

Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Übungsblatt 4 (15.5.2026)

Aufgabe 16: Für $x \in \mathbb{R}$ werden $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ durch

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} \quad \text{und} \quad \lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} : x \leq m\}$$

definiert, d.h. $\lfloor x \rfloor$ und $\lceil x \rceil$ werden durch die Ungleichungen

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{und} \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

charakterisiert. Zeige, dass gilt:

(1)

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(2)

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(3)

$$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}.$$

(4)

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

(5)

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 17: Bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n$$

gilt. (Beispiele: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, ...)

Aufgabe 18:

(1) Berechne für $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! \bmod n,$$

d.h. den Rest der Division von $(n-1)!$ durch n . Der Satz von Wilson (Aufgabe P5) darf verwendet werden.

(2) Beweise folgendes Primzahlzwillingskriterium für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$:

$$n \text{ und } n-2 \text{ sind Primzahlen} \iff 4 \left\lfloor \frac{(n-3)!}{n-2} \right\rfloor \equiv -5 \bmod n.$$

Aufgabe 19: Bestimme das n -te Glied der (arithmetischen) Folge

$$4, \quad 8, \quad 10, \quad 13, \quad 20, \quad 34, \quad 58, \quad \dots$$

und die Summe der ersten n Glieder.

Aufgabe 20: Eine arithmetische Progression der Länge n ist eine Zahlenfolge der Gestalt

$$(a + kd)_{0 \leq k \leq n-1}, \quad \text{also} \quad a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \dots \quad a + (n-1)d$$

mit $a, d \in \mathbb{N}$. In der Aufgabe geht es um arithmetische Progressionen, die nur aus Primzahlen bestehen.

- (1) Zeige: Besteht für $a, d, n \in \mathbb{N}$ die arithmetische Progression $(a + kd)_{0 \leq k \leq n-1}$ nur aus Primzahlen, so gilt:
 - (a) a eine Primzahl.
 - (b) Für die Länge n gilt $n \leq a$.
 - (c) d ist durch alle von a verschiedenen Primzahlen $\leq n$ teilbar.
- (2) Konstruiere für folgende Werte von a nur aus Primzahlen bestehende arithmetische Progressionen $(a + kd)_{0 \leq k \leq n-1}$ der Länge $n = a$ für

$$a = 2, 3, 5, 7, \dots$$

- (3) Green und Tao bewiesen, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$ gibt, sodass alle n Zahlen der arithmetischen Progression $(a + kd)_{0 \leq k \leq n-1}$ Primzahlen sind.¹ Folgere das Ergebnis von Green und Tao aus der (unbewiesenen) Primzahl- k -Tupel-Vermutung.

¹Ben Green und Terence Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Annals of Mathematics* **167** (2008), 471-547.