \nabla H$$

mit Hamilton Funktion  $H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$

# Eigenschaften eines hamiltonschen Flusses

## Satz 1.66

Sei  $\Phi$  hamiltonscher Fluss zu  $H \in C^2(U, \mathbb{R})$  auf  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$

$\implies t \mapsto H \circ \Phi_t$  konstant

**Beweis:** Zu  $x = (q, p) \in U$

$$\partial_t H(\Phi_t(x)) = \langle \nabla H(\Phi_t(x)) | \partial_t \Phi_t(x) \rangle = \langle \nabla H(\Phi_t(x)) | J \nabla(\Phi_t(x)) \rangle = 0$$

weil  $\forall v \in \mathbb{R}^{2n}$  gilt:  $\langle v | Jv \rangle = \langle J^* v | v \rangle = -\langle Jv | v \rangle = -\langle v | Jv \rangle = 0$   $\square$

## Bemerkung 1.67

Man sagt: die Funktion  $H$  ist ein *Integral* der Bewegung

Falls  $n$  unabhängige Integrale (verschwindende Poissonklammern) existieren, heißt das System *integrabel*

Die Bewegung ist dann periodisch auf Tori in  $U$

Diese Eigenschaft ist stabil (KAM-Theorie, siehe Buch von Knauf)

# Bifurkationen

Wenn DGL und somit Fluss von einem (externen) Parameter abhängt, kann sich das Phasenporträt qualitativ ändern

So eine Änderung heißt Bifurkation

## Beispiel 1.68 (Sattel-Knoten-Bifurkation (Saddle-node))

Sei  $n = 1$  und betrachte  $x' = \rho - x^2$

Für  $\rho < 0$  keine Ruhelage, und für  $\rho > 0$  zwei Ruhelagen

Davon eine stabil, die andere instabil

Bifurkation bei  $\rho = 0$

## Beispiel 1.69 (Pitchfork-Bifurkation)

Sei  $n = 1$  und betrachte  $x' = \rho x - x^3$

Für  $\rho < 0$  eine stabile Ruhelage, und für  $\rho > 0$  drei Ruhelagen

Davon eine instabil, die anderen stabil. Wieder Bifurkation bei  $\rho = 0$

# Weitere Bifurkationen

## Beispiel 1.70 (Transkritische Bifurkation)

Sei weiter  $n = 1$  und betrachte  $x' = \rho x - x^2$

Immer zwei Ruhelagen  $x_f = 0$  und  $x'_f = \rho$

Für  $\rho < 0$  ist  $x_f = 0$  stabil und  $x'_f = \rho$  instabil

Für  $\rho > 0$  ist  $x_f = 0$  instabil und  $x'_f = \rho$  stabil

Wieder Bifurkation bei  $\rho = 0$

## Beispiel 1.71 (Eine zwei-dimensionale Bifurkation)

Sei nun  $n = 2$

Betrachte Schwingungsgleichung mit Parameter  $\rho = r$

Dann Bifurkation bei  $\rho = r = 0$  von instabiler zu stabiler Ruhelage bei 0

# Seltsame Attraktoren und Chaos

Viele Bifurkationen in höher dimensionalen dynamischen Systemen  
Nach *Kaskade von Bifurkationen* ist Phasenporträt oft kompliziert  
So kann Dynamik sich auf einen Attraktor zubewegen, der *seltsam* ist  
d.h. er ist ein Fraktal mit nicht ganzzahliger Dimension  
Falls dies nach Zeitumkehr passiert, heißt er Repellor  
Auf einem Attraktor (invariante Menge!) kann die Bewegung dann  
chaotisch sein, d.h. Orbits stark von Anfangsbedingungen abhängig

## Satz 1.72 (Poincaré-Bendixon)

*Für  $n = 2$  (und  $n = 1$ ) passiert all dies nicht*

Diskrete dynamische Systeme: fraktale Attraktoren in  $n = 1$  und  $2$   
Letztere liefern fraktale Repelloren auf einfache Art und Weise

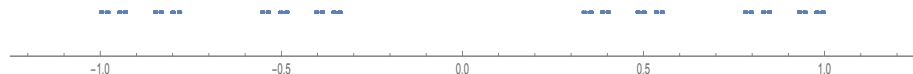
## Cantor Menge (1883)

Eliminiere aus Intervall  $[-1, 1]$  das mittlere Drittel  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

Aus verbleibenden Intervallen  $[-1, -\frac{1}{3}]$  und  $[\frac{1}{3}, 1]$  eliminiere Drittel

Nach Iteration entsteht fraktale Menge  $\Delta$  mit fraktaler Dimension  $< 1$

Sie ist selbstähnlich, d.h. sieht auf jeder Skala gleich aus



Zudem ist  $\Delta$  nirgends dicht und nicht abzählbar, Lebesgue Mass null

**Fakt:**  $\Delta$  ist Repellor der diskreten Dynamik zu  $F(x) = 3|x| - 2$  auf  $\mathbb{R}$

Diese Dynamik ist stückweise linear und hyperbolisch (expandierend)

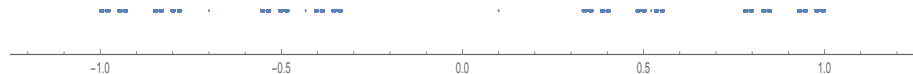
$\Delta$  ist invariante Menge von  $F$ , d.h.  $F(\Delta) \subset \Delta$

# Konstruktion der Cantor Menge

Inverses von  $F(x) = 3|x| - 2$  hat zwei Zweige  $F_{\pm}^{-1}(x) = \pm \frac{x+2}{3}$

Wähle zufällig Zeige aus (Repellor ist Attraktor inverser Abbildung)

```
iterations = 5000; x = 0.1; points = {x};  
i := AppendTo[points, x = N[(1 - 2*Random[Integer])  
(x + 2)/3]]  
Do[i, iterations]  
NumberLinePlot[points, PlotStyle->PointSize[Small]]
```



Beachte, dass erste Punkte nicht auf  $\Delta$  liegen

**Verallgemeinerung:** iterated functions systems (IFS)

## Box-Counting Fraktale Dimension

Überdecke  $[-1, 1]$  mit  $\frac{2}{\epsilon}$  Intervallen  $[-1 + n\epsilon, -1 + (n + 1)\epsilon]$ ,  
wobei  $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{2}{\epsilon}$

Sei  $N(\epsilon)$  die Anzahl der Intervalle mit nichtleeren Schnitt mit  $\Delta$

Dann ist Box Counting Dimension  $d$  grob definiert durch Verhalten

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d} \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0$$

und mathematisch, wenn immer Limes existiert, durch

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)}$$

Für Cantor Menge, für die Folge  $\epsilon_k = 3^{-k}$ , ergibt sich

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N(\epsilon_k))}{-\log(\epsilon_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k)}{k \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)}$$



## Julia Mengen (1918)

Betrachte das diskrete dynamische System  $z \in \mathbb{C} \mapsto F(z) = z^2 - \rho$

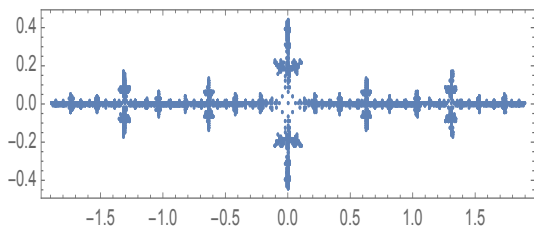
Es hat einen Repellor, der durch  $z \mapsto \pm\sqrt{z + \rho}$  berechnet wird (mit zufälligen Vorzeichen), oder einfach:

```
JuliaSet[-2.7, ColorFunction->None]
```

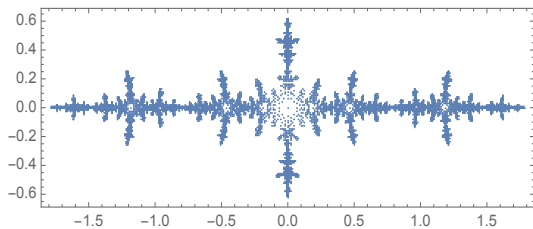
Für  $\rho > 2$  ist Repellor auf reeller Achse, z.B.  $\rho = 2.7$ :



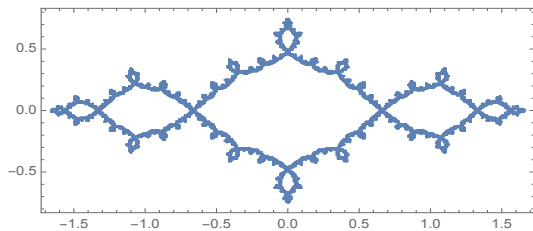
Für  $\rho < 2$  ist Repellor fraktal mit Dimension  $> 1$ , z.B.  $\rho = 1.7$ :



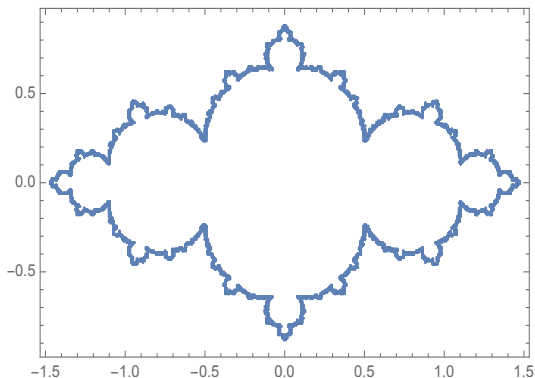
Weiter  $\rho = 1.4$ :



Und  $\rho = 1.1$ :



Sowie  $\rho = 0.7$ :



Auch andere Polynome liefern Fraktale.

Wichtig ist die Hyperbolizität (Steigungen größer als 1)

## Lorenz Attraktor (1963)

Vereinfachtes Modell für die Konvektion in der Atmosphäre  
Nichtlineare gewöhnliche DGL erster Ordnung auf dem  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

Hierbei  $\sigma, \rho, \beta > 0$ .

Typische Wahl der Parameter  $\sigma = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$ , und  $\rho$  variabel

Für  $\rho < 1$  einzige Ruhelage  $(0, 0, 0)$ , globaler Attraktor

Bei  $\rho = 1$  Bifurkation, danach mehrere Ruhelagen

Danach Folge von Bifurkationen

Ab ca.  $\rho = 28$  seltsamer Attraktor (und Ruhelagen instabil)

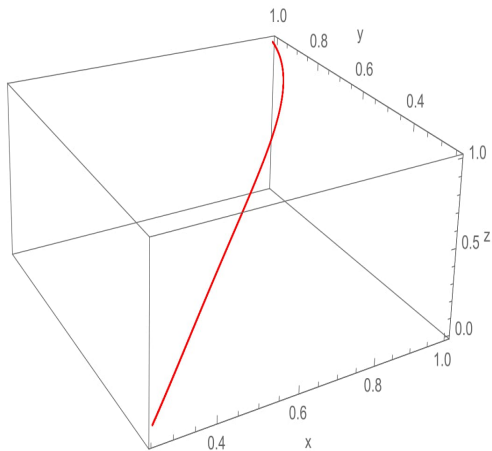
# Mathematica Programm für Lorenz System

```
sigma = 10;  
beta = 8/3;  
rho = 28.4;  
timestep = 1/1000;  
iterations = 50000;  
x = 1; y = 1; z = 1;  
points = {{x, y, z}};  
  
i := AppendTo[points, {x = N[x + sigma*(y -  
x)*timestep], y = N[y + (-x*z + rho*x -  
y)*timestep], z = N[z + (x*y - beta*z)*timestep]}]  
  
Do[i, {iterations}]  
  
ListPointPlot3D[points, AxesLabel -> {"x", "y",  
"z"}, PlotStyle -> {Red, PointSize[Tiny]}]
```

## $\rho = 0.4$ : Orbits konvergieren zur Ruhelage $(0, 0, 0)$

$\sigma = 10$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 0.4$

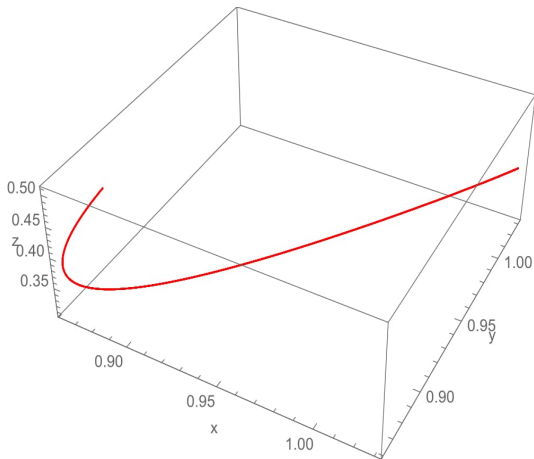
Startpunkt:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



# $\rho = 1.4$ : Orbits konvergieren zur einer Ruhelage

$\sigma = 10$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 1.4$

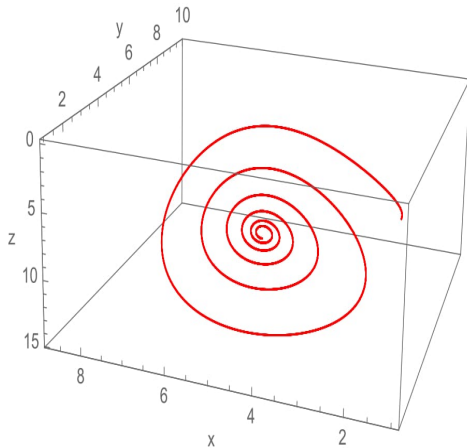
Startpunkt:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



## $\rho = 10.4$ : Orbits spiralenartig gegen Ruhelage

$\sigma = 10$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 10.4$

Startpunkt:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

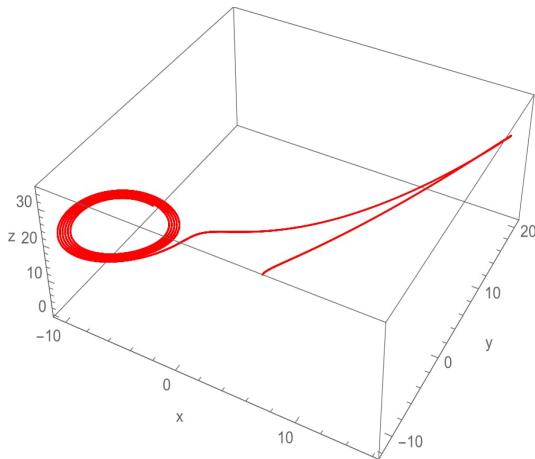




## $\rho = 21.4$ : komplizierte Orbits, periodisch?

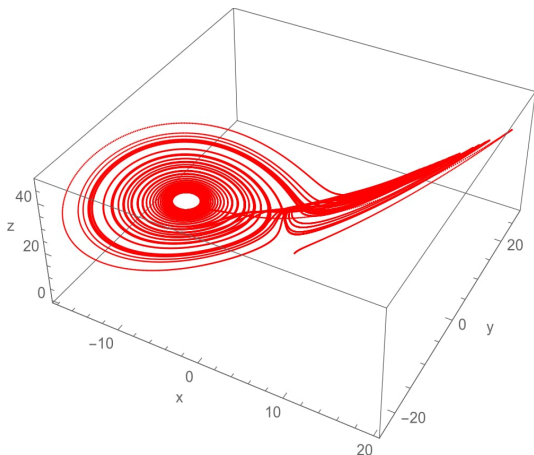
$\sigma = 10$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 21.4$

Startpunkt:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



## $\rho = 28.4$ : **Orbits laufen auf fraktalen Attraktor zu**

$\sigma = 10$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  und  $\rho = 28.4$ , mit Startpunkt:  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



Genauere Untersuchungen:

Starke Abhängigkeit der Bahnen von Anfangsbedingungen (Chaos)

Poincaré-Schnitt führt zu Fraktal

## Partielle Differentialgleichungen (PDG)

Eine PDG enthält (partielle) Ableitungen nach mehreren Variablen  
z.B. nach Zeit- und Ortsvariablen  $t$  und  $x$

Sei  $u = u(t, x)$  die skalare Funktion in Ort und Zeit, dann ist

$$f(u, \partial_x u, \partial_t u, \partial_x^2 u, \partial_t^2 u, \partial_x \partial_t u) = 0$$

für  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  eine PDG zweiter Ordnung

### Beispiel 1.73 (Eindimensionale Wellengleichung)

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$$

mit Wellengeschwindigkeit  $c$ . Zudem sei  $x \in [0, 1]$  (endliche Saite)  
und  $u(t, 0) = 0$  sowie  $u(t, 1) = 0$  (Enden der Saite festgehalten)

Zur Zeit  $t = 0$  gegeben: Auslenkung und Geschwindigkeit

$$u(0, x) = u(x) \quad , \quad \partial_t u(0, x) = v(x)$$

## Hier keine allgemeine Lösungstheorie!

Lediglich der Ansatz der Trennung der Variablen:

$$u(t, x) = w(t)y(x)$$

Eingesetzt in Wellengleichung:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 w(t) y(x) = w(t) \partial_x^2 y(x) \iff \frac{1}{c^2} \frac{\partial_t^2 w(t)}{w(t)} = \frac{\partial_x^2 y(x)}{y(x)}$$

Also beide Seiten gleich Konstante  $\lambda^2$ . Somit

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 w(t) = \lambda^2 w(t) \quad , \quad \partial_x^2 y(x) = \lambda^2 y(x) \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

Lösungen:

$$w(t) = c_1 \cos(c\lambda t) + c_2 \sin(c\lambda t) \quad , \quad y(x) = c_3 \cos(\lambda x) + c_4 \sin(\lambda x)$$

Bedingung  $y(0) = 0$  zeigt  $c_3 = 0$ , und  $y(1) = 0$ , dass  $\lambda \in \pi\mathbb{Z}$ . Also:

$$u(t, x) = (c_1 \cos(cn\pi t) + c_2 \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

## 2 Lebesgue-Maß

### Definition 2.1

Seien  $a = (a_1, \dots, a_d)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_d)$  Punkte im  $\mathbb{R}^d$ . Definiere:

- (i)  $a \leq b \iff a_j \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, d$     Analog:  $a < b$ ,  $a > b$
- (ii) Offene, halboffene und abgeschlossene Quader sind

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \leq x \leq b\}$$

- (iii) Maß bzw.  $d$ -dimensionale Volumen halboffenen Quaders

$$\mu((a, b]) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) \in [0, \infty)$$

## Bemerkung 2.2 (Volumenbegriffe von Riemann und Lebesgue)

Zu  $A \subset \mathbb{R}^d$  betrachte Ober- und Untersummen:

$$O(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ disjunkte Quader, } A \subset \bigcup_{n=1, \dots, N} Q_n \right\}$$

$$U(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ disjunkte Quader, } A \supset \bigcup_{n=1, \dots, N} Q_n \right\}$$

Dann:  $A$  Riemann-messbar  $\iff O(A) = U(A)$

Fakt: nur relativ wenige Mengen sind Riemann-messbar

Alternative Vorgehensweise beim Lebesgue'schen Maßbegriff: Setze

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader} \right\}$$

$A$  Lebesgue-messbar  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$  offenes  $U \supset A$  mit  $\mu^*(U \setminus A) < \varepsilon$

## Ziel: Konstruktion und Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

### Satz 2.3 (Der von halboffenen Quadern erzeugte Ring)

Betrachte folgende Teilmenge  $\mathcal{R}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q_n \mid Q_n \text{ disjunkte halboffene Quader im } \mathbb{R}^d, N < \infty \right\}$$

Dann:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- (iii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$
- (iv)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$

Mengensystem  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  mit Eigenschaften (i)-(iii) heißt Ring

Dies auch in allgemeineren Rahmen möglich, siehe Definition 2.30

**Beweis** (i) offensichtlich, da  $(a, a] = \emptyset$ .

Für (ii):

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q_n \setminus \left( \bigcup_{m=1, \dots, M}^{\circ} Q'_m \right) \\ &= \bigcup_{n=1, \dots, M}^{\circ} (\cdots ((Q_n \setminus Q'_1) \setminus Q'_2) \cdots \setminus Q'_M) \end{aligned}$$

Aber  $Q_n \setminus Q'_1 = \bigcup_{\ell}^{\circ} Q''_{\ell}$  disjunkte Vereinigung halboffener Quadern (Bild)

Dann auch  $(Q_n \setminus Q'_1) \setminus Q'_2 = (\bigcup_{\ell}^{\circ} Q''_{\ell}) \setminus Q'_2 = \bigcup_{\ell}^{\circ} (Q''_{\ell} \setminus Q'_2) = \bigcup_k^{\circ} Q_k^{(3)}$

disjunkte Vereinigung von geeignet gewählten Quadern  $Q_k^{(3)}$

Nach Iteration folgt also  $A \setminus B \in \mathcal{R}$

(ii) impliziert (iii), weil  $A \cup B = (A \setminus B) \overset{\circ}{\cup} B$  disjunkte Vereinigung

(ii) impliziert auch (iv) da  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

□



Nun wird  $\mu$ , bisher nur auf Quadern definiert, zunächst auf  $\mathcal{R}$  erweitert.

### Definition 2.4

Sei

$$A = \overset{\circ}{\bigcup}_{n=1, \dots, N} Q_n \in \mathcal{R}$$

Dann definiere Maß von  $A$  als

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \in [0, \infty)$$

### Satz 2.5

*Definition unabhängig von Wahl der Zerlegung von  $A$  in Quader*

**Beweis:** Sei  $A = \bigcup_{n=1, \dots, M}^{\circ} Q'_n$  eine weitere Zerlegung von  $A \in \mathcal{R}$

Betrachte

$$Q''_{n,m} = Q_n \cap Q'_m \quad , \quad 1 \leq n \leq N \quad , \quad 1 \leq m \leq M$$

Dies sind halboffene Quader, einige evtl. leer! Dann

$$Q_n = \bigcup_{m=1, \dots, M}^{\circ} Q''_{n,m} \quad , \quad Q'_m = \bigcup_{n=1, \dots, N}^{\circ} Q''_{n,m}$$

Somit gilt offensichtlich

$$\mu(Q_n) = \sum_{m=1}^M \mu(Q''_{n,m}) \quad , \quad \mu(Q'_m) = \sum_{n=1}^N \mu(Q''_{n,m})$$

Also

$$\sum_{n=1}^N \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu(Q''_{n,m}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \mu(Q''_{n,m}) = \sum_{m=1}^M \mu(Q'_m)$$



## Satz 2.6

Die Mengenfunktion  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$  erfüllt Folgendes:

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (endliche Additivität)  $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{R}$  disjunkt, dann

$$\mu\left(\overset{\circ}{\bigcup}_{n=1, \dots, N} A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$$

(iii) (Monotonie)  $A, B \in \mathcal{R}$ ,  $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(iv)  $A, B \in \mathcal{R} \implies \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(v) (endliche Subadditivität) Für beliebige  $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{R}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1, \dots, N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$$

(vi)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkte Folge in  $\mathcal{R}$ ,  $B \in \mathcal{R}$ , sodass  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(B)$$

**Beweis:** (i) klar

(ii)  $A_n = \bigcup_{m=1, \dots, M_n}^\circ Q_{n,m} \in \mathcal{R}$  disjunkte Zerlegung in halboffene Quader

Dann hat  $A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ A_n$  disjunkte Zerlegung

$$A = \bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ \bigcup_{m=1, \dots, M_n}^\circ Q_{n,m}$$

und nach Satz 2.5 gilt

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ A_n\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \mu(Q_{n,m}) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$$

Zu (iii):  $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) \stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

Zu (iv):

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &\stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

Zu (v): Wegen (iv) gilt:  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

Somit folgt iterativ:

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) &\leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) + \mu(A_N) \\ &\leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N)\end{aligned}$$

Zu (vi): Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  gilt:  $\bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ A_n \subset B$

Somit

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) \stackrel{(ii)}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ A_n\right) \stackrel{(iii)}{\leq} \mu(B)$$

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung □

## Definition 2.7

Die Mengenfunktion  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$  heißt der Lebesgue'sche Inhalt

Nun erste wichtige Aussage:

## Satz 2.8 (Lebesgue 1905)

Seien  $Q$  und  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  halboffene Quader mit  $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ . Dann

$$\mu(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n)$$

**Beweisidee:**  $Q$  wenig verkleinern,  $Q_n$  wenig vergrößern

Kompaktheitsargument  $\implies$  endlich viele  $Q_n$  und somit Satz 2.6(v)

**Beweis:** Zunächst gelte ohne Einschränkung (sonst trivial)

$$\mu(Q) > 0 \quad , \quad \mu(Q_n) > 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) < \infty$$

Sei  $Q = (a, b]$  und  $Q_n = (a_n, b_n]$ , und  $\varepsilon > 0$  beliebig

Wähle  $a', b'$  mit  $a < a' < b' < b$ , so dass für  $Q' = (a', b']$

$$\mu(Q) - \varepsilon < \mu(Q') < \mu(Q)$$

und ähnlich  $a'_n, b'_n$  mit  $a'_n < a_n \leq b_n < b'_n$ , so dass für  $Q'_n = (a'_n, b'_n]$

$$\mu(Q_n) < \mu(Q'_n) < \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Jetzt:  $\overline{Q} = [a, b]$  Abschluss und  $Q^\circ = (Q)^\circ = (a, b)$  (offenes) Innere

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q'_n)^\circ$$

Also:  $((Q'_n)^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$  offene Überdeckung der kompakten Menge  $\overline{Q'}$

Nach Satz von Heine-Borel existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$Q' \subset \overline{Q'} \subset \bigcup_{n=1}^N (Q'_n)^\circ \subset \bigcup_{n=1}^N Q'_n$$

Deswegen mit Satz 2.6(v):

$$\begin{aligned} \mu(Q) - \varepsilon &< \mu(Q') \\ &\leq \sum_{n=1}^N \mu(Q'_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q'_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \right) + \varepsilon \end{aligned}$$





## Definition 2.9

Äußeres Lebesgue'sches Maß  $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \mid Q_n \text{ halboffene Quader mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$$

## Satz 2.10

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (ii) (Monotonie)  $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (iii) ( $\sigma$ -Subadditivität) Für Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

- (iv) Für jeden halboffenen Quader  $Q$  gilt  $\mu^*(Q) = \mu(Q)$
- (v) Für jedes  $E \subset \mathbb{R}^d$  und jeden halboffenen Quader  $Q$  gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q)$$

**Beweis:** (i) offensichtlich

(ii) gilt, da jede Überdeckung von  $B$  auch Überdeckung von  $A$

(iii) Ohne Einschränkung gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$  (sonst trivial)

Sei  $\varepsilon > 0$ . Per Definition: zu  $A_n \exists$  Folge  $(Q_{n,m})_{m \geq 1}$  von Quadern mit

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{n,m} \quad , \quad \mu^*(A_n) \geq \left( \sum_{m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \right) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Dann:  $(Q_{n,m})_{n,m \geq 1}$  Quaderüberdeckung von  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und somit

$$\begin{aligned} \mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(Q_{n,m}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon \end{aligned}$$

(iv)  $\mu^*(Q) \leq \mu(Q)$  trivial, und  $\mu^*(Q) \geq \mu(Q)$  folgt aus Satz 2.8

(v) Zunächst  $E$  halboffener Quader  $\implies E \cap Q$  ebenso (Satz 2.3)

Wähle disjunkte Quaderzerlegung  $E = \bigcup_{n=1, \dots, N}^\circ Q_n$  mit  $Q_1 = E \cap Q$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\stackrel{(iv)}{=} \mu(E) \stackrel{\text{Satz 2.4}}{=} \sum_{n=1}^N \mu(Q_n) \stackrel{(iv)}{=} \mu(E \cap Q) + \sum_{n=2}^N \mu^*(Q_n) \\ &\stackrel{(ii)}{\geq} \mu(E \cap Q) + \mu^*(E \setminus Q) \quad \text{da } E \setminus Q \subset \bigcup_{n=2, \dots, N} Q_n \\ &\stackrel{(iv)}{=} \mu^*(E \cap Q) + \mu^*(E \setminus Q) \stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(E) \end{aligned}$$

Somit Gleichheit. Nun  $E$  beliebig mit Quaderüberdeckung  $(Q_n)_{n \geq 1}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) &\stackrel{\text{oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu^*(Q_n \setminus Q) + \mu^*(Q_n \cap Q) \right) \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q) \stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(E) \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum über alle Quaderüberdeckungen zeigt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus Q) + \mu^*(E \cap Q) \geq \mu^*(E)$$



Jetzt wichtiger auf Carathéodory (1917) zurück gehende Konstruktion:

### Definition 2.11

$A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar  $\iff \forall$  Teilmengen  $E \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

Notation für die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen:

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ Lebesgue-messbar}\}$$

Lebesgue-Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  messbarer Mengen definiert durch

$$\mu(A) = \mu^*(A)$$

### Bemerkung 2.12

Satz 2.10(iii): Ungleichung  $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$  gilt immer

Nach Satz 2.10(v) ist jeder halboffene Quader Lebesgue-messbar

Nach Satz 2.10(iv) ist Lebesgue-Maß  $\mu$  Erweiterung von Definition 2.1

## Satz 2.13 (Maßerweiterungssatz)

$\mathcal{A}$  hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $\mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies$  Komplementärmenge  $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Zudem  $\mu(\emptyset) = 0$  und es gilt so-genannte  $\sigma$ -Additivität:

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

wobei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkte Folge in  $\mathcal{A}$

Also: Lebesgue-messbaren Mengen bilden  $\sigma$ -Algebra im Sinne von

## Definition 2.14

Mengensystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit (i), (ii), (iii) heißt  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$

Eine  $\sigma$ -additive Mengenfunktion auf  $\mathcal{A}$  heißt ein Maß auf Menge  $\Omega$

**Beweis:** (i) klar und (ii) weil  $E \cap A^c = E \setminus A$  und  $E \setminus A^c = E \cap A$

**Behauptung 1:**  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Begründung:** Für beliebiges  $E \subset \mathbb{R}^d$  gilt, weil  $A, B \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A) \\ &= \mu^*((E \setminus A) \setminus B) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*(E \cap A) \\ &= \mu^*(E \setminus (A \cup B)) + \mu^*((E \cap (A \cup B)) \setminus A) + \mu^*((E \cap (A \cup B)) \cap A) \\ &= \mu^*(E \setminus (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B))\end{aligned}$$

Somit  $A \cup B \in \mathcal{A}$ . Außerdem, mit (ii):

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A} \quad , \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A} \quad \diamond$$

**Behauptung 2:**  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkte Folge in  $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$   
und  $\forall E \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

$\sigma$ -Additivität ist Spezialfall  $E = \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$  in Behauptung 2 (dann  $\mu^* = \mu$ )

**Begründung:** Zunächst, da  $A_1 \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) + \mu^*((E \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) \\ &= \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1)\end{aligned}$$

so dass nach Iteration

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n)$$

Nun  $A \supset \bigcup_{n=1}^N A_n$  und nach Monotonie des äußeren Maßes  $\mu^*$ :

$$\mu^*(E \cap A) \geq \mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

also

$$\mu^*(E \cap A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

Umgekehrt gilt nach der  $\sigma$ -Subadditivität des äußeren Maßes  $\mu^*$ :

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$$

also Gleichheit. Verbleibt  $A \in \mathcal{A}$ . Behauptung 1 zeigt  $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N A_n\right) \\ &\geq \sum_{n=1}^N \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \quad (\text{wegen Monotonie}) \end{aligned}$$

Also im Limes  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad (\text{nach obiger Gleichung}) \\ &\geq \mu^*(E) \quad (\text{nach Subadditivität}) \end{aligned}$$

Es gilt also Gleichheit und somit  $A \in \mathcal{A}$

◇



**Behauptung 3 = (iii):**  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Begründung:** Definiere iterativ

$$B_1 = A_1 \quad , \quad B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$$

Dann sind  $B_n$  disjunkt und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

Nach Behauptung 1 gilt  $B_n \in \mathcal{A}$

Nach Behauptung 2 also auch  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

Somit ist Satz 2.13 bewiesen



Beweis von Satz 2.13 überträgt sich auf allgemeineren Rahmen

## Definition 2.15

$N \subset \mathbb{R}^d$  Nullmenge  $\iff \mu^*(N) = 0$

## Satz 2.16

- (i) *Jede Nullmenge ist Lebesgue-messbar mit  $\mu(N) = 0$*
- (ii)  *$(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullmengen  $\implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$  Nullmenge*
- (iii) *Abzählbare Mengen sind Nullmengen*
- (iv) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen*

**Beweis:** (i) Für alle  $E \subset \mathbb{R}^d$  gilt nach Monotonie

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus N) \quad , \quad \mu^*(N) \geq \mu^*(N \cap E)$$

Somit folgt Messbarkeit von  $N$  aus

$$\mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(N) \geq \mu^*(E \setminus N) + \mu^*(N \cap E)$$

(ii) gilt da wegen  $\sigma$ -Subadditivität  $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(N_n) = 0$

(iii)+(iv) sind Übung □

Nun wird Zusammenhang mit Topologie untersucht

### Satz 2.17

*Offene und abgeschlossene Mengen des  $\mathbb{R}^d$  sind Lebesgue-messbar*

**Beweis:** Sei  $U$  offen und  $x \in U$

$\implies \exists r > 0, r \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $(x - r, x + r) \subset U$

$\implies \exists$  rationale  $a, b \in \mathbb{Q}^d$ , so dass  $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$

Somit  $x \in (a, b] \subset U$ , und:

$$U = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}^d, (a, b] \subset U} (a, b]$$

Also:  $U$  abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern

Nach Satz 2.13 ist  $U$  messbar

Abgeschlossene Mengen als Komplement offener auch messbar □

## Nun weitere Eigenschaften Lebesgue-messbarer Mengen:

### Satz 2.18

$A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar. Dann:

- (i)  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  offenes  $U$  mit  $A \subset U$  und  $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  abgeschlossenes  $F$  mit  $A \supset F$  und  $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$

Also: Lebesgue-Maß von außen und innen regulär im Sinne von:  
def-RegularitaetMass

### Definition 2.19

$\mu$  Maß auf einem topologischen Raum  $(\Omega, \mathcal{O})$  mit  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$

- (i)  $\mu$  von außen regulär  $\iff$  zu jeder messbaren Menge  $A \in \mathcal{A}$  und  $\varepsilon > 0 \exists$  offenes  $U$  mit  $A \subset U$  und  $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$
- (ii)  $\mu$  von innen regulär  $\iff \forall$  messbaren  $A \in \mathcal{A}$  und  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  abgeschlossenes  $F \subset A$  mit  $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$

**Beweis:** (i) Sei zunächst  $\mu(A) = \mu^*(A) < \infty$

Dann existiert halboffene Quaderüberdeckung  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$  mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle offene Quader  $Q'_n$  mit  $Q_n \subset Q'_n$  und  $\mu(Q'_n) \leq \mu(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Setze  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q'_n$  (das ist offen!). Dann

$$\begin{aligned} \mu(A) &> \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu(Q'_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} && (\sigma\text{-Subadditivität}) \\ &= \mu(U \cap A) + \mu(U \setminus A) - \varepsilon \end{aligned}$$

Da  $U \cap A = A$ , folgt  $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Jetzt sei  $\mu(A) = \infty$

Dann setze  $A_m = A \cap B_m(0)$ , wobei  $B_m(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < m\}$

Da  $\mu(A_m) < \infty$  kann Obiges angewandt werden

$\implies \exists$  offenes  $U_m$  mit  $A_m \subset U_m$  und  $\mu(U_m \setminus A_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$

Setze  $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$

Dann  $A \subset U$  und  $U \setminus A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \setminus A_m$ , sodass

$$\mu(U \setminus A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(U_m \setminus A_m) < \varepsilon$$

(ii) Wende (i) auf messbares  $A^c$  an:  $\exists$  offenes  $U \supset A^c$  mit  $\mu(U \setminus A^c) < \varepsilon$

Setze  $F = U^c$  was also abgeschlossen ist und  $F \subset A$ . Somit

$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap U) = \mu(U \setminus A^c) < \varepsilon$$

□

## Korollar 2.20

Für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf \{ \mu(U) \mid U \text{ offen mit } U \supset A \} \\ &= \sup \{ \mu(F) \mid F \text{ abgeschlossen mit } F \subset A \} \\ &= \sup \{ \mu(K) \mid K \text{ kompakt mit } K \subset A \}\end{aligned}$$

**Beweis:** Erste beide Gleichheiten nach Satz 2.18. Also noch letzte

Sei  $(F_n)_{n \geq 1}$  Folge abgeschlossener Obermengen mit  $\mu(F_n) \rightarrow \mu(A)$

Dann  $K_n = F_n \cap [-n, n]^d$  kompakt mit  $\mu(K_n) \rightarrow \mu(A)$  □

## Satz 2.21 (Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen)

$A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$  *offenes*  $U$  und *abgeschlossenes*  $F$  mit  $F \subset A \subset U$   
und  $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$  *offenes*  $U$  mit  $A \subset U$  und  $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

**Beweis:** Erster " $\implies$ " beide Punkte in Satz 2.18 mit  $\frac{\epsilon}{2}$

Zweiter " $\implies$ " da  $\mu(U \setminus A) \leq \mu(U \setminus F) < \epsilon$

Rückrichtung " $\impliedby$ " Sei  $E \subset \mathbb{R}^d$  beliebig und  $\epsilon > 0$ . Da  $U$  messbar:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus U) + \mu^*(E \cap U) \\ &\geq \mu^*(E \setminus A) - \mu^*(U \setminus A) + \mu^*(E \cap U)\end{aligned}$$

Letzteres wegen

$$E \setminus A = (E \setminus U) \cup ((U \setminus A) \cap E) \subset (E \setminus U) \cup (U \setminus A)$$

so dass mit Subadditivität

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E \setminus U) + \mu^*(U \setminus A)$$

Nach  $\mu(U \setminus A) < \epsilon$  und Monotonie, und dann wieder Subadditivität:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \setminus A) - \epsilon + \mu^*(E \cap A) \\ &\geq \mu^*(E) - \epsilon\end{aligned}$$

Da  $\epsilon$  beliebig, folgt Gleichheit und Messbarkeit von  $A$

□



# Satz von Steinhaus

## Satz 2.22 (Steinhaus 1920)

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  messbar mit  $\mu(A) > 0$

$\implies A - A = \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$  Umgebung von 0

d.h.  $\exists \delta > 0$  mit  $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < \delta\} \subset A - A$

**Beweis.** Nach Korollar 2.20 reicht es  $A = K$  kompakt zu betrachten

Nach Satz 2.18  $\exists$  offenes  $U \supset K$  mit  $\mu(U) < 2\mu(K)$

$\delta = \inf \{\|x - y\| \mid x \in K, y \in U^c\} > 0$  weil  $U^c$  abgesch.,  $K \cap U^c = \emptyset$

Für  $t \in B_\delta$  und  $x \in K$  gilt  $x + t \in U$ , d.h.  $K + t \subset U$

(weil sonst  $x + t \in U^c$  und  $\|x - (x + t)\| < \delta \nmid$ )

$K + t = \{x + t \mid x \in K\}$  kompakt und  $\mu(K + t) = \mu(K)$  nach Definition

Zudem  $K \cup (K + t) \subset U$

Sei  $K \cap (K + t) = \emptyset \implies \mu(U) \geq \mu(K) + \mu(K + t) = 2\mu(K) \nmid$

Also  $K \cap (K + t) \neq \emptyset$  für alle  $t \in B_\delta \implies B_\delta \subset K - K$  □

## Satz 2.23

Sei  $\Omega$  Menge und  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  Mengensystem. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

eine  $\sigma$ -Algebra, genannt die von  $\mathcal{C}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra

**Beweis:** Zu zeigen:  $\sigma(\mathcal{C})$  enthält  $\Omega$ , ist stabil unter Komplementbildung, und stabil unter abzählbaren Vereinigungen

Aber  $\Omega \in \sigma(\mathcal{C})$ , weil  $\Omega$  in jeder  $\sigma$ -Algebra

Wenn  $A \in \sigma(\mathcal{C})$ , so auch in allen  $\mathcal{A} \implies A^c$  in allen  $\mathcal{A} \implies A^c \in \sigma(\mathcal{C})$

Analog für abzählbare Vereinigungen □

## Definition 2.24

Auf topologischem Raum  $(\Omega, \mathcal{O})$  heißt  $\sigma(\mathcal{O})$  die Borel  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\Omega)$

## Bemerkung 2.25

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}) = \sigma(\{A \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen}\})$$

Letzteres da  $\sigma$ -Algebren stabil unter Komplementbildung

Nach Satz 2.17:  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue-messbar}\}$

Unterschied zwischen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  kann explizit angegeben werden:

## Satz 2.26

$A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar, d.h.  $A \in \mathcal{A}$

$\iff \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und Nullmenge  $N$  mit  $A = B \cup N$

**Beweis:** " $\Leftarrow$ " klar nach Satz 2.16

" $\Rightarrow$ " Da  $A^c \in \mathcal{A} \exists$  absteigende offener  $U_n \supset A^c$  mit  $\mu(U_n \setminus A^c) < \frac{1}{n}$

(wegen Satz 2.18) Da  $U_n \setminus A^c = A \setminus U_n^c$  gilt auch  $\mu(A \setminus U_n^c) < \frac{1}{n}$

Setze  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c$  und  $N = A \setminus B$ . Dann  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $B \subset A$  und

$$\mu(N) = \mu(A \setminus B) = \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c\right) \leq \inf_n \mu(A \setminus U_n^c) = 0$$

□

Nun Verhalten des Lebesgue-Maßes unter Wirkung der affinen Gruppe

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \text{Gl}(\mathbb{R}, d)$$

auf  $\mathbb{R}^d$  gegeben durch Drehen/Stauchen und dann Verschieben:

$$(a, M) \cdot x = a + Mx \quad , \quad (a, M) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Dann gilt für  $(a', M') \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$

$$(a, M) \cdot ((a', M') \cdot x) = a + M a' + M M' x$$

Also sollte die Gruppenoperation auf  $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$  definiert werden durch

$$(a, M) \cdot (a', M') = (a + M a', M M')$$

Dies gibt tatsächlich Gruppenstruktur (semidirektes Produkt). Es gilt:

$$((a, M) \cdot (a', M')) \cdot x = (a, M) \cdot ((a', M') \cdot x)$$

Für Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^d$  definiere  $(a, M) \cdot A = MA + a = \{Mx + a \mid x \in A\}$

## Satz 2.27

$\forall A \subset \mathbb{R}^d$  und  $a \in \mathbb{R}^d$  gilt:  $\mu^*(A + a) = \mu^*(A)$

Außerdem:  $A$  messbar  $\iff A + a$  messbar

**Beweis:** Wenn  $Q$  Quader, dann auch  $Q + a$  und  $\mu^*(Q) = \mu^*(Q + a)$

Sei  $A \subset \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ , dann auch  $A + a \subset \bigcup_{n \geq 1} (Q_n + a)$  und

$$\mu^*(A + a) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(Q_n + a) = \sum_{n \geq 1} \mu^*(Q_n)$$

Durch Übergang zum Infimum folgt  $\mu^*(A + a) \leq \mu^*(A)$

Da dies für jedes  $a$ , also auch  $-a$  gilt, folgt Gleichheit aus:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A + a - a) \leq \mu^*(A + a) \leq \mu^*(A)$$

Jetzt sei  $A$  messbar. Für  $E \subset \mathbb{R}^d$  gilt nun

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E - a) = \mu^*((E - a) \setminus A) + \mu^*((E - a) \cap A) \\ &= \mu^*(E \setminus (A + a)) + \mu^*(E \cap (A + a)) \end{aligned}$$

Somit  $A + a$  auch messbar



## Satz 2.28

Für jede Matrix  $M \in \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$  und jedes  $A \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$\mu^*(MA) = |\det(M)| \mu^*(A)$$

Zudem:  $A$  messbar  $\iff MA$  messbar

Außerdem:  $\mu^*$  und  $\mu$  unter Wirkung der orthogonalen Gruppe invariant

**Beweis:**  $\det(M) = 0 \implies \text{Ker}(M) \neq \{0\} \implies MA$  liegt in Hyperfläche  
 $\implies \mu^*(MA) = 0$  Also jetzt  $\det(M) \neq 0$

**Erinnerung:** Nach Gauss-Algorithmus:

$$M = S_1 \cdot \dots \cdot S_n D S'_1 \cdot \dots \cdot S'_n$$

mit  $D$  diagonal und  $S_k, S'_k$  Scherungen der Form  $S = \mathbf{1} + \lambda |i\rangle\langle j|$

**Behauptung 1:** Es reicht, für  $M = D$  und  $M = S$  zu zeigen:

$$\mu^*(MA) \leq |\det(M)| \mu^*(A) \tag{2.1}$$

**Begründung:** Wegen  $\det(MM') = \det(M) \det(M')$ , gilt dann:

$$\begin{aligned}\mu^*(MA) &= \mu^*(S_1 \cdot \dots \cdot S_n D S'_1 \cdot \dots \cdot S'_{n'} A) \\ &\leq |\det(S_1)| \mu^*(S_2 \cdot \dots \cdot S_n D S'_1 \cdot \dots \cdot S'_{n'} A) \\ &\leq |\det(S_1) \cdot \dots \cdot \det(D) \cdot \dots \cdot \det(S'_{n'})| \mu^*(A) \\ &= |\det(M)| \mu^*(A) = |\det(M)| \mu^*(M^{-1}MA) \\ &\leq |\det(M)| |\det(M^{-1})| \mu^*(MA) = \mu^*(MA)\end{aligned}$$

◇

**Behauptung 2:** Es reicht, (2.1) für Quader  $Q$  zu zeigen

**Begründung:**  $A \subset \bigcup_{n \geq 1} Q_n$  Quaderüberdeck.  $\implies MA \subset \bigcup_{n \geq 1} MQ_n$

Nach  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu^*$  gilt mit Voraussetzung

$$\mu^*(MA) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(MQ_n) \leq |\det(M)| \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n)$$

Übergang zum Infimum zeigt

$$\mu^*(MA) \leq |\det(M)| \mu^*(A)$$

◇

**Behauptung 3:** (2.1) gilt für Quader und Diagonalmatrizen

**Begründung:**  $DQ$  ist Quader mit Seitenlängen gegeben durch Produkte der Seitenlängen von  $Q$  mit den Diagonaleinträgen von  $D$

$$\implies \mu(DQ) = |\det(D)| \mu(Q)$$

◇

**Behauptung 4:** (2.1) gilt für Quader und Scherungen

**Begründung:** Es reicht Scherung in der  $(1, 2)$ -Ebene zu betrachten:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Translationsinvarianz von  $\mu^*$ : es reicht  $Q = (0, b]$  zu betrachten



Faktorisierung ergibt (mit  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß  $\mu_d$ )

$$Q = ((0, 0), (b_1, b_2)] \times Q'$$

$$\mu_d(Q) = \mu_2((0, 0), (b_1, b_2)] \cdot \mu_{d-2}(Q')$$

$$SQ = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ((0, 0), (b_1, b_2)] \times Q' = P \times Q'$$

mit  $P$  Parallelogramm mit Ecken  $(0, 0)$ ,  $(b_1, 0)$ ,  $(\lambda b_2, b_2)$ ,  $(b_1 + \lambda b_2, b_2)$

Elementargeometrie oder Limes von Quaderüberdeckungen:

$$\mu_2(P) = \mu_2((0, 0), (b_1, b_2)]$$

Somit

$$\mu(SQ) = \mu(Q) = |\det(S)| \mu(Q)$$

◇

Messbarkeit wie in Satz 2.27 überprüfen

□

# Existenz nichtmessbarer Mengen

Auf  $\mathbb{R}^d$  definiere Äquivalenzrelation (!):

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$$

Auswahlaxiom: wähle aus jeder Klasse  $[x]_{\sim}$  einen Repräsentanten  $x$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid [x]_{\sim} \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d\}$$

## Satz 2.29 (Vitali 1905)

*Jedes Vertretersystem  $M$  von  $\mathbb{R}^d / \sim$  ist nicht Lebesgue-messbar*

**Beweis:** Gegenannahme  $M$  messbar

$\mu(M) > 0 \implies M - M$  Umgebung von 0 (Satz 2.22 von Steinhaus)

$\implies \exists r \in M - M$  mit  $r \in \mathbb{Q}^d$  und  $r \neq 0$  Widerspruch zur Wahl von  $M \not\subseteq \mathbb{Q}^d$

Somit  $\mu(M) = 0$ , also auch  $\mu(M + r) = 0$  für alle  $r \in \mathbb{Q}^d$

Dann:  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^d} (M + r)$  abzählbare Vereinigung von Nullmengen

$\implies \mathbb{R}^d$  selbst Lebesgue'sche Nullmenge. Wieder Widerspruch  $\not\subseteq \square$

# Maßtheorie auf allgemeinen Räumen

## Definition 2.30

Ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heißt Ring auf einer Menge  $\Omega$  falls

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- (iii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Dann gilt auch:  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$

Ring in Satz 2.3 ist ein Beispiel (endl. Vereinig. halboffener Quader)

## Definition 2.31

Ein Inhalt  $\mu$  auf Ring  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$  und

$$\mu\left(\overset{\circ}{\bigcup}_{n=1, \dots, N} A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \quad , \quad A_n \in \mathcal{R}$$

Lebesgue'sche Inhalt wieder ein Beispiel, ebenso wie folgendes:

### Definition 2.32

Funktion  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$  auf Ring  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist ein Prämaß  $\mu$  wenn

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für jede disjunkte Folge  $(A_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathcal{R}$  mit  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{R}$  gilt

$$\mu\left(\overset{\circ}{\bigcup}_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

### Definition 2.33

Zu Prämaß  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  auf Ring über  $\Omega$  sei  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

## Satz 2.34

$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  aus Definition 2.33 ist ein äußeres Maß auf  $\Omega$ , d.h.

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (ii) (Monotonie)  $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (iii) ( $\sigma$ -Subadditivität) Für Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen von  $\Omega$ :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Konstruktion von  $\mu^*$  geht auf Carathéodory (1917) zurück  
Ebenso folgende zentrale Definition

## Definition 2.35

Gegeben äußeres Maß  $\mu^*$  auf  $\Omega$ , Menge  $A \subset \Omega$  heißt messbar  $\iff$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \forall E \subset \Omega$$

## Satz 2.36 (Allgemeiner Maßerweiterungssatz)

Gegeben Prämaß auf  $\Omega$ , konstruiere  $\mu^*$  und setze

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \mu^* \text{-messbar}\}$$

Dann ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra, d.h.

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies \text{Komplementärmenge } A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Zudem ist Einschränkung  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$  Erweiterung des Prämaßes

Diese  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ist ein Maß auf  $\Omega$ , d.h.  $\mu(\emptyset) = 0$

und  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv: für  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  disjunkte Folge in  $\mathcal{A}$

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Beweis genau wie bei Satz 2.13

# Borel-Maße auf topologischen Räumen

Erinnerung an Definition 2.24:

## Definition 2.37 (Borelsche $\sigma$ -Algebra)

Die Borel  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\Omega)$  auf einem topologischen Raum  $(\Omega, \mathcal{O})$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , die die Topologie enthält:

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{O} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Alternativ:  $\mathcal{B}(\Omega)$  ist die von  $\mathcal{O}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra

## Definition 2.38 (Lokale Endlichkeit eines Maßes)

Maß  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  auf topologischen Raum ist lokal endlich

$\iff$  zu jedem Punkt gibt es eine Umgebung mit endlichen Maß

## Beispiel 2.39

Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$  ist lokal endlich

### Definition 2.40 (Borel-Maß)

Ein lokal endliches Maß  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra eines topologischen Raumes  $\Omega$  heißt Borel-Maß

Borel-Maßraum  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  kann vervollständigt werden

### Definition 2.41 (Regularität von Borel Maßen)

$\mu$  Maß auf einem topologischen Raum  $(\Omega, \mathcal{O})$  mit  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$

- (i)  $\mu$  von außen regulär  $\iff$  zu jeder messbaren Menge  $A$  und  $\epsilon > 0$   
 $\exists$  offenes  $U$  mit  $A \subset U$  und  $\mu(U \setminus A) < \epsilon$
- (ii)  $\mu$  von innen regulär  $\iff \forall$  messbaren  $A$  und  $\forall \epsilon > 0$   
 $\exists$  abgeschlossenes  $F \subset A$  mit  $\mu(A \setminus F) < \epsilon$

Satz 2.18: Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist von innen und außen regulär



### 3 Lebesgue-Integral

Zunächst definiere Klassen integrierbarer Funktionen

#### Definition 3.1

$D \subset \mathbb{R}^d$  Borel-messbar,  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  Funktion

- (i)  $f$  Borel-messbar  $\iff f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 
  - $\iff \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  ist  $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
  - $\iff \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist  $f^{-1}(B), f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
- (ii)  $f$  Lebesgue-messbar
  - $\iff \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  ist  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue-messbar}\}$
- (iii)  $f$  Treppenfunktion (oder Elementarfunktion)
  - $\iff \exists N \in \mathbb{N}$  und  $A_n \in \mathcal{A}$  und  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$  mit  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$   
wobei  $\chi_A$  die Indikatorfunktion auf  $A$  ist, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

### Bemerkung 3.2

Treppenfunktionen und Borel-messbare Abbildungen sind Lebesgue-messbar

### Satz 3.3

*Stetige Abbildungen sind Borel-messbar*

**Beweis:** Seien  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$  und  $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$  Topologien

Dann Borel-Algebren  $\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $\sigma(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Erinnerung:  $f$  stetig  $\iff f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$

Somit  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}))) \subset \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Satz folgt also aus folgendem Lemma für Fall  $\mathcal{C} = \mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$  □

### Lemma 3.4

$f : \Omega' \rightarrow \Omega$  Abbildung,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann gilt für erzeugte  $\sigma$ -Algebren:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

**Beweis:**  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$  ist tatsächlich  $\sigma$ -Algebra

weil:  $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$  und  $\bigcup_n f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_n A_n)$

Also: Inklusion "⊃" folgt aus  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \supset f^{-1}(\mathcal{C})$

Für "⊂" setze:

$$\mathcal{D} = \{D \subset \Omega \mid f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$$

Offensichtlich  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ , so dass  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$ . Also

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) &\subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{D})) \\ &= \{f^{-1}(D) \mid f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\} \\ &= \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \end{aligned}$$

was den Beweis vervollständigt



## Korollar 3.5

$f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Borel messbar

$\iff \forall c \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{f < c\} = \{x \in D \mid f(x) < c\}$  Borel messbar

Gleiches gilt für Lebesgue-Messbarkeit

**Beweis:** Offenen Intervalle und somit gesamte Topologie wird von

$\mathcal{C} = \{[-\infty, c) \mid c \in \overline{\mathbb{R}}\}$  erzeugt (endliche Schnitte, Vereinigungen)

Somit auch  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Da  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$  nach Lemma 3.4, ist Borel-Messbarkeit

von  $f$  gegeben falls  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , oder gleichbedeutend

falls  $f^{-1}([-\infty, c)) = \{f < c\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$

Analog für Lebesgue-Messbarkeit □

Messbarkeit von Funktionen nun etwas allgemeiner  
Dies erlaubt z.B. auch vektorwertige Funktionen zu betrachten

### Definition 3.6

$(\Omega', \mathcal{A}')$ ,  $(\Omega, \mathcal{A})$  Mengen mit  $\sigma$ -Algebren

$f : \Omega' \rightarrow \Omega$  messbar  $\iff f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}'$

### Bemerkung 3.7

Hintereinanderausführungen messbarer Funktionen sind messbar

### Satz 3.8

*Summen, Produkte, Quotienten, Maxima und Minima endlich vieler  $\mathbb{R}$ -wertiger messbarer Funktionen sind messbar (entweder jeweils im Sinne von Borel oder Lebesgue)*

**Beweis:** Z.B. Produkt messbarer  $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, \dots, N$

Dann ist  $F = (f_1, \dots, f_N) : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  messbar (Details: Übung)

Definiere  $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $G(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdot \dots \cdot x_N$

Dies ist messbar, also ist auch  $G \circ F(x) = \prod_{n=1}^N f_n(x)$  messbar □

### Satz 3.9

$f_n : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  Folge messbarer Funktionen

$\implies \inf(f_n), \sup(f_n), \liminf(f_n), \limsup(f_n)$  messbar

**Beweis:** Für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  ist

$$\{\inf(f_n) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < c\}$$

messbar als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen

Nach Korollar 3.5 ist also  $\inf(f_n)$  messbar

Analog  $\sup(f_n)$  und  $\lim_n \sup(f_n) = \inf_n \sup_{k \geq n}(f_k)$  □

### Satz 3.10

$f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  Lebesgue-messbar

$\implies \exists$  monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit

$$f_n|_{D^c} = 0 \quad \text{und} \quad f_n \uparrow f$$

d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  und  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

**Beweis:** Definiere Treppenfunktionen

$$f_n(x) = \left( \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{\{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}\}} \right) + n \chi_{\{f \geq n\}}$$

Nun sind Mengen  $\{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}\}$  und  $\{f \geq n\}$  messbar

Also  $f_n$  nach Satz 3.8 messbar

Außerdem  $f_n \uparrow f$



# Definition des Lebesgue Integrals

## Definition 3.11

- (i) Lebesgue-Integral positiver Treppenfunktion zu  $\alpha_n \geq 0$  und  $A_n \in \mathcal{A}$

$$\int \mu(dx) f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(A_n) \quad , \quad f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$$

- (ii) Sei  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-messbar und positiv

Sei  $(f_n)_{n>1}$  monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit  $f_n|_{D^c} = 0$  und  $f_n \uparrow f$  (z.B. wie im Satz 3.10)

Dann ist Lebesgue-Integral von  $f$  definiert als

$$\int_D \mu(dx) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) f_n(x) = \sup_n \int \mu(dx) f_n(x) \in [0, \infty]$$

**Weitere Notationen:**  $\int_D dx f(x) = \int_D f(x) dx = \mu(f \chi_D)$

Letzteres betont, dass das Integrieren ein lineares Funktional ist

Bis jetzt nur Integral nicht-negativer Funktionen (andere später)



## Satz 3.12

*Integral ist wohl-definiert*

*(Wert unabhängig von Wahl der Folge  $f_n$ )*

*Es ist linear und monoton, d.h. für messbare  $f, g \geq 0$  gilt:*

$$\int \mu(dx)(f(x) + \lambda g(x)) = \left( \int \mu(dx) f(x) \right) + \lambda \left( \int \mu(dx) g(x) \right)$$

$$f \leq g \implies \int \mu(dx) f(x) \leq \int \mu(dx) g(x)$$

*bzw. kurz*

$$\mu(f + \lambda g) = \mu(f) + \lambda \mu(g)$$

$$f \leq g \implies \mu(f) \leq \mu(g)$$

**Beweis:**

**Behauptung 1:** Integral linear und monoton auf Treppenfunktionen

**Begründung:** Seien  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$  und  $g = \sum_{k=1}^K \beta_k \chi_{B_k}$

Hierbei seien  $(A_n)_{n=1, \dots, N}$  und  $(B_k)_{k=1, \dots, K}$  jeweils disjunkt. Setze

$$A_0 = \left( \bigcup_n A_n \right)^c \quad B_0 = \left( \bigcup_k B_k \right)^c$$

und  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ . Dann ist  $f + \lambda g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (\alpha_n + \lambda \beta_k) \chi_{A_n \cap B_k}$

Treppenfunktion und

$$\begin{aligned} \mu(f + \lambda g) &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (\alpha_n + \lambda \beta_k) \mu(A_n \cap B_k) \\ &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \left( \sum_{k=0}^K \mu(A_n \cap B_k) \right) + \lambda \sum_{k=0}^K \beta_k \left( \sum_{n=0}^N \mu(A_n \cap B_k) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(A_n) + \lambda \sum_{k=1}^K \beta_k \mu(B_k) = \mu(f) + \lambda \mu(g) \end{aligned}$$

Monotonie folgt analog



**Behauptung 2:** Für Treppenfunktionen  $f_n, h$  mit  $f_n \uparrow f$  und  $0 \leq h \leq f$ :

$$\mu(h) \leq \lim_n \mu(f_n)$$

**Begründung:** Sei  $h = \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \chi_{C_\ell}$  mit messbaren disjunkten  $C_\ell$

Für  $\varepsilon > 0$  (notwendig um  $C_\ell$  von Innen auszuschöpfen), setze

$$C_{\ell,n} = \{x \in C_\ell \mid f_n(x) \geq \gamma_\ell(1 - \varepsilon)\}$$

Dann

$$C_{\ell,n} \subset C_{\ell,n+1} \subset C_\ell$$

Da  $f_n \uparrow f \geq h$ , gilt

$$C_\ell = \bigcup_{n \geq 1} C_{\ell,n} = C_{\ell,1} \overset{\circ}{\cup} \left( \bigcup_{n \geq 2} C_{\ell,n} \setminus C_{\ell,n-1} \right)$$

und somit nach  $\sigma$ -Additivität

$$\mu(C_\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mu(C_{\ell,1}) + \sum_{k=2}^n \mu(C_{\ell,k} \setminus C_{\ell,k-1}) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_{\ell,k})$$

Nun unter Verwendung von Behauptung 1:

$$\begin{aligned}\mu(f_n) &\geq \mu\left(\sum_{\ell=1}^L f_n \chi_{C_{\ell,n}}\right), & \text{da } f_n \geq \sum_{\ell=1}^L f_n \chi_{C_{\ell,n}} \text{ Treppenfunktion} \\ &= \sum_{\ell=1}^L \mu\left(f_n \chi_{C_{\ell,n}}\right) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell (1 - \varepsilon) \mu(C_{\ell,n}) & \text{nach Definition von } C_{\ell,n} \text{ und Beh. 1}\end{aligned}$$

Also im Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \geq (1 - \varepsilon) \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_{\ell,n}) = (1 - \varepsilon) \mu(h)$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt Behauptung 2

◇

**Behauptung 3:** Für Treppenfunktionen  $f_n, g_m$  mit  $f_n \uparrow f$  und  $g_m \uparrow f$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(g_m)$$

**Begründung:** Da  $g_m \leq f$ , folgt nach Behauptung 2

$$\mu(g_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n)$$

Also  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(g_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n)$ . Dann vertausche die Rollen ◇

Jetzt Linearität und Monotonie für messbare Funktionen

Seien  $f_n \uparrow f$ ,  $g_n \uparrow g$ , dann  $f_n + \lambda g_n \uparrow f + \lambda g$  und somit

$$\mu(f + \lambda g) \stackrel{\text{Beh.3}}{=} \lim \mu(f_n + \lambda g_n) \stackrel{\text{Beh.1}}{=} \lim \mu(f_n) + \lambda \lim \mu(g_n) = \mu(f) + \lambda \mu(g)$$

Für die Monotonie sei zudem  $f \leq g$ . Setze

$$\tilde{f}_n = \min\{f_n, g_n\} \quad \tilde{g}_n = \max\{f_n, g_n\}$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_n \leq \tilde{g}_n \quad \text{und} \quad \lim \tilde{f}_n = f \quad \lim \tilde{g}_n = g$$

so dass

$$\mu(f) = \lim \mu(\tilde{f}_n) \stackrel{\text{Beh.1}}{\leq} \lim \mu(\tilde{g}_n) = \mu(g)$$

□

### Satz 3.13 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)

$0 \leq f_n$ ,  $f$  messbar und  $f_n \uparrow f$ , d.h.  $f_n \leq f_{n+1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$   
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \mu(f)$

**Beweis:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert nach Satz 3.10 Folge von Treppenfunktionen  $(g_{n,k})_{k \geq 1}$  mit  $g_{n,k} \uparrow f_n$ . Setze

$$h_{n,k} = \max\{g_{1,k}, \dots, g_{n,k}\}$$

Dann:  $h_{n,k}$  Treppenfunktion, monoton wachsend in  $n$  und  $k$

Da  $h_{n,k} \leq f_n \leq f$  und anschließend  $h_{n,k}$  monoton in  $n$ :

$$f \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k,k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_{n,k} = f_n$$

Somit

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k,k}$$

und unter zweifacher Verwendung von Satz 3.12

$$\mu(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(h_{k,k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(f_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(f) = \mu(f)$$



Später wird gezeigt, dass Voraussetzung  $f_n \geq 0$  nicht notwendig ist  
Durch Anwendung von Satz 3.13 auf Teilsummen:

### Korollar 3.14

$$f_n \geq 0 \implies \mu\left(\sum_{n \geq 1} f_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(f_n)$$

### Satz 3.15 (Lemma von Fatou)

$$f_n \geq 0 \text{ messbar} \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \geq \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)$$

**Beweis:** Für  $m \geq n$  gilt:  $f_m \geq \inf_{k \geq n} f_k$

Somit nach der Monotonie:  $\mu(f_m) \geq \mu(\inf_{k \geq n} f_k)$

Also:  $\inf_{m \geq n} \mu(f_m) \geq \mu(\inf_{k \geq n} f_k)$  und somit:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \mu(f_m) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\inf_{k \geq n} f_k\right) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k\right) = \mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n\right)$$

wobei im vorletzten Schritt Satz 3.13 verwandt wurde □

### Definition 3.16

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar

(falls auf messbarem  $D \subset \mathbb{R}^d$  definiert, durch 0 fortsetzen)

$f$  (Lebesgue-) integrierbar  $\iff \mu(|f|) < \infty$

Falls  $f$  integrierbar ist, definiere positive integrierbare Funktionen

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad , \quad f_- = \max\{-f, 0\}$$

so dass  $f = f_+ - f_-$ , und definiere das Lebesgue-Integral als

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-)$$

Alternative Schreibweisen:  $\mu(f) = \int \mu(dx) f(x) = \int f(x) dx \dots$

### Satz 3.17

*Integral ist monoton und linear auf integrierbaren Funktionen*



**Beweis:** Monotonie:  $f \leq g$ . Dann  $0 \leq f_+ \leq g_+$ ,  $0 \leq g_- \leq f_-$

Somit nach der Monotonie für positive Funktionen

$$\mu(f_+) \leq \mu(g_+) \quad \mu(g_-) \leq \mu(f_-)$$

und

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-) \leq \mu(g_+) - \mu(g_-) = \mu(g)$$

Für Linearität beachte zunächst, dass wegen

$$|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda| |g|$$

auch  $f + \lambda g$  integrierbar ist. Für  $\lambda \geq 0$  (analog  $\lambda < 0$ ) gilt

$$(f + \lambda g)_+ - (f + \lambda g)_- = f + \lambda g = f_+ + \lambda g_+ - f_- - \lambda g_-$$

d.h.

$$(f + \lambda g)_+ + f_- + \lambda g_- = (f + \lambda g)_- + f_+ + \lambda g_+$$

Wegen Linearität für positive Funktionen gilt

$$\mu((f + \lambda g)_+) + \mu(f_-) + \lambda \mu(g_-) = \mu((f + \lambda g)_-) + \mu(f_+) + \lambda \mu(g_+)$$

Umordnung und Definition des Integrals ergeben Beweis □

### Satz 3.18 (Lebesgue's Theorem der majorisierten Konvergenz)

$f_n, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  messbar,  $|f_n| \leq g$ ,  $\mu(g) < \infty$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  existiere  
Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = \mu(f)$$

**Beweis:** Es gilt  $g + f_n \geq 0$  und  $g - f_n \geq 0$

Nach Linearität und gemäß des Lemmas von Fatou folgt

$$\mu(g) + \liminf \mu(\pm f_n) = \liminf \mu(g \pm f_n) \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \mu(g \pm f) = \mu(g) \pm \mu(f)$$

Somit nach Subtraktion von  $\mu(g)$ :

$$\mu(f) \leq \liminf \mu(f_n) \quad \text{und} \quad -\mu(f) \leq \liminf \mu(-f_n) = -\limsup \mu(f_n)$$

und zusammen ergibt sich

$$\mu(f) \leq \liminf \mu(f_n) \leq \limsup \mu(f_n) \leq \mu(f)$$



### Beispiel 3.19

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \mu(dx) \frac{n}{x^8 + n}$$

Vertauschung von Limes und Integral erlaubt

**weil:** entweder monotone Konvergenz da  $\partial_n \frac{n}{x^8+n} = \frac{x^8}{(x^8+n)^2} > 0$

oder majorisierte Konvergenz da  $\frac{n}{x^8+n} \leq 1$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^8+n} = 1$ , folgt  $I = 2$

### Beispiel 3.20

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty \mu(dx) n(1 + x^2 n^2)^{-1}$$

für  $a > 0$

Da  $\frac{n}{1+x^2 n^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{n}+x^2 n} \leq \frac{1}{x^2 n} \leq \frac{1}{x^2}$  und  $\frac{1}{x^2}$  integrierbar auf  $[a, \infty)$  ist,

greift majorisierte Konvergenz. Es folgt  $I = 0$

### Beispiel 3.21

Sei  $f_n(x) = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ . Dann  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 > 0 = \int \mu(dx) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Tatsächlich ist Folge  $f_n$  nicht durch integrierbare Funktion majorisiert  
In der Tat, kleinste obere Schranke  $g(x) = \sup_n f_n(x)$  erfüllt  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \mu(dx) g(x) \geq \int_{\frac{1}{N}}^1 \mu(dx) g(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \mu(dx) n = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1}$$

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  divergiert rechte Seite (harmonische Reihe)

Außerdem:  $f_n$  nicht monoton, also auch keine monotonen Konvergenz

### Definition 3.22

Seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-messbar

$f = g$  (im Sinne von Lebesgue) fast sicher

$\iff \exists$  Nullmenge  $N$  mit  $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

Genauso:  $f \leq g$ ,  $f < g$ , ... fast sicher

### Satz 3.23

Seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Lebesgue-messbar und  $f \geq 0$

- (i)  $f = 0$  fast sicher  $\iff \mu(f) = 0$
- (ii)  $\mu(f) < \infty \implies f < \infty$  fast sicher
- (iii)  $f \leq g$  fast sicher  $\implies \mu(f) \leq \mu(g)$
- (iv)  $f = g$  fast sicher  $\implies \mu(f) = \mu(g)$

**Beweis:** (i) Behauptung offensichtlich richtig für Treppenfunktionen

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monotone Folge positiver Treppenfunktionen mit  $f_n \uparrow f$

$$\begin{aligned} f = 0 \text{ fast sicher} &\iff f_n = 0 \text{ fast sicher } \forall n \in \mathbb{N} && \text{(Monotonie)} \\ &\iff \mu(f_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} && \text{(Treppenfunktionen)} \\ &\iff \lim \mu(f_n) = 0 && \text{(da } \mu(f_n) \text{ monoton)} \\ &\iff \mu(f) = 0 && \text{(nach Definition des Integrals)} \end{aligned}$$

(ii) Falls  $\mu(\{f = \infty\}) > 0$  folgt  $\mu(f) = \infty$

(iii) Sei  $N = \{f > g\}$ . Dann  $\mu(N) = 0$  nach Voraussetzung und

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mu(\chi_N f) + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(Linearität)} \\ &= 0 + \mu(\chi_{N^c} f) && \text{(nach (i), da } \chi_N f = 0 \text{ fast sicher)} \\ &\leq \mu(\chi_{N^c} g) && \text{(nach Definition von } N) \\ &\leq \mu(g) \end{aligned}$$

(iv) folgt durch doppelte Anwendung von (iii) □

## Erinnerung an Konstruktion des Riemann Integrals:

Seien  $Z_N$  Zerlegungen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$

Zudem sei  $Z_N$  Verfeinerung von  $Z_{N-1}$

Dazu sind Untersumme und Obersumme von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert

$$U_{Z_N}(f) = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

$$O_{Z_N}(f) = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

Dann:  $U(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} U_{Z_N}(f)$  nach  $O(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} O_{Z_N}(f)$

$f$  Riemann-integrierbar  $\iff U(f) = O(f)$

Dann ist das Riemann-Integral  $R\text{-}\int_a^b dx f(x) = U(f) = O(f)$

### Satz 3.24

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und messbar

$\implies f$  Lebesgue-integrierbar und  $\mu(f) = R\text{-}\int_a^b dx f(x)$

## Beweis:

$|f|$  beschränkt (sonst Ober- oder Untersumme  $\infty$  oder  $-\infty$ )

Somit  $f$  Lebesgue-integrierbar (da  $\mu([a, b]) < \infty$ )

Definiere

$$u_N = \sum_{n=1}^N \left( \inf_{[x_{n-1}, x_n]} f \right) \chi_{[x_{n-1}, x_n]}$$
$$o_N = \sum_{n=1}^N \left( \sup_{[x_{n-1}, x_n]} f \right) \chi_{[x_{n-1}, x_n]}$$

Dann:  $u_N$  bzw.  $o_N$  monoton wachsend bzw. fallend, und

$$U_{Z_N}(f) = \mu(u_N) \quad , \quad O_{Z_N}(f) = \mu(o_N)$$

Also  $0 \leq o_N - u_N$  monoton fallend und somit auch konvergent:

$$0 \leq \lim_N (o_N - u_N) = \lim_N o_N - \lim_N u_N$$



Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu \left( \lim_N (o_N - u_N) \right) && \text{(Monotonie)} \\ &\leq \liminf_N \mu(o_N - u_N) && \text{(Fatou)} \\ &= \liminf_N \mu(o_N) - \mu(u_N) && \text{(Linearität)} \\ &= \liminf_N O_{Z_N}(f) - U_{Z_N}(f) \\ &= 0 && \text{(nach Voraussetzung)} \end{aligned}$$

Somit  $\mu(\lim_N(o_N - u_N)) = 0$  und nach Satz 3.23 folgt

$$\lim_N o_N = \lim_N u_N \quad \text{fast sicher}$$

Da  $u_N \leq f \leq o_N$ , folgt  $f = \lim_N u_N$  fast sicher

Nach dem Satz für monotone Konvergenz

$$\mu(f) = \mu(\lim_N u_N) = \lim_N \mu(u_N) = \lim_N U_{Z_N}(f) = R \int_a^b dx f(x) \quad \square$$

# Integral auf allgemeinen Maßräumen:

Definition 3.25 (Meßbare Funktionen, vgl. Korollar 3.5)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum

$f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar  $\iff f^{-1}([-\infty, c)) \in \mathcal{A}$  für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$

Satz 3.26 (Beweis wie von Satz 3.10)

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar

$\implies \exists$  monotone Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit  $f_n \uparrow f$

Definition 3.27

Für nicht-negative Treppenfunktion  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$  mit  $A_n \in \mathcal{A}$  setze

$$\int \mu(dx) f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(A_n)$$

Für meßbares  $f \geq 0$  und Treppenfunktionen  $f_n$  mit  $f_n \uparrow f$

$$\int \mu(dx) f(x) = \lim \int \mu(dx) f_n(x)$$

### Satz 3.28 (wie Satz 3.12)

*Integral wohldefiniert, linear, monoton auf positiven, messbaren Fktn*

Alternative Schreibweise:

$$\int \mu(dx) f(x) = \int_{\Omega} \mu(dx) f(x) = \mu(f)$$

sowie für  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\int_A \mu(dx) f(x) = \int_{\Omega} \mu(dx) f(x) \chi_A(x) = \mu(f \chi_A)$$

Mit gleichem Beweis wie Satz 3.13 und Satz 3.15 :

### Satz 3.29 (Monotone Konvergenz, Beppo Levi)

$0 \leq f_n, f$  messbar und  $f_n \uparrow f$ , d.h.  $f_n \leq f_{n+1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$   
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \mu(f)$

### Satz 3.30 (Lemma von Fatou)

$f_n \geq 0$  messbar  $\implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \geq \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)$

### Definition 3.31 (vgl. Definition 3.16)

Meßbares  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar  $\iff \mu(|f|) < \infty$

Falls  $f$  integrierbar ist, definiere positive integrierbare Funktionen

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad , \quad f_- = \max\{-f, 0\}$$

so dass  $f = f_+ - f_-$ , und dann das Integral durch

$$\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-)$$

### Satz 3.32 (vgl. 3.17)

*Integral ist monoton und linear auf integrierbaren Funktionen*

Bedingung  $f_n, f \geq 0$  in Beppo Levi und Fatou nicht notwendig

Wieder mit gleichem Beweis wie Satz 3.18

### Satz 3.33 (Theorem der majorisierten Konvergenz)

$f_n, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar

Sei  $|f_n| \leq g$  mit integrierbarem  $g$

Zudem existiere  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = \mu(f)$$

Des Weiteren: Begriff von  $\mu$ -fast sicher, etc., analog zu Definition 3.22

Dann gilt auch Analog zu Satz 3.23

## 4 Integrationstechniken

**Erstes Ziel:** Satz von Fubini

**Zweites Ziel:** Jacobi'sche Transformationsformel

Gegeben  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{d+k} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Zu  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  und  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$  definiere:

$$f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad f_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

durch

$$f_x(y) = f(x, y) \quad , \quad f_y(x) = f(x, y)$$

Satz von Fubini: folgende Formel sinnvoll und richtig

$$\mu_{d+k}(f) = \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) = \int \mu_k(dy) \mu_d(f_y) \quad (4.1)$$

wobei  $\mu_d$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet

Integrationstechnik für höher dimensionale Integrale

(deren Rückführung auf eindimensionale Integrale)

## Definition 4.1

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt doppelintegrierbar

$\iff$  für fast alle  $x$  und  $y$  sind  $f_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $f_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar  
und Funktionen  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(f_x)$  und  $y \in \mathbb{R}^k \mapsto \mu_d(f_y)$  integrierbar

Für  $f$  doppelintegrierbare sind Doppelintegrale definiert durch

$$\mu_d(\mu_k(f)) = \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) \quad \text{und} \quad \mu_k(\mu_d(f)) = \int \mu_k(dy) \mu(f_y)$$

## Bemerkung 4.2

Wert  $\mu_k(f_x)$  auf Nullmenge, wo  $f_x$  nicht integrierbar, ist unwichtig  
für Integrierbarkeit *und* Integral von  $x \mapsto \mu_k(f_x)$  (nach Satz 3.23)

Analoges gilt für  $f_y$

## Lemma 4.3

- (i) *Doppelintegrierbare Funktionen bilden Vektorraum  $V_D$   
Doppelintegrale sind linear, d.h. für  $f, g \in V_D$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\mu_d(\mu_k(f + \lambda g)) = \mu_d(\mu_k(f)) + \lambda \mu_d(\mu_k(g))$$

$$\mu_k(\mu_d(f + \lambda g)) = \mu_k(\mu_d(f)) + \lambda \mu_k(\mu_d(g))$$

- (ii) *Seien  $f_n \geq 0$  doppelintegrierbar mit  $f_n \uparrow f$  und  $\exists C < \infty$  mit*

$$\mu_d(\mu_k(f_n)) \leq C \quad , \quad \mu_k(\mu_d(f_n)) \leq C$$

$\implies f$  doppelintegrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_d(\mu_k(f_n)) = \mu_d(\mu_k(f)) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k(\mu_d(f_n)) = \mu_k(\mu_d(f))$$

- (iii)  *$f_n \geq 0$  doppelintegrierbar und  $f_n \downarrow f$*

*Dann gelten gleichen Folgerungen wie in (ii)*



**Beweis:** (i) folgt nach doppelter Anwendung von Satz 3.17

(integrierbare Funktionen bilden Vektorraum und Integral linear)

(ii) Für  $n \in \mathbb{N} \exists$  Nullmenge  $N_n \subset \mathbb{R}^d$  mit  $(f_n)_x$  integrierbar  $\forall x \notin N_n$

Dann ist  $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$  eine Nullmenge. Setze

$$F_n(x) = \begin{cases} \mu_k((f_n)_x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus N \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

Dann  $F_n$  integrierbar (insbesondere messbar)

Wegen Monotonie des  $\mu_k$ -Integrals gilt  $F_n \uparrow F$

Nach Voraussetzung und Satz der monotonen Konvergenz folgt

$$C \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_d(F_n) = \mu_d(F)$$

d.h. Limesfunktion  $F$  ist  $\mu_d$ -integrierbar

Zudem gilt für fast alle  $x$ :

$$\infty > F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k((f_n)_x) = \mu_k(f_x)$$

Letzteres nach Satz der monotonen Konvergenz

Somit:  $f_x$  fast sicher integrierbar und  $x \mapsto \mu_k(f_x)$  integrierbar  
(da  $F$  integrierbar)

Da Gleiches auch für  $\mu_d((f_n)_y)$  gilt:  $f$  doppelintegrierbar

Außerdem

$$\begin{aligned}\mu_d(\mu_k(f)) &= \int \mu_d(dx) \mu_k(f_x) \\ &\stackrel{\text{oben}}{=} \int \mu_d(dx) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k((f_n)_x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu_d(dx) \mu_k((f_n)_x) \quad (\text{monotone Konvergenz}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_d(\mu_k(f_n))\end{aligned}$$

(iii) folgt, wenn (ii) auf  $f_1 - f_n$  angewandt wird



## Satz 4.4 (Prinzip von Cavalieri 1635)

$A \subset \mathbb{R}^{d+k}$  messbar mit  $\mu_{d+k}(A) < \infty$

$\implies$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  ist die Menge

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (x, y) \in A\}$$

messbar mit endlichem Maß  $\mu_k(A_x)$

Zudem: Funktion  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu_k(A_x)$  ist messbar und

$$\mu_{d+k}(A) = \int \mu_d(dx) \mu_k(A_x)$$

Analoges gilt nach Vertauschung der Rollen von  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathbb{R}^k$

## Bemerkung 4.5

Satz besagt: charakteristische Funktion  $\chi_A$  doppelintegrierbar und

$$\mu_{d+k}(\chi_A) = \mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \mu_k(\mu_d(\chi_A))$$

## Beweis:

**Behauptung 1:** Satz gilt für halboffene Quader  $A = Q$

Anders gesagt:  $\chi_Q$  doppeltintegrierbar für jeden halboffenen Quader

**Begründung:**

Zerlege  $Q = Q' \times Q''$  in halboffene Quader  $Q' \subset \mathbb{R}^d$  und  $Q'' \subset \mathbb{R}^k$

Dann  $\mu_{d+k}(Q) = \mu_d(Q')\mu_k(Q'')$  und  $\chi_Q(x, y) = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}(y)$

Zudem  $(\chi_Q)_x = \chi_{Q'}(x)\chi_{Q''}$

Daher ist  $(\chi_Q)_x$  integrierbar für alle  $x$  und  $\mu_k((\chi_Q)_x) = \chi_{Q'}(x)\mu_k(Q'')$

Diese Funktion in  $x$  ist  $\mu_d$ -integrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_Q)) = \mu_d(Q')\mu_k(Q'') = \mu_{d+k}(Q) = \mu_{d+k}(\chi_Q)$$

Gleiches gilt für die umgekehrte Reihenfolge



## Behauptung 2:

Satz gilt für endliche Vereinigung  $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_N$  von Quadern

**Begründung:** Ohne Einschränkung sind  $Q_n$  paarweise disjunkt

Dann  $\chi_A = \chi_{Q_1} + \dots + \chi_{Q_N}$

Behauptung 1:  $\chi_{Q_n}$  doppelintegrierbar

Nach Lemma 4.3 (i) auch  $\chi_A$  doppelintegrierbar mit Doppelintegral

$$\begin{aligned}\mu_d(\mu_k(\chi_A)) &= \sum_{i=1}^N \mu_d(\mu_k(\chi_{Q_n})) \\ &\stackrel{\text{Beh.1}}{=} \sum_{n=1}^N \mu_{d+k}(\chi_{Q_n}) \\ &= \mu_{d+k}(\chi_A)\end{aligned}$$

◇

**Behauptung 3:** Satz gilt für offene Mengen  $A$

Anders gesagt:  $\chi_A$  doppelintegrierbar für jede offene Menge  $A$

**Begründung:**  $A = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$  ist abzählbare Vereinigung von Quadern (jeder Punkt in  $A$  liegt in halboffenem Quader mit rationalen Ecken)

Setze  $A_N = \bigcup_{n=1}^N Q_n$ . Dann gilt  $\chi_{A_N} \uparrow \chi_A$

Zudem sind Doppelintegrale gleichmäßig beschränkt:

$$\mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) \stackrel{\text{Beh.2}}{=} \mu_{d+k}(A_N) \leq \mu_{d+k}(A) = C < \infty$$

Also nach Lemma 4.3(ii) auch  $\chi_A$  doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_A)) = \lim_N \mu_d(\mu_k(\chi_{A_N})) = \lim_N \mu_{d+k}(A_N) = \mu_{d+k}(A)$$

Analoges gilt für das andere Doppelintegral

◇

**Behauptung 4:** Satz gilt für jedes messbare  $A$  mit  $\mu_{d+k}(A) < \infty$

**Begründung:**

Nach äußerer Regularität:  $\forall n \exists U_n \supset A$  mit  $\mu_{d+k}(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$

Ohne Einschränkung  $U_n \supset U_{n+1}$ . Setze  $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$

Dann:  $\mu_{d+k}(U) = \mu_{d+k}(A)$  und  $U \supset A$

Da  $\chi_{U_n} \downarrow \chi_U$  und  $\chi_{U_n}$  nach Behauptung 3 doppelintegrierbar, folgt nach Lemma 4.3 (iii), dass  $\chi_U$  doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(\chi_U)) = \lim_n \mu_d(\mu_k(\chi_{U_n})) \stackrel{\text{Beh.3}}{=} \lim_n \mu_{d+k}(U_n) = \mu_{d+k}(U) = \mu_{d+k}(A)$$

und analog für  $\mu_k(\mu_d(\chi_U))$

Nun: disjunkte Zerlegung  $\chi_A = \chi_U - \chi_N$  mit  $N = U \setminus A$  Nullmenge

Wir zeigen:

$\chi_N$  doppelintegrierbar,  $\mu_d(\mu_k(\chi_N)) = 0$  sowie  $(\chi_N)_x = 0$  für fast alle  $x$

Dann  $(\chi_A)_x = (\chi_U)_x$  fast sicher und  $\mu_k(\chi_A)_x = \mu_k((\chi_U)_x)$  fast sicher

Kombiniert mit Lemma 4.3(i) folgt Behauptung 4

Es verbleibt: Aussagen über Nullmenge  $N$  nachweisen

Wie oben, konstruiere ( $G_\delta$ -Menge)  $W \supset N$  mit

$$\mu_{d+k}(W) = \mu_{d+k}(N) = 0$$

Ebenso wie oben:  $\chi_W$  doppelintegrierbar und  $\mu_d(\mu_k(\chi_W)) = 0$

Nach Satz 3.23 zudem:  $(\chi_W)_x = 0$  für fast alle  $x$

Da  $\chi_N \leq \chi_W$ , ist  $(\chi_N)_x = 0$  fast sicher

Somit  $\chi_N$  insbesondere doppelintegrierbar ◇

Damit ist der Beweis von Cavalieri beendet □



## Beispiel 4.6 (Kugelvolumina)

Gegeben  $d$ -dimensionale Kugel bez. der euklidischen Metrik:

$$B_r^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq r\}, \quad \|x\|^2 = \sum_{j=1}^d (x_j)^2$$

Behauptung:

$$\mu_d(B_r^d) = r^d \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}!}, & d \text{ gerade} \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}, & d \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis durch Induktion über  $d$

Zunächst Induktionsanfang:  $\mu_1(B_r^1) = 2r$  und  $\mu_2(B_r^2) = \pi r^2$  klar

Außerdem nach Prinzip von Cavalieri:

$$\mu_d(B_r^d) = \int_{-r}^r \mu_1(dx) \mu_{d-1}((B_r^d)_x)$$

wobei  $(B_r^d)_x = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|(x, y)\| < r\} = B_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{d-1}$

## Beispiel (Fortsetzung Kugelvolumina)

Durch Iteration zeigt dies:

$$\mu_d(B_r^d) = \beta_d r^d$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $\beta_d > 0$ , welche erfüllen:

$$\begin{aligned}\beta_d r^d &= \int_{-r}^r \mu_1(dx) \beta_{d-1} (r^2 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta r \cos(\theta) \beta_{d-1} r^{d-1} \cos(\theta)^{d-1} \\ &= r^d \beta_{d-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta)^d\end{aligned}$$

mit Substitution  $x = r \sin(\theta)$ . Also setze

$$I_d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta)^d = \frac{\beta_d}{\beta_{d-1}}$$

## Beispiel (Fortsetzung Kugelvolumina)

$$\begin{aligned} I_d &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta)^d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(\theta) (\cos \theta)^{d-1} \\ &= \sin(\theta) (\cos(\theta))^{d-1} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta)(d-1) \cos(\theta)^{d-2} (-\sin(\theta)) \\ &\stackrel{d \geq 1}{=} (d-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 - \cos^2(\theta)) \cos(\theta)^{d-2} \\ &= (d-1)(I_{d-2} - I_d) = \frac{d-1}{d} I_{d-2} \end{aligned}$$

Somit nach Multiplikation mit  $dI_{d-1}$ , Iteration und Evaluation:

$$dI_{d-1}I_d = (d-1)I_{d-2}I_{d-1} = \dots = 2I_1I_2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Wegen  $\beta_1 = 2$  und  $\beta_2 = \pi$  folgt somit Ergebnis iterativ aus

$$\beta_d = I_d \beta_{d-1} = I_d I_{d-1} \beta_{d-2} = \frac{2\pi}{d} \beta_{d-2}$$

## Satz 4.7 (Satz von Fubini-Tonelli)

$f : \mathbb{R}^{d+k} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar  $\implies f$  doppelintegrierbar und

$$\mu_{d+k}(f) = \mu_d(\mu_k(f)) = \mu_k(\mu_d(f))$$

**Beweis:** Für  $f = \chi_A$  klar nach Cavalieri

Treppenfunktion  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$ : Lemma 4.3(i) und Linearität

Jetzt  $f \geq 0$  integrierbar und Treppenfunktionen mit  $f_n \uparrow f$ . Dann:

$$\mu_k(\mu_d(f_n)) = \mu_d(\mu_k(f_n)) = \mu_{d+k}(f_n) \leq \mu_{d+k}(f) < \infty$$

Somit Lemma 4.3(ii) anwendbar, also  $f$  doppelintegrierbar und

$$\mu_d(\mu_k(f)) = \lim_n \mu_d(\mu_k(f_n)) \stackrel{\text{Treppenf}}{=} \lim_n \mu_{d+k}(f_n) \stackrel{\text{Beppo}}{=} \mu_{d+k}(f) \stackrel{\text{analog}}{=} \mu_k(\mu_d(f))$$

Falls  $f$  beliebig, zerlege  $f = f_+ - f_-$  für die separat Obiges gilt

Mit Lemma 4.3 (i) folgt der Satz dann auch für  $f$  □

## Beispiel 4.8

Sei  $D = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch:

$$f(x, y, z) = z \sin(x + y)$$

Dann

$$\begin{aligned}\mu_3(f\chi_D) &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^\pi dx z \sin(x + y) \\ &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy -z \cos(x + y) \Big|_0^\pi \\ &= \int_0^1 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy 2z \cos(y) \\ &= \int_0^1 dz 2z \sin(y) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^1 dz 4z = 2\end{aligned}$$

Umkehrung unter Zusatzvoraussetzung:

### Satz 4.9

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  doppelintegrierbar und  $f \geq 0 \implies f$  integrierbar

**Beweis:** Wähle positive Treppenfunktionen  $f_n \uparrow f$

Schränke  $f_n$  auf Kugel  $B_n$  mit Radius  $n$  um 0 ein

Dann ist  $g_n = f_n \chi_{B_n}$  integrierbar und  $g_n \uparrow f$

Nach Satz von Fubini ist  $g_n$  doppelintegrierbar und

$$\begin{aligned}\mu_{d+k}(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{d+k}(g_n) && \text{(monotone Konvergenz)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_d(\mu_k(g_n)) && \text{(Fubini)} \\ &= \mu_d(\mu_k(f)) && \text{(monotone nach Lemma 4.3)} \\ &< \infty\end{aligned}$$



## Beispiel 4.10 (Voraussetzung $f \geq 0$ in Satz 4.9 notwendig!)

∃ doppelintegrierbare Funktionen mit verschiedenen Doppelintegralen:

$$g_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y) \quad , \quad x, y \in [0, 1]$$

Summe konvergent, da Träger der Summanden disjunkt

Da für jedes  $y$  nur ein Summand und  $\mu_1(g_n) = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y) \\ &= \int_0^1 dy (1 - 1) g_n(y) = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y) = \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) = \int_0^1 dx g_1(x) = 1$$

## Satz 4.11 (Jacobi'sche Transformationsformel)

$U, U' \subset \mathbb{R}^d$  offen und  $\phi : U \rightarrow U' = \phi(U)$  ist  $C^1$ -Diffeomorphismus  
(d.h.  $\phi$  invertierbar und  $\phi, \phi^{-1}$  differenzierbar mit stetiger Ableitung)

Zudem:  $f : U' \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar

$\implies f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx') f(x') = \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det(\phi'(x))|$$

Hierbei heißt  $\det(\phi'(x))$  die Jacobi-Determinante

### Erinnerung:

$\phi'$  Linearisierung von  $\phi$

Somit  $\phi'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  invertierbare  $d \times d$  Matrix

Also nach Voraussetzung  $|\det(\phi'(x))| > 0$  stetig



## Beweis:

**Behauptung 1:** Es reicht zu zeigen, dass

$$\int_{\phi(U)} \mu(dx') f(x') \leq \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det(\phi'(x))| \quad (4.2)$$

**Begründung:** Für  $\phi^{-1} : U' \rightarrow U$  und  $g = (f \circ \phi) |\det(\phi')|$  folgt dann

$$\begin{aligned} \int_U \mu(dx) (f \circ \phi)(x) |\det(\phi'(x))| &= \int_{\phi^{-1}(U')} \mu(dx) g(x) \\ &\leq \int_{U'} \mu(dx') (g \circ \phi^{-1})(x') |\det((\phi^{-1})'(x'))| \\ &= \int_{U'} \mu(dx') (f \circ \phi \circ \phi^{-1})(x') |\det(\phi'(\phi^{-1}(x')))| |\det((\phi^{-1})'(x'))| \\ &= \int_{U'} \mu(dx') f(x') \end{aligned}$$

Letzteres wegen Kettenregel und  $\mathbf{1} = (\phi \circ \phi^{-1})' = (\phi' \circ \phi^{-1})(\phi^{-1})'$   $\diamond$

**Behauptung 2:** Es reicht, (4.2) für Indikatorfunktionen zu zeigen

**Begründung:** (inzwischen Standard)

Linearität des Integrals: (4.2) dann auch für Treppenfunktionen

Monotone Konvergenz: auch für positive integrierbare Funktionen

(da aus  $f_n \uparrow f$  auch  $(f_n \circ \phi) | \det(\phi') | \uparrow (f \circ \phi) | \det(\phi') |$  folgt)

Beliebige integrierbare Funktion zerlege in Positiv- und Negativteil ◇

**Noch zu zeigen:** für jedes messbare  $A \subset U$  mit  $\mu(A) < \infty$  gilt

$$\mu(\phi(A)) \leq \int_A \mu(dx) | \det(\phi'(x)) | \quad (4.3)$$

Falls  $\phi$  linear ist, d.h.  $\phi'(x) = \phi$  für alle  $x \in U$ ,

folgt (4.3) aus Satz 3.23, der sogar Gleichheit liefert

**Grundidee:** approximiere  $\phi$  lokal durch affine Abbildungen

**Behauptung 3:** Hinreichend (4.3) unter der zusätzlichen Annahme:

$\phi$  hat Erweiterung auf Kompaktum  $K \supset U$  als  $C^1$ -Diffeomorphismus

**Begründung:** Betrachte, für  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$U_k = \left\{ x \in U \mid \|x\| < k \text{ und } d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) > \frac{1}{k} \right\}$$

Dann:  $\bar{U}_k \subset U$  kompakt und  $\bigcup_k U_k = U$

Wenn also (4.3) für  $U_k$  mit  $A_k = A \cap U_k$  gilt, dann (monotone Konv.):

$$\mu(\phi(A)) = \lim_k \mu(\phi(A_k)) \leq \lim_k \int_{A_k} \mu(dx) |\det \phi'(x)| = \int_A \mu(dx) |\det \phi'(x)| \quad \diamond$$

**Also:**  $\phi'$  und  $(\phi^{-1})'$  gleichmäßig stetig und uniform beschränkt auf  $U$

$$M = \sup_{x \in U} \max \left\{ \|\phi'(x)\|, \|(\phi^{-1})^{-1}(\phi(x))\|, |\det(\phi'(x))| \right\} < \infty$$

**Behauptung 4:** (4.3) gilt für Quader  $A = Q$

**Beweis:** Wegen gleichmäßiger Stetigkeit von  $\phi$  auf  $\bar{Q}$ :

Zu  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  mit  $\|\phi'(x) - \phi'(y)\| \leq \varepsilon \quad \forall x, y \in Q$  mit  $d(x, y) < \delta$

Zerlege disjunkt  $Q = \bigcup_n Q_n$  in Quader mit Seitenlänge  $\leq \delta$

Sei  $q_n \in Q_n$  der Mittelpunkt

$\phi(Q_n)$  zwar kein Paralleliped, aber vergleichbar mit Paralleliped

$$P_n = \phi(q_n) + \phi'(q_n)(Q_n - q_n)$$

In der Tat, für  $x \in Q_n$

$$\begin{aligned} & \|\phi(x) - (\phi(q_n) + \phi'(q_n)(x - q_n))\| \\ &= \left\| \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \phi(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)(x - q_n) \right\| \\ &\leq \int_0^1 dt \|\phi'(q_n + t(x - q_n)) - \phi'(q_n)\| \|x - q_n\| \leq \varepsilon \delta \end{aligned}$$

Somit:  $\phi(Q_n)$  enthalten in Parallelepiped  $P'_n$  gegeben durch Streckung der Seiten von  $P_n$  um Faktor  $1 + \varepsilon$ . Also

$$\mu(\phi(Q_n)) \leq \mu(P'_n) \leq (1 + \varepsilon)^d \mu(P_n) = (1 + \varepsilon)^d |\det(\phi'(q_n))| \mu(Q_n)$$

Letzteres nach Satz 3.23

Zudem  $\phi(Q) = (\phi^{-1})^{-1}(Q)$  Borelmenge (da  $\phi^{-1}$  stetig)

Es gilt:

$$\mu(\phi(Q)) = \sum_n \mu(\phi(Q_n)) \leq (1 + \varepsilon)^d \sum_n |\det(\phi'(q_n))| \mu(Q_n)$$

Treppenfunktion  $\sum_n |\det(\phi'(q_n))| \chi_{Q_n}$  konvergieren gegen  $|\det(\phi')| \chi_Q$  für  $\delta \downarrow 0$ . Alles beschränkt durch  $M \chi_Q$

Somit nach Satz von Lebesgue

$$\mu(\phi(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^d \int_Q \mu(dx) |\det(\phi'(x))|$$

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt Behauptung

◇

**Behauptung 5:** (4.3) gilt für jede messbare Menge  $A$

**Beweis:**  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Quaderüberd. von  $A$  mit  $\mu^*(\bigcup_n Q_n \setminus A) < \varepsilon$

$\implies (\phi(Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$  Überdeckung von  $\phi(A)$  mit Borelmengen. Mit Beh. 4

$$\begin{aligned}\mu^*(\phi(A)) &\leq \sum_n \mu^*(\phi(Q_n)) \leq \sum_n \int_{Q_n} \mu(dx) |\det(\phi'(x))| \\ &= \int_{\bigcup_n Q_n} \mu(dx) |\det(\phi'(x))| = \varepsilon \cdot M + \int_A \mu(dx) |\det(\phi'(x))|\end{aligned}$$

d.h.

$$\mu^*(\phi(A)) \leq \int_A \mu(dx) |\det(\phi'(x))| \quad (4.4)$$

Nun zerlege  $A = B \overset{\circ}{\cup} N$  in Borelmenge  $B$  und Nullmenge  $N$

Dann zeigt (4.4), dass  $\phi(N)$  auch Nullmenge ist

$\phi(B)$  Borelmenge  $\implies \mu^*(\phi(A)) = \mu^*(\phi(B)) = \mu(\phi(B)) = \mu(\phi(A))$

Eingesetzen in (4.4) zeigt Behauptung ◇ □

## Beispiel 4.12 (Gauss-Integral)

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2} e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) e^{-|x|^2}$$

nach Fubini. Nun Polarkoordinaten

$$\phi(r, \psi) = (r \cos(\psi), r \sin(\psi)) \quad , \quad \phi'(r, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -r \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & r \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

wobei  $\phi : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  Diffeomorph.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}} \mu(dx) e^{-|x|^2} &= \int_{\mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)} \mu(dr, d\psi) e^{-r^2} |\det(\phi'(\psi, r))| \\ &= \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Somit ist Gauss'sche Integral berechnet:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

## Beispiel 4.13 (Kugelkoordinaten als zweites Standardbeispiel)

Kugelkoordinaten für rotationssymmetrische Integrale im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\phi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$$

wobei

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0 \right\}$$

und

$$\phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Dann

$$\phi'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und somit nach kurzer Rechnung:

$$\det(\phi'(r, \varphi, \theta)) = r^2 \cos(\theta) > 0$$



## Beispiel (Kugelkoordinaten Fortsetzung)

Also für Integral über Kugel  $B_R(0)$  mit Radius  $R$ :

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx) f(x) = \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta r^2 \cos(\theta) f(\phi(r, \varphi, \theta))$$

Insbesondere, wenn  $f$  rotationssymmetrisch ist und  $f \circ \phi(r, \varphi, \theta) = \tilde{f}(r)$ ,

$$\int_{B_R(0)} \mu_3(dx) f(x) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \tilde{f}(r)$$

Z.B. (vergleiche Beispiel 4.6):

$$\text{Vol}(B_R(0)) = \int_{B_R(0)} \mu_3(dx) = 4\pi \int_0^R dr r^2 = \frac{4\pi}{3} R^3$$

## Beispiel 4.14 (Matrixintegrale)

$\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  Menge reeller symmetrischer  $n \times n$  Matrizen

Als Menge mit  $\mathbb{R}^d$  identisch wobei  $d = \frac{n(n+1)}{2}$

Somit gibt es Lebesgue-Maß  $\mu_d$  auf  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$

Ein Matrixintegral einer integrierbaren Funktionen  $f : \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\int \mu_d(dX) f(X)$$

Zu gegebenen invertierbaren  $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$  betrachte

$$\phi : \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad , \quad \phi(X) = AXA^T$$

Abbildung  $\phi$  linear in  $X$  und invertierbar mit  $\phi^{-1}(X) = A^{-1}X(A^{-1})^T$

**Behauptung:** Für alle  $X \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  gilt  $\det(\phi'(X)) = \det(A)^{n+1}$

Also sehr hilfreiche Transformationsformel für  $\mathcal{U} \subset \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ :

$$\int_{A\mathcal{U}A^T} \mu_d(dX) f(X) = |\det(A)|^{n+1} \int_{\mathcal{U}} \mu_d(dX) f(AXA^T)$$

## Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

**Begründung:** Nach erweitertem Gauss-Algorithmus ist

$$A = E_1 \cdot \dots \cdot E_J,$$

wobei die  $E_j$  Matrizen der folgenden Gestalt sind (BraKet-Notation):

$$E = \mathbf{1} + |\ell\rangle\langle k| \quad , \quad \tilde{E} = \mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|$$

mit  $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \neq \ell$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \neq 0$ . Dann

$$\phi(X) = E_1 \cdot \dots \cdot E_J X E_J^T \cdot \dots \cdot E_1^T$$

Also nur Behauptung für  $E$  und  $\tilde{E}$  zu zeigen, denn dann

$$\det(\phi') = |\det(E_1)|^{n+1} \cdot \dots \cdot |\det(E_J)|^{n+1} = |\det(A)|^{n+1}$$

## Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Sei  $Y = EXE^T$  mit  $E$  wie oben und  $X = (x_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ . Dann

$$\begin{aligned} Y &= (\mathbf{1} + |\ell \times k|)X(\mathbf{1} + |k \times \ell|) \\ &= (x_{i,j} + \delta_{\ell,i}x_{k,j} + x_{i,k}\delta_{\ell,j} + \delta_{i,\ell}\delta_{\ell,j}x_{k,k})_{i,j=1,\dots,n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Schreibe  $X$  als Vektor mit den Einträgen auf und über Diagonale:

$$\vec{X} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, x_{3,3}, \dots, x_{n-1,n-1}, x_{n-1,n}, x_{n,n})^T \in \mathbb{R}^d$$

Somit Einträge in lexikographischer Ordnung. Analog definiere  $\vec{Y}$

Dann definiere "Superoperator"  $M \in \text{Mat}(d \times d, \mathbb{R})$  durch  $\vec{Y} = M\vec{X}$

Gemäß (4.5) ist  $M = \mathbf{1} + S$

**Fakt:**  $S$  obere (untere) Dreiecksmatrix für  $k > \ell$  (für  $k < \ell$ ),  
jeweils ohne Eintrag auf der Diagonalen

## Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

**Begründung:** Einträge von (4.5) für  $k > \ell$  und  $i \leq j$ :

- Term  $x_{i,k} \delta_{\ell,j}$ :

da  $k > \ell = j \geq i$  ist Eintrag  $x_{i,k}$  unterhalb von  $x_{i,j}$  im Vektor  $\vec{X}$

- Term  $\delta_{i,\ell} \delta_{\ell,j} x_{k,k}$ :

da  $k > \ell = i = j$  ist Eintrag  $x_{k,k}$  unterhalb von  $x_{i,j} = x_{i,i}$  in  $\vec{X}$

- Term  $\delta_{\ell,i} x_{k,j} = \delta_{\ell,i} x_{j,k}$ :

da  $k > \ell = i \leq j$  ist, falls  $k \leq j$ , der Eintrag  $x_{k,j}$  unterhalb  $x_{i,j}$  in  $\vec{X}$  (da  $k > i$ ), und falls  $k < j$  der Term  $x_{j,k}$  ebenfalls (offensichtlich für  $j > i$  und falls  $i = j$  ist  $k > j$ ) ◇

Aus Fakt folgt Behauptung für  $A = E$ :

$$\det(\phi') = \det(M) = 1 = \det E = (\det(E))^{n+1}$$

## Beispiel (Matrixintegrale Fortsetzung)

Nun zu  $\tilde{E}$  und  $\tilde{Y} = \tilde{E}X\tilde{E}^T$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= (\mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|)X(\mathbf{1} + (\lambda - 1)|k\rangle\langle k|) \\ &= \left( x_{i,j}\delta_{i\neq k}\delta_{j\neq k} + \lambda x_{i,j}(\delta_{i\neq k}\delta_{j,k} + \delta_{i,k}\delta_{j\neq k}) + \lambda^2 x_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k} \right)_{i,j=1,\dots,n}\end{aligned}$$

Definiere  $\tilde{M}$  wieder durch  $\vec{Y} = \tilde{M}\vec{X}$

$\tilde{M}$  diagonal mit einem Eintrag  $\lambda^2$  und  $(n - 1)$  Einträgen  $\lambda$

Somit Behauptung für  $\tilde{E}$ :

$$\det(\phi') = \det(M) = \lambda^2 \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1} = \det(\tilde{E})^{n+1}$$

Zusammen ist also Jacobi-Determinante für alle  $A$  berechnet

d.h. Behauptung  $\det(\phi'(X)) = \det(A)^{n+1}$  für  $\phi(X) = AXA^T$  ist überprüft

## 5 Banach- und Hilberträume von Funktionen

**Erinnerung:** Banachraum ist vollständiger normierter Vektorraum

In Hilbertraum stammt Norm von Skalarprodukt  $\|v\| = \langle v|v \rangle^{\frac{1}{2}}$

Hier  $L^p$ -Räume:  $L^p(\Omega, \mu)$  wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  messbar und  $\mu$  Lebesgue, jedoch alles identisch für allgemeinen Maßraum  $(\Omega, \mu)$

Für messbares  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , setze für  $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} \mu(d\omega) |f(\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &= \mu\text{-ess sup } |f(\omega)| \\ &= \inf_{N \subset \Omega, \mu(N)=0} \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)| \end{aligned}$$

Jetzt definiere Äquivalenzrelation (überprüfe Eigenschaften!):

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff f = g \quad \mu\text{-fast sicher} \\ &\iff \exists N \subset \Omega, \mu(N) = 0 : f(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N \end{aligned}$$

Dann  $\|f\|_p = \|g\|_p$ . Letztendlich

$$L^p(\Omega, \mu) = \{[f]_{\sim} \mid \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

### Satz 5.1

Seien  $p, q, r \geq 1$ , sodass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

- (i) (Hölder Ungleichung)  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- (ii) (Minkowski Ungleichung)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
- (iii) (Riesz-Fischer)  $(L^p(\Omega, \mu), \|\cdot\|_p)$  Banachraum, d.h. vollständig



**Beweis:** (i) Wir betrachten nur Fall  $r = 1$  (Verallgemeinerung Übung)

Für  $p = \infty$  und  $q = 1$  ist Ungleichung Standard-Integralabschätzung

Falls  $\|f\|_p = 0$  oder  $\|g\|_q = 0$  folgt  $f = 0$  bzw.  $g = 0$   $\mu$ -fast sicher

$\implies f \cdot g = 0$   $\mu$ -fast sicher (wobei " $0 \cdot \infty := 0$ ")  $\implies \mu(|fg|) = 0$

Also nun  $\|f\|_p > 0$  und  $\|g\|_q > 0$  mit  $p, q > 1$

Wegen Konvexität von  $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$  gilt für  $a, b > 0$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}p \log(a) + \frac{1}{q}q \log(b)\right) \leq \frac{e^{p \log(a)}}{p} + \frac{e^{q \log(b)}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Ungleichung auch für  $a = 0$  oder  $b = 0$ . Für  $a = \frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}$  und  $b = \frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p} \frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(\omega)|^p}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(\omega)|^q}{(\|g\|_q)^q}$$

Integration bezüglich  $\mu$  gibt

$$\frac{\mu(|fg|)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(ii) Zunächst ist  $f + g \in L^p$ :

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

somit

$$\mu(|f + g|^p) \leq 2^p \mu(|f|^p + |g|^p) = 2^p (\mu(|f|^p) + \mu(|g|^p)) < \infty$$

Weiter für  $p > 1$  (Fall  $p = 1$  trivial) unter Verwendung von  $q = \frac{p}{p-1}$ :

$$\begin{aligned} \mu(|f + g|^p) &\leq \mu(|f| \cdot |f + g|^{p-1}) + \mu(|g| \cdot |f + g|^{p-1}) \\ &\leq \|f\|_p \mu(|f + g|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \mu(|f + g|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \mu(|f + g|^p)^{1 - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Hölder Ungleichung verwandt wurde

Hieraus folgt Behauptung

(iii) Für  $f, g \in L^p$  ist auch  $f + \lambda g \in L^p$ , da

$$\|f + \lambda g\|_p \leq \|f\|_p + |\lambda| \|g\|_p$$

Außerdem ist  $\|\cdot\|_p$  eine Norm, denn  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ ,

Dreiecksungleichung ist genau Minkowski-Ungleichung und zudem

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast sicher} \iff [f]_{\sim} = [0]_{\sim} = \vec{0}$$

Nun zur Vollständigkeit: Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $L^p$

d.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ , sodass

$$\|f_n - f_k\|_p < \epsilon \quad , \quad \forall n, k \geq N$$

Wähle Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass gilt

$$\sum_{k \geq 1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty$$

Es folgt:

$$\left\| \sum_{k \geq 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p = \mu \left( \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x \mapsto x^p \text{ stetig})$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \mu \left( \left( \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Beppo})$$

$$\leq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty \quad (\text{Minkowski})$$

Somit ist  $F(\omega) = \sum_{k \geq 1} |f_{n_{k+1}}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| < \infty$   $\mu$ -fast sicher in  $\omega$

Also existiert

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

$\mu$ -fast sicher. Es gilt

$$\|f\|_p \leq \| |f_{n_1}| + F \|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|F\|_p < \infty$$

also  $f \in L^p$ . Noch zu zeigen  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$

Tatsächlich:

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p^p &= \int \mu(|f_n - f|^p) \\ &= \int \mu\left(\liminf_k |f_n - f_{n_k}|^p\right) \\ &\leq \liminf_k \int \mu(|f_n - f_{n_k}|^p) \quad (\text{Fatou}) \\ &\leq \sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_p^p \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Letzteres weil Cauchy-Folge vorliegt



### Bemerkung 5.2 (Singularitäten)

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  kompakt, dann  $L^p(\Omega, \mu) \subset L^q(\Omega, \mu)$  für  $p \geq q$   
(weil lokale Singularitäten "integrierbarer" werden. Beweis?)

Wenn  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , weder  $L^p(\Omega, \mu) \subset L^q(\Omega, \mu)$  noch  $L^p(\Omega, \mu) \supset L^q(\Omega, \mu)$

# Weitere Ungleichungen

## Satz 5.3 (Lyapunov Ungleichung)

Sei  $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ . Für  $0 \leq \gamma \leq 1$  setzen wir

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{p_1}$$

Dann gilt:

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\gamma} \|f\|_{L^{p_1}}^{\gamma} \quad \forall f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$$

Beweis schwierig. Verallgemeinerung: Riesz-Thorin Interpolation

## Satz 5.4 (Jensen Ungleichung)

Sei  $0 \leq \rho \in L^1(\Omega, \mu)$  mit  $\mu(\rho) = 1$ , d.h.  $\rho$  Wahrscheinlichkeitsdichte

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex:  $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$  für  $t \in [0, 1]$

$$\varphi\left(\int \mu(dx) \rho(x) g(x)\right) \leq \int \mu(dx) \rho(x) \varphi(g(x)) \quad g \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mu)$$

**Beweis:** Sei  $x_0 = \int \mu(dx) \rho(x) g(x)$

Wähle Tangente an konvexes  $\varphi$  bei  $x_0$ :

$$\varphi(x_0) = ax_0 + b \quad , \quad \varphi(x) \geq ax + b$$

für alle  $x$ , insbesondere also:

$$\varphi(g(x)) \geq ag(x) + b$$

Multiplikation mit positiven  $\rho$  und Integration liefert:

$$\begin{aligned} \int \mu(dx) \rho(x) \varphi(g(x)) &\geq \int \mu(dx) \rho(x) (ag(x) + b) \\ &= ax_0 + b \\ &= \varphi(x_0) \\ &= \varphi\left(\int \mu(dx) \rho(x) g(x)\right) \end{aligned} \quad \square$$

### Bemerkung 5.5

Nur Konvexität auf Bild  $g(\mathbb{R})$  benötigt

## Satz 5.6 (Dichte der stetigen Funktion in $L^p$ -Räumen)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und  $p \in [1, \infty)$  (beachte: nicht  $p = \infty$ )

Dann  $C_0(\Omega) = \{f \text{ stetig und im Unendlichen } 0\}$  dicht in  $L^p(\Omega, \mu)$

d.h.  $\forall f \in L^p(\Omega, \mu)$  existiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C_0(\Omega)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Wichtige Folgerung:

### Korollar 5.7

Für  $p \in [1, \infty)$  ist  $L^p(\Omega, \mu)$  separabel ( $\exists$  abzählbare dichte Teilmenge)

**Begründung** für Spezialfall  $\Omega \subset \mathbb{R}$  Intervall basierend auf:

Weierstraß: stetige Funktion durch Polynom approximierbar bez.  $\|\cdot\|_\infty$

Es reichen Polynome mit rationalen Koeffizienten. Dann Satz 5.6  $\square$



**Beweisskizze** (Satz 5.6): Erst  $f = \chi_A$  mit  $A$  beschränkte Borelmenge  
Zu  $\delta > 0 \exists$  nach Regularität (Satz 2.18) kompaktes  $K$  & offenes  $U$  mit

$$K \subset A \subset U \quad , \quad \mu(U \setminus K) < \delta$$

Fakt (ohne Beweis):  $\exists$  stetige sogenannte Urysohn-Funktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) \in [0, 1] \quad , \quad \varphi|_K = 1 \quad , \quad \varphi|_{U^c} = 0$$

Dann  $\|\varphi - f\|_p \leq \mu(U \setminus K)^{\frac{1}{p}} = \delta^{\frac{1}{p}}$  beliebig klein

Für beliebige Borelmenge  $A$  setze  $A_n = A \cap B_n(0)$

Nach Beppo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{A_n} - \chi_A\|_p = 0$  also auch  $\chi_A$  approximierbar

Für Treppenfunktion  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{A_n}$  wähle Urysohn Funktionen  $\varphi_n$

Verwende stetige Funktion  $\varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$ . Mit Minkowski

$$\|f - \varphi\|_p \leq \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \|\chi_{A_n} - \varphi_n\|_p \leq \left( \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \right) \delta^{\frac{1}{p}}$$

Wieder wird dies beliebig klein

Zuletzt approximiere beliebiges  $f$  durch Treppenfunktion □

# Hilbert-Raum quadratintegrierbarer Funktionen

Der Satz von Riesz-Fischer zeigt:

## Satz 5.8

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  messbar

Dann ist  $L^2(\Omega, \mu)$  ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} \mu(dx) \overline{f(x)} g(x) \quad , \quad f, g \in L^2(\Omega, \mu)$$

Somit Hilbert-Raum Techniken aus Math. Physiker II verwendbar bzw. verallgemeinerbar. Z.B. (ohne Beweise):

Orthogonale Komplemente von Unterraum  $V \subset L^2$ :

$$V^{\perp} = \{f \in L^2 \mid \langle f|g \rangle = 0 \quad \forall g \in V\}$$

Fakt:  $V^{\perp}$  ist abgeschlossen (Cauchy-Folgen konv. in  $V^{\perp}$ )

Bijektion: Projektionen  $P = P^2 = P^* \iff \exists$  abgeschlossene UR  $V$ :

$$V = \text{Ran}(P)$$

## Unendlich dimensionale Version des Riesz'schen Darstellungssatz:

### Satz 5.9 (Riesz Lemma, vgl. Math. Phys II)

Sei  $\mathcal{L} : L^2 \rightarrow \mathbb{C}$  stetiges lineares Funktional  $\implies \exists g \in L^2$  mit

$$\mathcal{L}(f) = \langle g|f \rangle \quad \forall f \in L^2$$

*Insbesondere ist Skalarprodukt stetig in beiden Argumenten*

Weiter: Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen (ONB)

Wegen Korollar 5.7 ist ONB immer abzählbar  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann  $\forall f \in L^2$ :

$$f = \sum_{n \geq 1} \langle b_n|f \rangle b_n = \sum_{n \geq 1} |b_n\rangle \langle b_n|f \rangle = \left( \sum_{n \geq 1} |b_n\rangle \langle b_n| \right) |f \rangle$$

genauer:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle b_n|f \rangle b_n \right\| = 0$$

## 6 Fourier-Reihen und Fouriertransformation

Sei  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong [-\pi, \pi)$ . Für Funktion  $f \in L^1\left(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$  sind

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta) = \langle e^{in\theta} | f \rangle_{L^2}$$

die Fourierkoeffizienten (Fourier 1811)

Zentrale Frage: Für welche Funktionen  $f$  konvergiert die Fourier-Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$$

gegen  $f$  und in welchem Sinne liegt Konvergenz vor

Klassisches hinreichendes Kriterium:

### Satz 6.1 (Dirichlet 1828)

$f \in C^1(\mathbb{S}^1) \implies$  *Fourierreihe konvergiert uniform,*  
*d.h. Partialsummen  $S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{in\theta}$  erfüllen*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - f\|_{\infty} = 0$$

**Beweis:** Zunächst Berechnung der Partialsummen:

$$\begin{aligned}S_N(\theta) &= \sum_{n=-N}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} \right) e^{in\theta} \\&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f(\varphi) \sum_{n=-N}^N e^{in(\theta-\varphi)} \\&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f(\theta + \varphi) \sum_{n=-N}^N e^{-in\varphi}\end{aligned}$$

Also ist es sinnvoll für  $\varphi \neq 0$  den Dirichletkern einzuführen:

$$\begin{aligned}D_N(\varphi) &= \sum_{n=-N}^N e^{-in\varphi} = e^{-iN\varphi} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\varphi} \\&= e^{-iN\varphi} \frac{e^{i(2N+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} \\&= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\end{aligned}$$

Er besitzt eine stetige Fortsetzung bei  $\varphi = 0$ :

$$D_N(0) = 2N + 1$$

Außerdem ist  $D_N(\varphi)$  gerade und erfüllt für alle  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} D_N(\varphi) = 1$$

Für  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$  spalten wir nun wie folgt auf:

$$\begin{aligned} |S_N(\theta) - f(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (f(\theta + \varphi) - f(\theta)) D_N(\varphi) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{-\delta} d\varphi \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} d\varphi \Delta(\varphi) \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} d\varphi \Delta(\varphi) \right| \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (f(\theta + \varphi) - f(\theta)) D_N(\varphi)$$

Für den mittleren Teil gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} d\varphi \Delta(\varphi) \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{|f(\theta + \varphi) - f(\theta)|}{\left| \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|} \cdot \left| \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\|f'\|_{\infty} \cdot |\varphi|}{\sin\left(\frac{|\varphi|}{2}\right)} \cdot 1 \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\|f'\|_{\infty} |\varphi|}{\frac{|\varphi|}{2} \cdot \frac{2}{\pi}} \\ &= \delta \|f'\|_{\infty} \end{aligned}$$

wegen Ungleichung

$$\sin\left(\frac{|\varphi|}{2}\right) \geq \frac{|\varphi|}{2} \frac{2}{\pi}$$

Für rechten Term partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{\pi} d\varphi \Delta(\varphi) &= \int_{\delta}^{\pi} d\varphi \underbrace{\frac{f(\theta + \varphi) - f(\theta)}{2\pi \sin(\frac{\varphi}{2})}}_{F(\varphi)} \cdot \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \\ &= \left[ F(\varphi) \frac{-1}{N + \frac{1}{2}} \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \right]_{\delta}^{\pi} \\ &\quad + \int_{\delta}^{\pi} d\varphi F'(\varphi) \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)\end{aligned}$$

Nun gilt für  $\delta$ -abhängige Konstante  $C_{\delta}$  (welche unabhängig von  $N$  ist)

$$\sup_{\delta \leq \varphi \leq \pi} \max\{|F(\varphi)|, |F'(\varphi)|\} \leq C_{\delta} < \infty$$

Also:

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} d\varphi \Delta(\varphi) \right| \leq \frac{(2 + \pi)C_{\delta}}{N + \frac{1}{2}}$$

Erstes Integral über  $[-\pi, -\delta]$  kann analog abgeschätzt werden



Zusammen:

$$|S_N(\theta) - f(\theta)| \leq \|f'\| \delta + 2 \frac{2 + \pi}{N + \frac{1}{2}} C_\delta \leq \epsilon$$

Letzteres für  $\delta = \frac{\epsilon}{2\|f'\|}$  und  $N = N(\epsilon)$  ausreichend groß □

### Bemerkung 6.2 (Fejer 1900)

Wenn  $f$  nur stetig, dann konvergieren Cesaro-Mittel  $C_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n$  uniform gegen  $f$

**Beweisidee:** Modifiziere Obiges unter Verwendung des Fejer-Kerns:

$$F_N(\varphi) = \frac{\sin^2\left((N+1)\frac{\varphi}{2}\right)}{(N+1)\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

□

### Bemerkung 6.3 (Offene Frage:)

Charakterisierung von Funktionen mit konvergenter Fourier-Reihe  
in  $\|\cdot\|_\infty$  (hinreichendes und notwendiges Kriterium)

Aber mit Konvergenzbegriff bez.  $\|\cdot\|_2$  im Hilbert-Raum  $L^2(\mathbb{S}^1)$  einfach

Offensichtlich  $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  orthonormale Familie:  $\langle e^{in\theta} | e^{im\theta} \rangle_{L^2} = \delta_{n,m}$

Wenn ONB vorliegt, dann gilt für jede Funktion  $f \in L^2 = L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ :

$$f(\theta) = \sum_n f_n e^{in\theta} \quad \text{Konvergenz Partialsummen in } L^2$$

### Satz 6.4

$(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  ist ONB von  $L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$

**Beweis:** Orthogonalität folgt aus

$$\langle e^{in\theta} | e^{im\theta} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(m-n)\theta} = \delta_{n,m}$$

**weiter:**  $C^1(\mathbb{S}^1)$  dicht in  $(L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}), \|\cdot\|_2)$  wegen Satz 5.6

oder: Treppenfktn dicht in  $L^2$  und Glättung mit  $\|\cdot\|_2$ -Fehler möglich

Jetzt:  $g \in (\text{span}\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\})^\perp$ , d.h.  $\langle g | e^{in\theta} \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ . Zeige  $g = 0$

Für  $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$  ist Fourier-Reihe nach Satz 6.1 uniform konvergent

$\implies$  Konvergenz auch bez.  $\|\cdot\|_2$

Also folgt aus Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\langle f | g \rangle = \langle \lim_N \sum_{n=-N}^N f_n e^{in\theta} | g \rangle = \lim_N \sum_{n=-N}^N f_n \langle e^{in\theta} | g \rangle = 0$$

Für beliebiges  $f \in L^2$ , sei nun  $\tilde{f} \in C^1$ , sodass  $\|f - \tilde{f}\|_{L^2} \leq \epsilon$ . Dann

$$\langle f | g \rangle = \langle f - \tilde{f} | g \rangle + \langle \tilde{f} | g \rangle \leq \|f - \tilde{f}\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \leq \epsilon \|g\|_{L^2}$$

Somit gilt  $\langle f | g \rangle = 0$  für alle  $f \in L^2$ . Also  $g = 0$  □

### Bemerkung 6.5 (Satz von Carleson 1966)

Für jedes  $f \in L^2$  konvergiert die Fourier-Reihe fast sicher

## Satz 6.6 (Abfallen der Fourier-Koeffizienten für diffbare Fktn)

$$f \in C^k(\mathbb{S}^1) \cong \{f \in C^k(\mathbb{R}) \mid f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\}$$

Dann existiert Konstante  $C = C_f$ , so dass  $f_n = \langle e^{in\theta} \mid f \rangle$  erfüllt

$$|f_n| \leq \frac{C}{n^k}$$

**Beweis:** Dies folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} 2\pi f_n &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{i}{n} (\partial e^{-in\theta}) f(\theta) \\ &= \frac{i}{n} e^{-in\theta} f(\theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} \partial f(\theta) \\ &= \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} \partial f(\theta) = \dots = \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} (\partial^k f)(\theta) \end{aligned}$$

Nun schlieÙe mit Standardintegralabschätzung □

## Satz 6.7 (Parseval Gleichung)

Diskrete Fouriertransformation ist eine unitäre lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

definiert durch

$$\mathcal{F}(f) = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad , \quad f_n = \langle e^{in\theta} | f \rangle_{L^2}$$

**Beweis:**  $f, g \in L^2$  nach ONB  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  entwickeln

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n b_n \quad g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n b_n$$

Also (Parseval Gleichung):

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \langle f_m b_m | g_n b_n \rangle = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \bar{f}_m g_n \langle b_m | b_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}_n g_n = \langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle_{\ell^2}$$

□

## Basiswechsel zu reeller Basis

Von  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  durch Rotation um  $\frac{\pi}{4}$  zu ONB  $(c_0, c_n, s_n)_{n > 0}$  mit

$$c_0 = b_0 \quad , \quad c_n = \frac{b_n + b_{-n}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos(n\theta) \quad , \quad s_n = \frac{b_n - b_{-n}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin(n\theta)$$

so dass  $\|c_n\|^2 = \|s_n\|^2 = 1$ . Dann Fourier-Reihe von  $f \in L^2$ :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f_0 + \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} (f_{c,n} \cos(n\theta) + f_{s,n} \sin(n\theta)) \\ &= \sum_{n \geq 0} f_{c,n} c_n + \sum_{n \geq 1} f_{s,n} s_n \end{aligned}$$

mit  $f_{c,n} = \langle c_n | f \rangle$  und  $f_{s,n} = \langle s_n | f \rangle$

Parseval:  $\|f\|^2 = |f_{c,0}|^2 + \sum_{n \geq 1} (|f_{c,n}|^2 + |f_{s,n}|^2)$

### Vorteile:

- für  $f$  reell, sind Fourier-Koeffizienten  $f_{c,n}$  und  $f_{s,n}$  reell
- $c_n$  gerade und  $s_n$  ungerade  $\implies f_{s,n} = 0$  wenn  $f$  gerade und ....

## Satz 6.8

Sei  $f$  integrierbar und folgende Grenzwerte existieren:

$$f(\theta-) = \lim_{\delta \downarrow 0} f(\theta - \delta) \quad , \quad f(\theta+) = \lim_{\delta \downarrow 0} f(\theta + \delta)$$

Außerdem sei Funktion

$$g(\delta) = \frac{(f(\theta - \delta) - f(\theta-)) + (f(\theta + \delta) - f(\theta+))}{\delta}$$

auf Intervall  $[0, \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$  integrierbar (Dini-Bedingung)

Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  in  $\theta$  und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n e^{in\theta} = \frac{f(\theta-) + f(\theta+)}{2}$$

**Beweis:** Wir verwenden wieder den Dirichletkern  $D_N(\theta) = \frac{\sin((2N+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

mit  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{in\theta} = 1$  und  $D_N(\theta) = D_N(-\theta)$

$$\begin{aligned}
S_N(f)(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} D_N(\theta - \delta) f(\delta) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} D_N(\delta) f(\theta + \delta) && (f \text{ und } D_N \text{ periodisch}) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} D_N(\delta) (f(\theta + \delta) + f(\theta - \delta)) && (D_N \text{ gerade})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
S_N(f)(\theta) &- \frac{f(\theta-) + f(\theta+)}{2} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} D_N(\delta) (f(\theta + \delta) + f(\theta - \delta) - f(\theta+) - f(\theta-)) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{d\delta}{2\pi} \underbrace{\sin\left((2N+1)\frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}}_{\text{stetige Funktion } s \text{ auf } [0, \varepsilon]} g(\delta)
\end{aligned}$$



Nun spalte Integral auf:

$$S_N(f)(\theta) - \frac{f(\theta-) + f(\theta+)}{2} = \int_0^\varepsilon \frac{d\delta}{2\pi} s(\delta) g(\delta) + \int_\varepsilon^\pi \frac{d\delta}{2\pi} \sin\left((2N+1)\frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta g(\delta)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Wegen Dini-Bedingung ist Integral  $\int_0^\varepsilon$  kleiner als  $C\varepsilon$

Zudem ist folgende Funktion integrierbar:

$$\delta \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\delta g(\delta)}{\sin \frac{\delta}{2}} \chi(\delta \geq \varepsilon)$$

Somit konvergieren seine Fourier-Koeffizienten gegen 0 (Parseval)

Also  $\exists N_0$ , so dass Beitrag  $\int_\varepsilon^\pi < \varepsilon$

Also insgesamt  $\leq (C + 1)\varepsilon$  für  $N \geq N_0$



## Beispiel 6.9

$f(\theta) = \theta \chi_{[-\pi, \pi)}(\theta)$  nicht stetig, aber in  $L^2$

Dann  $f_0 = 0$  und für  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} f_n &= \langle e^{in\theta} | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} \theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{-in} (\partial e^{-in\theta}) \theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-in\theta} \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} = \frac{(-1)^n}{-in} + 0 \end{aligned}$$

Somit nach dem Satz von Dini:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^n}{-in} e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta) = \begin{cases} \theta & , \theta \neq -\pi \\ \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 & , \theta = -\pi \end{cases}$$

Insbesondere, für  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

## Beispiel 6.10 (Gibbs-Phänomen)

$$\text{Sei } f(\theta) = \text{sgn}(\theta) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & , \quad -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist ungerade, also  $f_{c,n} = 0$ . Zudem

$$\begin{aligned} f_{s,n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} \sin(n\theta) \text{sgn}(\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} d\theta \sin(n\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{-1}{n} \cos(n\theta) \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{n\pi} & , \quad n \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Also im  $L^2$ -Sinne:

$$\text{sgn}(\theta) = \sum_{m \geq 0} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\theta)$$

## Beispiel (Fortsetzung)

Zudem

$$S_{2N}(f)(\theta) = \sum_{m=0}^N \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m+1} \sin((2m+1)\theta)$$

und  $S_N(f)(0) = 0$  (was im Limes  $N \rightarrow \infty$  mit Satz 6.8 übereinstimmt)  
Punktweise Konvergenz, sicher keine uniforme Konvergenz. Zudem

$$\begin{aligned} S_{2N}(f)\left(\frac{\pi}{2N+1}\right) &= \frac{4}{2\pi} \sum_{m=0}^N \frac{2\pi}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2N+1}\right)}{\frac{(2m+1)\pi}{2N+1}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta)}{\theta} \approx \frac{2}{\pi} 1.85 > 1 \end{aligned}$$

Somit für alle  $N \geq 1$ :

$$\sup_{\theta > 0} (S_{2N}(f)(\theta) - f(\theta)) \geq \frac{1}{\pi} 1.85 - 1 > 0.4 > 0$$

Dies ist ein typisches Beispiel für das so genannte Gibbs-Phänomen

# Vorbereitungen für Fouriertransformation

Zunächst Standardnotationen: für  $x, p \in \mathbb{R}^d$

$$x \cdot p = \sum_{j=1}^d x_j p_j \quad , \quad x^2 = x \cdot x \quad , \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Ableitungen und Polynome zu Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \quad , \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

## Definition 6.11

Testfunktionen und Schwartzfunktionen auf offenem  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in \Omega} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$$

wobei  $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{\varphi \neq 0\}}$  Träger von  $\varphi$

Weitere Notation:  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  und  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Offensichtlich gilt  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$

### Beispiel 6.12

$\varphi(x) = c e^{-\frac{1}{1-x^2}} \chi_{\{|x| \leq 1\}}(x)$  ist in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , aber nicht analytisch bei  $\pm 1$

Konstante  $c$  so dass  $\int \mu(dx) \varphi(x) = 1$

Die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  ist in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , aber nicht in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

### Definition 6.13

Lokalkonvexe Topologien auf  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{S}$  gegeben durch Halbnormen

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_x (1 + |x|^m) |\partial^\alpha f(x)|, \quad m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d$$

(positive homogen, Dreiecksungleichung, aber keine Nichtentartung)

Dann:  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{D}$  oder  $\mathcal{S} \iff \|f - f_n\|_{m,\alpha} \rightarrow 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d$

## Satz 6.14

- (i)  $\mathcal{D}(\Omega)$  ist dicht in  $L^p(\Omega, dx)$  für  $1 \leq p < \infty$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen
- (ii)  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d, dx)$  dicht

Für Beweis benötigt ist Glättung durch Konvolution:

$$(\varphi * f)(x) = \int \mu(dy) \varphi(x - y) f(y)$$

was Sinn macht z.B. wenn  $\varphi \in L^1$  oder  $f \in L^1$

Wahl von  $\varphi$ : glatt, positiv, kleiner Träger, Integral gleich 1

Dann ist auch die "Verschmierung"  $\varphi * f$  glatt

Hilfsmittel:

## Satz 6.15 (Young'sche Ungleichung, Spezialfall)

$$\|\varphi * f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p \quad , \quad p \geq 1$$

**Beweis** der Young'schen Ungleichung: sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |(\varphi * f)(x)| &\leq \int \mu(dy) |\varphi(x-y)| |f(y)| \\ &= \int \mu(dy) |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{q}} (|f(y)|^p |\varphi(x-y)|)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int \mu(dy) |\varphi(x-y)| \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int \mu(dy) |f(y)|^p |\varphi(x-y)| \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

nach Hölder Ungleichung. Also mit Translationsinvarianz und Fubini

$$\begin{aligned} \|\varphi * f\|_p^p &\leq \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dx) \int \mu(dy) |f(y)|^p |\varphi(x-y)| \\ &= \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}} \int \mu(dy) \|\varphi\|_1 |f(y)|^p \\ &= \|\varphi\|_1^{1+\frac{p}{q}} \|f\|_p^p = \left( \|\varphi\|_1 \|f\|_p \right)^p \end{aligned}$$

was die Ungleichung beweist





**Beweis:** (i)  $\implies$  (ii) weil  $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$  nach Hölder Ungleichung

Für (i) sei  $\varphi(x) = c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \chi_{\{|x| \leq 1\}}$  wie in Beispiel 6.12

Setze  $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  was Integral 1 und Träger  $[-\epsilon, \epsilon]$  hat

Zu  $n \in \mathbb{N}$  betrachte nun kompakte Menge

$$K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n, d(x, \partial\Omega) \geq \frac{2}{n}\}$$

Für jedes  $f \in L^p(\Omega)$  definieren wir jetzt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (\varphi_{\frac{1}{n}} * (f \chi_{K_n}))(x) \\ &= \int dy \varphi_{\frac{1}{n}}(x-y) f(y) \chi_{K_n}(y) \\ &= \int_{K_n} dy \varphi_{\frac{1}{n}}(x-y) f(y) \end{aligned}$$

Da Integral mit  $\partial_x$  vertauscht, ist  $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$  Glättung von  $f$

**Behauptung:**  $\lim_n f_n = f$  in  $L^p$ , woraus dann (i) folgt

**Begründung:** Mit Young'sche Ungleichung und  $\int dy \varphi_{\frac{1}{n}}(y) = 1$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &\leq \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f(\chi_{K_n} - 1)\|_p + \|\varphi_{\frac{1}{n}} * f - f\|_p \\ &\leq \|\varphi_{\frac{1}{n}}\|_1 \|f(\chi_{K_n} - 1)\|_p + \left( \int dx \left| \int dy \varphi_{\frac{1}{n}}(y) (f(x-y) - f(x)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Nun impliziert Jensen-Ungleichung für konvexe Funktion  $x \mapsto x^p$ :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &\leq 1 \cdot \|f(1 - \chi_{K_n})\|_p + \left( \int dx \int dy \varphi_{\frac{1}{n}}(y) |f(x-y) - f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \epsilon + \left( \int dy \varphi_{\frac{1}{n}}(y) \|S_y f - f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

wobei  $n \geq N(\epsilon)$  ausreichend groß und  $S_y f(x) = f(x+y)$  Translation

Der Satz folgt nun aus dem folgendem Fakt □

## Satz 6.16

Die Abbildung  $y \in \mathbb{R}^d \mapsto S_y f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  ist stetig für  $1 \leq p < \infty$

**Beweis:** Zu  $f \in L^p$  und  $\epsilon > 0$  wähle (Satz 5.6)  $g \in C_K(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\|f - g\|_p \leq \epsilon$$

Da  $g$  gleichmäßig stetig auf  $\text{supp}(g) \subset [-c, c]^d$ ,  $\exists \delta > 0$  mit:

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{(2(c + \delta))^{d/p}}, \quad |x - y| \leq \delta$$

Dann folgt für  $\delta' < \delta$

$$\|S_{\delta'} g - g\|_p^p \leq \int_{[-c-\delta, c+\delta]^d} dx |g(x + \delta') - g(x)|^p \leq \epsilon^p$$

Also, weiterhin für  $\delta' < \delta$ ,

$$\|S_{\delta'} f - f\|_p \leq \|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p + \|S_{\delta'} g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 3\epsilon$$

wegen  $\|S_{\delta'} f - S_{\delta'} g\|_p = \|f - g\|_p$



## Definition 6.17

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ist die Fourier-Transformation definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ip \cdot x} f(x)$$

Wichtigste Eigenschaft:  $\mathcal{F}$  ist Bijektion auf  $\mathcal{S}$  (siehe Satz 6.19 unten)

Offensichtlich:  $\mathcal{F}$  wohl-definiert (weil  $f \in L^1$ ) und

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1}$$

Präzisierung ist klassisches Resultat über Fouriertransformation:

## Satz 6.18 (Riemann-Lebesgue Lemma)

Es gilt  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$

**Beweis:** Stetigkeit für kompakt getragenes  $f$  folgt aus:

$$|(\mathcal{F}f)(p) - (\mathcal{F}f)(p')| \leq \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} |1 - e^{i(p-p')x}| |f(x)| \leq c |p - p'| \|f\|_{L^1}$$

mit geeigneter Konstanter  $c > 0$

Da kompakt getragene Funktionen dicht in  $L^1(\mathbb{R})$ , erlaubt ein  $3\epsilon$ -Argument Stetigkeit für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  zu zeigen

Nun zum Verschwinden im Unendlichen für  $f \in \mathcal{D}$

(hinreichend weil  $\mathcal{D} \subset L^1$  dicht und  $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f - g\|_1$ )

Partielle Integration (ohne Randterme) ergibt für  $j = 1, \dots, d$ :

$$|(\mathcal{F}f)(p)| = \left| - \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \partial_j f(x) \frac{1}{-ip_j} e^{-ip \cdot x} \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\partial_j f\|_{L^1} \frac{1}{|p_j|}$$

Da  $\partial_j f \in L^1$  für  $f \in \mathcal{D}$ , folgt, dass  $(\mathcal{F}f)(p) \rightarrow 0$  für  $|p| \rightarrow \infty$  □

## Satz 6.19

Seien  $f, g \in \mathcal{S}$ . Dann gilt Folgendes:

(i)  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist eine Bijektion mit Inversem

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} f(p) e^{ix \cdot p}$$

(ii) (Parseval)  $\langle \mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f \mid g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

(iii)  $\partial_p^\alpha (\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$  wobei  $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$

(iv)  $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) = i^{|\alpha|} p^\alpha \mathcal{F}f$

(v)  $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$

(vi)  $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$

**Beweis:** Zunächst zeigen wir (iii) durch folgende Rechnung:

$$\partial_p^\alpha (\mathcal{F}f)(p) = \partial_p^\alpha \int \frac{dx}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{-ip \cdot x} f(x) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ip \cdot x}$$

mit Satz von Lebesgue, da  $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S} \subset L^1$

Nun zu (iv). Nach partieller Integration ohne Randterme folgt in der Tat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha f) &= \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ip \cdot x} \partial_x^\alpha f(x) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} (\partial_x^\alpha e^{-ip \cdot x}) f(x) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-ip)^\alpha (\mathcal{F}f)(p) \end{aligned}$$

Weiter zu (i). Zunächst zeigen wir  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ . Hierzu

$$p^\alpha \partial_p^\beta (\mathcal{F}f)(p) \stackrel{\text{(iii)}}{=} (-i)^{|\beta|} p^\alpha (\mathcal{F}(x^\beta f))(p) \stackrel{\text{(iv)}}{=} (-i)^{|\beta|} (-i)^{-|\alpha|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha (x^\beta f))(p)$$

Da nun  $\partial_x^\alpha (x^\beta f) \in \mathcal{S}$  folgt mit Satz 6.18  $p^\alpha \partial_p^\beta \mathcal{F}f(p) \rightarrow 0$  für  $|p| \rightarrow \infty$

**Behauptung 1:** (und Beispiel für Berechnung einer Fouriertrafo)

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a^2 x^2}{2}})(p) = \frac{1}{a^d} e^{-\frac{p^2}{2a^2}}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

**Begründung:**

Ausreichend  $d = 1$  wegen Faktorisierung der Exponentialfunktion

Zudem Skalierung (Variablenwechsel) führt zu  $a = 1$

Für  $p = 0$  ist Aussage genau das Gauß'sche Integral (Beispiel 4.12)

Des Weiteren zeigt eine Rechnung (partielle Integration):

$$\begin{aligned} \partial_p (e^{\frac{p^2}{2}} \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(p)) &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} (p - ix) e^{\frac{p^2}{2} - ipx} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{p^2}{2} - ipx} (p + i\partial_x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad \diamond \end{aligned}$$

**Behauptung 2:**

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x), \quad f \in \mathcal{S}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$



**Begründung:** Zunächst  $\mathcal{F}\mathcal{F}f$  wohl definiert, weil  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S} \subset L^1$

Mit  $\lim_{a \rightarrow 0} e^{-\frac{a^2 p^2}{2}} = 1$  und Lebesgue, Fubini, Beh. 1 folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) &= \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ix \cdot p} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ip \cdot y} f(y) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ixp} e^{-\frac{a^2 p^2}{2}} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ip \cdot y} f(y) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} \left( \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{-i(x+y)p} e^{-\frac{a^2 p^2}{2}} \right) f(y) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{a^d} e^{-\frac{(x+y)^2}{2a^2}} f(y) \\ &= \left( \lim_{a \rightarrow 0} \int dy \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} (f(y-x) - f(-x)) \right) + f(-x)\end{aligned}$$

Letzteres nach Variablentransfo und weil Wahrscheinlichkeitsdichte

Zerlege  $\mathbb{R}_y^d = B_{a^{1+\delta}}(0) \cup R$  mit  $\delta > 0$ . Auf  $R$  ist Gauss-Glocke klein, auf  $B_{a^{1+\delta}}(0)$  ist  $f(y-x) - f(-x)$  klein. Also Integral 0 im Limes  $a \rightarrow 0$   $\diamond$

Aus  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$  folgt  $\mathcal{F}^4 = \mathbf{1}$ , also  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$  und

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}^2\mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x) = \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} f(p) e^{ip \cdot x}$$

Somit (i) bewiesen. Ähnlich nun für (ii):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle_{L^2} &= \int dp \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{ix \cdot p} \overline{f(x)} (\mathcal{F}g)(p) \\ &= \int dx \overline{f(x)} \int \frac{dp}{(2\pi)^{d/2}} e^{ix \cdot p} (\mathcal{F}g)(p) \\ &= \int dx \overline{f(x)} (\mathcal{F}^2g)(-x) = \int dx \overline{f(x)} g(x) \end{aligned}$$

Beachte, dass Rechnung formal auf folgende Identität reduziert:

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{ip \cdot (x-y)} = \delta(x-y)$$

Hierzu später mehr

Zuletzt zu (v) und (vi):

Da  $f \in \mathcal{S}$ , ist auch  $e^{ipx} \cdot \overline{f(x)} \in \mathcal{S}$

Also

$$\begin{aligned}(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(f \cdot g)(p) &= \int dx e^{-ipx} f(x) g(x) \\ &= \left\langle e^{ipx} \bar{f} \mid g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \left\langle \mathcal{F}(e^{ipx} \bar{f}) \mid \mathcal{F}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \int dq \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-iqx} e^{ipx} \overline{f(x)} (\mathcal{F}g)(q) \\ &= \int dq (\mathcal{F}f)(p - q) (\mathcal{F}g)(q) \\ &= (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(p)\end{aligned}$$

was den Beweis von (v) beendet. (vi) analog



Sei nun  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(f_n)_{n \geq 1}$  Folge in  $\mathcal{S}$  mit  $\lim \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$

Satz 6.19 impliziert  $\|\mathcal{F}f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  für  $f_n \in \mathcal{S}$

Daher  $(\mathcal{F}f_n)_{n \geq 1}$  Cauchy in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , also konvergent. Definiere

$$\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \quad , \quad \mathcal{F}_2 f = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n$$

Dann  $\mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$  und es gilt die Plancherel-Identität

$$\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle = \langle g | f \rangle \quad , \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Weil  $e^{-ipx} f(x)$  nicht integrierbar gilt aber im Allgemeinen **nicht**, dass

$$(\mathcal{F}_2 f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ip \cdot x} f(x) \quad , \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Aber für Kompaktum  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R\}$  gilt  $L^2(B_R) \subset L^1(B_R)$

## Satz 6.20

- (i)  $(\mathcal{F}_2 f)(p) = L^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ipx} f(x)$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$
- (ii)  $(\mathcal{F}_2 f)(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{-ipx} f(x)$  fast sicher in  $p \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

**Beweis:** (ii) Nach Satz 6.14 existiert Folge  $(f_k)_{k \geq 1}$  in  $\mathcal{S}$  mit

$$\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|f - f_k\|_2 \rightarrow 0$$

(da  $f_k$  explizit durch Glättung gegeben und somit  $f_k \in L^1$  und  $f_k \in L^2$ )

Wohldefiniert sind sowohl  $\mathcal{F}f_k$  als auch  $\mathcal{F}f$  (da  $f_k, f \in L^1$ )

Nach Satz 6.18:  $\mathcal{F}f_k \rightarrow \mathcal{F}f$  in  $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$  und  $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \rightarrow C_0} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$

Somit gilt für alle  $R > 0$

$$\int_{B_R} dp |\mathcal{F}f_k(p) - \mathcal{F}f(p)|^2 \leq \text{Vol}(B_R) \cdot \frac{1}{(2\pi)^d} \|f_k - f\|_{L^1}^2$$

$$\int_{B_R} dp |\mathcal{F}f_k(p) - \mathcal{F}_2 f(p)|^2 \leq \|\mathcal{F}f_k - \mathcal{F}_2 f\|_2^2$$

$$= \|\mathcal{F}_2(f_k - f)\|_2^2 \quad (\text{da } \mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F})$$

$$= \|f_k - f\|_2^2 \quad (\text{nach Plancherel})$$

Beides verschwindet im Limes  $k \rightarrow \infty$

Aus  $|\mathcal{F}f(\rho) - \mathcal{F}_2f(\rho)|^2 \leq |\mathcal{F}f(\rho) - \mathcal{F}f_k(\rho)|^2 + |\mathcal{F}f_k(\rho) - \mathcal{F}_2f(\rho)|^2$  folgt

$$\int_{B_R} d\rho |\mathcal{F}f(\rho) - \mathcal{F}_2f(\rho)|^2 = 0$$

Deswegen  $\mathcal{F}f(\rho) = \mathcal{F}_2f(\rho)$  fast sicher bez. des Lebesgue-Maßes

Nun zu (i): Für jedes  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ist  $\chi_{B_R}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Nach (ii) gilt also fast sicher  $\mathcal{F}(\chi_{B_R}f) = \mathcal{F}_2(\chi_{B_R}f)$

Außerdem mit Satz von Lebesgue  $\chi_{B_R}f \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  für  $R \rightarrow \infty$

Wegen der Stetigkeit von  $\mathcal{F}_2$  gilt also:

$$\mathcal{F}_2f = L^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}_2(\chi_{B_R}f) = L^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\chi_{B_R}f)$$

Nun ist aber letzterer Ausdruck genau die gewünschte Formel □

# Distributionen

Definition 6.13: Lokalkonvexe Topologie auf  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$   
induziert von Halbnormen

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_x (1 + |x|^m) |\partial^\alpha f(x)|, \quad m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d$$

Dann:  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{D} \iff \|f - f_n\|_{m,\alpha} \rightarrow 0$  für alle  $m, \alpha$

## Definition 6.21

Distributionen auf  $\mathbb{R}^d$  sind stetige lineare Funktionale auf  $\mathcal{D}$ ,  
also genau die Elemente des topologischen Dualraumes  $\mathcal{D}'$   
Analog: Dualraum  $\mathcal{S}'$  sind temperierte oder Schwartz-Distributionen

## Bemerkung 6.22

Lineares Funktional  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig (bez. lokalkonvexer Topo.)  
 $\iff T(f_n) \rightarrow 0$  für alle  $f_n$  mit  $\|f_n\|_{m,\alpha} \rightarrow 0$  für alle  $m, \alpha$

### Beispiel 6.23

Jedes  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  definiert Distribution  $T_g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  durch:

$$T_g(f) = \int dx g(x) f(x) \quad , \quad f \in \mathcal{D}$$

### Beispiel 6.24

Dirac Distribution  $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch:

$$\delta(f) = f(0) \quad , \quad f \in \mathcal{D}$$

Alternative (formale) Schreibweise:

$$\delta(f) = \int dx \delta(x) f(x)$$

Dies suggeriert, dass  $\delta$  eine Funktion ist, was nicht stimmt!



## Beispiel 6.25

Sei  $d = 1$ . Die Ableitung  $\delta' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  der Dirac Distribution ist

$$\delta'(f) = -f'(0) \quad , \quad f \in \mathcal{D}$$

Dem zugrunde liegt partielle Integration ohne Randterme

$$\delta'(f) = \int dx \delta'(x) f(x) = - \int dx \delta(x) f'(x) = \int dx \delta(x) (-f')(x)$$

Allgemeiner:

## Definition 6.26

(Schwache) Ableitung  $\partial_j T \in \mathcal{D}'$  einer Distribution  $T \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  ist

$$(\partial_j T)(f) = -T(\partial_j f)$$

## Bemerkung 6.27

Distributionen sind immer beliebig oft (schwach) differenzierbar

## Approximation der Eins

Im Beweis von Satz 6.19 wurde gezeigt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \delta(x)$$

in dem Sinne, dass für jede "Testfunktion"  $f \in \mathcal{D}$  gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int dx \frac{1}{(2\pi)^{d/2} a^d} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} f(x) = f(0) = \delta(f)$$

### Definition 6.28

Eine Approximation der Eins ist Folge von Funktionen  $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx g_n(x) f(x) = \delta(f)$$

Oben erstes Beispiel, ein zweites (nicht stetiges) Beispiel ist:

$$g_n(x) = n \chi(|x| \leq \frac{1}{2n})$$

Beachte, dass immer  $\mu(g_n) = 1$

## Weitere Identitäten

Im Beweis von Satz 6.19 wurde gezeigt:

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{ip \cdot x} = \delta(x)$$

wieder im Sinne (Limesprozess außen):

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^d} \int dx e^{ip \cdot x} f(x) = f(0) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

Diskrete Version hiervon auf  $\mathbb{S}^1$ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} = 2\pi \delta(\theta)$$

d.h.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{in\theta} f(\theta) = 2\pi f(\theta) \quad , \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{S}^1) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$$

## 7 Tensoren und Grassmann-Algebra

$V, W, V_1, \dots, V_K$  endlich-dimensionale Vektorräume über  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$  analog)

### Definition 7.1

Dualraum zu  $V$  ist definiert als  $V^* = \{T : V \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ linear}\}$

Vektorraumstruktur auf  $V^*$ :

$$(T + \lambda T')(v) = T(v) + \lambda T'(v) \quad , \quad v \in V$$

### Definition 7.2

Wenn  $b_1, \dots, b_N$  Basis von  $V$ , so bilden  $b^1, \dots, b^N \in V^*$  definiert durch

$$b^j(b_i) = \delta_{i,j} = \delta_i^j$$

sogenannte duale Basis von  $V^*$ . Insbesondere:  $\dim(V^*) = \dim(V)$

Konstruktion von dualer Basis mit nicht-entarteter Bilinearform (später)

### Satz 7.3

$(V^*)^* \cong V$  mit Isomorphismus bez. Identifikation  $v(T) = T(v)$

## Definition 7.4 (Erinnerung Math. Phys. 2)

$$F : V_1 \times \dots \times V_K \rightarrow W$$

heißt multilinear  $\iff$  linear in jedem Argument ist, d.h.

$$v_k \in V_k \mapsto F(v_1, \dots, v_k) \in W \quad \text{linear} \quad \forall k = 1, \dots, K$$

und  $v_m \in V_m$  für  $m \neq k$  festgehalten

## Definition 7.5 (Tensorprodukt endl. dimen. Vektorräume)

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_K = \{F : V_1^* \times \dots \times V_K^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ multilinear}\}$$

Beachte: es gibt auch  $V^* \otimes W^*$ ,  $V^* \otimes W$ ,  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_K^*$ , etc.

$K$ -fach kontravariante und  $L$ -fach kovariante Tensoren über  $V$ :

$$T_L^K(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_K \text{ Faktoren} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_L \text{ Faktoren} \quad \text{Tensoren } (K, L)\text{ter Stufe}$$

## Beispiel 7.6

Vektoren sind Tensoren der Stufe  $(1, 0)$

Entwicklung nach Basis  $b_1, \dots, b_N$ :

$$v = \sum_{n=1}^N v^n b_n = v^n b_n$$

### Einstein'sche Summenkonvention:

über doppelt (oben und unten) auftretende Indizes wird summiert

## Beispiel 7.7

Für  $v \in V$  und  $w \in W$  ist  $v \otimes w$  definiert durch

$$(v \otimes w)(v^*, w^*) = v^*(v) w^*(w) \in \mathbb{R} \quad , \quad v^* \in V^* , \quad w^* \in W^*$$

Beachte: rechte Seite wirklich multilineare Abbildung

## Beispiel 7.8

Bilineare Abbildungen  $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sind Tensoren der Stufe  $(0, 2)$

$$T = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N T_{n,m} b^n \otimes b^m = T_{n,m} b^n \otimes b^m$$

## Beispiel 7.9 (Verallgemeinerung von Beispiel 7.7)

Für  $v_1 \in V_1, \dots, v_K \in V_K$  ist  $v_1 \otimes \dots \otimes v_K$  definiert durch

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_K)(v_1^*, \dots, v_K^*) = \prod_{k=1, \dots, K} v_k^*(v_k) \in \mathbb{R}$$

wobei  $v_1^* \in V_1^*, \dots, v_K^* \in V_K^*$

Beachte: wiederum rechte Seite wirklich multilineare Abbildung

Analoge Definition von  $v_1 \otimes \dots \otimes v_K \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_L^*$

## Beispiel 7.10

Lineare Abbildung  $A : V \rightarrow V$  ist ein Tensor der Stufe  $(1, 1)$  über  $V$ :

$$A(v^*, v) = v^*(Av)$$

Bez. Basis  $b_1, \dots, b_N$  und Dualbasis  $b^1, \dots, b^N$ :

$$A = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A^m_n b_m \otimes b^n = A^m_n b_m \otimes b^n$$

Also: Matrix hat einen Index oben und einen unten (anders als früher)

Reihenfolge der Indizes entsprechend dem Auftreten der Vektoren

Koeffizienten sind  $A^m_n = b^m(Ab_n)$

Verallgemeinerung:  $A : V \rightarrow W$  und  $e_1, \dots, e_M$  Basis von  $W$

$$A = A^m_n e_m \otimes b^n \in W \otimes V^*$$

Wenn  $A$  invertierbar,  $A^{-1} = (A^{-1})^n_m b_n \otimes e^m \in V \otimes W^*$



# Rechenregeln

Tensorprodukt ist linear in jedem Argument, z.B.:

$$(v + \lambda v') \otimes w = v \otimes w + \lambda v' \otimes w$$

$$v \otimes (w + \lambda w') = v \otimes w + \lambda v \otimes w'$$

Also insbesondere  $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$ . In der Tat:

$$\begin{aligned}(v + \lambda v') \otimes w(v^*, w^*) &= v^*(v + \lambda v')w^*(w) \\ &= (v^*(v) + \lambda v^*(v'))w^*(w) \\ &= v^*(v)w^*(w) + \lambda v^*(v')w^*(w) \\ &= v \otimes w(v^*, w^*) + \lambda v' \otimes w(v^*, w^*)\end{aligned}$$

## Definition 7.11

Elementartensoren von Gestalt  $v_1 \otimes \dots \otimes v_K$  (ohne Linearkombin.)

## Beispiel 7.12

$v \otimes w + v' \otimes w'$  Elementartensor nur wenn  $v = v'$  oder  $w = w'$

## Satz 7.13

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$$

**Beweis:** Multilineare Abbildung spezifiziert durch Werte auf Basis

$b_1, \dots, b_N$  Basis von  $V$ , und  $e_1, \dots, e_M$  Basis von  $W$

Dann  $\{b_n \otimes e_m \mid n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M\}$  Basis von  $V \otimes W$

In der Tat, seien

$$v = \sum_{n=1}^N v^n b_n = v^n b_n \quad , \quad w = \sum_{m=1}^M w^m e_m = w^m e_m$$

Dann

$$v \otimes w = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v^n w^m b_n \otimes e_m = v^n w^m b_n \otimes e_m$$

wobei  $b_n \otimes e_m$  wie in Beispiel 7.7



### Korollar 7.14

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_K) = \dim(V_1) \cdot \dots \cdot \dim(V_K)$$

### Korollar 7.15

$$\dim(T_L^K(V)) = \dim(V)^{K+L}$$

Wenn  $b_1, \dots, b_N$  Basis von  $V$ , dann Basis von  $T_L^K(V)$ :

$$b_{n_1} \otimes \dots \otimes b_{n_K} \otimes b^{m_1} \otimes \dots \otimes b^{m_L}$$

wobei  $n_1, \dots, n_K, m_1, \dots, m_L \in \{1, \dots, N\}$

Einstein'sche Summenkonvention für  $T \in T_L^K(V)$  bez. dieser Basis:

$$T = T^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} b_{n_1} \otimes \dots \otimes b_{n_K} \otimes b^{m_1} \otimes \dots \otimes b^{m_L}$$

Somit  $T^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} = T(b^{n_1}, \dots, b^{n_K}, b_{m_1}, \dots, b_{m_L})$

### Bemerkung 7.16

$$T_L^K(V) = T_K^L(V^*) \text{ wegen Satz 7.3}$$

# Universelle Eigenschaft

Tensorprodukt  $Z = V \otimes W$  eindeutig bestimmter Vektorraum  $Z$  mit:

$\exists$  bilineare Abbildung  $T : V \times W \rightarrow Z$  so dass

jede bilineare Abbildung  $S : V \times W \rightarrow X$  faktorisiert:

$$S = \tilde{S} \circ T$$

für geeignetes lineares  $\tilde{S} : Z \rightarrow X$ . Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{T} & Z \\ & \searrow S & \downarrow \tilde{S} \\ & & X \end{array}$$

**Begründung:** Seien  $Z'$  und  $T' : V \times W \rightarrow Z'$  auch wie oben

Dann wähle  $X = Z'$  in Diagramm für  $Z$ :  $\exists \tilde{S} : Z \rightarrow Z'$  mit  $T' = \tilde{S} \circ T$

und wähle  $X = Z$  in Diagramm für  $Z'$ :  $\exists \tilde{S}' : Z' \rightarrow Z$  mit  $T = \tilde{S}' \circ T'$

Also  $\tilde{S}$  und  $\tilde{S}'$  bijektiv und somit  $Z \cong Z'$  □

## Multilineare Abbildung sind konkrete Realisierung

D.h.  $Z \cong V \otimes W$  wobei  $V \otimes W = \{T : V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ bilinear}\}$

Hierfür sei  $T : V \times W \rightarrow V \otimes W$  gegeben durch  $T(v, w) = v \otimes w$

wobei  $v \otimes w$  bilineare Abbildung aus Beispiel 7.7

Sei  $S : V \times W \rightarrow X$  gegeben. Dann ist  $\tilde{S} : V \otimes W \rightarrow X$  definiert durch

$$\tilde{S}(v \otimes w) = S(v, w)$$

und durch lineare Fortsetzung auf Nicht-Elementartensoren

In der Tat, dann gilt  $\tilde{S} \circ T = S$  und  $\tilde{S}$  ist linear da

$$\begin{aligned}\tilde{S}(v \otimes w + \lambda(v' \otimes w')) &= \tilde{S}(v \otimes w) + \tilde{S}(\lambda v' \otimes w') \\ &= \tilde{S}(v \otimes w) + \tilde{S}((\lambda v') \otimes w') \\ &= S(v, w) + S(\lambda v', w') \\ &= S(v, w) + \lambda S(v', w') \\ &= \tilde{S}(v \otimes w) + \lambda \tilde{S}(v' \otimes w')\end{aligned}$$

# Tensorprodukt von Tensoren

Zu  $T \in T_L^K(V)$  und  $T' \in T_{L'}^{K'}(V)$  definiere  $T \otimes T'$  durch

$$\begin{aligned} T \otimes T'(v_1^*, \dots, v_K^*, v_1, \dots, v_L, v_{K+1}^*, \dots, v_{K+K'}^*, v_{L+1}, \dots, v_{L+L'}) \\ = T(v_1^*, \dots, v_K^*, v_1, \dots, v_L) T'(v_{K+1}^*, \dots, v_{K+K'}^*, v_{L+1}, \dots, v_{L+L'}) \end{aligned}$$

Dann ist  $T \otimes T'$  der Stufe  $(K + K', L + L')$

Da  $V \otimes W$  isomorph zu  $W \times V$  ist (universelle Eigenschaft, Übung)

kann  $T \otimes T'$  aufgefasst werden als Element in  $T_{L+L'}^{K+K'}(V)$

Somit wird  $T(V) = \bigoplus_{L \geq 0} \bigoplus_{K \geq 0} T_L^K(V)$  zu einer (Tensor)-Algebra

Beachte hierbei:

in direkter Summe werden nur Tensoren von gleicher Stufe addiert

Das Tensorprodukt erhöht jedoch die Stufe

## Beispiel 7.17

Lineare Abbildungen  $A, B: V \rightarrow V$  Tensoren der Stufe  $(1, 1)$  über  $V$   
Bez. Basis  $b_1, \dots, b_N$  und Dualbasis  $b^1, \dots, b^N$ :

$$A = A^m_n b_m \otimes b^n \quad , \quad B = B^m_n b_m \otimes b^n$$

Dann  $A \otimes B \in V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \cong T_2^2(V)$  gegeben durch

$$A \otimes B = A^{m_1}_{n_1} B^{m_2}_{n_2} b_{m_1} \otimes b^{n_1} \otimes b_{m_2} \otimes b^{n_2}$$

Die Koeffizienten von  $A \otimes B$  sind also

$$A \otimes B^{m_1}_{n_1}{}^{m_2}_{n_2} = A^{m_1}_{n_1} B^{m_2}_{n_2}$$

oder nach Umordnung

$$A \otimes B^{m_1, m_2}_{n_1, n_2} = A^{m_1}_{n_1} B^{m_2}_{n_2}$$

# Kontraktion von Tensoren

## Definition 7.18

Kontraktion  $C_j^i : T_{L+1}^{K+1}(V) \rightarrow T_L^K(V)$  für  $1 \leq i \leq K+1$  und  $1 \leq j \leq L+1$

$$(C_j^i T)^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} = T^{n_1, \dots, n_{i-1}, n, n_i, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_{j-1}, n, m_j, \dots, m_L}$$

wobei gemäß Einstein-Konvention über  $n$  summiert wird

Kontraktion ggf. auch bei Tensorprodukten verschiedener VR

## Beispiel 7.19

Sei  $A : V \rightarrow W$  aufgefasst als  $A \in W \otimes V^*$  und  $v \in V$

Dann  $A \otimes v \in W \otimes V^* \otimes V$  und  $Av \in W$ . Es gilt  $C_1^2 A \otimes v = Av$

## Beispiel 7.20

Seien  $A, B : V \rightarrow V$  wie in Beispiel 7.17. Dann  $AB = C_1^2 A \otimes B$



# Transformationsverhalten

Sei  $A : V \rightarrow W$  linear und invertierbar (auch  $W = V$  interessant)

Basen  $b_1, \dots, b_N$  von  $V$  und  $e_1, \dots, e_N$  von  $W$

Vektoren, d.h. Tensoren der Stufe  $(1, 0)$ , transformieren wie

$$Av = C_1^2 A \otimes v = C_1^2 A^m_n e_m \otimes b^n \otimes v^k b_k = A^m_n e_m v^k \delta_k^n = A^m_n v^n e_m$$

also

$$(Av)^m = A^m_n v^n$$

Allgemeiner: aus Tensor  $T \in T_0^K(V)$  der Stufe  $(K, 0)$  wird mit  $A$  transformierter Tensor  $A \cdot T \in T_0^K(W)$

Hierbei: Koeffizienten von

$$T = T^{n_1, \dots, n_K} b_{n_1} \otimes \dots \otimes b_{n_K}$$

transformieren "kontravariant":

$$(A \cdot T)^{m_1, \dots, m_K} = A^{m_1}_{n_1} \dots A^{m_K}_{n_K} T^{n_1, \dots, n_K}$$

Nun Transformation von Kovektoren  $v^* \in T_1^0(V)$

Hierzu verwende **nicht**  $A^* : W^* \rightarrow V^*$  definiert durch

$$A^*(w^*)(v) = w^*(Av)$$

sondern  $A^{-1} : W \rightarrow V$  bez.  $(A^{-1})^* : V^* \rightarrow W^*$

Denn: aus  $v^* : V \rightarrow \mathbb{R}$  wird transformiertes  $A \cdot v^* : W \rightarrow \mathbb{R}$  mittels

$$(A \cdot v^*)(w) = v^*(A^{-1}w) = v_k b^k ((A^{-1})^n_m w^m b_n) = v_n (A^{-1})^n_m w^m$$

Tensor  $T \in T_L^0(V)$  der Stufe  $(0, L)$  transformiert "kovariant":

$$(A \cdot T)_{m_1, \dots, m_L} = (A^{-1})^{n_1}_{m_1} \cdots (A^{-1})^{n_L}_{m_L} T_{n_1, \dots, n_L}$$

**Also:** Transformationsverhalten von  $T \in T_L^K(V)$  der Stufe  $(K, L)$ :

$$(A \cdot T)^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} = A^{n_1}_{k_1} \cdots A^{n_K}_{k_K} (A^{-1})^{l_1}_{m_1} \cdots (A^{-1})^{l_L}_{m_L} T^{k_1, \dots, k_K}_{l_1, \dots, l_L}$$

# Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Tensoren der Stufe  $(K, 0)$  und  $(0, L)$  sind multilineare Abbildungen  
Also übertragen sich Symmetrie und Antisymmetrie aus Math. Phys. 2

## Definition 7.21

$T \in T_0^K(V)$  symmetrisch  $\iff \forall v_1^*, \dots, v_K^* \in V^* \quad \forall \sigma \in S_K$  Permutation

$$T(v_1^*, \dots, v_K^*) = T(v_{\sigma(1)}^*, \dots, v_{\sigma(K)}^*)$$

## Definition 7.22

$T \in T_0^K(V)$  antisymmetrisch  $\iff \forall v_1^*, \dots, v_K^* \in V^* \quad \forall \sigma \in S_K$

$$T(v_1^*, \dots, v_K^*) = \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}^*, \dots, v_{\sigma(K)}^*)$$

## Definition 7.23

Analog: (anti)symmetrische Tensoren der Stufe  $(0, L)$

## Beispiel 7.24

Ein Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  auf  $V$  definiert  $g \in T_2^0(V)$  durch

$$g(v, w) = \langle v | w \rangle$$

Dies ist ein symmetrischer Tensor der Stufe  $(0, 2)$  weil hier  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Zu  $g$  gibt es kanonischen Isomorphismus  $I : V \rightarrow V^*$  durch

$$I(v)(w) = g(v, w)$$

Dies ist endlich-dimensionales Riesz' Lemma in Hilbert-Räumen

Wenn  $g = g_{n,m} b^n \otimes b^m$  und  $v = v^n b_n$ , so  $I(v) = C_1^1 g \otimes v = g_{n,m} v^n b^m$

Allgemeiner:  $I : T_0^K(V) \rightarrow T_K^0(V)$  auf  $T = T^{m_1, \dots, m_K} b_{m_1} \otimes \dots \otimes b_{m_K}$  durch

$$I(T) = g_{n_1, m_1} \cdots g_{n_K, m_K} T^{m_1, \dots, m_K} b^{n_1} \otimes \dots \otimes b^{n_K}$$

Somit isomorpher Tensor durch "Runterziehen der Indizes"

## Beispiel (Fortsetzung)

Analog gibt es auch ein "Raufziehen der Indizes"

Hierzu verwende Inverses  $I^{-1} : V^* \rightarrow V$  zu  $I : V \rightarrow V^*$

In Koordinaten ist diese Abbildung (per Definition von  $g^{k,m}$ )

$$I^{-1}(v^*) = I^{-1}(v_n b^n) = v_n I^{-1}(b^n) = g^{k,n} v_n b_k$$

Da  $v = I^{-1} I(v) = I^{-1}(g_{n,m} v^n b^m) = g^{k,m} g_{n,m} v^n b_k$  und  $g_{n,m} g_{m,n}$  gilt

$$g^{k,m} g_{m,n} = \delta_n^k$$

Also Matrixinverse, und somit auch  $g^{k,m} = g^{m,k}$

Allgemeiner:  $I^{-1} : T_L^0(V) \rightarrow T_0^L(V)$  auf  $T = T_{m_1, \dots, m_L} b^{m_1} \otimes \dots \otimes b^{m_L}$   
durch

$$I^{-1}(T) = g^{n_1, m_1} \dots g^{n_L, m_L} T_{m_1, \dots, m_L} b_{n_1} \otimes \dots \otimes b_{n_L}$$

## Bemerkung 7.25

$g$  muss nicht positiv, sondern nur symmetrisch sein (Lorentzmetrik)

# Projektionen auf (anti)symmetrische Tensoren

Mengen der (anti)symmetrischen Tensoren bilden Vektorraum, z.B.

$$\Lambda_L(V) = \{\omega \in T_L^0(V) \mid \omega \text{ antisymmetrisch}\}$$

Die sogenannte fermionische Projection  $\Pi_- : T_L^0(V) \rightarrow \Lambda_L(V)$  ist

$$(\Pi_- T)(v_1, \dots, v_L) = \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(L)})$$

Dann ist  $\Pi_-$  linear und  $(\Pi_-)^2 = \Pi_-$  (auch hermitisch bez. Skalarprod.)

Analog: (bosonischer) Projektor  $\Pi_+$  auf symmetrische Tensoren  
(wie oben, nur ohne  $\text{sgn}(\sigma)$ )

## Bemerkung 7.26

Symmetrische Tensorprodukte beschreiben identische Bosonen  
antisymmetrische Tensorprodukte identische Fermionen (in QM)

## Grassmann-Algebra

**Behauptung:** wenn  $L > \dim(V) = N$ , dann  $\Lambda_L(V) = \emptyset$

**Begründung:** wegen folgendem Resultat aus MP2:

Wenn Argumente linear abhängig, antisymmetrische Abbildung null  $\diamond$

**Behauptung:** Für  $L \leq N$  ist  $\Lambda_L(V)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

**Definiere:**  $\Lambda(V) = \bigoplus_{L=1}^N \Lambda_L(V)$

Das sogenannte äußere Produkt  $\wedge : \Lambda_L(V) \times \Lambda_K(V) \rightarrow \Lambda_{L+K}(V)$  ist

$$\omega \wedge \eta = \frac{(L+K)!}{L!K!} \Pi_- (\omega \otimes \eta)$$

Allgemeiner für  $\omega_i \in \Lambda_{L_i}(V)$ :

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r = \frac{(L_1 + \dots + L_r)!}{L_1! \dots L_r!} \Pi_- (\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r)$$

Folgender Satz:  $(\Lambda(V), +, \cdot, \wedge)$  Algebra (die Grassmann Algebra)

## Satz 7.27

$\wedge$  *assoziativ, bilinear, antikommutativ:*

Für  $\omega, \omega' \in \Lambda_L(V)$ ,  $\eta \in \Lambda_K(V)$  und  $\tau \in \Lambda_M(V)$ :

- (i)  $(\omega \wedge \eta) \wedge \tau = \omega \wedge (\eta \wedge \tau)$
- (ii)  $(\omega + \lambda\omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \lambda\omega' \wedge \eta$  und analog in 2. Argument
- (iii)  $\omega \wedge \eta = (-1)^{KL}\eta \wedge \omega$

**Beweis:** (i) hier wird Vorfaktor benötigt:

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \tau &= \frac{(L+K)!}{L!K!} \Pi_- (\omega \otimes \eta) \wedge \tau \\ &= \frac{(L+K+M)!}{(L+K)!M!} \frac{(L+K)!}{L!K!} \Pi_- (\Pi_- (\omega \otimes \eta) \otimes \tau) \\ &= \frac{(L+K+M)!}{L!K!M!} \Pi_- (\omega \otimes \eta \otimes \tau) \\ &= \omega \wedge (\eta \wedge \tau)\end{aligned}$$

wobei letzter Schritt analog. (ii) und (iii) Übung □



## Satz 7.28

Wenn  $N = \dim(V)$ , dann  $\dim(\Lambda_L(V)) = \binom{N}{L}$  und  $\dim(\Lambda(V)) = 2^N$

**Beweis:** Wenn  $b^1, \dots, b^N$  Basis von  $V^*$ , dann bilden

$$b^{n_1} \wedge \dots \wedge b^{n_L}$$

mit  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_L \leq N$  eine Basis von  $\Lambda_L(V)$

In der Tat: Vektoren linear unabhängig und spannen  $\Lambda_L(V)$  auf

Also ist  $\binom{N}{L}$  Dimension von  $\Lambda_L(V)$

Letzte Behauptung wegen binomischer Formel  $\sum_{L=0}^N \binom{N}{L} = (1+1)^N \quad \square$

## Bemerkung 7.29

Bei Entwicklung nach allgemeiner Basis gilt:

$$\omega = \omega_{n_1, \dots, n_L} b^{n_1} \otimes \dots \otimes b^{n_L} \in \Lambda_L(V) \quad \text{antisymmetrisch}$$

$\iff \omega_{n_1, \dots, n_L}$  antisymmetrisch in den Indizes, d.h.

$$\omega_{n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(L)}} = \text{sgn}(\sigma) \omega_{n_1, \dots, n_L} \quad , \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}_L$$

## Satz 7.30

Seien  $\omega_1, \dots, \omega_L \in V^*$  und  $v_1, \dots, v_L \in V$

Dann ist  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_L \in \Lambda_L(V)$  gegeben durch

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_L(v_1, \dots, v_L) = \det_L \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_L(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(v_L) & \cdots & \omega_L(v_L) \end{pmatrix}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_L(v_1, \dots, v_L) &= \left( \frac{L!}{1! \dots 1!} \prod_{\sigma \in S_L} \text{sgn}(\sigma) \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_L \right)(v_1, \dots, v_L) \\ &= L! \frac{1}{L!} \sum_{\sigma \in S_L} \text{sgn}(\sigma) (\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_L)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(L)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_L} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega_L(v_{\sigma(L)}) \end{aligned}$$



## Definition 7.31 (Pullback von Grassmann Algebra)

Sei  $A : V \rightarrow W$  linear und definiere  $A^* : \Lambda_L(W) \rightarrow \Lambda_L(V)$  durch

$$A^* \omega(v_1, \dots, v_L) = \omega(Av_1, \dots, Av_L)$$

## Satz 7.32

Sei  $A : V \rightarrow V$  und  $L = N = \dim(V)$ . Dann

$$A^* \omega = \det(A) \omega \quad , \quad \omega \in \Lambda_N(V)$$

**Beweis:** Da  $\omega = b^1 \wedge \dots \wedge b^N$  bis auf Konstante

$$A^* \omega(v_1, \dots, v_N) = \omega(Av_1, \dots, Av_N) = \det \begin{pmatrix} b^1(Av_1) & \dots & b^1(Av_N) \\ \vdots & & \vdots \\ b^N(Av_1) & \dots & b^N(Av_N) \end{pmatrix}$$

$$= \det((b_1, \dots, b_N)^* A(v_1, \dots, v_N))$$

$$= \det(A) \det((b_1, \dots, b_N)^*(v_1, \dots, v_N)) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_N) \quad \square$$

## 8 Tangentialräume und Differentialformen

### Definition 8.1 (Mannigfaltigkeiten (vgl. MP2))

$M$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  des  $\mathbb{R}^{M'}$  besitzt Atlas

$$\mathcal{A} = \{ \varphi \mid \varphi : U_\varphi \rightarrow \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \text{ Homöomorphismus, } U_\varphi \subset \mathcal{M} \}$$

bestehend aus Karten  $\varphi$ , die Folgendes erfüllen:

- (i)  $U_\varphi \subset \mathcal{M}$  offen in  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}$  versehen mit Unterraumtopologie)
- (ii)  $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi = \mathcal{M}$
- (iii) Für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$  mit  $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$  sind die Kartenwechsel

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^M$$

$C^k$ -Diffeomorphismen

Hier nur glatte Mannigfaltigkeiten, d.h.  $k = \infty$

Zudem: Umkehrabbildungen  $\varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \rightarrow U_\varphi \subset \mathbb{R}^{M'}$  glatt

## Bemerkung 8.2

Whitney: jede abstrakte Mannigfaltigkeit ist Untermannigfaltigkeit

MP2: Lokal Karten oft durch Satz für implizite Funktionen gegeben

## Beispiel 8.3

Einfachster Fall:  $\mathcal{M} = U \subset \mathbb{R}^M$  offene Menge

Dann Atlas mit nur einer Karte  $\varphi = \text{id}_U$  auf  $U_\varphi = U$

## Beispiel 8.4

$N$ -Sphäre

$$\mathbb{S}^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Zwei Karten (obere & untere Halbkugeln): stereographische Projektion

## Beispiel 8.5

$N$ -Torus  $\mathbb{T}^N \cong \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N \cong [-\pi, \pi)^N \cong \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$

# Tangentialraum

Inverses zu Kartenabbildung  $\varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \rightarrow U_\varphi \subset \mathbb{R}^{M'}$  glatt

Ableitung bei  $x \in \varphi(U_\varphi)$  ist lineare Abbildung (Linearisierung)

$$(\varphi^{-1})'_x = \partial\varphi^{-1}(x) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{M'}$$

$(\varphi^{-1})'_x$  hat maximalen Rang  $M$

## Definition 8.6

Tangentialraum an  $p \in \mathcal{M}$  ist

$$T_p\mathcal{M} = \text{Ran}((\varphi^{-1})'_{\varphi(p)})$$

Sorry, wieder ein  $T$ .... Weiter mit erster Standardbeschreibung:

## Satz 8.7

$T_p\mathcal{M}$  ist die Menge aller Ableitungen  $\gamma'(0)$  wobei  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  glatte Kurve mit  $\gamma(0) = p$

**Beweis:** " $\Leftarrow$ " Sei  $v \in \mathbb{R}^M$  und setze  $\gamma(t) = \varphi^{-1}(x + tv)$  wobei  $\varphi(p) = x$

Dann  $\gamma$  glatt und  $\gamma'(0) = (\varphi^{-1})'_x(v)$

" $\Rightarrow$ " Sei  $\gamma$  Kurve wie oben. Dann ist  $\varphi \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \varphi(U_\varphi)$  glatt

und  $\gamma'(0) = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'_0 = (\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}(\varphi \circ \gamma)'_0 \in T_p\mathcal{M}$  □

### Definition 8.8

Eine Punkt-Derivation bei  $p \in \mathcal{M}$  ist lineare Abbildung  $\partial : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit Punkt-Leibniz-Regel:

$$\partial(fg) = \partial f g(p) + f(p) \partial g$$

Jeder glatten Weg  $\gamma$  durch  $p \in \mathcal{M}$  definiert Punkt-Derivation

$$\partial_\gamma f = \partial_t(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

Umgekehrt: zu jeder Punkt-Derivation bei  $p \exists$  Weg  $\gamma$  durch  $p$ :

### Satz 8.9

$T_p\mathcal{M}$  ist isomorph zum Vektorraum der Punkt-Derivationen bei  $p$

**Beweis:** Zunächst beachte: Punkt-Derivationen bilden Vektorraum

Wir verwenden eine Basis der Punkt-Derivationen

Sei  $\varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^M$  Karte mit  $p \in U_\varphi$  und  $x = \varphi(p) = 0$  nach Verschieben

Seien  $x^1, \dots, x^M$  Koordinatenfunktionen in  $\varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M$

Dies gibt glatte Funktionen  $x^m \circ \varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$

Zu gegebener Punkt-Derivation  $\partial$  bei  $p$ , setze  $\lambda^m = \partial(x^m \circ \varphi) \in \mathbb{R}$

Betrachte Weg  $\gamma(t) = \varphi^{-1}(t\lambda^m e_m)$  durch  $p = \varphi^{-1}(0)$

Hierbei  $e_1, \dots, e_M$  Standardbasisvektoren von  $\mathbb{R}^M$ . Dann:

$$\begin{aligned}\partial_\gamma f &= \partial_t(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} = (f \circ \varphi^{-1})'_0(\lambda^m e_m) \\ &= \lambda^m (f \circ \varphi^{-1})'_0(e_m) = \partial(x^m \circ \varphi)(f \circ \varphi^{-1})'_0(e_m) \\ &= \partial((f \circ \varphi^{-1})'_0(e_m)x^m \circ \varphi) = \partial((f \circ \varphi^{-1})'_0(x^m \circ \varphi e_m)) \\ &= \partial f \quad \text{da nach Taylor für } f = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\end{aligned}$$

$$f(q) = f(p) + (f \circ \varphi^{-1})'_0(x^m \circ \varphi e_m) + \mathcal{O}(x^2) \text{ für } q = \varphi^{-1}(x^m \circ \varphi e_m) \quad \square$$



# Zusammenfassung

Verschiedene Darstellungen des Tangentialraumes an  $p$ :

$$\begin{aligned}T_p\mathcal{M} &= \text{Ran}((\varphi^{-1})'_{\varphi(p)}) \\ &= \{\text{Ableitungen } \gamma'(0) \text{ glatter Wege } \gamma \text{ durch } p\} \\ &= \{\text{Punkt-Derivationen bei } p\}\end{aligned}$$

**Notation:** zu Karte  $\varphi$  setze  $\partial_{x^m} = \partial_{\gamma_m}$  wobei  $\gamma_m(t) = \varphi^{-1}(te_m)$ , d.h.

$$\partial_{x^m} f = \partial_{\gamma_m} f = \left. \partial_t (f \circ \gamma_m(t)) \right|_{t=0} = (f \circ \varphi^{-1})'_0(e_m)$$

Zu Karte um  $p \in \mathcal{M}$  ist dann  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^M}$  Basis von  $T_p\mathcal{M}$

$$v = \sum_{m=1}^M v^m \partial_{x^m} = v^m \partial_{x^m} \in T_p\mathcal{M}$$

Dies ist Koordinatendarstellung von Tangentialvektoren

Beachte: diese Basis gibt es für alle Punkte in Kartenumgebung

### Definition 8.10

Tangentialraum ist  $T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$

### Definition 8.11

Vektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{M}$  ist ein Schnitt vom Tangentialraum  $T\mathcal{M}$ ,  
d.h. glattes  $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  mit  $X(p) \in T_p\mathcal{M}$

### Beispiel 8.12

Lokal sind  $\partial_{x^m}$  glatte Vektorfelder

Da sie in jedem Punkt  $p$  eine Basis von  $T_p\mathcal{M}$  bilden, gilt lokal

$$X = X^m \partial_{x^m}$$

für geeignete glatte Funktionen  $X^m : U_\varphi \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

### Definition 8.13

Vektorfeld  $X = X^m \partial_{x^m}$  wirkt auf  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  wie in Definition 8.8

$$X(f) = X^m \partial_{x^m}(f) \in C^\infty(\mathcal{M})$$

### Bemerkung 8.14 (Dynamisches System auf Mannigfaltigkeit)

Zu Vektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{M}$  gehört ein dynamisches System

Hierzu sucht man den Fluss  $\phi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  mit

$$\partial_t \phi_t(\mathbf{p}) = X(\phi_t(\mathbf{p})) \quad , \quad \phi_0 = \text{id}_{\mathcal{M}}$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  Zeitintervall

Außerdem:  $t \in I \mapsto \phi_t(\mathbf{p})$  Pfad und somit  $\partial_t \phi_t(\mathbf{p}) \in T_{\phi_t(\mathbf{p})} \mathcal{M}$

Also ist obige Gleichung eine Gleichung zwischen Tangentialvektoren

Lokale Existenz dieses Flusses wieder mit Picard-Lindelöf

# Koordinatenwechsel von Tangentialvektoren

Sei  $p \in U_\varphi \cap U_\psi$  in zwei Kartengebieten

Koordinaten in  $\varphi(U_\varphi)$  sind  $x^1, \dots, x^M$  mit  $\varphi(p) = 0$

Koordinaten in  $\psi(U_\psi)$  sind  $y^1, \dots, y^M$  mit  $\psi(p) = 0$

Dann hat  $\partial \in T_p\mathcal{M}$  zwei Darstellungen:

$$\partial = v_\varphi^m \partial_{x^m} = v_\psi^m \partial_{y^m} \quad (*)$$

**Ziel:** Berechnung von  $v_\varphi^1, \dots, v_\varphi^M$  aus  $v_\psi^1, \dots, v_\psi^M$

Glatter Koordinatenwechsel:  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \rightarrow \psi(U_\psi)$

$$\begin{aligned} \partial_{x^m} f &= (f \circ \varphi^{-1})'_0(\mathbf{e}_m) = (f \circ \psi^{-1})'_0(\psi \circ \varphi^{-1})'_0(\mathbf{e}_m) \\ &= \partial_{y^n} f \mathbf{e}^n (\psi \circ \varphi^{-1})'_0(\mathbf{e}_m) = ((\psi \circ \varphi^{-1})'_0)_m^n \partial_{y^n} f \end{aligned}$$

Also:  $\partial = v_\varphi^m \partial_{x^m} = v_\varphi^m ((\psi \circ \varphi^{-1})'_0)_m^n \partial_{y^n}$

Somit sogenanntes kontravariantes Transformationsverhalten zu (\*):

$$v_\psi^n = ((\psi \circ \varphi^{-1})'_0)_m^n v_\varphi^m$$

## Definition 8.15

Dualraum  $T_p^* \mathcal{M}$  zu Tangentialraum  $T_p \mathcal{M}$  heißt Kotangentialraum an  $p$   
Schnitte von  $T^* \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^* \mathcal{M}$  heißen Kovektorbündel  
Dies sind glatte Abbildungen  $X^* : \mathcal{M} \rightarrow T^* \mathcal{M}$  mit  $X^*(p) \in T_p^* \mathcal{M}$

Selbstverständlich hat  $T_p^* \mathcal{M}$  duale Basis zu  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^M}$

Diese duale Basis wird mit  $dx^1, \dots, dx^M$  bezeichnet und erfüllt:

$$dx^m(\partial_{x^n}) = \delta_n^m$$

Beachte: in der Literatur werden Indizes an  $dx^m$  oft unten gesetzt  
Wiederum kann  $dx^m$  lokal als Kovektorfeld aufgefasst werden  
Jedes Kovektorfeld  $X^*$  kann lokal geschrieben werden als

$$X^* = X_m^* dx^m$$

mit glatten Funktionen  $X_1^*, \dots, X_M^*$

# Koordinatenwechsel von Kovektoren

Set-up wie bei Koordinatenwechsel von Tangentialvektoren:

Glatter Koordinatenwechsel:  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \rightarrow \psi(U_\psi)$ . Dann

$$\partial = v_\varphi^n \partial_{x^n} = v_\psi^m \partial_{y^m} \in T_p \mathcal{M} \implies v_\psi^m = ((\psi \circ \varphi^{-1})'_0)^m_n v_\varphi^n$$

Nun transformieren Kovektoren mit inverser Abbildung (siehe oben)

Also gegeben zwei Darstellungen

$$v^* = v_n^\varphi dx^n = v_m^\psi dy^m \in T_p^* \mathcal{M}$$

gilt:

$$v_m^\psi = (((\psi \circ \varphi^{-1})'_0)^{-1})^n_m v_n^\varphi = (((\varphi \circ \psi^{-1})'_0)^n_m v_n^\varphi$$

da im Allgemeinen für Diffeomorphismus  $F$  gilt  $(F')_x^{-1} = (F^{-1})'_{F(x)}$

# Tensorfelder

## Definition 8.16

Zu  $K \geq 0$  und  $L \geq 0$  betrachte Tensoren aus  $T_L^K(T_p\mathcal{M})$

Ein Tensorfeld ist eine glatte Abbildung  $p \in \mathcal{M} \mapsto T(p) \in T_L^K(T_p\mathcal{M})$

## Beispiel 8.17

Ein Vektorfeld ist ein Tensorfeld der Stufe  $(1, 0)$

Ein Kovektorfeld ist ein Tensorfeld der Stufe  $(0, 1)$

Lokal kann jedes Tensorfeld nach den Basen entwickelt werden

$$T = T^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} \partial_{x^{n_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{n_K}} \otimes dx^{m_1} \otimes \dots \otimes dx^{m_L}$$

wobei nun  $T^{n_1, \dots, n_K}_{m_1, \dots, m_L} : U_\varphi \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen

Tensorfelder bilden Modul über  $C^\infty(\mathcal{M})$  durch punktweise Multiplik.

Differentialformen: antisymmetrische, kovariante Tensoren

## Definition 8.18 (Differentialformen)

Eine Differentialform vom Grad  $L$ , kurz auch  $L$ -Form, ist eine glatte Abbildung  $p \in \mathcal{M} \mapsto \omega(p) \in \Lambda_L(T_p\mathcal{M})$

Die Menge aller  $L$ -Formen wird mit  $\Omega_L(\mathcal{M})$  bezeichnet

Analog zur Grassmann Algebra definiert man auch den Vektorraum

$$\Omega(\mathcal{M}) = \bigoplus_{L=0}^M \Omega_L(\mathcal{M})$$

Lokal ist eine  $L$ -Form  $\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$  von der Gestalt (Koeff. antisym.):

$$\omega = \omega_{m_1, \dots, m_L} dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_L}$$

## Beispiel 8.19

0-Formen sind glatte reelle Funktionen, d.h.  $\Omega_0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$

1-Formen sind genau die Kovektorfelder

Beachte:  $\Omega_L(\mathcal{M})$  ist von unendlicher Dimension, genau wie  $C^\infty(\mathcal{M})$



## Definition 8.20 (Äußere Ableitung von Funktionen)

Zu  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  definiere die äußere Ableitung  $df \in \Omega_1(\mathcal{M})$

$$df(X) = X(f)$$

## Bemerkung 8.21

In Koordinaten ist dies

$$df = \partial_{x^m}(f) dx^m = \sum_{m=1}^M \partial_{x^m}(f) dx^m$$

denn dann für  $X = X^m \partial_{x^m}$ :

$$df(X) = \partial_{x^m}(f) dx^m(X^n \partial_{x^n}) = \partial_{x^m}(f) X^n \delta_m^n = X^m \partial_{x^m}(f) = X(f)$$

## Bemerkung 8.22

Beachte: Versuch aus Ableitungen  $\partial_{x^m}(f)$  Vektorfeld  $\sum_{m=1}^M \partial_{x^m}(f) \partial_{x^m}$  zu konstruieren schlägt fehl, weil dies koordinatenabhängig ist

## Definition 8.23 (Äußere Ableitung von Differentialformen)

$d : \Omega_L(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_{L+1}(\mathcal{M})$  in Koordinaten definiert durch

$$d(f dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_L}) = df \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_L}$$

und lineare Fortsetzung

Somit im Allgemeinen:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_{m_1, \dots, m_L} dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_L}) \\ &= (\partial_x^m \omega_{m_1, \dots, m_L}) dx^m \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_L} \end{aligned}$$

Beachte: Für  $L = 0$  stimmt dies mit obiger Definition 8.20 überein

## Satz 8.24

- (i)  $d$  ist linear
- (ii)  $d(fg) = (df)g + f(dg)$  für  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$
- (iii)  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^L \omega \wedge (d\eta)$  für  $\omega \in \Omega_L(\mathcal{M}), \eta \in \Omega_K(\mathcal{M})$
- (iv)  $d^2 = d \circ d = 0$

**Beweis:** (i) klar nach Koordinatendarstellung

(ii) nach  $d(fg) = \partial_{x_m}(fg) dx^m$  und Punktderivations-Eigenschaft von  $\partial_{x_m}$

(iii) folgt ebenfalls in Koordinatendarstellung da obiges  $dx^m$

durchkommutiert werden muss an die erste Stelle

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \eta) &= d(\omega_{n_1, \dots, n_L} \eta_{m_1, \dots, m_K} dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K}) \\&= \partial_{x^m}(\omega_{n_1, \dots, n_L} \eta_{m_1, \dots, m_K}) dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\&= (\partial_{x^m} \omega_{n_1, \dots, n_L}) \eta_{m_1, \dots, m_K} dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\&\quad + \omega_{n_1, \dots, n_L} (\partial_{x^m} \eta_{m_1, \dots, m_K}) dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\&= (\partial_{x^m} \omega_{n_1, \dots, n_L}) \eta_{m_1, \dots, m_K} dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K} \\&\quad + (-1)^L \omega_{n_1, \dots, n_L} (\partial_{x^m} \eta_{m_1, \dots, m_K}) dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \wedge dx^m \wedge dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iv)} \quad d^2\omega &= d((\partial_{x^m} \omega_{n_1, \dots, n_L}) dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L}) \\&= (\partial_{x^{m'}} \partial_{x^m} \omega_{n_1, \dots, n_L}) dx^{m'} \wedge dx^m \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} \\&= -(\partial_{x^{m'}} \partial_{x^m} \omega_{n_1, \dots, n_L}) dx^m \wedge dx^{m'} \wedge dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_L} = 0\end{aligned}$$

weil partielle Ableitungen vertauschen (Satz von Schwarz)



### Definition 8.25

$\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$  geschlossen  $\iff d\omega = 0$

### Definition 8.26

$\omega \in \Omega_L(\mathcal{M})$  exakt  $\iff \exists \eta \in \Omega_{L-1}(\mathcal{M})$  mit  $\omega = d\eta$

### Bemerkung 8.27

$\omega$  exakt  $\implies \omega$  geschlossen (da  $d^2 = 0$ )

Umkehrung gilt lokal:

### Satz 8.28 (Poincaré Lemma)

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^M$  sternförmig, d.h.  $\exists$  Stern  $p_0$  mit  $[p_0, p] \subset \mathcal{M} \forall p \in \mathcal{M}$   
Dann:  $\omega \in \Omega(\mathcal{M})$  geschlossen  $\implies \omega$  exakt

Global Unterschiede: de Rham Kohomologie

**Beweis:** siehe Literatur

# Pushforwards von Tangentialvektoren

$\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $M$  und  $N$

(evtl.  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ , oder anderes Extrem  $M \neq N$ )

Nach Definition (MP2):  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt  $\iff \forall$  Karten  $\varphi$  von  $\mathcal{M}$   
und  $\psi$  von  $\mathcal{N}$  ist  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  glatt

## Definition 8.29 (Pushforward = Verschieben)

Pushforward  $F_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$  auf Punkt-Derivationen definiert  
durch

$$(F_*(\partial))(f) = \partial(f \circ F) \quad , \quad f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

oder auf Wegableitungen:

$$(F_*(\partial_\gamma))(f) = \partial_t(f \circ F \circ \gamma(t))|_{t=0} \quad , \quad f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

Analog Pushforward von Vektorfeldern

## Bemerkung 8.30

Sei  $(F')_m^n = \langle \mathbf{e}_n | (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})'(\mathbf{e}_m) \rangle$ . Dann:

$$F_*(\partial_{x^m}^\varphi) = (F')_m^n \partial_{y^n}^\psi$$

Begründung:

$$\begin{aligned} (F_*(\partial_{x^m}^\varphi))(f) &= \partial_{x^m}^\varphi(f \circ F) \\ &= \partial_t f(F(\varphi^{-1}(t\mathbf{e}_m))) \Big|_{t=0} \\ &= \partial_t \left( f \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(t\mathbf{e}_m)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= (f \circ \psi^{-1})'_{\psi(F(0))} \left( \partial_t (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(t\mathbf{e}_m)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= (f \circ \psi^{-1})'_{\psi(F(0))} (\mathbf{e}_n (F')_m^n) \\ &= (F')_m^n (f \circ \psi^{-1})'_{\psi(F(0))} (\mathbf{e}_n) \\ &= (F')_m^n \partial_{y^n}^\psi f \end{aligned}$$

# Pullbacks von Kotangentialvektoren

## Definition 8.31 (Pullback = Zurückziehen)

Zu  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt, ist Pullback  $F^* : T_{F(p)}^* \mathcal{N} \rightarrow T_p^* \mathcal{M}$  gegeben durch

$$(F^* \omega)(v) = \omega(F_* v) \quad , \quad \omega \in T_{F(p)}^* \mathcal{N} \quad , \quad v \in T_p \mathcal{M}$$

Analog für Kovektorfeld  $\omega$  auf  $\mathcal{N}$  (d.h. 1-Form auf  $\mathcal{N}$ )

## Bemerkung 8.32

$$(\text{id}_{\mathcal{M}})^* = \text{id}_{T^* \mathcal{M}} \quad \text{und} \quad (F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

## Satz 8.33

Für 1-Form  $\omega$  auf  $\mathcal{N}$  und  $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N})$  gilt

$$F^*(f\omega) = (f \circ F) F^*(\omega) \quad , \quad F^* df = d(f \circ F)$$

Insbesondere  $d(F^* df) = 0$

**Beweis:** Für  $v \in T_p\mathcal{M}$  ist  $F_*v \in T_{F(p)}\mathcal{N}$  und somit:

$$F^*(f\omega)(v) = (f\omega)(F_*v) = f(F(p))\omega(F_*v) = ((f \circ F) F^*(\omega))(v)$$

Weiter für Vektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{M}$  und  $p \in \mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}(F^*df)(X)(p) &= df(F_*X)(F(p)) \\ &= (F_*X)(f)(F(p)) \\ &= X(f \circ F)(p) \\ &= (d(f \circ F))(X)(p)\end{aligned}$$

□

### Bemerkung 8.34

Falls  $F$  Diffeomorphismus, auch Pushforwards von Kovektoren:

$$F_* = (F^{-1})^* : T_p^*\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}^*\mathcal{N}$$

Ebenso Pullbacks von Tangentialvektoren

$$F^* = (F^{-1})_* : T_{F(p)}\mathcal{N} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$



# Pullbacks von Differentialformen

## Definition 8.35

$F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt. Pullback  $F^* : \Omega_L(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega_L(\mathcal{M})$  von Differentialformen gegeben durch, für  $\omega \in \Omega_L(\mathcal{N})$  und  $v_1, \dots, v_L \in T_p\mathcal{M}$ ,

$$(F^*\omega)(v_1, \dots, v_L) = \omega(F_*v_1, \dots, F_*v_L)$$

## Satz 8.36

Für  $\omega \in \Omega_L(\mathcal{N})$  und  $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N})$  gilt

$$F^*(f\omega) = (f \circ F) F^*(\omega) \quad , \quad F^*d\omega = d(F^*\omega)$$

**Beweis:** Erste Formel wie in Satz 8.33

Zweite Formel für  $L = 0$  klar und für  $L = 1$  Satz 8.33

Allgemein: wegen  $\mathbb{R}$ -Linearität betrachte nur  $\omega = f dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}$

Duale Beziehung zu Bemerkung 8.30:  $F^*(dy^l) = (F')^l_k dx^k$

$$\begin{aligned} F^* d\omega &= F^*((\partial_{y^l} f) dy^l \wedge dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \\ &= (\partial_{y^l} f) \circ F F^*(dy^l \wedge dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \\ &= (\partial_{y^l} f) \circ F F^*(dy^l) \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \\ &= (\partial_{y^l} f) \circ F (F')^l_k dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \\ &= \partial_{x^k} (f \circ F) dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} dF^*\omega &= d(f \circ F F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L})) \\ &= (d(f \circ F)) F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) \\ &\quad + f \circ F d(F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L})) \\ &= \partial_{x^k} (f \circ F) dx^k \wedge F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) + 0 \end{aligned}$$

Letzteres weil  $F^*(dy^{m_1} \wedge \dots \wedge dy^{m_L}) = F^*(dy^{m_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dy^{m_L})$   
und  $dF^*(dy^m) = 0$  nach Satz 8.33 □

### Satz 8.37

Sei  $\dim(\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{N}) = M$  und  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt

Weiter sei  $\varphi$  Karte auf  $\mathcal{M}$  und  $\psi$  Karte auf  $\mathcal{N}$  und setze

$$(F')_m^n = \langle \mathbf{e}_n | (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})'(\mathbf{e}_m) \rangle$$

Dann gilt lokal für  $M$ -Form (maximalen Grades):

$$F^*(f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^M) = \det(F') (f \circ F) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M$$

**Beweis:** Dies ist Satz 7.32 angewandt auf Linearisierung von  $F$ , welche nach Bemerkung 8.30 erfüllt:

$$F_*(\partial_{x^m}^\varphi) = (F')_m^n \partial_{y^n}^\psi$$



## 9 Orientierung und Integration auf Mannigfaltigkeiten

### Definition 9.1 (Orientierung in der linearen Algebra)

$V$  reeller Vektorraum (nicht über  $\mathbb{C}$ )

- (i) Zwei Basen  $b_1, \dots, b_M$  und  $e_1, \dots, e_M$  sind gleichorientiert  
 $\iff \det(A) > 0$  für Basiswechsel  $A(b_m) = e_m, m = 1, \dots, M$
- (ii) Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation mit 2 Klassen
- (iii)  $V$  orientiert  $\iff$  eine Klasse als positiv ausgezeichnet
- (iv) Sei  $L : V \rightarrow W$  Isomorphismus zwischen orientierten VR  
 $L$  orientierungstreu  $\iff L(\text{positive Basis})$  ist positiv

### Bemerkung 9.2

$0 \neq \omega \in \Lambda_M(V)$  alternierende Form höchsten Grades

$\omega$  legt Orientierung fest durch

$$b_1, \dots, b_M \text{ positiv} \iff \omega(b_1, \dots, b_M) > 0$$

### Definition 9.3 (Orientierung auf Mannigfaltigkeit)

Eine Orientierung auf  $\mathcal{M}$  ist eine Orientierung in jedem  $T_p\mathcal{M}$  mit:

$\forall p \in \mathcal{M} \exists$  Karten  $(\varphi, U_\varphi)$  mit  $p \in U_\varphi$  so dass für alle  $q \in U_\varphi$

$$(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^M}) \text{ positiv in } T_q\mathcal{M}$$

Ein solche Karte heißt dann positiv oder positiv orientiert

Wenn Orientierung auf  $\mathcal{M}$  existiert, so heißt  $\mathcal{M}$  orientierbar

### Bemerkung 9.4

Orientierung von  $\mathcal{M}$  globale Eigenschaft! Lokal immer möglich

### Satz 9.5

$\mathcal{M}$  orientierbar  $\iff \exists$  Atlas  $\mathcal{A}$  so dass für alle Karten  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ :

$$\det((\psi \circ \varphi^{-1})') > 0 \quad \text{auf } \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

**Beweis:** Verwende nur positive Karten für  $\mathcal{A}$

Dann Kartenwechsel orientierungstreu □

## Satz 9.6

$\mathcal{M}$  orientierbar  $\iff \exists$  eine sogenannte Volumenform auf  $\mathcal{M}$   
d.h.  $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M})$  maximalen Grades  $M = \dim(\mathcal{M})$  mit  $\omega_p \neq 0 \forall p \in \mathcal{M}$

**Beweis:** " $\Leftarrow$ " Nach Bemerkung 9.2 legt  $\omega$  in  $T_p\mathcal{M}$  Orientierung fest  
" $\Rightarrow$ " Dies verwendet folgende Begrifflichkeit

## Definition 9.7 (Zerlegung der Eins)

Sei  $(U)_{U \in \mathcal{A}}$  offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$

Dann heißt  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine  $\mathcal{A}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins

$\iff$

- (i)  $g_i : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  glatt mit Träger  $\text{supp}(g_i) \subset U$  für ein  $U \in \mathcal{A}$
- (ii) Für jedes  $p \in \mathcal{M}$  gibt es eine Umgebung von  $p$ , auf der nur endlich viele  $g_i$  ungleich Null sind
- (iii)  $\sum_{i \geq 1} g_i(p) = 1$  für alle  $p \in \mathcal{M}$

Existenz von Zerlegung der Eins zu Atlas  $\mathcal{A}$  wird unten bewiesen

Sei also  $\mathcal{A} = (\varphi_i, U_{\varphi_i})_{i \geq 1}$  Atlas mit positiven Karten

und  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine  $\mathcal{A}$  untergeordnete Zerlegung der Eins

Auf jedem Kartengebiet  $U_{\varphi_i}$  gibt es nicht-verschwindende  $M$ -Form

$$(\varphi_i)^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M)$$

Eine glatte  $M$ -Form auf ganz  $\mathcal{M}$  ist dann

$$\omega_i = g_i (\varphi_i)^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M)$$

Nun ist eine Volumenform auf  $\mathcal{M}$  gegeben durch

$$\omega = \sum_{i \geq 1} \omega_i$$

weil Summanden sich wegen gleicher Orientierung nicht aufheben □

### Bemerkung 9.8

Es gibt nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten, z.B. das Möbiusband

$\mathcal{M} = (\mathbb{R} \times (-1, 1))/\mathbb{Z}$  bez. Wirkung  $k \cdot (x, y) = (x + k, (-1)^k y)$

## Satz 9.9

$\exists$  Zerlegung der Eins zu Atlas von  $\mathcal{M}$

**Beweis: Fakt 1:**  $\exists f : \mathbb{R}^M \rightarrow [0, 1]$  glatte Funktion mit (Konstruktion?)

$$f|_{B_1(0)} = 1 \quad , \quad \text{supp}(f) \subset B_2(0)$$

**Fakt 2:**  $\exists$  Folge (in  $\mathcal{M}$ ) offener Mengen  $O_n$  mit kompaktem Abschluss mit

$$\overline{O_n} \subset O_{n+1} \quad , \quad \mathcal{M} = \bigcup_{n \geq 1} O_n$$

**weil:** Offene Kugeln  $B_{\frac{1}{n}}(q) \subset \mathbb{R}^{M'}$  mit  $q \in \mathbb{Q}^{M'}$  Basis der Topologie

Dann  $\mathcal{M} \cap B_{\frac{1}{n}}(q) \subset \mathbb{R}^{M'}$  präkompakte Basis in  $\mathcal{M}$  (Unterraumtop.)

Sei  $(O'_n)_{n \geq 1}$  Abzählung dieser Mengen

Dann setze:  $O_n = O'_1 \cup \dots \cup O'_n$

◇

Beachte Zerlegung in “Ringe”:

für  $n \geq 3$  ist kompaktes  $\overline{O_n} \setminus O_{n-1}$  enthalten in offenem  $O_{n+1} \setminus \overline{O_{n-2}}$



Zu  $p \in \mathcal{M}$  sei

$$n_p = \max\{n \in \mathbb{N} \mid p \notin O_n\}$$

Sei  $(U, \varphi)$  Karte mit  $p \in U$  und wähle  $V_p \subset U_p \subset U \cap O_{n_p+2} \setminus \overline{O_{n_p}}$   
so dass  $B_2(0) \subset \varphi(U_p)$  und  $\varphi(V_p) \subset B_1(0)$  (ggfs. Karte skalieren)

Definiere  $f_p : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  durch

$$f_p(q) = \begin{cases} 0, & q \notin U_p \\ f \circ \varphi(q), & q \in U_p \end{cases}$$

Nun:  $(V_p \cap O_3)_{p \in \mathcal{M}}$  offene Überdeckung von  $\overline{O_2}$

und:  $(V_p \cap (O_{n_p+1} \setminus \overline{O_{n_p-2}}))_{p \in \mathcal{M}}$  offene Überdeckung von  $\overline{O_n} \setminus O_{n-1}$

Wähle jeweils endliche Teilüberdeckung aus

Dies liefert eine lokal endliche Überdeckung  $(V_p)_{p \in P}$  von  $\mathcal{M}$

Nun setze für  $p \in P \subset \mathcal{M}$ :

$$g_p = \frac{f_p}{\sum_{p' \in P} f_{p'}}$$

□

## Definition 9.10 (Integral über orientierte Mannigfaltigkeiten)

Sei  $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M})$  und  $(U_\varphi, \varphi)$  positiv orientierte Karte

Dann  $(\varphi^{-1})^*\omega = \omega^\varphi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M = \omega^\varphi dx \in \Omega_M(\varphi(U_\varphi))$

Hierbei ist  $dx$  Lebesgue-Maß auf  $\varphi(U_\varphi) \subset \mathbb{R}^M$

Falls  $\omega^\varphi$  integrierbar, setze für messbares  $A \subset U_\varphi$

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(A)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(A)} \omega^\varphi dx$$

Wenn  $(g_i)_{i \geq 1}$  Zerlegung der Eins zu positiven Atlas  $(U_{\varphi_i}, \varphi_i)_{i \geq 1}$  und Integrierbarkeit  $\sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} |g_i \omega| < \infty$  vorliegt,

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i \geq 1} \int_{U_{\varphi_i}} g_i \omega = \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} g_i \omega$$

## Satz 9.11

*Integral unabhängig von Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins*

**Beweis:** Zunächst zu  $\int_A \omega$

Sei  $A \subset U_\psi$  für zweite positive Karte  $(U_\psi, \psi)$

Hierzu  $(\psi^{-1})^* \omega = \omega^\psi dy^1 \wedge \dots \wedge dy^M = \omega^\psi dy$

Für glatte Transformation  $F = \psi \circ \varphi^{-1}$  gilt nach Satz 8.37

$$F^*(\psi^{-1})^* \omega = F^*(\omega^\psi dy^1 \wedge \dots \wedge dy^M) = \det(F') \omega^\psi \circ F dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M$$

Da  $\det(F') > 0$ , mit Jacobi'scher Transformationsformel (Satz 4.11):

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A)} \omega^\varphi dx &= \int_{\varphi(A)} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(A)} (\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\varphi(A)} (\psi \circ \varphi^{-1})^* (\psi^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(A)} F^* (\psi^{-1})^* \omega \\ &= \int_{F^{-1}(\psi(A))} \det(F') \omega^\psi \circ F dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M \\ &= \int_{\psi(A)} \omega^\psi dy^1 \wedge \dots \wedge dy^M = \int_{\psi(A)} \omega^\psi dy \end{aligned}$$

Auch  $(\tilde{g}_j)_{j \geq 1}$  Zerlegung der Eins zu positiven Atlas  $(U_{\tilde{\varphi}_j}, \tilde{\varphi}_j)_{j \geq 1}$

Für jedes  $i$  gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} g_i \omega = \sum_{j \geq 1} \int_{\mathcal{M}} \tilde{g}_j g_i \omega$$

Nach Obigem kann  $\int_{\mathcal{M}} \tilde{g}_j g_i \omega$  in beiden Karten berechnet werden

Wegen Integrierbarkeit können Summen vertauscht werden.

Somit

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} g_i \omega &= \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} \tilde{g}_j g_i \omega \\ &= \sum_{j \geq 1} \int_{\mathcal{M}} \tilde{g}_j \omega \end{aligned}$$



# Elementare Eigenschaften des Integrals

## Satz 9.12

- (i) *Abbildung  $\omega \in \Omega_M(\mathcal{M}) \mapsto \int_{\mathcal{M}} \omega$  linear*
- (ii)  *$\overline{\mathcal{M}}$  Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit umgekehrter Orientierung. Dann*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}} \omega = - \int_{\mathcal{M}} \omega$$

- (iii)  *$F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  orientierungstreuer Diffeomorphismus. Dann*

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} F^* \omega$$

**Beweis:** (i) und (ii) offensichtlich

(iii) Nach Definition des Integrals ausreichend:

nur Fall  $\text{supp}(\omega) \subset U_\psi$  für eine orientierte Karte auf  $\mathcal{N}$

Dies folgt analog zu Kartenwechsel aus Transformationsformel □

## Definition 9.13 (Integration über Formen von niedrigerem Grad)

$\mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}$   $N$ - und  $M$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten

Sei  $N \leq M$  und  $\omega \in \Omega_N(\mathcal{M})$

Zudem  $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  glatt und  $F^*\omega$  integrierbar über  $\mathcal{N}$

Definiere Integral  $\int_F \omega$  über  $\omega$  entlang  $F$ , oft mit  $\int_{F(\mathcal{N})} \omega$  bezeichnet:

$$\int_F \omega = \int_{\mathcal{N}} F^* \omega$$

## Beispiel 9.14 (Kurvenintegral)

$\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$  glatt und  $\omega = \omega_m dx^m \in \Omega_1(\mathcal{M})$  1-Form. Dann

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{(0,1)} \gamma^* \omega = \int_0^1 dt \omega_m(\gamma(t)) (\varphi^m \circ \gamma)'(t)$$

weil

$$\gamma^*(dx^m)(\partial_t) = dx^m(\gamma_*(\partial_t)) = (\gamma_*(\partial_t))(\varphi^m) = \frac{d}{dt} \varphi^m(\gamma(t))$$

## Definition 9.15 (Glatte Abbildungen auf Halbräumen)

Sei  $\mathbb{R}_{\geq}^M = \{x \in \mathbb{R}^M \mid x^M \geq 0\}$  mit Unterraumtopologie vom  $\mathbb{R}^M$

d.h.  $U \subset \mathbb{R}_{\geq}^M$  offen  $\iff U = V \cap \mathbb{R}_{\geq}^M$  mit  $V \subset \mathbb{R}^M$  offen

Rand hiervon ist  $\partial\mathbb{R}_{\geq}^M = \{x \in \mathbb{R}^M \mid x^M = 0\}$

Nun  $F : U \subset \mathbb{R}_{\geq}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  glatt  $\iff \exists$  glatte Erweiterung  $\tilde{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^N$

Für  $x \in \partial\mathbb{R}_{\geq}^M$  setze  $F'_x = \tilde{F}'_x$

## Bemerkung 9.16

Definition von  $F'_x$  unabhängig von Wahl von  $\tilde{F}$  da  $\tilde{F}'$  stetig

## Satz 9.17

Für  $U, V \subset \mathbb{R}_{\geq}^M$  offen sei  $F : U \rightarrow V$  Diffeomorphismus ( $F, F^{-1}$  glatt)

$\implies F(U \cap \partial\mathbb{R}_{\geq}^M) = V \cap \partial\mathbb{R}_{\geq}^M$  (d.h. Rand wird auf Rand abgebildet)

und  $F|_{U \cap \partial\mathbb{R}_{\geq}^M}$  Diffeomorphismus

**Beweis:** (nur Analysis) Sei  $\text{Int}(U) = U \setminus \partial \mathbb{R}_{\geq}^M$

**Behauptung 1:** Wenn  $x \in \text{Int}(U)$  und  $F(x) \in \partial \mathbb{R}_{\geq}^M$ , so  $\text{Ran}(F'_x) \subset \partial \mathbb{R}_{\geq}^M$

**weil:** für alle  $v \in \mathbb{R}^M$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $F(x + tv) = F(x) + tF'_x(v) + o(t)$

Also für  $M$ -te Komponente und für alle  $t$  ausreichend klein:

$$0 \leq F(x + tv)_M = F(x)_M + tF'_x(v)_M + o(t)$$

Somit  $F'_x(v)_M = 0$  für alle  $v$ . Also  $\text{Ran}(F'_x) \subset \partial \mathbb{R}_{\geq}^M$  ◇

**Behauptung 2:**  $U \subset \text{Int}(\mathbb{R}_{\geq}^M) \iff V \subset \text{Int}(\mathbb{R}_{\geq}^M)$

**weil:** “ $\implies$ “ Sonst  $\exists x \in U$  mit  $F(x) \in \partial \mathbb{R}_{\geq}^M$

Dann ist  $F'_x$  nach Behauptung 1 kein Isomorphismus

Widerspruch zu  $F$  Diffeomorphismus  $\nexists$  Für Umkehrung  $F^{-1}$  ◇

Also:  $F : \text{Int}(U) \rightarrow \text{Int}(V)$  Diffeomorphismus

Somit Rand auf Rand bijektiv. Auch Diffeomorphismus □



### Definition 9.18 (Mannigfaltigkeit mit Rand)

Mannigfaltigkeit mit Rand genau wie vorher, nur dass

Bilder  $\varphi(U_\varphi)$  der Kartenabbildungen  $\varphi$  offen in  $\mathbb{R}_{\geq}^M$  sind

Die Kartenwechsel sind dann Diffeomorphismen wie in Satz 9.17

Rand von  $\mathcal{M}$  ist  $\partial\mathcal{M} = \{p \in \mathcal{M} \mid \exists \varphi \text{ mit } \varphi(p) \in \partial\mathbb{R}_{\geq}^M\}$

Beachte: Mannigfaltigkeit Spezialfall von Mannigfaltigkeit mit Rand

### Satz 9.19

*Rand  $\partial\mathcal{M}$  wohldefinierte  $(M - 1)$ -dimensionale Mfkt mit Atlas*

$$\partial\mathcal{A} = \{\varphi|_{U_\varphi \cap \partial\mathcal{M}} \mid (U_\varphi, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

*Außerdem ist  $\text{Int}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$  Mannigfaltigkeit ohne Rand*

**Beweis:** Für  $p \in U_\psi$  gilt  $\psi(p) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \in \partial\mathbb{R}_{\geq}^M$  nach Satz 9.17

Kartenwechsel eingeschränkt auf Rand auch glatt nach Satz 9.17  $\square$

Beachte: Rand ist immer eine Mannigfaltigkeit ohne Rand

### Definition 9.20 (Induzierte Orientierung auf dem Rand)

Sei  $\mathcal{M}$  orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand mit  $\dim(\mathcal{M}) = M \geq 2$

In  $p \in \partial\mathcal{M}$  sind  $v_1, \dots, v_{M-1} \in T_p\partial\mathcal{M}$  positiv orientiert

$\iff$  für nach außen zeigenden Vektor  $w_\perp \in T_p\mathcal{M}$  ist

$w_\perp, v_1, \dots, v_{M-1}$  positiv orientiert in  $T_p\mathcal{M}$  (vorgegebene Orient.)

Äquivalent hierzu: Restriktionen negativer Karten auf Rand sind positiv

### Beispiel 9.21

- (i)  $\mathcal{M} = [0, 1]$  mit  $\mathcal{A} = \{\text{id}_{(0,1)}, \text{id}_{[0,1)}\}$ ,  $\partial\mathcal{M} = \{0, 1\}$  und  $\text{Int} = (0, 1)$
- (ii)  $\mathcal{M} = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^M$  mit  $\partial\mathcal{M} = S^{M-1}$ , zwei Karten
- (iii)  $\mathcal{M} = [0, 1] \times S^1$  Zylinderoberfläche  
Dann  $\partial\mathcal{M} = S^1 \times S^1$ , beide in umgekehrter Richtung orientiert

## Satz 9.22 (Satz von Stokes)

$\mathcal{M}$   $M$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial\mathcal{M}$

Sei  $M \geq 2$ . Auf  $\partial\mathcal{M}$  ist die Orientierung von  $\mathcal{M}$  induziert

Sei Einbettung  $i: \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

Weiter:  $\omega \in \Omega_{M-1}(\mathcal{M})$  mit kompakten Träger

Wenn  $d\omega$  und  $i^*\omega$  integrierbar, dann

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega$$

Insbesondere: wenn  $\mathcal{M}$  keinen Rand hat, dann  $\int_{\mathcal{M}} d\omega = 0$

Beachte: Fall von Dimension  $M = 1$  ist genau der Fundamentalsatz

Dann  $\mathcal{M} = [a, b]$  mit  $\partial\mathcal{M} = \{a, b\}$  wobei  $b$  positiv und  $a$  negativ

Eine Nullform  $\omega = f$  auf  $\mathcal{M}$  ist eine Funktion und  $i^*\omega = f|_{\{a,b\}}$ . Also:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_a^b df = f(b) - f(a) = \int_{\partial\mathcal{M}} f = \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega$$

## Beweis des Satzes von Stokes:

Zuerst Spezialfall  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\geq}^M$  und  $\omega$  mit Träger in  $(-R, R)^{M-1} \times [0, R)$

Dann:  $\omega = \omega_m dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \dots \wedge dx^M$

wobei  $\omega_m$  glatte Funktionen und  $\widehat{dx^m}$  heißt:  $dx^m$  fehlt. Nun

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{m=1, \dots, M} \partial_{x^m} \omega_m dx^m \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \dots \wedge dx^M \\ &= \sum_{m=1, \dots, M} (-1)^{m-1} \partial_{x^m} \omega_m dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M\end{aligned}$$

Also mit Fubini und  $\int_{-R}^R dx^m \partial_{x^m} \omega_m = 0$  für  $m < M$  (Hauptsatz):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} d\omega &= \sum_{m=1, \dots, M} (-1)^{m-1} \int_{-R}^R dx^1 \dots \int_{-R}^R dx^{M-1} \int_0^R dx^M \partial_{x^m} \omega_m \\ &= (-1)^{M-1} \int_{-R}^R dx^1 \dots \int_{-R}^R dx^{M-1} \left( \int_0^R dx^M \partial_{x^M} \omega_M \right) \\ &= (-1)^M \int_{-R}^R dx^1 \dots \int_{-R}^R dx^{M-1} \omega_M(x_1, \dots, x_{M-1}, 0)\end{aligned}$$

Andererseits:  $i : \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ist  $i(\tilde{x}) = (\tilde{x}, 0)$  mit  $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^{M-1})$  und

$$\begin{aligned}(i^*\omega)_{\tilde{x}}(v_1, \dots, v_{M-1}) &= \omega_{(\tilde{x}, 0)}(i_*v_1, \dots, i_*v_{M-1}) \\ &= \omega_M(\tilde{x}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{M-1}(v_1, \dots, v_{M-1})\end{aligned}$$

weil  $v_1, \dots, v_{M-1} \in \partial\mathbb{R}_{\geq}^M$  und somit nur dieser Summand  $\neq 0$

Zudem Berechnung der Orientierung Orient:

$$\begin{aligned}\text{Orient}(x^1, \dots, x^{M-1}) &= \text{Orient}(-x^M, x^1, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)\text{Orient}(x^M, x^1, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)^2\text{Orient}(x^1, x^M, x^2, \dots, x^{M-1}) \\ &= (-1)^M\text{Orient}(x^1, \dots, x^M) \\ &= (-1)^M\end{aligned}$$

Also

$$\int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega = (-1)^M \int_{-R}^R dx^1 \dots \int_{-R}^R dx^{M-1} \omega_M(x^1, \dots, x^{M-1}, 0) = \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

nach Vergleich mit Obigem. Also Spezialfall gezeigt

Allgemeiner sei nun  $\text{supp}(\omega) \subset U_\varphi$  für eine positive Karte  $\varphi$

Dann  $\varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^M$  orientierungstreuer Diffeomorphismus mit

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{M} & \xrightarrow{i} & \mathcal{M} \\ \downarrow \varphi|_{\partial\mathcal{M}} & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^{M-1} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}_{\geq}^M \end{array}$$

gilt

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\mathbb{R}_{\geq}^M} (\varphi^{-1})^*(d\omega) \quad (\text{Definition des Integrals})$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq}^M} d(\varphi^{-1})^*(\omega) \quad (\text{Satz 8.36})$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}_{\geq}^M} i^*(\varphi^{-1})^*(\omega) \quad (\text{Spezialfall})$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}_{\geq}^M} ((\varphi|_{\partial\mathcal{M}})^{-1})^* i^*(\omega) \quad (\text{obiges Diagramm})$$

$$= \int_{\partial\mathcal{M}} i^*\omega \quad (\text{Definition des Integrals})$$

Für den allgemeinen Fall, sei  $\mathcal{A} = ((U_{\varphi_i}, \varphi_i))_{i \geq 1}$  orientierter Atlas und  $(g_i)_{i \geq 1}$  untergeordnete Zerlegung der Eins

Dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{M}} \omega &= \sum_{i \geq 1} \int_{\partial \mathcal{M}} g_i \omega \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} d(g_i \omega) && \text{(2. Spezialfall)} \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} dg_i \omega + \sum_{i \geq 1} \int_{\mathcal{M}} g_i d\omega \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\left(\sum_{i \geq 1} g_i\right) \omega + \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{i \geq 1} g_i\right) d\omega \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\omega \end{aligned}$$



## Beispiel 9.23

Sei  $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|(x, y)\| \leq 2\}$  abgeschlossener Ring

Rand:  $\partial\mathcal{M} = S_1 \cup S_2$  mit  $S_j = \{(x, y) \in \mathcal{M} \mid \|(x, y)\| = j\}$

Orientierung von  $\mathbb{R}^2$  induziert

Innerer Kreis von  $\partial\mathcal{M}$  im Uhrzeigersinn, äußerer umgekehrt

Sei

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Omega_1(\mathcal{M})$$

Diese Form ist geschlossen:

$$\begin{aligned}d\omega &= \left( \partial_x \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy + \left( \partial_y \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx \\ &= \left( \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy \\ &= 0\end{aligned}$$



## Beispiel (Fortsetzung)

Nun ist  $t \in [0, 2\pi) \mapsto (j \cos(t), j \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$  Parametrisierung von  $S_j$  wobei Orientierung auf  $S_2$  positiv, auf  $S_1$  negativ. Zudem

$$i_j^* \omega = \frac{j \cos(t) d(j \sin(t)) - j \sin(t) d(j \cos(t))}{(j \cos(t))^2 + (j \sin(t))^2} = dt$$

und somit  $\int_{S_2} i_2^* \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$  und analog  $\int_{S_1} i_1^* \omega = -2\pi$ . Also

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega = 0 = \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

## Beispiel 9.24 (Variation zu Obigem)

$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|(x, y)\| \leq 2\}$  nicht kompakt mit Rand  $\partial \mathcal{M} = S_2$

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = 0 \neq 2\pi = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega$$

Voraussetzung an kompakten Träger (hier  $\mathcal{M}$ ) ist also wesentlich

# Gauss'scher Divergenzsatz

Erster Spezialfall von Stokes. Verwendet Geometrie des  $\mathbb{R}^M$

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^M$  kompakte  $M$ -Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial\mathcal{M}$

Orientierung ist vom  $\mathbb{R}^M$  geerbt. Diese garantiert auch Existenz von

$N : \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^M$  Hauptnormalenvektorfeld auf  $\partial\mathcal{M}$  (nach außen)

Flächenelement auf  $\partial\mathcal{M}$  ist nun durch  $N = (N^1, \dots, N^M)$  gegeben:

$$dS = \sum_{m=1, \dots, M} (-1)^{m+1} N^m dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \dots \wedge dx^M \in \Omega_{M-1}(\partial\mathcal{M})$$

Auch:  $dS = \langle N | d\mathbf{S} \rangle$  wobei  $d\mathbf{S}$  passende vektorwertige Form

Divergenz zu Vektorfeld  $x \in \mathcal{M} \mapsto X(x) = (X^1, \dots, X^M)^T \in T_x\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^M$

$$\operatorname{div}(X) = \partial_{x^m} X^m = \sum_{m=1, \dots, M} \partial_{x^m} X^m$$

## Satz 9.25 (Gauss'scher Divergenzsatz)

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(X) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle N | X \rangle dS$$

## Formeln im Fall $M = 3$

Dann also  $\partial M$  2-dimensionale Fläche

Normalenfeld in  $x \in \partial M$ :

$$N(x) = \pm \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}, \quad v_1, v_2 \in T_x \partial M \cong \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Hierbei ist  $\times$  Kreuzprodukt und  $\| \cdot \|$  euklidische Länge (Skalarprodukt)

Vorzeichen so gewählt, dass  $x + t N(x) \notin M$  für  $t > 0$  klein. Außerdem:

$$dS = \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ -dx^1 \wedge dx^3 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix}$$

In Karte  $r = (r_1, r_2, r_3) = \varphi^{-1}(y^1, y^2) \in \partial M \subset \mathbb{R}^3$  ist dies

$$N(r) = \pm \frac{\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r}{\|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\|}$$

Nun  $d\mathbf{S}$  in gleicher Karte:

$$\begin{aligned}d\mathbf{S} &= \begin{pmatrix} (\partial_{y^1} r_2 dy^1 + \partial_{y^2} r_2 dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_3 dy^1 + \partial_{y^2} r_3 dy^2) \\ (\partial_{y^1} r_3 dy^1 + \partial_{y^2} r_3 dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_1 dy^1 + \partial_{y^2} r_1 dy^2) \\ (\partial_{y^1} r_1 dy^1 + \partial_{y^2} r_1 dy^2) \wedge (\partial_{y^1} r_2 dy^1 + \partial_{y^2} r_2 dy^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{y^1} r_2 \partial_{y^2} r_3 - \partial_{y^1} r_3 \partial_{y^2} r_2 \\ \partial_{y^1} r_3 \partial_{y^2} r_1 - \partial_{y^1} r_1 \partial_{y^2} r_3 \\ \partial_{y^1} r_1 \partial_{y^2} r_2 - \partial_{y^1} r_2 \partial_{y^2} r_1 \end{pmatrix} dy^1 \wedge dy^2 = \partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r dy^1 \wedge dy^2\end{aligned}$$

Also in Karte  $\varphi$ :

$$(\varphi^{-1})^*(d\mathbf{S}) = (\varphi^{-1})^*(\langle N | d\mathbf{S} \rangle) = \|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\| dy^1 \wedge dy^2$$

Also in Karte und bis auf Vorzeichen (was von Wahl der Karte abhängt):

$$\int_{\partial\mathcal{M}} f d\mathbf{S} = \pm \int dy^1 \int dy^2 f(r(y^1, y^2)) \|\partial_{y^1} r \times \partial_{y^2} r\|$$

**Beweis** von Satz 9.25: Satz von Stokes für die Form  $\omega \in \Omega_{M-1}(\mathcal{M})$ :

$$\omega = \sum_{m=1, \dots, M} (-1)^{m+1} X^m dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^m} \wedge \dots \wedge dx^M = \langle X | d\mathbf{x} \rangle$$

wobei  $d\mathbf{x}$  ein Vektor von  $(M-1)$ -Formen definiert durch obige Gleichung (Einschränkung  $i^*d\mathbf{x}$  auf  $\partial\mathcal{M}$  ist genau  $d\mathbf{S}$ ). Dann

$$d\omega = \operatorname{div}(X) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^M$$

und die Einschränkung  $i^*\omega$  auf  $\partial\mathcal{M}$  ist, für  $v_1, \dots, v_{M-1} \in T_x\partial\mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} i^*\omega(v_1, \dots, v_{M-1}) &= \omega(v_1, \dots, v_{M-1}) = \langle X | d\mathbf{S} \rangle(v_1, \dots, v_{M-1}) \\ &= \langle X | N \rangle \langle N | d\mathbf{S} \rangle(v_1, \dots, v_{M-1}) + \sum_{j=1, \dots, M-1} \langle X | w_j \rangle \langle w_j | d\mathbf{S} \rangle(v_1, \dots, v_{M-1}) \end{aligned}$$

mit  $w_1, \dots, w_{M-1}$  ONB von  $T_x\partial\mathcal{M}$ , also  $N, w_1, \dots, w_{M-1}$  ONB von  $\mathbb{R}^M$

Mit Rotationsinvarianz und Satz 7.30 folgt  $\langle w_j | d\mathbf{S} \rangle(v_1, \dots, v_{M-1}) = 0$

Also  $i^*\omega = \langle X | N \rangle d\mathbf{S}$

□

## Beispiel 9.26

Sei  $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1\}$  Ellipse zu  $a, b > 0$

Parametrisierung von  $\partial\mathcal{M}$  (strikt: 2 Karten) ist:

$$\varphi^{-1}(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi)$$

In Karte  $N(t) = (b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t))^{-\frac{1}{2}} (b \cos(t), a \sin(t))^T$ . Also

$$\begin{aligned} dS &= \langle N | d\mathbf{S} \rangle = \langle N | (dy, -dx)^T \rangle \\ &= (b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t))^{-\frac{1}{2}} (b \cos(t) d(b \sin(t)) - a \sin(t) d(a \cos(t))) \\ &= (b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t))^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Nun sei  $X = (\alpha y, \beta x)$ . Dann  $\operatorname{div}(X) = 0$  und in der Tat

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \langle N | X \rangle dS = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} b \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha b \sin(t) \\ \beta a \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

# Klassischer Satz von Kelvin-Stokes

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Fläche mit Rand  $\partial\mathcal{M}$

Sei  $x \in \mathcal{M} \mapsto X(x) \in \mathbb{R}^3$  Vektorfeld (dies ist *nicht* Schnitt von  $T\mathcal{M}$ )

Betrachte die zugehörige 1-Form (Indexkonflikt wegen Hochziehen):

$$\omega = X^1 dx^1 + X^2 dx^2 + X^3 dx^3 = \langle X | d\mathbf{s} \rangle \in \Omega_1(\mathcal{M})$$

mit  $d\mathbf{s} = (dx^1, dx^2, dx^3)^T$ . Wir benötigen (mit Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$ ):

$$d\omega = \sum_{i=1,2,3} (\partial_{x^i} X_{i+1} - \partial_{x^{i+1}} X_i) dx^i \wedge dx^{i+1} \quad (\text{zyklisch})$$

$$= \langle \nabla \times X | d\mathbf{S} \rangle = \langle \nabla \times X | N \rangle dS \quad (\text{wie in Satz 9.25})$$

Also folgt aus allgemeinem Satz von Stokes:

## Satz 9.27 (Satz von Kelvin-Stokes)

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \times X | d\mathbf{S} \rangle = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X | d\mathbf{s} \rangle$$

# 10 Funktionentheorie

Die Funktionentheorie betrachtet folgenden Funktionentyp:

## Definition 10.1

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig

$f$  heißt holomorph auf  $D \iff$  für alle  $z \in D \exists$  komplexe Ableitung:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

## Bemerkung 10.2

Auf den ersten Blick sieht dies wie eine eindimensionale Ableitung aus. Wesentlich ist aber, dass  $h$  hier komplex und reell zweidimensional ist.

Für Richtungsableitungen (nach  $x = \Re e(z)$  und  $y = \Im m(z)$ ) gilt:

$$\partial_x f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z + \epsilon) - f(z)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z + i\epsilon) - f(z)}{i\epsilon} = -i\partial_y f(z)$$

wobei  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Dies führt zum folgenden Satz



# Cauchy-Riemann Gleichungen

## Satz 10.3

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann  $f$  holomorph auf  $D \iff$  Cauchy-Riemann Gleichungen gelten auf  $D$ :

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

**Beweis:** " $\implies$ " folgt aus Bemerkung 10.2

" $\impliedby$ " unter Zusatzannahme, dass  $f \in C^1(D)$  mit totaler Ableitung  $Df$

Sei vereinfachend  $f(z) = 0$  und schreibe  $f(x, y) \cong \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann

$$\begin{aligned} f(x + \epsilon, y + \delta) &= Df_{(x, y)} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \delta \end{pmatrix} + o(\epsilon, \delta) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \delta \end{pmatrix} + o(\epsilon, \delta) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \delta \end{pmatrix} + o(\epsilon, \delta) \cong \partial_x(u + iv)(\epsilon + i\delta) + o(\epsilon, \delta) \end{aligned}$$

was genau  $f(z + h) = f'(z)h + o(h)$  für  $h = \epsilon + i\delta$  bedeutet □

Zusatzannahme nicht notwendig (siehe Literatur)

### Beispiel 10.4

Sei  $D = \mathbb{C}$  und  $f(z) = z^N$ . Dann

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( (z+h)^N - z^N \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N}{n} z^n h^{N-n-1} = N z^{N-1}$$

Analog: jedes Polynom ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Ebenso

### Definition 10.5

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$f$  heißt analytisch in  $z_0 \in D \iff \exists \epsilon > 0$  mit

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad \forall |z - z_0| < \epsilon$$

wobei  $(a_n)_{n \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{C}$  und Reihe absolut konvergiert

$f$  analytisch auf  $D \iff f$  analytisch in allen  $z_0 \in D$

Nach Vertauschen des Limes  $h \rightarrow 0$  und der Summe folgt:

### Satz 10.6

*Jede analytische Funktion auf  $D$  ist holomorph auf  $D$*

Hauptsatz der Funktionentheorie: Umkehrung gilt auch (später)

### Beispiel 10.7

$f(z) = \bar{z} = x - iy$  ist nicht holomorph, weil Cauchy-Riemann nicht gilt:

$$\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v$$

Allgemeiner:  $f(z, \bar{z})$  nur holomorph, wenn unabhängig von  $\bar{z}$

Z.B. jede nicht-konstante reellwertige Funktion (wie Polynome in  $|z|$ ) ist nirgends holomorph, weil  $v = 0$ , aber  $\partial_x u \neq 0$

# Wirtinger-Kalkül

Viel verwandte Reformulierungen von Cauchy-Riemann

## Definition 10.8

$\omega$  komplexe Differentialform (hier nur auf  $D \subset \mathbb{C}$ )

$\iff \omega = \omega_{\Re} + i\omega_{\Im}$  mit reellen Differentialformen  $\omega_{\Re}$  und  $\omega_{\Im}$

Integral komplexer Differentialformen linear definiert

Analog: komplexe Tangentialvektoren

Notationen für Wirtinger-Symbole (Beispiele für Obiges):

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad , \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \quad , \quad dz = dx + idy \quad , \quad d\bar{z} = dx - idy$$

Dann  $dz(\partial_z) = \partial_z(z) = 1$  und  $d\bar{z}(\partial_z) = 0$ , etc.

## Satz 10.9

$f$  holomorph  $\iff \partial_{\bar{z}}f = 0 \iff f(z)dz$  geschlossen (alles auf  $D \subset \mathbb{C}$ )

Beweis hiervon ist eine Übung

# Kurvenintegral

Sei  $f(z)dz$  1-Form zu holomorpher Funktion  $f$  auf offenem  $D \subset \mathbb{C}$

Zudem  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow D$  glatter Weg. Dann wie in Beispiel 9.14:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_I \gamma^*(f(z)dz) = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Oft: stückweise glatte Wege mit endlich vielen Teilstücken

Dann Integral definiert als Summe der Integrale über Teilstücke

## Definition 10.10

Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  geschlossen  $\iff \gamma(1) = \gamma(0)$

Schreibweise für Integrale über geschlossene Wege:  $\int_{\gamma} = \oint_{\gamma}$

## Beispiel 10.11

$f(z) = z^k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = e^{2\pi it}$  geschlossen. Dann

$$\oint_{\gamma} z^k dz = \int_0^1 e^{2\pi itk} e^{2\pi it} 2\pi i dt = 2\pi i \delta_{k,-1}$$

## Satz 10.12

$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  und  $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Ran}(\gamma)$

Index von  $w$  bez.  $\gamma$  oder Windungszahl von  $\gamma$  um  $w$ :

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \oint_\gamma \frac{1}{z-w} \frac{dz}{2\pi i} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} \frac{dt}{2\pi i}$$

Dann:  $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Ran}(\gamma) \mapsto \text{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$  konstant auf Zshgskomponente

**Beweis:** Wähle Parametrisierung mit  $|\gamma'(t)| \geq c > 0$ . Setze

$$\rho(s) = \exp\left(\int_0^s dt \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\right), \quad s \in [0, 1]$$

Dann  $\rho(0) = 1$ . Zudem  $\rho(1) = 1 \iff \exists n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^1 dt \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} = 2\pi i n$$

$\iff \text{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$ . Zu zeigen also:  $\rho(1) = 1$

Ableitung:

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w}, \quad \forall s \in [0, 1]$$

Multipliziere mit  $\rho(s)/\gamma'(s)$  und betrachte stetige Abbildung (da  $\gamma' > 0$ )

$$s \in [0, 1] \mapsto \frac{\rho(s)}{\gamma(s) - w} = \frac{\rho'(s)}{\gamma'(s)}$$

Außerdem wegen  $(\gamma(s) - w)\rho'(s) = \gamma'(s)\rho(s)$

$$\partial_s \frac{\rho(s)}{\gamma(s) - w} = \frac{(\gamma(s) - w)\rho'(s) - \rho(s)\gamma'(s)}{(\gamma(s) - w)^2} = 0$$

Somit  $\rho(s)/(\gamma(s) - w)$  konstant. Mit  $\rho(0) = 1$  und  $\gamma(0) = \gamma(1)$  folgt

$$\rho(1) = \frac{\rho(1)}{\gamma(1) - w} \frac{\gamma(1) - w}{\rho(0)} = \frac{\rho(0)}{\gamma(0) - w} \frac{\gamma(0) - w}{\rho(0)} = 1$$

Nun ist Abbildung  $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Ran}(\gamma) \mapsto \text{Ind}_\gamma(w)$  stetig

Wegen Ganzzahligkeit somit auch lokal konstant □

### Definition 10.13

Sei  $I = [0, 1]$ . Wege  $\gamma : I \rightarrow D$  und  $\Gamma : I \rightarrow D$  homotop in  $D$

$\iff \exists$  stetige Abbildung  $H : I \times I \rightarrow D$ , genannt Homotopie, mit

$$H(t, 0) = \gamma(t) \quad , \quad H(t, 1) = \Gamma(t)$$

### Bemerkung 10.14

„homotop in  $D$ “ ist eine Äquivalenzrelation auf Wegen in  $D$ ,

und auch auf geschlossenen Wegen in  $D$  (Verklebe die Homotopien)

### Satz 10.15

Seien  $\gamma$  und  $\Gamma$  geschlossene und in  $D$  homotope Wege

Für holomorphes  $f$  auf  $D$  gilt dann

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz$$



**Beweis:** Vereinfachende Annahme:  $\gamma$  und  $\Gamma$  schneiden sich nicht  
Zudem sei  $H$  Homotopie glatt (Dichteargument)  
und  $\text{Ran}(H) \subset D$  Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial \text{Ran}(H) = \text{Ran}(\gamma) \cup \text{Ran}(\Gamma)$   
(also ist  $\text{Ran}(H) \subset D$  Ring, allgemeinerer Fall Übung oder Literatur)  
Da  $f(z)dz$  nach Satz 10.9 auf  $\text{Ran}(H) \subset D$  geschlossen  
Mit Satz von Stokes gilt (mit Orientierung von  $\mathbb{R}^2$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\text{Ran}(H)} d(f(z)dz) \\ &= \oint_{\partial \text{Ran}(H)} f(z)dz \\ &= \oint_{\Gamma} f(z)dz - \oint_{\gamma} f(z)dz \end{aligned}$$

□

## Definition 10.16

Weg  $\gamma$  nullhomotop in  $D \iff \gamma$  in  $D$  homotop zu konstantem Weg

Hierbei: konstanter Weg unabhängig von  $t$ , bleibt also bei einem Punkt

Nullhomotope Wege sind in  $D$  zu einem Punkt zusammenziehbar

## Satz 10.17 (Satz von Cauchy)

Sei  $\gamma$  nullhomotoper Weg in  $D$  zusammenziehbar zu  $w \in D$

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und zudem holomorph auf  $D \setminus \{w\}$ . Dann

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Beweis:** Nach Satz 10.15

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\partial B_{\epsilon}(w)} f(z) dz \longrightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \downarrow 0$$

nach Standardintegralabschätzung und weil  $f$  stetig



## Satz 10.18 (Cauchy'sche Integralformel)

Sei  $f$  holomorph auf Sterngebiet  $D \subset \mathbb{C}$  (insbes. zusammenziehbar)

Für geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $D$  und  $z \in D \setminus \text{Ran}(\gamma)$ ,

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

**Beweis:** Setze für  $\zeta \in D$

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

Dann:  $g : D \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Nach Cauchy:

$$\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$$

Also:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(z) \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(z) \text{Ind}_\gamma(z) \quad \square$$

## Satz 10.19 (Holomorphe Funktionen sind analytisch)

Sei  $f : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph

Dann ist  $f$  in  $B_R(z_0)$  durch konvergente Potenzreihe darstellbar:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

mit Koeffizienten, die für alle  $r < R$ , gegeben sind durch

$$a_n = \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

Konvergenzradius  $\rho$  erfüllt  $\rho \geq R$

Insbesondere ist  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar und  $\forall n \geq 0$

$$f^{(n)}(z_0) = n! \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i} = n! a_n$$

**Beweis:** Für  $z \in B_r(z_0)$  ist  $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$ . Nach Integralformel:

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \frac{d\zeta}{2\pi i} \end{aligned}$$

Wegen  $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$  folgt mit geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \frac{d\zeta}{2\pi i} \end{aligned}$$

Reihe konvergiert uniform in  $\zeta$  auf  $\partial B_r(z_0)$  (Details Übung)

Also vertausche Limes und Integral:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} \right) (z - z_0)^n$$

Nun Formel für  $a_n$  ablesen. Da für alle  $r < R$

$$|a_n| \leq \frac{|\partial B_r(z_0)|}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} = \frac{\sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|}{r^n} = \frac{C}{r^n}$$

folgt  $\rho = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \geq r$  □

Nun wegen  $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$

### Korollar 10.20 (Cauchy-Abschätzungen)

Sei  $f : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann für  $0 < r < R$ :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

## Satz 10.21 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz)

$f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und beschränkt bei  $z_0$

Dann kann man  $f(z_0)$  so wählen, dass  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph

**Beweis:** Setze für  $z \in D$

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Da  $f$  beschränkt folgt

$$g'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h f(z_0 + h) = 0$$

Somit  $g$  holomorph auf ganz  $D$  und in Potenzreihe entwickelbar:

$$g(z) = \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^n$$

Setze  $f(z_0) = a_2$ . Dann ist  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+2} (z - z_0)^n$  □

## Definition 10.22 (Singularitäten)

$D \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in D$

- (i)  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann  $z_0$  isolierte Singularität von  $f$
- (ii)  $z_0$  heißt hebbare Singularität, wenn  $z_0$  regulärer Punkt von  $f$  ist d.h.  $f$  durch stetige Fortsetzung holomorph in  $z_0$  wird (wie im Riemann'schen Hebbbarkeitssatz)
- (iii)  $z_0$  heißt *Pol*, wenn  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$   
(nicht nur  $\lim \sup$ , für alle Folgen  $z_n \rightarrow z_0$  gilt  $\lim_n |f(z_n)| = \infty$ )
- (iv)  $z_0$  wesentliche Singularität, wenn  $z_0$  weder hebbbar noch Pol ist

## Bemerkung 10.23

Satz von Casorati-Weierstraß charakterisiert wesentlich Singularitäten:

$z_0$  wesentliche Singularität  $\iff \forall \epsilon > 0$  ist  $f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$  dicht in  $\mathbb{C}$



## Beispiel 10.24

- (i) Die Funktion  $z^{-1} \sin(z)$  hat hebbare Singularität bei  $z_0 = 0$
- (ii)  $z^{-2}$  hat Pol bei  $z_0 = 0$
- (iii)  $\exp(z^{-1})$  hat eine wesentliche Singularität bei  $z_0 = 0$   
**weil:** mit  $z = re^{i\phi}$  ist  $\exp(z^{-1}) = \exp(r^{-1}e^{-i\phi})$   
was für  $r \rightarrow 0$  nicht uniform in  $\phi$  konvergiert (z.B.  $\phi = 0, \pi$ )

## Satz 10.25

$z_0$  isolierte Singularität von  $f$  holomorph auf  $D \setminus \{z_0\}$ . Äquivalent sind:

- (i)  $z_0$  Pol von  $f$
- (ii)  $\exists m \in \mathbb{N}$ , so dass  $(z - z_0)^m f(z)$  beschränkt bei  $z_0$ ,  
aber  $(z - z_0)^{m-1} f(z)$  unbeschränkt

Die Ordnung von  $f$  im Pol  $z_0$  ist dann definiert als  $\text{Ord}_{z_0}(f) = -m$

Dieser Begriff von Ordnung setzt den von Polynomen fort  
Oft wird aber nur von Ordnung  $m > 0$  des Pols gesprochen

**Beweis:** (i) $\implies$ (ii): Sei  $z_0$  Pol von  $f$ . Dann  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$

Also  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)^{-1}| = 0$ . Somit hat  $h(z) = f(z)^{-1}$  hebbare Singularität mit holomorpher Fortsetzung  $h(z_0) = 0$ . Also

$$h(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n$$

mit  $m \geq 1$  und  $a_m \neq 0$ . Dann:

$$h(z) = (z - z_0)^m \sum_{n \geq 0} a_{n+m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z)$$

So definierte Funktion  $g$  ist holomorph bei  $z_0$  und  $g(z_0) = a_m \neq 0$

Somit auch  $g^{-1}$  holomorph, und

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} g^{-1}(z)$$

Nun folgt (ii). Umkehrung ist offensichtlich □

## Definition 10.26

Sei  $z_0$  Pol von Ordnung  $m$  holomorpher Funktion  $f$  auf  $D \setminus \{z_0\}$

Dann ist die Laurent-Reihe von  $f$  um  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Der Hauptteil hiervon ist

$$\sum_{n=-m}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

und das Residuum von  $f$  bei  $z_0$ :

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$$

Beachte, dass nach Satz 10.25 Laurent-Reihe bei Pol existiert

## Definition 10.27

Sei  $D \subset \mathbb{C}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt meromorph auf  $D$

$\iff \exists$  diskrete Menge  $P$  (d.h. lokalendliche Menge)

so dass  $f$  holomorph auf  $D \setminus P$  mit Polen in  $P$

## Beispiel 10.28

Rationale Funktionen sind Quotienten  $f = \frac{p}{q}$  von Polynomen

Rationale Funktionen sind meromorph

## Beispiel 10.29

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2(z-z_0)}{1+z^4} \frac{1}{z-z_0}, \quad z_0 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Pol erster Ordnung in  $z_0$  mit

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2(z-z_0)}{1+z^4} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4} \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

## Satz 10.30 (Berechnung des Residuums)

Sei  $z_0$  Pol von  $f$ . Für alle  $\epsilon$  ausreichend klein,

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z) \frac{dz}{2\pi i}$$

Wenn Pol von Ordnung  $-m$  ist,

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \partial_z^{m-1} \left( (z - z_0)^m \frac{f(z)}{(m-1)!} \right) \Big|_{z=z_0}$$

**Beweis:** Einsetzen, Summe/Integral vertauschen, parametrisieren:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(z) \frac{dz}{2\pi i} &= \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \epsilon^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t} dt = a_{-1} \end{aligned}$$

Betrachte folgende Funktion  $g$  mit hebbarer Singularität:

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n \geq 0} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

Dann kann  $g$  holomorph in  $z_0$  fortgesetzt werden

Betrachte Ableitungen von  $g$ :

$$\begin{aligned} \partial_z^{m-1} (z - z_0)^m f(z) &= \partial_z^{m-1} \sum_{n \geq 0} a_{n-m} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \partial_z^{m-1} a_{n-m} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq m-1} n(n-1) \cdots (n-(m-2)) a_{n-m} (z - z_0)^{n-(m-1)} \end{aligned}$$

Für  $z \rightarrow z_0$  verschwindet nur erster Summand nicht. Somit

$$\partial_z^{m-1} (z - z_0)^m f(z) \Big|_{z=z_0} = (m-1)! a_{-1}$$

□

## Beispiel 10.31

Sei  $p > 1$ . Funktion mit Polen

$$f(z) = \frac{4z}{(z^2 + 2pz + 1)^2}, \quad z_{\pm} = -p \pm \sqrt{p^2 - 1}$$

Wegen  $z^2 + 2pz + 1 = (z - z_+)(z - z_-)$  und  $z_+ - z_- = 2\sqrt{p^2 - 1}$  folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_+}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \partial_z (z - z_+)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow z_+} \partial_z (z - z_+)^2 \frac{4z}{(z^2 + 2pz + 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_+} \partial_z \frac{4z}{(z - z_-)^2} = \lim_{z \rightarrow z_+} \left[ \frac{4}{(z - z_-)^2} - \frac{8z}{(z - z_-)^3} \right] \\ &= \frac{4}{4(p^2 - 1)} - \frac{8z_+}{8(p^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{p^2 - 1} - z_+}{(p^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{p}{(p^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

### Satz 10.32 (Residuensatz, Cauchy 1824)

Seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  meromorph auf  $D$

Sei die Menge  $P \subset D$  der Polstellen endlich

Sei  $\gamma$  geschlossener und zusammenziehbarer Weg in  $D$  mit

$$\text{Ran}(\gamma) \cap P = \emptyset$$

Dann

$$\int_{\gamma} f(z) \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{z_0 \in P} \text{Ind}_{\gamma}(z_0) \text{Res}_{z_0}(f)$$

### Bemerkung 10.33

Für holomorphes  $f$  ist dies gerade Cauchy'scher Integralsatz

In  $D$  Sterngebiet ist Zusammenziehbarkeit von  $\gamma$  immer erfüllt



**Beweis:** Sei  $P = \{z_1, \dots, z_K\}$ . Hauptteil von  $f$  bei  $z_k$

$$h^{(k)}(z) = \sum_{n \leq -1} a_n^{(k)} (z - z_k)^n$$

Dann  $\text{Res}_{z_k}(f) = a_{-1}^{(k)}$ . Setze

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1, \dots, K} h^{(k)}(z)$$

Dann hat  $g$  hebbare Singularitäten in  $P$  also holomorph auf  $D$

Nach Cauchy'schen Integralsatz  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$  und somit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \frac{dz}{2\pi i} &= \sum_{k=1, \dots, K} \int_{\gamma} h^{(k)}(z) \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \sum_{k=1, \dots, K} \sum_{j \leq -1} a_j^{(k)} \int_{\gamma} (z - z_k)^j \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \sum_{k=1, \dots, K} \sum_{j \leq -1} a_j^{(k)} \delta_{j, -1} \text{Ind}_{\gamma}(z_0) \\ &= \sum_{k=1, \dots, K} \text{Ind}_{\gamma}(z_k) \text{Res}_{z_k}(f) \end{aligned}$$

□

## Beispiel 10.34 (Trigonometrisches Integral)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(\phi)} d\phi \quad , \quad a > 1$$

Parametrisierung als komplexes Wegintegral:

$$z = e^{i\phi} \quad , \quad \frac{dz}{d\phi} = ie^{i\phi}$$

also  $d\phi = \frac{dz}{iz}$ . Mit

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

gelangt man zu der Darstellung

$$I = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\partial B_1(0)} \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1} dz$$

## Beispiel (Fortsetzung)

Nullstellen des Nenners:  $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

$z_-$  außerhalb von  $\gamma = \partial B_1(0)$  da  $|z_-| \geq a > 1$ . Folglich  $\text{Ind}_{\gamma}(z_-) = 0$

Andererseits  $z_+ \in B_1(0)$  und  $\text{Ind}_{\gamma}(z_+) = 1$

Berechnung des Residuums bei  $z_+$ :

$$\text{Res}_{z_+}(f) = (-2i) \frac{1}{z - z_-} \Big|_{z=z_+} = \frac{-2i}{z_+ - z_-}$$

Somit:

$$I = 2\pi i \cdot 1 \cdot \text{Res}_{z_+}(f) = (2\pi i)(-2i) \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Beachte: Ergebnis wieder reell, obwohl Rechnung in  $\mathbb{C}$  verlief

## Beispiel 10.35 (Uneigentliches Integral)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Umschreiben in komplexes Wegintegral:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz$$

Hierbei  $t \in [-1, 1] \mapsto \gamma_R(t) = tR$  nichtgeschlossener Weg

Sei  $t \in [1, 2] \mapsto \gamma'_R(t) = Re^{i\pi(t-1)}$  Halbkreis von  $(0, R)$  nach  $(-R, 0)$

Dann  $\Gamma_R = \gamma_R + \gamma'_R$  geschlossener Weg in oberer Halbebene

Wir zeigen: Integral über Halbkreis verschwindet im Limes  $R \rightarrow \infty$

Dann: Wert des Integrals über  $\Gamma_R$  mit Residuensatz

## Beispiel (Fortsetzung)

Singularitäten von  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$  sind Pole erster Ordnung bei

$$z_k = \exp\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi ik}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Nur  $z_0$  und  $z_1$  liegen im Inneren von  $\Gamma_R$ . Zugehörige Residuen:

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Res}_{z_1}(f) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

Beitrag des Halbkreisintegrals ( $|\gamma'_R|$  ist die Länge des Weges):

$$\left| \int_{\gamma'_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz \right| \leq |\gamma'_R| \cdot \sup_{z \in \gamma'_R} \frac{|z^2|}{|1+z^4|} = \frac{\pi R^3}{\inf_{\phi \in [0, \pi]} |1 + (Re^{i\phi})^4|} \rightarrow 0$$

Somit

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}_{z_0}(f) + \operatorname{Res}_{z_1}(f)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

## Beispiel 10.36 (Oszillierendes Integral)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ixt} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

Betrachte hierzu

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} e^{itz} = \frac{1}{2iz} (e^{iz(1+t)} - e^{iz(-1+t)})$$

Ganze Funktion (holomorph auf  $\mathbb{C}$ ) da  $z = 0$  hebbare Singularität vor Integrationsweg  $\gamma_R$ : von  $-R$  bis  $+R$ , aber 0 in Halbkreis unten umgeht  
Dies ändert Integral nicht nach Satz von Cauchy (Satz 10.18). Nun

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{2iz} e^{iz(1+t)} dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{2iz} e^{iz(-1+t)} dz$$

Integral konnte auseinander gezogen werden,  
da Singularität bei der 0 umgangen wird

## Beispiel (Fortsetzung)

$$I = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} (I_R(t+1) - I_R(t-1)) \quad , \quad I_R(s) = \int_{\gamma_R} \frac{e^{isz}}{z} \frac{dz}{2\pi i}$$

Nun schlieÙe  $\gamma_R$  durch Halbkreis  $\gamma_R^\pm$  in oberer/unterer Halbebene

Da  $\frac{e^{isz}}{z}$  nur Pol bei  $z_0 = 0$ , ergib Substitution  $z = Re^{i\theta}$  ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ):

$$\begin{aligned} I_R(s) &= \int_{\gamma_R + \gamma_R^- - \gamma_R^-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z} = 0 + \int_{-\gamma_R^-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z} \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{isRe^{i\theta}} \end{aligned}$$

Ebenso gilt nach Residuensatz:

$$I_R(s) = \text{Res}_0\left(\frac{e^{isz}}{z}\right) + \int_{-\gamma_R^+} \frac{e^{isz}}{z} \frac{dz}{2\pi i} = 1 - \int_0^{\pi} e^{isRe^{i\theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$$

## Beispiel (Fortsetzung)

Verwende jetzt  $\left| e^{isRe^{i\theta}} \right| = e^{-sR \sin \theta}$

Falls  $s \cdot \sin \theta > 0$  ist, geht dies gegen 0 im Limes  $R \rightarrow \infty$ . Also:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s < 0 \text{ (verwende } \gamma_R^-) \\ 1, & \text{falls } s > 0 \text{ (verwende } \gamma_R^+) \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } s = 0 \text{ (explizite Berechnung über } \gamma_R^-) \end{cases}$$

Somit:

$$\begin{aligned} I &= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} (I_R(t+1) - I_R(t-1)) \\ &= \pi (\chi_{(0, \infty)}(t+1) + \frac{1}{2}\chi_{\{0\}}(t+1) - \chi_{(0, \infty)}(t-1) - \frac{1}{2}\chi_{\{0\}}(t-1)) \\ &= \pi (\chi_{(-1, \infty)}(t) + \frac{1}{2}\chi_{\{-1\}}(t) - \chi_{(1, \infty)}(t) - \frac{1}{2}\chi_{\{1\}}(t)) \\ &= \pi \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } |t| = 1 \\ 0, & \text{falls } |t| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$