Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)
Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Anmerkungen:

(1) Als Hilfsmittel ist in der Klausur nur ein vorne und hinten beschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt.
(2) Zur Lösung einer Aufgabe gehören auch Darstellung des Lösungswegs und Begründungen.

Aufgabe 1: Welche der folgenden Mengen sind algebraische Teilmengen des $\mathbb{A}^1$ (über $\mathbb{C}$)? (Begründung!)

(1) $\{1, 2, 3\}$.
(2) $\{i, -i\}$.
(3) $\{-\pi\}$.
(4) $\mathbb{Z}$.
(5) $\mathbb{R}$.
(6) $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

(Vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 6)

Aufgabe 2: Seien X und Y als Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$ (über $\mathbb{R}$) wie folgt definiert (mit $i^2 = -1$):

$$X = \{(2, 3i), (2, -3i)\} \quad \text{und} \quad Y = \{(2, 3i), (2i, 3)\}.$$

(1) Zeige, dass X eine über $\mathbb{R}$ definierte algebraische Menge ist.
(2) Was ist $X(\mathbb{R})$?
(3) Warum ist Y nicht über $\mathbb{R}$ definiert?

Aufgabe 3: In der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$ (über $\mathbb{Q}$) sei

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y = \sqrt{2}x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y = -\sqrt{2}x\}$$

gegeben.

(1) Warum ist X über $\mathbb{Q}$ definiert?
(2) Bestimme $X(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 4: Durch $f = x^4 - x^2y^2 + 1$ wird eine ebene affine Kurve C (über $\mathbb{C}$) definiert.

(1) Bestimme den projektiven Abschluss $\overline{C}$ von C.
(2) Welche Punkte hat C im Unendlichen?
(3) Bestimme die Singularitäten von $\overline{C}$.

Aufgabe 5: Sei C die durch die affine Gleichung $y^2 + y = x^3$ definierte projektive ebene Kurve über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

(1) Bestimme ein C beschreibendes homogenes Polynom $f(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{F}_2[x_0, x_1, x_2]$.
(2) Zeige, dass C nichtsingulär ist.

Datei: algku_klausur_0.tex. Version vom 5.6.2021

(3) Bestimme für den Punkt $P = (1:0:0) \in C(\mathbb{F}_2)$ die Tangente T_P an C in P.
(4) Bestimme die Schnittpunkte der Tangente T_P mit der Kurve und die zugehörigen Schnittmultiplizitäten.

(Vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 19)

Aufgabe 6: Durch $f = x_0x_2^2 - x_1^3$ wird eine ebene projektive Kurve (über $\mathbb{C}$) definiert.

(1) Bestimme die Singularitäten von C.
(2) Bestimme die Hessesche Kurve H_C zu C.
(3) Bestimme die Wendepunkte von C.

Aufgabe 7: Durch

$$f = x_0^2 - x_0x_1 - x_0x_2 - x_1^2 - x_2^2 \in \mathbb{F}_3[x_0, x_1, x_2]$$

wird eine ebene projektive Quadrik C über $\mathbb{F}_3$ definiert.

(1) Bestimme die Hesse-Matrix A_f von f.
(2) Ist C singulär? Wenn ja, bestimme alle Singularitäten von C.
(3) Ist f reduzibel über $\mathbb{F}_3$ oder über $\overline{\mathbb{F}}_3$? Wenn ja, zerlege f in Linearfaktoren.
(4) Bestimme die Menge $C(\mathbb{F}_3)$ der $\mathbb{F}_3$-rationalen Punkte von C.

(Vgl. Übungsblatt 5, Aufgabe 21)

Aufgabe 8: Durch $f = x_0^2 + 2x_0x_1 + 3x_0x_2 - 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ wird eine nichtsinguläre projektive ebene Quadrik C über $\mathbb{R}$ definiert.

(1) Bestimme die Polare des Punktes $P = (4 : -7 : 16)$ bezüglich der Quadrik C.
(2) Bestimme die Schnittpunkte der Polaren mit der Kurve.
(3) Bestimme die Tangenten an C, die durch den Punkt P gehen.

(Vgl. Übungsblatt 5, Aufgabe 22)

Aufgabe 9: Durch $f = x_0x_1 + x_1^2 + x_2^2$ wird eine nichtsinguläre ebene Quadrik C über $\mathbb{Q}$ definiert. Bestimme eine Parametrisierung der Kurve.

Aufgabe 10: Warum liegen drei Punkte eines nichtsingulären ebenen Kegelschnitts nie auf einer Geraden?

Aufgabe 11: Durch die Polynome

$$f_1 = x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2, \quad f_2 = x_0x_1, \quad f_3 = x_1^2 + x_2^2, \quad f_4 = x_2^2$$

werden projektive ebene Kurven C_1, C_2, C_3, C_4 über $\mathbb{F}_{127}$ definiert. Bestimme

$$\#C_i(\mathbb{F}_{127}) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4.$$

(Vgl. Übungsblatt 6, Aufgabe 26)

Aufgabe 12: Bestimme für folgende über $\mathbb{Q}$-definierten Quadriken eine Legendre-Normalform und untersuche, ob es $\mathbb{Q}$-rationale Punkte gibt.

(1) $6x_0^2 - 7x_1^2 + 8x_2^2 = 0$,
(2) $7x_0^2 - 8x_1^2 + 9x_2^2 = 0$.

(Die Frage nach der Existenz von $\mathbb{Q}$-rationalen Punkten muss nur behandelt werden, wenn man mit dem Legendre-Symbol vertraut ist.)

Aufgabe 13: Durch $f_{(u,v)} = u(x_0^2 - x_1^2) + vx_1x_2$ wird ein Büschel ebener Quadriken über $\mathbb{C}$ definiert.

(1) Bestimme die Basispunkte des Büschels.
(2) Bestimme alle singulären Kurven des Büschels.

Aufgabe 14: Seien P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 fünf verschiedene Punkte in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ (über $\mathbb{C}$), von denen genau drei der Punkte auf einer Geraden liegen, nämlich P_1, P_2, P_3.
Zeige, dass es genau eine Quadrik gibt, die durch die fünf Punkte geht, und dass diese Quadrik singulär ist.

Aufgabe 15: Bestimme $\operatorname{div}(f_k)$ für folgende Funktionen $f_k \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$:

$$f_1 = x^2 + 1, \quad f_2 = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad f_3 = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad f_4 = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$$

(Vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 37)

Aufgabe 16: Welcher der folgenden Divisoren $D_k \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^1)$ ist ein Hauptdivisor? Bestimme gegebenenfalls eine Funktion $f_k \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ mit $D_k = \operatorname{div}(f_k)$.

$$D_1 = [1] + [2], \quad D_2 = 3[4] - 3[\infty], \quad D_3 = [1] + [2] - [3] - [4], \quad D_4 = 3[1] - 2[2] - [\infty].$$

(Vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 38)

Aufgabe 17: Bestimme für folgende Divisoren $D_k \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^1)$ den Vektorraum $\mathcal{L}(D_k)$ durch Angabe einer Basis:

$$D_1 = [1]+[2], \quad D_2 = [1]-[2]+[3], \quad D_3 = [1]-[2]-[3], \quad D_4 = [1]+2[2]+3[\infty], \quad D_5 = [1]+2[2]-3[\infty].$$

(Vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 39)

Aufgabe 18: Bestimme alle Funktionen $f \in \mathcal{L}(2[1] - [2])$ (des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$), die in 0 und ∞ definiert sind und die Bedingungen

$$f(0) = 2 \quad \text{und} \quad f(\infty) = -1$$

erfüllen.