Entropieproduktionsraten der Boltzmann Gleichung (Arbeiten des Fields-Medaillisten Cédric Villani)

Hermann Schulz-Baldes

Erlangen

Zitat Fields Medallien Komitee (2010):

For his proofs of nonlinear Landau damping and convergence to equilibrium for the Boltzmann equation... Villani, together with his collaborators Giuseppe Toscani and Laurent Desvillettes, developed the mathematical underpinnings needed to get a rigorous answer, even when the gas starts from a highly ordered state that has a long way to go to reach its disordered, equilibrium state. His discovery had a completely unexpected implication: though entropy always increases, sometimes it does so faster and sometimes slower.

Prize EMS (2008), Fermat Prize (2009), Poincaré Prize (2009)

Weitere Forschungsthemen Villani's:

- nicht-lineare Landau Dämpfung (mit Mouhot)
- Optimaler Transport und Ricci Krümmung (Vortrag Sturm)
  Limit of manifolds with nonnegative Ricci curvature of nonnegative curvature

Plan des Vortrags:

- Boltzmann Gleichung
- Lösungen der Boltzmann Gleichung und ihre Regularität
- H-Theorem
- Maxwell Lösungen (hydrodynamisch, lokal gleichverteilt)
- Cerciniani's Vermutung
  (Entropieproduktion in ortshomogener Situation)
- Villani's Korrektur und Beweis der Vermutung
- Entorpieproduktionsraten in ortsinhomogenen Situationen
- Hypokoerzivität

Die Boltzmann Gleichung:

Phasenraum $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$f_t(x, v)$ zeitabhängige Wahrscheinlichkeits(teilchen)dichte

Boltzmann Gleichung:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = Q(f, f)$$

linearer Transport Operator = lokaler nicht-linearer Streuoperator

Stoßzahlansatz (molekulares Chaos):

$$Q(f, f)(v) = \int [f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)]B(v - v_*, \sigma)dv_* d\sigma$$

wobei v, v_* einlaufende, v', v'_* die auslaufende Geschwindigkeiten
$\sigma \in \mathbb{S}^2$ mit $2v' = v + v_* + |v - v_*|\sigma$, $B \geq 0$ Streukern der Gestalt

$$B(z, \sigma) = B(|z|, \cos(\theta)) = |z|\Sigma(|z|, \theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{z}{|z|} \cdot \sigma$$

Die Boltzmann Gleichung:

Außerdem Randbedingungen periodisch oder reflektiv:

$$f_t(x, R_x v) = f_t(x, v) \qquad R_x v = v - 2v \cdot n(x)\, n(x) \qquad x \in \partial\Omega$$

Wichtige Eigenschaften:

- Streuterm entält keine x-Abhängigkeit
- Transportoperator entält keine Ableitung nach v (wenn $F = 0$)

Herleitung der Boltzmann Gleichung aus Mechanik:

Lanford: im Boltzmann-Grad Limes (1973)
 (n harte klassische Kugeln mit Radius r mit $nr^2 \to 1$)
Erdös-Yau: lineare Boltzmann Glg aus Anderson-Modell (1990)
 (quantenmechanisches Teilchen in zufälligen Potential)
Erdös-Salmofer-Yau: formale Herleitung aus Quantenmechanik

Lösungen:

Existenz von Lösungen: unter a priori Abschätzungen ($\rho > 0$ ...)

Raum homogener Fall bekannt (Carleman 30's,..., Devillettes 90's)

Renormierte Lösungen (DiPerna, Lions 1989)

Viele störungstheoretische Ergebnisse

Alles Folgende unter der Annahme, dass glatte Lösungen existieren!

Erhaltungssätze für

$$\rho = \int f \, dv \qquad \rho u = \int f \, v \, dv \qquad \rho |u|^2 + 3\,\rho T = \int f |v|^2 dv$$

Dichte, makroskopische Geschwindigkeit, lokale Temperatur:

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \qquad \partial_t(\rho |u|^2 + 3\,\rho T) + \nabla_x \cdot \int f |v|^2 v \, dv = 0$$

Boltzmann's H-Theorem (Eta-Theorem?):

Boltzmann H-Funktional (negative Entropie) ist

$$H(f) = \int f(x,v) \log f(x,v) dxdv$$

Dann für glatte Lösung der Boltzmann Gleichung

$$\partial_t H(f_t) = -\int D(f_t)\, dx \leq 0$$

mit dem Dissipationsfunktional

$$\begin{aligned} D(f) &= -\int Q(f,f) \log(f)\, dv \\ &= \frac{1}{4} \int B(v - v_*, \sigma)[f' f'_* - f f_*] \log \frac{f' f'_*}{f\, f_*} d\sigma dv dv_* \end{aligned}$$

was positiv ist, weil $(a,b) \mapsto (a-b)(\log(a) - \log(b)) \geq 0$

Dies ist ein *Beweis* des zweiten Hauptsatzes (Irreversibilität)

Zusatz: $D(f)$ verschwindet $\Longleftrightarrow$ f Maxwell'scher Zustand

$$M_{\rho,u,T}(x,v) = \rho(x)\, \frac{e^{-\frac{|v-u(x)|^2}{2T(x)}}}{(2\pi T(x))^{\frac{3}{2}}}$$

Dies sind auch genau die Lösungen von $Q(f,f) = 0$

Cercignani Vermutung:

Motivation: Log-Sobolev Ungleichung für Fokker-Planck Gleichung (Stam 1959, Gross 1975, Bakry-Emery 1982)

$$\partial_t f = \nabla_v(\nabla_v f + vf)\,, \qquad v \in \mathbb{R}^d\,, \int f(v)\,dv = 1$$

Gleichgewicht:

$$M(v) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\; e^{-\frac{|v|^2}{2}}$$

Entropieproduktionsfunktional (relative Fisher Information)

$$D(f) = \int f|\nabla_v \log \frac{f}{M}|^2 dv$$

Log-Sobolev Ungleichung durch Kullback-Leibler relative Entropie Distanz:

$$D(f) \geq 2(H(f) - H(M)) = 2\,H(f|M)$$

Cercignani Vermutung für ortshomogene Boltzmann (1982):

$$D(f) \geq K\,H(f|M)$$

Mit H-Theorem:

$$\partial_t H(f_t|M) = \partial_t H(f_t) = -D(f_t) \leq -K\,H(f_t|M)$$

und mit Gronwall exponentielles Verhalten für relative Entropie:

$$H(f_t|M) \leq C\,e^{-Kt}$$

Theorem: Unter akzeptablen Bedingungen an den Streukern B und für glattes ortshomogenes f mit Abfalleigenschaften für große v, existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Konstante $K_\epsilon(f)$ so dass

$$D(f) \geq K_\epsilon(f) H(f|M)^{1+\epsilon}$$

Also $\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{\epsilon}})$ Verhalten, für jedes ϵ (Ende ortshomogenen Fall)

Globale Thermalisierung

Theorem: (Villani-Desvillettes) Sei $f_t(x,v)$ glatte positive Lösung der Boltzmann Gleichung mit uniform beschränkten Momenten:

$$\|\nabla^k f_t\| < \infty \qquad \int f_t(x,v)|v|^k dxdv < \infty \qquad f_t(x,v) \geq C\, e^{-A|v|^q}$$

Sei B adequat. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein C_ϵ so dass bzg. des globalen Maxwellzustands M

$$H(f_t|M) \leq C_\epsilon(f_0)t^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

Grob: Regularität der Lösungen $\Longrightarrow$ globale Thermalisierung

Annahmen nur in ortshomogener Situation oder nahe M gesichert!

Kein Linearisierungsregime (spektraler Gap)

Lokale Entropieproduktionsraten des Kollisionsterms:

$$D(f) \geq K_\epsilon(f)\, H(f|M_{\rho,T,u})^{1+\epsilon}$$

Problem: verschwindet bei den lokalen Maxwell Zuständen

Diese Zustände bilden Maxwell-Mannigfaltigkeit (Dimension ∞)

Zerlegung in kinetischen und hydrodynamischen Anteil

$$H(f) - H(M) = H(f|M_{\rho,T,u}) + \int \rho \log \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Instabilität der hydrodynamschen Zustände

Zweite Ableitung des Abstandes zur Maxwell-Mannigfaltigkeit:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \| f_t - M_{\rho,T,u} \|^2 \quad &\geq \quad K \int (|\nabla_x T|^2 + |\mathrm{dev}(u)|^2) dx \\ &\quad -C \| f_t - M_{\rho,T,u} \|^{1-\epsilon} H(f|M)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \end{aligned}$$

mit

$\mathrm{dev}(u) =$ spurlose symmetrische Anteil des Reynolds Tensor $\nabla_x u$

- Wieso $\| f_t - M_{\rho,T,u} \|^2$?

  Rechentechnisch, andere Lyapunov Funktionale möglich!

- Wieso zweite Ableitung?

  erste Null, und nun $v \cdot \nabla_x$ zweimal, also wieder Elliptizität

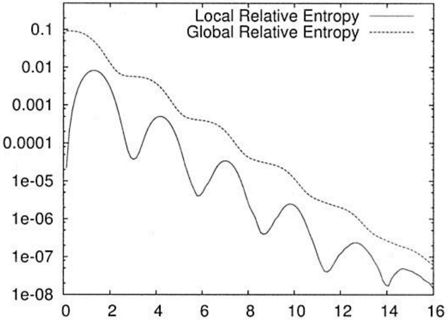
Schluss des Arguments:

Kombination obiger Ungleichungen (und weiterer...)

zweite Ordnung "Gronwall Lemma"

Vermutung: Oszillationen in der Entropieproduktion

Numerik von Filbet und Russo: $\dim(x) = 1$ und $\dim(v) = 2$



Kinetischer Fokker-Planck Operator (linear)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v \cdot (fv)$$

konservativer Hamiltonscher Fluss = degenerierter diffusiver Term

Globales Gleichgewicht

$$M(x,v) = \frac{1}{Z}\, e^{-[V(x)+\frac{v^2}{2}]}$$

Diffusiver Term alleine kann nicht thermalisieren (x-Abhänggkeit)!

Analoge Situation wie in Boltzmann Gleichung

Hérau-Nier 2002: Konvergenz der Lösungen

Komplizierter Beweis mit Hörmander's Hypoelliptizität
(hier nicht kompakter Phasenraum!)

Villani's neuer, allgemeiner Zugang:
Hypokoerzivität, Suche nach adequatem Lyapunov Funktional

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v \cdot (fv)$$

Wähle Hilbert-Raum $\mathcal{H} = L^2(M\,dxdv)$ und setze

$$Bf = v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = -B^* f \qquad Af = \nabla_v f$$

Dann wird Fokker-Planck zu

$$\partial_t f = -(A^* A + B) f$$

Wäre $[A, B] = 0$, so für $L = A^* A + B$

$$e^{-tL} = e^{-tA^* A} e^{-tB}$$

Aber $[A, B] \neq 0$ hilft, wie bei Hörmander Operatoren

Hypokoerzivität

koerziv (auch koerzitiv) von *coercere* = bändigen, zusammenhalten

Def $\mathcal{F} : (X, \|\,.\,\|) \to \mathbb{R}$ koerziv $\iff \mathcal{F}(f_n) \to \infty$ wenn $\|f_n\| \to \infty$

Satz $\mathcal{F}$ von unten halbstetig, X reflexiv $\implies \mathcal{F}$ hat Minimum

Hier anderer Begriff (Verallgemeinerung von spetralem *gap*)

Def $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heisst λ-koerziv
$\iff \exists\, \widetilde{\mathcal{H}} \subset \ker(L)^\perp$ dicht: $\Re e\, \langle f|L|f\rangle_\sim \geq \lambda \|f\|_\sim^2 \;\; \forall\, f \in \mathcal{D}(L) \cap \widetilde{\mathcal{H}}$
$\iff \exists\, \widetilde{\mathcal{H}} \subset \ker(L)^\perp$ dicht: $\|e^{-tL} f\|_\sim \leq e^{-t\lambda} \|f\|_\sim \; \forall f \in \mathcal{D}(L) \cap \widetilde{\mathcal{H}}$

Def $\mathcal{L} : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}$ hypokoerziv
$\iff \widetilde{\mathcal{H}} \subset \ker(L)^\perp$ dicht: $\|e^{-tL} f\|_\sim \leq Ce^{-t\lambda} \|f\|_\sim \; \forall f \in \mathcal{D}(L) \cap \widetilde{\mathcal{H}}$

Nur Konstante, Begriff unabhängig von Wahl äquivalenter Norm

Theorem Sei $L = A^*A + B$ auf Hilbert $\mathcal{H}$ mit $B^* = -B$.
Setze $C = [A, B]$.

(i) $[A, C] = [A^*, C] = 0$

(ii) $[A, A^*]$ relativ beschränkt durch $\mathbf{1}$ und A

(iii) $[A, C]$ relativ beschränkt durch A, A^2, C, AC

(H) $A^*A + C^*C$ koerziv (wie Hörmander mit 1. Kommutator)

Dann ist L hypokoerziv.

Zudem existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass

$$\mathcal{F}(f) = \|f\|^2 + a\|Af\|^2 + 2b\,\Re e\,\langle Af|Cf\rangle + c\|Cf\|^2$$

für ein $K > 0$ erfüllt:

$$\partial_t \mathcal{F}(e^{-tL}f) \leq -K\,\mathcal{F}(e^{-tL}f)$$

Voraussetzungen für Fokker-Planck leicht zu überprüfen

Zusammenfassung

- Cerciniani Vermutung
- ortsinhomogene Boltzmann Gleichung
- Hypokoerzivität (auch mehr Kommutatoren, für nicht-lineare, ...)