KAPITEL 6

Differentialoperatoren

Wir wollen den Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

nochmals anschauen. Man kann ihn auf skalare Felder f und Vektorfelder $\mathbf{F}$ anwenden:

$$\nabla f = \mathrm{grad}(f), \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathrm{div}(\mathbf{F}), \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathrm{rot}(\mathbf{F}).$$

Für eine (hinreichend oft differenzierbare) skalare Funktion $f(x, y, z)$ kann man das zugehörige Gradientfeld $\mathrm{grad}(f) = \nabla f$ betrachten:

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

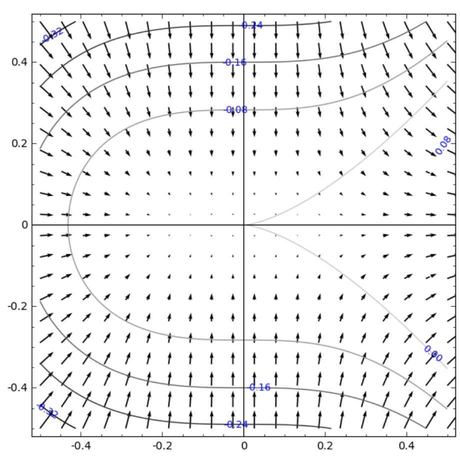
Das Vektorfeld ∇f zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f. Auf den „Niveaulinien“ $f(x, y, z) =$konstant steht das Vektorfeld senkrecht.

Beispiel: Für die Funktion

$$f = x^3 - y^2$$

gilt

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -2y \end{pmatrix}.$$



Rechenregeln: Seien f, g skalare Funktionen und a, b reelle Zahlen.

(1) $\mathrm{grad}(af + bf) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g)$ (oder $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$).
(2) $\mathrm{grad}(fg) = g\,\mathrm{grad}(f) + f\,\mathrm{grad}(g)$ (oder $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$).

Datei: al_int6.tex. Version vom 3.2.2020

Wir haben die **Divergenz** für ein Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

definiert:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Funktion.

Rechenregeln: Seien a, b reelle Zahlen, $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ Vektorfelder, f eine skalare Funktion.

(1) $\operatorname{div}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a \operatorname{div}(\mathbf{F}) + b \operatorname{div}(\mathbf{G})$ (oder $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$).
(2) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{grad}(f) \cdot \mathbf{F}$ (oder $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$).

Wir haben die **Rotation** kennengelernt: Für ein Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

definiert man

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln: Seien a, b reelle Zahlen, $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ Vektorfelder, f eine skalare Funktion.

(1) $\operatorname{rot}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + b \operatorname{rot}(\mathbf{F})$ (oder $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$).
(2) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \operatorname{grad}(f) \times \operatorname{rot}(\mathbf{F})$ (oder $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$.

Wir betrachten nun Kombinationen von grad, div und rot.

Ist f eine skalare Funktion, so ist $\operatorname{grad}(f)$ ein Vektorfeld, man kann also die Divergenz bestimmen:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{div}(\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Man kann dafür auch $\nabla \cdot (\nabla f)$ schreiben. Die Bildung wird auch als **Laplace-Operator** Δ bezeichnet:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(Eine Funktion f wird **harmonisch** genannt, wenn $\Delta f = 0$ gilt.)

Ist $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld, so ist $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{F}))$ auch ein Vektorfeld. Wir gehen aber nicht näher darauf ein.

Bereits früher haben wir definiert: Ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ ist ein **Gradientenfeld**, wenn es eine Funktion f gibt mit

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f) = \nabla f.$$

(Die Funktion f wird auch manchmal als **Potential** oder **Stammfunktion** bezeichnet.) Das folgende Ergebnis kennen wir bereits, wobei in Teil (2) eine alternative Lösungsmethode angegeben ist:

Satz. (1) *Für eine skalare Funktion f gilt*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \nabla \times (\nabla f) = 0.$$

(Man sagt auch: Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei.)

(2) *Ist* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld, das auf ganz* $\mathbb{R}^3$ *definiert ist (oder auf einer sternförmigen Menge) mit*

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0,$$

so ist $\mathbf{F}$ *ein Gradientenfeld, d.h. es gibt eine skalare Funktion* f *mit*

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}(f).$$

($\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ *bedeutet, dass die Integrabilitätsbedingungen für* $\mathbf{F}$ *erfüllt sind.) Ist* $\mathbf{F}$ *auf ganz* $\mathbb{R}^3$ *definiert mit*

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix},$$

so erhält man durch

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt$$

eine Funktion mit $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{F}$*.*

Beweis der Formel aus (2): Unter Verwendung der Integrabilitätsbedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= F_x(x,y,z), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial y}(t,y,z)dt + F_y(0,y,z) \overset{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}{=} \int_0^x \frac{\partial F_y}{\partial x}(t,y,z)dt + F_y(0,y,z) = \\
&= [F_y(t,y,z)]_{t=0}^x + F_y(0,y,z) = F_y(x,y,z) - F_y(0,y,z) + F_y(0,y,z) = \\
&= F_y(x,y,z), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial z}(t,y,z)dt + \int_0^y \frac{\partial F_y}{\partial z}(0,t,z)dt + F_z(0,0,z) \overset{\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}}{=} \\
&= \int_0^x \frac{\partial F_z}{\partial x}(t,y,z)dt + \int_0^y \frac{\partial F_z}{\partial y}(0,t,z)dt + F_z(0,0,z) = \\
&= [F_z(t,y,z)]_{t=0}^x + [F_z(0,t,z)]_{t=0}^y + F_z(0,0,z) = \\
&= (F_z(x,y,z) - F_z(0,y,z)) + (F_z(0,y,z) - F_z(0,0,z)) + F_z(0,0,z) = \\
&= F_z(x,y,z),
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Bemerkungen:

(1) In Dimension 3 werden die Integrabilitätsbedingungen für ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ durch die Bedingung $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ beschrieben.
(2) Wir haben zuvor schon eine andere Methode kennengelernt, wie man zu einem Vektorfeld $\mathbf{F}$ mit $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ eine Funktion f mit $\mathbf{F} = \mathrm{grad}(f)$ findet.

Beispiele:

(1) (Übungsblatt 6, Präsenzaufgabe 2) Für

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt = \\
&= \int_0^x y dt + \int_0^y 0 dt + \int_0^z t dt = xy + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^z = xy + \frac{1}{2}z^2.
\end{aligned}$$

(2) (Übungsblatt 6, Hausaufgabe 2) Für

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2xy + \sin(z) \\ x^2 + e^z \\ x\cos(z) + ye^z \end{pmatrix}$$

sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt = \\ &= \int_0^x (2ty + \sin(z))dt + \int_0^y e^z dt + \int_0^z 0dt = \\ &= \left[t^2 y + t\sin(z)\right]_{t=0}^x + ye^z = x^2 y + x\sin(z) + ye^z. \end{aligned}$$

(3) (Vorlesungsskript) Für

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt = \\ &= \int_0^x (2tz^3 + 6y)dx + \int_0^y (-2tz)dy + \int_0^z 0dz = \\ &= \left[t^2 z^3 + 6ty\right]_{t=0}^x + \left[-t^2 z\right]_{t=0}^y = x^2 z^3 + 6xy - y^2 z. \end{aligned}$$

(4) Für

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 y\cos(xy+z) + 2x\sin(xy+z) - e^x\sin(z) \\ x^3\cos(xy+z) \\ x^2\cos(xy+z) - e^x\cos(z) \end{pmatrix}$$

prüft man nach, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Also ist $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld. Ein zugehöriges Potential berechnet man mit der Formel des Satzes:

$$\begin{aligned} f &= \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt = \\ &= \int_0^x \left(t^2 y\cos(ty+z) + 2t\sin(ty+z) - e^t\sin(z)\right)dt + \int_0^y 0dt + \int_0^z \left(-e^0\cos(t)\right)dt = \\ &= \left[t^2\sin(ty+z) - e^t\sin(z)\right]_{t=0}^x - \left[\sin(t)\right]_{t=0}^z = \\ &= \left(x^2\sin(xy+z) - e^x\sin(z) + e^0\sin(z)\right) - \sin(z) = \\ &= x^2\sin(xy+z) - e^x\sin(z). \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld mit Potential f, d.h. $\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f)$, so gilt:

- Ist K eine Kurve mit Anfangspunkt A und Endpunkt B, so gilt für das Kurvenintegral
$$\int_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A).$$
- Ist K eine geschlossene Kurve, so gilt
$$\oint_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Man nennt ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ ein **Wirbelfeld**, wenn es ein Vektorfeld $\mathbf{G}$ gibt mit

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}(\mathbf{G}).$$

Das Vektorfeld $\mathbf{G}$ heißt dann auch ein **Vektorpotential** für $\mathbf{F}$.

Satz. (1) *Für ein Vektorfeld* $\mathbf{G}$ *gilt*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{G})) = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0.$$

(Man sagt: Ein Wirbelfeld ist quellenfrei.)

(2) *Ist* $\mathbf{F}$ *ein auf ganz* $\mathbb{R}^3$ *definiertes Vektorfeld mit*

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

so ist $\mathbf{F}$ *ein* **Wirbelfeld**, *d.h. es gibt ein Vektorfeld* $\mathbf{G}$ *mit*

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}(\mathbf{G}) \quad \textit{bzw.} \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}.$$

Beispielsweise kann man für $\mathbf{G}$ *folgende Funktion wählen:*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} \qquad \textit{mit} \qquad \begin{cases} G_x &= \int_0^z F_y(x,y,t)dt - \int_0^y F_z(x,t,0)dt, \\ G_y &= -\int_0^z F_x(x,y,t)dt, \\ G_z &= 0. \end{cases}$$

Überlegungen: Wir wollen überlegen, warum man mit

$$\begin{aligned} G_x &= \int_0^z F_y(x,y,t)dt - \int_0^y F_z(x,t,0)dt, \\ G_y &= -\int_0^z F_x(x,y,t)dt, \\ G_z &= 0 \end{aligned}$$

tatsächlich ein Vektorfeld $\mathbf{G}$ erhält man $\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Die Voraussetzung lautet

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} &= 0 - (-F_x(x,y,z)) = F_x, \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} &= F_y(x,y,z) - 0 = F_y, \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} &= \left(-\int_0^z \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y,t)dt\right) - \left(\int_0^z \frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y,t)dt - F_z(x,y,0)\right) = \\ &= \int_0^z \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y,t) - \frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y,t)\right) dt + F_z(x,y,0) = \\ &= \int_0^z \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y,t) - \frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial F_z}{\partial z}(x,y,t)\right) dt + \int_0^z \frac{\partial F_z}{\partial z}(x,y,t)dt + F_z(x,y,0) = \\ &= -\int_0^z \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,z)dt + [F_z(x,y,t)]_{t=0}^z + F_z(x,y,0) = \\ &= F_z - \int_0^z \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,t)dt = \\ &= F_z. \end{aligned}$$

Dies wollten wir zeigen.

Beispiele:

(1) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2y - 1 \\ -2x - 3z^2 \\ -2xy + 1 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nach, dass $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$ gilt, d.h. $\mathbf{F}$ ist quellenfrei. Also gibt es ein Vektorfeld $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{F} = \mathrm{rot}(\mathbf{G})$. Wir bilden

$$\begin{aligned}
G_x &= \int_0^z F_y(x,y,t)dt - \int_0^y F_z(x,t,0)dt = \\
&= \int_0^z \left(-2x - 3t^2\right) dt - \int_0^y \left(-2xt + 1\right) dt = \\
&= (-2xz - z^3) + (xy^2 - y) = xy^2 - 2xz - y - z^3, \\
G_y &= -\int_0^z F_x(x,y,t)dt = -\int_0^z (2y-1)dt = -(2y-1)z = -2yz + z, \\
G_z &= 0.
\end{aligned}$$

Also löst

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} xy^2 - 2xz - y - z^3 \\ -2yz + z \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Aufgabe.

(2) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$. Wir bilden

$$\begin{aligned}
G_x &= \int_0^z F_y(x,y,t)dt - \int_0^y F_z(x,t,0)dt = \\
&= \int_0^z (-1)dt - \int_0^y 0dt = -z, \\
G_y &= -\int_0^z F_x(x,y,t)dt = -\int_0^z (-x+2y)dt = -(-x+2y)z = xz - 2yz, \\
G_z &= 0,
\end{aligned}$$

erhalten also das Vektorfeld

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -z \\ xz - 2yz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir hatten zuvor schon gesehen, dass für

$$\widetilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix}$$

gilt $\mathrm{rot}(\widetilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{F}$. Damit folgt $\mathrm{rot}(\mathbf{G} - \widetilde{\mathbf{G}}) = 0$. Nun ist

$$\widetilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G} = \begin{pmatrix} x - z \\ xz \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -z \\ xz - 2yz \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2yz \\ y^2 \end{pmatrix} = \mathrm{grad}(\frac{1}{2}x^2 + y^2 z).$$

Das Phänomen des letzten Beispiels gilt allgemein:

Satz. *Sind $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder mit*

$$\mathrm{rot}(\mathbf{G}_1) = \mathrm{rot}(\mathbf{G}_2),$$

so gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 + \mathrm{grad}(f).$$

(Vektorpotentiale für ein Vektorfeld unterscheiden sich also um ein Gradientenfeld.)

Es gibt auch Vektorfelder, die quellen- und wirbelfrei sind, wie das folgende Beispiel zeigt:

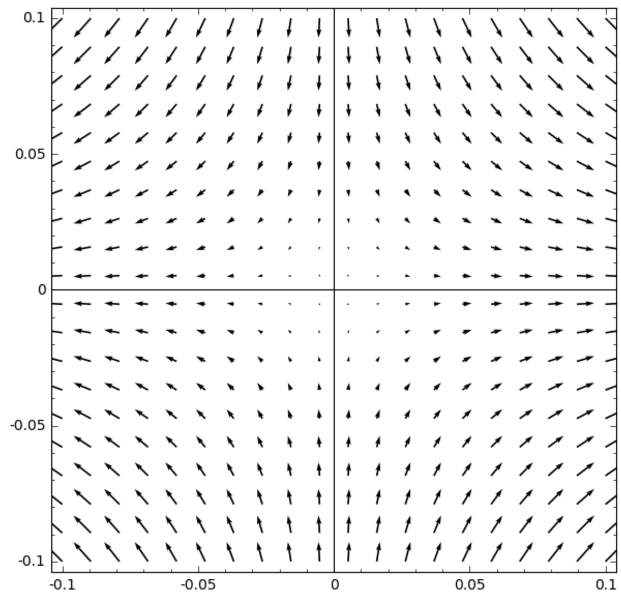
Beispiel: Für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0,$$

es ist also quellen- und wirbelfrei.



Offensichtlich ist $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld wegen

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2).$$

Mit dem oben dargestellten Verfahren berechnen wir ein Vektorpotential (mit $F_x = x$, $F_y = -y$, $F_z = 0$):

$$\begin{aligned} G_x &= \int_0^z F_y(x,y,t)dt - \int_0^y F_z(x,t,0)dt = \int_0^z (-y)dt = -yz, \\ G_y &= -\int_0^z F_x(x,y,t)dt = -\int_0^z x dt = -xz, \\ G_z &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das **Helmholtz-Theorem** besagt, dass sich (unter geeigneten Bedingungen) jedes Vektorfeld als Summe aus einem Gradientenfeld und einem Vektorfeld schreiben lässt. Wir werden nicht näher darauf eingehen, dies aber an einem Beispiel erläutern.

Beispiel: Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 + 2yz^2 \\ 2xy^2 - 2xz^2 \\ -4xyz \end{pmatrix}.$$

Wir suchen eine skalare Funktion f und ein Vektorfeld $\mathbf{G}$ mit

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{rot}(\mathbf{G}).$$

Bilden wir die Divergenz, so folgt

$$2x = \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) + \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{G})) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Die Funktion

$$f = \frac{1}{3}x^3$$

erfüllt $\operatorname{div}(f) = 2x$. Dann ist

$$\mathbf{F} - \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2yz^2 \\ 2xy^2 - 2xz^2 \\ -4xyz \end{pmatrix}$$

divergenzfrei. Mit den vorangegangenen Methoden finden wir

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2xy^2z - \frac{2}{3}xz^3 \\ -\frac{2}{3}yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{F} - \operatorname{grad}(f) = \operatorname{rot}(\mathbf{G})$, also

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{rot}(\mathbf{G}).$$