KAPITEL 2

Mehrfache Integrale

Für genauere Ausführungen sei auf das Kapitel XXIII „Mehrfache R-Integrale“ in „Lehrbuch der Analysis. Teil 2“ von H. Heuser (14. Auflage) verwiesen.

1. Zweidimensionale Integrale

Eine **Zerlegung** Z eines kompakten Intervalls $[a, b]$ (mit $a < b$) ist eine endliche Menge $Z \subseteq [a, b]$ mit $a, b \in Z$. Man kann dann eindeutig schreiben

$$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir schreiben daher auch $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.
Eine Zerlegung Z' heißt **Verfeinerung** einer Zerlegung Z eines Intervalls $[a, b]$, wenn $Z' \supseteq Z$ gilt. Z' entsteht also aus Z durch Hinzunahme weiterer Punkte.
Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ ein Rechteck

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

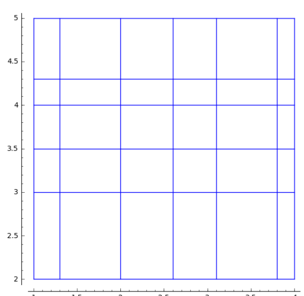
Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sei

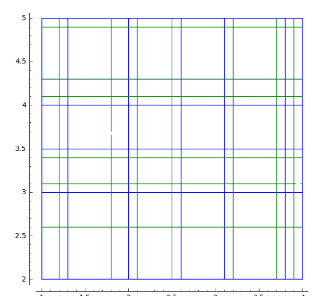
$$X = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} = b\}$$

eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$Y = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} = d\}$$

eine Zerlegung von $[c, d]$.





Wir definieren eine zugehörige **Obersumme** und **Untersumme** durch

$$O(f, [a, b] \times [c, d], X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

$$U(f, [a, b] \times [c, d], X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

Lemma. *Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

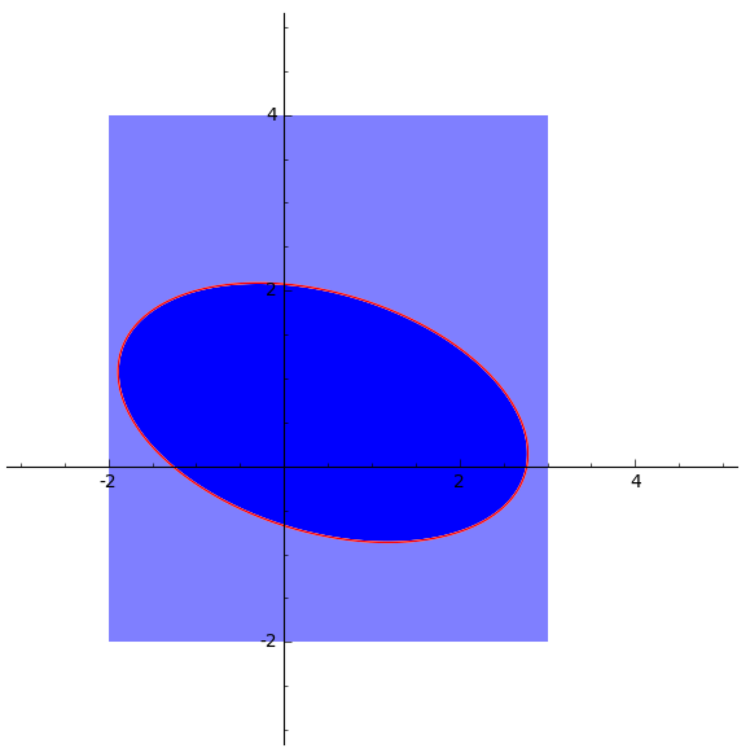
Datei: al_int2.tex. Version vom 31.1.2020

(1) *Ist X' Verfeinerung einer Zerlegung X des Intervalls $[a,b]$ und Y' Verfeinerung einer Zerlegung Y des Intervalls $[c,d]$, so gilt*
$$\begin{aligned} U(f,[a,b]\times[c,d],X,Y) &\leq U(f,[a,b]\times[c,d],X',Y'),\\ O(f,[a,b]\times[c,d],X',Y') &\leq O(f,[a,b]\times[c,d],X,Y). \end{aligned}$$
(2) *Sind X_1 und X_2 Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ und Y_1 und Y_2 Zerlegungen des Intervalls $[c,d]$, so gilt*
$$U(f,[a,b]\times[c,d],X_1,Y_1)\leq O(f,[a,b]\times[c,d],X_2,Y_2).$$

Man definiert nun das **Oberintegral** und das **Unterintegral** von f über $[a,b]\times[c,d]$ durch
$$\overline{I}(f,[a,b]\times[c,d])=\inf\{O(f,[a,b]\times[c,d],X,Y): X \text{ ist Zerlegung von } [a,b], Y \text{ ist Zerlegung von } [c,d]\}.$$
$$\underline{I}(f,[a,b]\times[c,d])=\sup\{U(f,[a,b]\times[c,d],X,Y): X \text{ ist Zerlegung von } [a,b], Y \text{ ist Zerlegung von } [c,d]\}.$$

Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ heißt **integrierbar** (genauer: **Riemann-integrierbar**) auf $[a,b]\times[c,d]$, wenn gilt
$$\underline{I}(f,[a,b]\times[c,d])=\overline{I}(f,[a,b]\times[c,d]).$$
Der gemeinsame Wert heißt dann das **Integral von f über** $[a,b]\times[c,d]$ und wird auf eine der folgenden Weisen bezeichnet:
$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d(x,y) \text{ oder } \int_{[a,b]\times[c,d]} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$
Man findet dafür auch die Schreibweise
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d(x,y)$$
um anzudeuten, dass man sich in einer 2-dimensionalen Situation befindet.

Das Integral über eine beschränkte Menge $G\subseteq\mathbb{R}^2$: Eine Menge $G\subseteq\mathbb{R}^2$ ist beschränkt, wenn sie in einem Rechteck enthalten ist, d.h. wenn es Zahlen a,b,c,d gibt mit
$$G\subseteq[a,b]\times[c,d].$$



Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und $[a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck mit

$$G \subseteq [a,b] \times [c,d],$$

so heißt f **integrierbar über** G, wenn die fortgesetzte Funktion

$$\widetilde{f} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R} \text{ mit } \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{falls } (x,y) \in G, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

über $[a,b] \times [c,d]$ integrierbar ist. In diesem Fall nennt man das zugehörige Integral das **Integral von** f **über** G und schreibt

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_{[a,b]\times[c,d]} \widetilde{f}(x,y)d(x,y).$$

Geometrische Interpretation: Gilt für die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ die Bedingung $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in G$, so beschreibt das Integral

$$\int_G f(x,y)d(x,y)$$

das **Volumen des Körpers** unter dem Graphen von f:

$$\text{vol}\left(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G \text{ und } 0 \leq z \leq f(x,y)\}\right) = \int_G f(x,y)d(x,y).$$

Beispiel: Wählen wir

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und $f : G \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

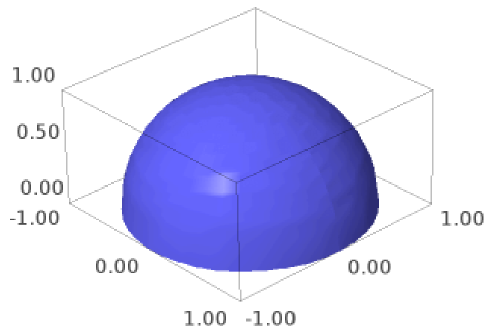
so ist

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

Der obere Teil der Einheitskugel. Also ist

$$\int_G f(x,y)d(x,y)$$

das zugehörige Volumen. Uns fehlt nun noch eine Methode, das Integral wirklich zu berechnen.



Satz (Linearität des Integrals). *Sind f und g auf $G \subseteq \mathbb{R}^2$ integrierbar, so ist für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ mit $(\lambda f + \mu g)(x, y) = \lambda f(x, y) + \mu g(x, y)$ auf G integrierbar und es gilt*

$$\int_G (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)) d(x,y) = \lambda \int_G f(x,y) d(x,y) + \mu \int_G g(x,y) d(x,y).$$

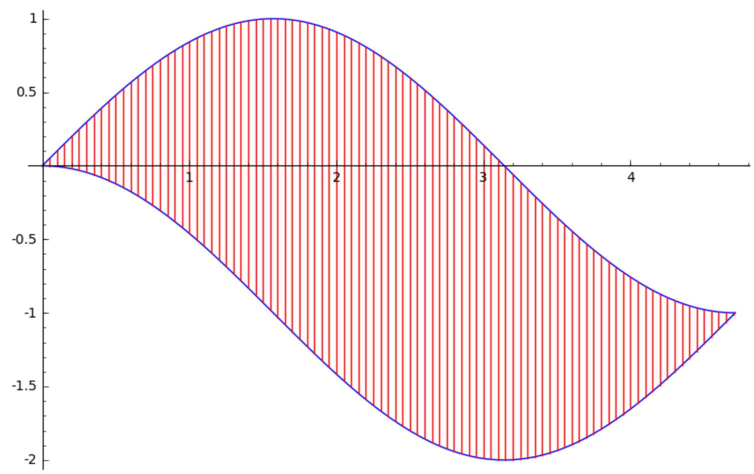
Definition. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und die konstante Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 1$ integrierbar auf G, so heißt G* **messbar** *und das Integral der* **Inhalt**, **Flächeninhalt** *oder das* **Maß** *von G:*

$$\int_G 1 d(x,y) = \int_G d(x,y).$$

Nun kommen wir zur praktischen Berechnung von Integralen.

Definition. *Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt ein* **Normalbereich (bezüglich x)** *wenn es ein kompaktes Intervall $[a, b] \subseteq$ und stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt $\varphi_1 \leq \varphi_2$ und*

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ und } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

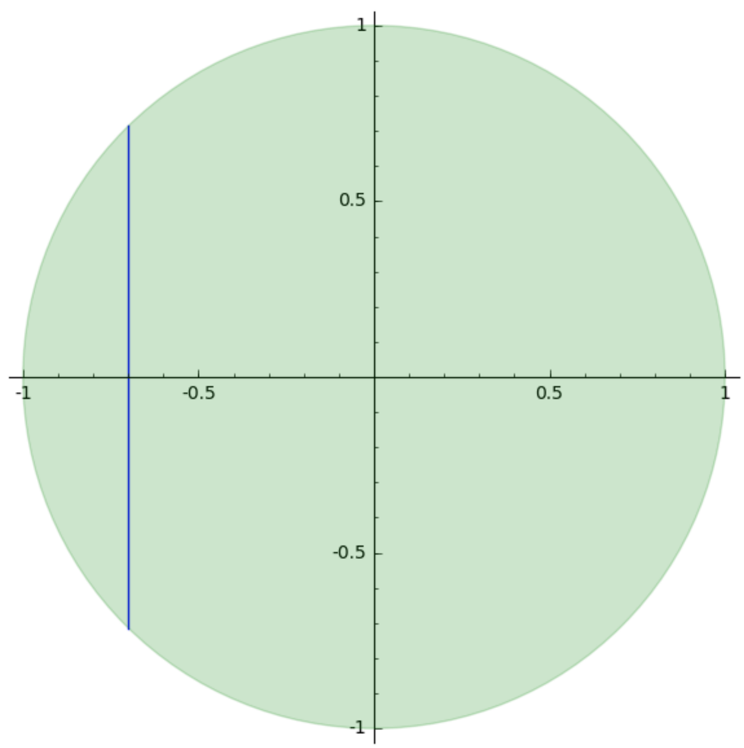


Beispiel: Der Einheitskreis

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist ein Normalbereich, denn man kann schreiben

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$



In einem solchen Fall kann man das Integral über G auf ein Doppelintegral zurückführen:

Satz. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich (bezüglich x), d.h. gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$ und*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

und ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar auf G und es gilt

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Bemerkung: Da insbesondere jedes Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ ein Normalbereich ist mit $\varphi_1(x) = c$ und $\varphi_2(x) = d$, so gilt für eine stetige Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d(x,y) = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy \right) dx.$$

Beispiel: Wir wollen

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y)d(x,y)$$

berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y)d(x,y) &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} (x^2+y)dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} \left(\left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{1} \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Beispiel: Um den Flächeninhalt des Einheitskreises zu berechnen, schreiben wir ihn als Normalbereich:

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

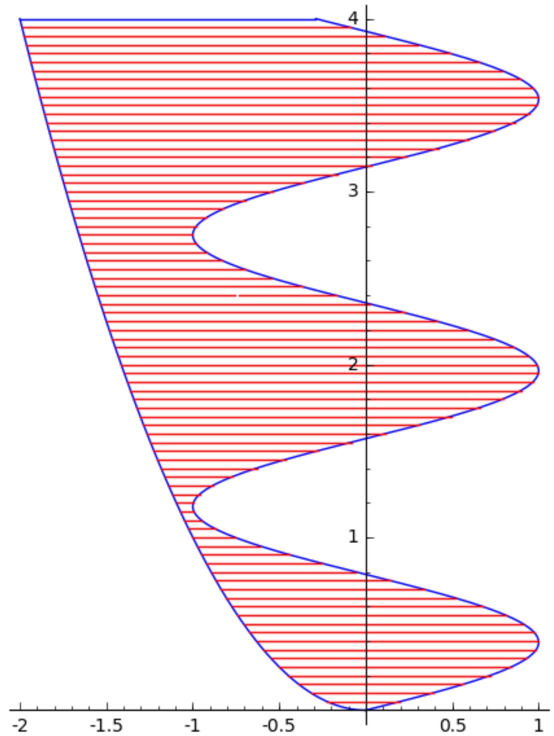
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_G d(x,y) &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{x=-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} dx = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \right]_{x=-1}^{1} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi. \end{aligned}$$

Definition. *Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt ein* **Normalbereich (bezüglich y)**, *wenn es ein kompaktes Intervall $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt $\psi_1 \leq \psi_2$ und und*

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \textit{ und } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(x)\}.$$

Das Bild zeigt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die kein Normalbereich bezüglich x, aber ein Normalbereich bezüglich y ist:



Satz. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich y, d.h. kann man schreiben*

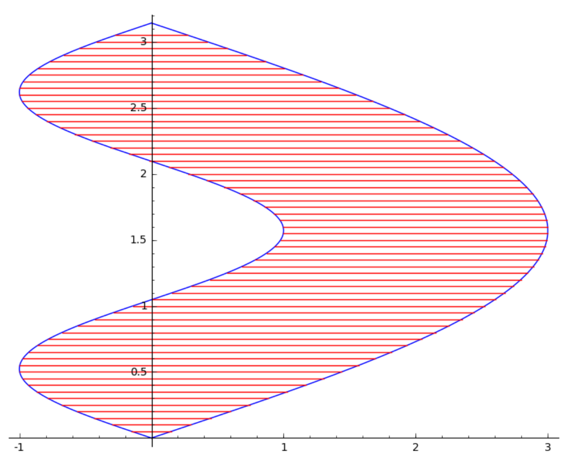
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \text{ und } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

mit einem kompakten Intervall $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ und stetigen Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $\psi_1 \le \psi_2$, und ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar auf G und es gilt

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Beispiel: Wir betrachten

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le \pi \text{ und } -\sin(3y) \le x \le 3\sin(y)\}.$$



G ist offensichtlich kein Normalbereich bezüglich x, aber ein Normalbereich bezüglich y. Wir berechnen

$$\int_G xy\, d(x,y)$$

mit der Formel des letzten Satzes:

$$\begin{aligned}
\int_G xy\, d(x,y) &= \int_{y=0}^{\pi} \left(\int_{x=-\sin(3y)}^{3\sin(y)} xydx \right) dy = \int_{y=0}^{\pi} \left[\frac{1}{2}x^2 y \right]_{x=-\sin(3y)}^{3\sin(y)} dy = \\
&= \int_{y=0}^{\pi} \left(\frac{1}{2}(3\sin y)^2 y - \frac{1}{2}(-\sin(3y))^2 y \right) dy = \\
&= \int_{y=0}^{\pi} \left(\frac{9}{2}(\sin(y))^2 y - \frac{1}{2}(\sin(3y))^2 y \right) dy = \\
&= \left[y^2 + \frac{1}{24} y \sin(6y) - \frac{9}{8} y \sin(2y) + \frac{1}{144}\cos(6y) - \frac{9}{16}\cos(2y) \right]_{y=0}^{\pi} = \\
&= \pi^2,
\end{aligned}$$

wobei die Stammfunktion der vorletzten Zeile mit Sage - einem Computeralgebrasystem - gefunden wurde.

Bemerkung: Es gibt Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^2$, die zwar selbst keine Normalbereiche sind, die sich aber in Normalbereiche zerlegen lassen:

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$$

mit Normalbereichen $G_1, \ldots, G_n$, wobei der Schnitt $G_i \cap G_j$ im Schnitt der Ränder $\partial G_i \cap \partial G_j$ enthalten ist. Dann kann man das Integral mittels der Formel

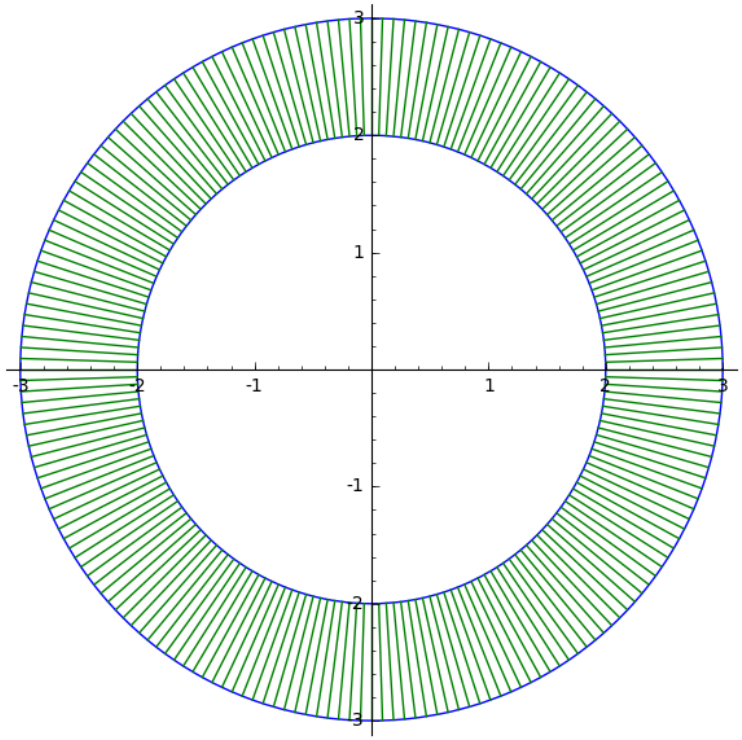
$$\int_G f(x,y) d(x,y) = \int_{G_1} f(x,y) d(x,y) + \int_{G_2} f(x,y) d(x,y) + \cdots + \int_{G_n} f(x,y) d(x,y)$$

berechnen.

Beispiel: Der Kreisring

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

ist weder ein Normalbereich bezüglich x noch ein Normalbereich bezüglich y.



Man kann den Kreisring auf verschiedene Weisen in projizierbare Mengen zerlegen, es bietet sich aber wegen der Symmetrie noch eine weitere Möglichkeit in Form von Polarkoordinaten an, die im Folgenden behandelt werden.

Erinnerung: Die Substitutionsformel für Integrale lautet im 1-dimensionalen Fall

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du,$$

wobei φ stetig differenzierbar sein sollte. Dies soll nun verallgemeinert werden.

Substitution bei 2-dimensionalen Integralen: Wir wollen ein Integral der Form

$$\int_G f(x,y)d(x,y)$$

ausrechnen.

- Wir nehmen an, wir können x und y als Funktionen weiterer Variablen u und v schreiben:
$$x = x(u,v) \quad \text{und} \quad y = y(u,v).$$
- In (u,v)-Koordinaten werde G durch eine Menge H beschrieben, d.h. die Abbildung
$$\Phi : H \to G, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$
soll bijektiv sein.
- $x(u,v)$ und $y(u,v)$ sollen stetig partiell differenzierbar nach u und v sein. Außerdem soll für die Jacobi-Matrix
$$D\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$
gelten
$$\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}) \neq 0 \text{ für alle } (u,v) \in H.$$

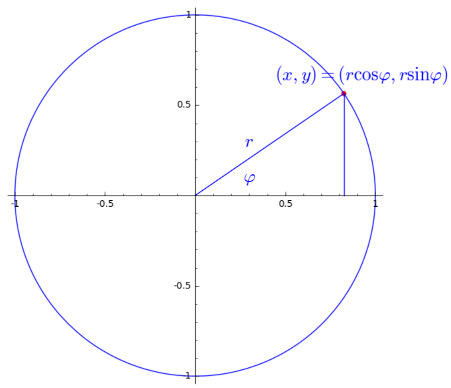
Unter diesen Voraussetzungen gilt die sogenannte **Transformationsformel:**

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_H f(x(u,v),y(u,x)) \cdot \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| d(u,v).$$

Polarkoordinaten: Polarkoordinaten (r,φ) werden mittels der Formeln

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

eingeführt, wobei $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ vorausgesetzt wird.



Die zugehörige Jacobi-Matrix ist

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r(\cos\varphi)^2 + r(\sin\varphi)^2 = r.$$

Beispiel: Wir hatten zuvor den Kreisring

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

betrachtet. In Polarkoordinaten wird die zugehörige Menge durch

$$H = \{(r,\varphi) : 2 \leq r \leq 3 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

beschrieben. Wollen wir eine Funktion $f(x,y)$ über den Kreisring integrieren, so erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_H f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r d(r,\varphi) = \int_{r=2}^{3} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r d\varphi \right) dr.$$

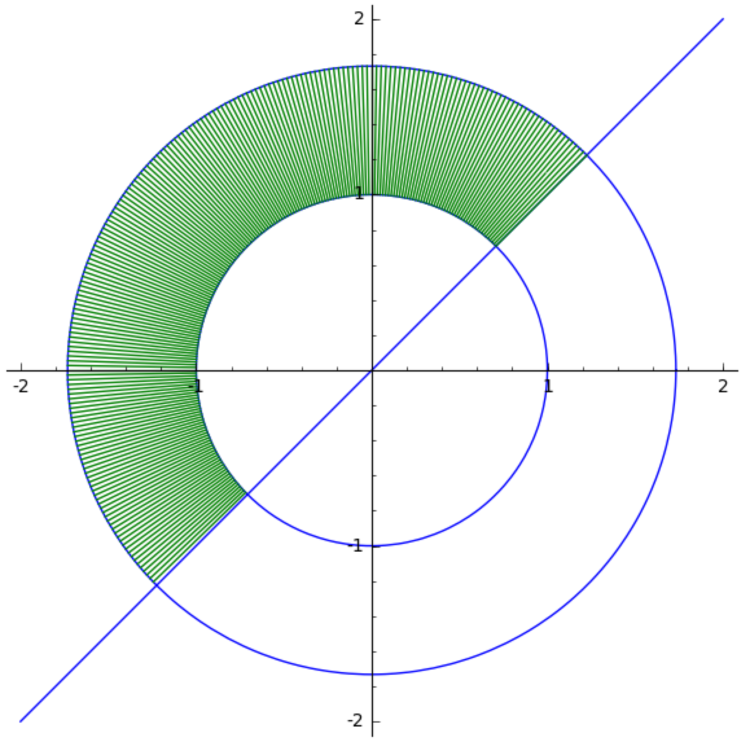
Beispiel: Für

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ und } x \leq y\}$$

soll das Integral

$$\int_G (x-y)^2 d(x,y)$$

berechnet werden. In der Skizze sind die Kreise mit Radien 1 und $\sqrt{3}$ sowie die Winkelhalbierende $y = x$ zu sehen. Grün schraffiert ist G.



Die Menge G ist weder ein Normalbereich bezüglich x noch ein Normalbereich bezüglich y. Wegen der Symmetrie bieten sich aber Polarkoordinaten an. In Polarkoordinaten wird die Menge durch

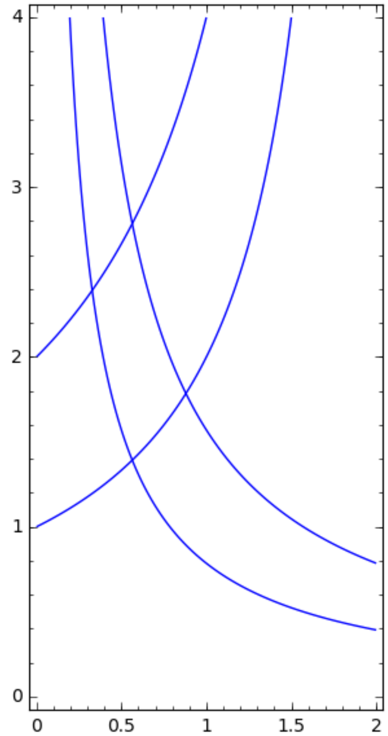
$$H = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq \sqrt{3} \text{ und } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi\}$$

beschreiben. Wir erhalten daher mit obiger Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_G (x-y)^2 d(x,y) &= \int_H (r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 \cdot r d(r,\varphi) = \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_{r=1}^{\sqrt{3}} r^3 (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 dr \right) d\varphi = \\
&= \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=1}^{\sqrt{3}} d\varphi = 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 d\varphi = \\
&= 2 \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} ((\cos\varphi)^2 - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + (\sin\varphi)^2) d\varphi = \\
&= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)) d\varphi = 2 \left[\varphi - (\sin\varphi)^2\right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \\
&= 2\left(\frac{5\pi}{4} - (\sin\frac{5\pi}{4})^2\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - (\sin\frac{\pi}{4})^2\right) = 2\pi - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\pi
\end{aligned}$$

Beispiel: (nach H2012/2/5b) Sei G das Gebiet in der euklidischen Ebene, das durch die Kurven $xy = \frac{\pi}{4}$, $xy = \frac{\pi}{2}$, $y(2-x) = 2$ und $y(2-x) = 4$ berandet wird. Zu berechnen ist das Integral

$$\int_G y\cos(xy) d(x,y).$$

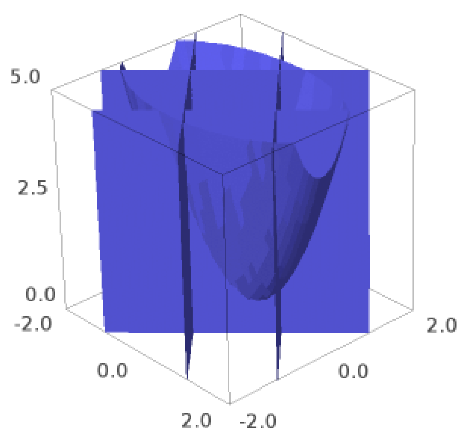


- Die Randkurven von G sind
$$xy = \frac{\pi}{4}, \quad xy = \frac{\pi}{2}, \quad y(2-x) = 2, \quad y(2-x) = 4.$$
Daher erhält man für $(x, y) \in G$ die Bedingungen
$$\frac{\pi}{4} \leq xy \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad 2 \leq y(2-x) \leq 4,$$
also
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq xy \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 2 \leq y(2-x) \leq 4\}.$$
- Wir führen u, v ein durch
$$xy = u, \quad y(2-x) = v.$$
Dann ist
$$v = y(2-x) = 2y - xy = 2y - u, \quad \text{also} \quad y = \frac{u+v}{2},$$
und damit
$$x = \frac{u}{y} = \frac{2u}{u+v}.$$
Zusammengefasst:
$$x = \frac{2u}{u+v}, \quad y = \frac{u+v}{2}.$$
Aus obigen Ungleichungen erhalten wir sofort, dass G in den (u, v)-Koordinaten durch die Menge
$$H = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 2 \leq v \leq 4\}$$
beschreiben wird. (Die Zuordnung $(u, v) \mapsto (x, y)$ ist natürlich bijektiv, da wir aus x, y sofort u, v und umgekehrt aus u, v sofort x, y berechnen können.) Es ist
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2v}{(u+v)^2} & -\frac{2u}{(u+v)^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{u+v}.$$

- Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}\int_G y\cos(xy)d(x,y) &= \int_H \frac{u+v}{2}\cdot\cos(u)\cdot\frac{1}{u+v}\,d(u,v) = \frac{1}{2}\int_H \cos(u)\,d(u,v) = \\ &= \frac{1}{2}\int_{u=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{v=2}^{4}\cos(u)dv\right)du = \int_{u=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)du = \\ &= [\sin(u)]_{u=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Beispiel: (nach H2012/2/5a) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers im dreidimensionalen Anschauungsraum, der durch die Ebene $z = 0$, die Fläche $z = x^2 + 2y^2$ und die Ebenen $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $x - y = 1$ und $-x - y = 1$ berandet wird.



- Die Ebenen lassen sich auch in der Form

$$x + y = 1, \quad x + y = -1, \quad x - y = 1, \quad x - y = -1$$

schreiben, sodass die Bedingungen an x und y auch als

$$-1 \le x + y \le 1 \quad \text{und} \quad -1 \le x - y \le 1$$

geschrieben werden können. Definieren wir also

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x + y \le 1 \text{ und } -1 \le x - y \le 1\},$$

so wird obiger Körper K durch

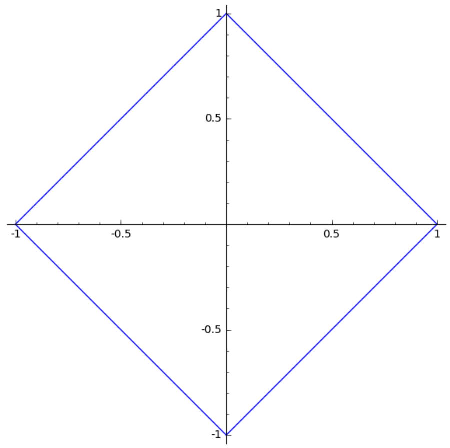
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G \text{ und } 0 \le z \le x^2 + 2y^2\}$$

beschrieben. Das Integral

$$\int_G (x^2 + 2y^2)d(x,y)$$

ist dann genau das gesuchte Volumen.

- Zwar ist G ein Normalbereich, wie man an Hand einer Skizze sofort sieht:



Wir wollen aber das Integral mit Hilfe der Transformationsformel berechnen.

- Wir führen neue Koordinaten u, v durch
$$x + y = u, \quad x - y = v$$
ein. Dann ist
$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$
Die Menge G wird in (u, v)-Koordinaten durch die Menge
$$H = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1 \text{ und } -1 \leq v \leq 1\}$$
beschrieben. Die Jacobimatrix ist
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ mit Determinante } \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$
- Der Transformationssatz liefert nun
$$\begin{aligned}
\int_G (x^2 + 2y^2) d(x, y) &= \int_H \left((\frac{u+v}{2})^2 + 2(\frac{u-v}{2})^2 \right) |\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}| d(u, v) = \\
&= \int_H \left(\frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} + \frac{2u^2 - 4uv + 2v^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}\, d(u, v) = \\
&= \frac{1}{8} \int_H \left(3u^2 - 2uv + 3v^2\right) d(u, v) = \\
&= \frac{1}{8} \int_{u=-1}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \left(3u^2 - 2uv + 3v^2\right) dv \right) du = \\
&= \frac{1}{8} \int_{u=-1}^{1} \left(\left[3u^2 v - uv^2 + v^3\right]_{v=-1}^{1} \right) du = \\
&= \frac{1}{8} \int_{u=-1}^{1} \left((3u^2 - u + 1) - (-3u^2 - u - 1) \right) du = \\
&= \frac{1}{8} \int_{u=-1}^{1} (6u^2 + 2) du = \frac{1}{8} \left[2u^3 + 2u\right]_{u=-1}^{1} = 1.
\end{aligned}$$
Das Volumen ist also 1.

2. Dreidimensionale Integrale

Integrale von Funktionen $f(x,y,z)$ über beschränkte Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^3$ werden analog wie im 2-dimensionalen Fall definiert:

$$\int_G f(x,y,z)d(x,y,z).$$

Ein wesentliches Hilfsmittel für die Berechnung sind wieder sogenannte **Normalbereiche**. Gibt es Zahlen $a \leq b$, stetige Funktionen $\alpha_1(x) \leq \beta_1(x)$ und stetige Funktionen $\alpha_2(x,y) \leq \beta_2(x,y)$ mit

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \alpha_1(x) \leq y \leq \beta_1(x), \alpha_2(x,y) \leq z \leq \beta_2(x,y)\},$$

so nennt man G einen **Normalbereich**. (Man spricht genauso von Normalbereich, wenn eine solche Darstellung mit eine Permutation der Variablen x, y, z existiert.)
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f über G integrierbar und es gilt

$$\int_G f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \left(\int_{z=\alpha_2(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Beispiel: $G \subseteq \mathbb{R}^3$ werde begrenzt durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$. Wir können G durch die Ungleichungen

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1$$

beschreiben. Diese Bedingungen lassen sich auch so umformulieren:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

In dieser Darstellung sieht man, dass G ein Normalbereich ist. Wir wollen das Integral über

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

berechnen:

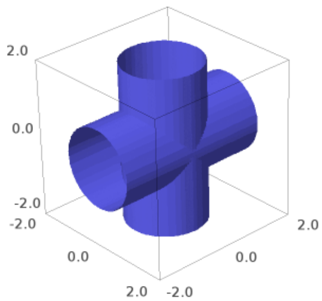
$$\begin{aligned}
\int_G f(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} (x^2+y^2+z^2)dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=0}^{1-x-y} \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(x^2(1-x-y) + y^2(1-x-y) + \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\left[x^2(1-x)y - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3(1-x) - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{12}(1-x-y)^4 \right]_{y=0}^{1-x} \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(x^2(1-x)^2 - \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^4 - \frac{1}{4}(1-x)^4 + \frac{1}{12}(1-x)^4 \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^4 \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \right) dx = \\
&= = \left[\frac{2}{15}x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x \right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{15} - \frac{5}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \\
&= \frac{8 - 25 + 30 - 20 + 10}{60} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

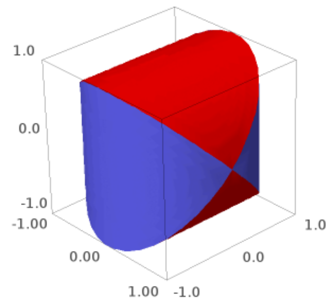
Ist $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und die konstante Funktion $f(x,y,z) = 1$ integrierbar über G, so heißt G **messbar** und

$$\int_G d(x,y,z)$$

heißt das **Maß**, der dreidimensionale **Inhalt** oder das **Volumen** von G. Wir schreiben dafür auch $\mathrm{vol}\,(G)$ oder $\mathrm{vol}_3(G)$.

Beispiel: Die Menge
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, x^2+z^2 \le 1\}$$
ist der Schnitt der beiden Zylinder $x^2+y^2 \le 1$ und $x^2+z^2 \le 1$.





Wir wollen das Volumen bestimmen. Man sieht leicht, dass man G als Normalbereich schreiben kann:
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-z^2}\}.$$
Daher erhält man
$$\begin{aligned}
\mu(G) &= \int_G d(x,y,z) = \int_{x=-1}^{1}\left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\right) dy\right) dx = \\
&= \int_{x=-1}^{1}\left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}dy\right) dx = \int_{x=-1}^{1} 4(1-x^2)dx = \\
&= \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{x=-1}^{1} = (4-\frac{4}{3}) - (-4+\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Substitution - Transformationsformel: Wir wollen ein Integral
$$\int_G f(x,y,z)d(x,y,z)$$
berechnen.

- Wir nehmen an, wir können x, y, z als Funktionen weiterer Variablen u, v, w schreiben:
$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$
- In (u,v,w)-Koordinaten werde die Menge G durch eine Menge H beschrieben, d.h. die Abbildung
$$\Phi : H \to G, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$
soll bijektiv sein
- $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ sollen stetig partiell differenzierbar nach u, v, w sein. Außerdem soll für die Jacobi-Matrix
$$D\Phi(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

gelten

$$\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}) \neq 0 \text{ für alle } (u,v,w) \in H.$$

- Unter diesen Voraussetzungen gilt die **Transformationsformel**

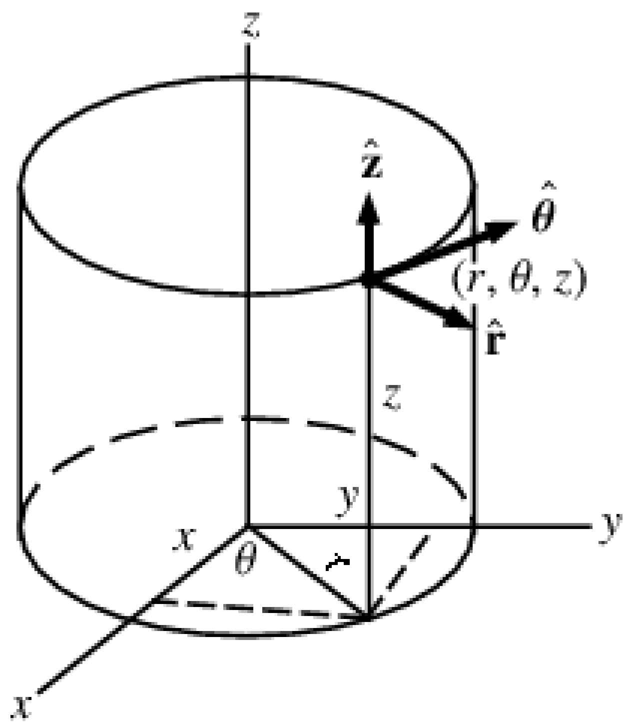
$$\int_G f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_H f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| d(u,v,w).$$

Zylinderkoordinaten: Durch die Formeln

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

werden die Zylinderkoordinaten r, φ, z eingeführt, wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ gefordert wird. Wir berechnen die zugehörige Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Determinante} \quad \det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}) = r.$$



(Das Bild wurde einem WolframMathWorld-Artikel entnommen.)

Beispiel: Bestimmt werden soll das Volumen des Bereichs im $\mathbb{R}^3$, der oberhalb der x-y-Ebene liegt und durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird. Wir haben also

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Hier bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

In den Zylinderkoordinaten wird dann G durch die Menge

$$H = \{(r,\varphi,t) : r \leq 1, 0 \leq z \leq r^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

beschrieben. Da die Funktionaldeterminante r ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(G) &= \int_G d(x,y,z) = \int_H r d(r,\varphi,z) = \int_{r=0}^1 \left(\int_{z=0}^{r^2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi \right) dz \right) dr = \\ &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{z=0}^{r^2} 2\pi r dz \right) dr = \int_{r=0}^1 2\pi r^3 dr = \left[\frac{\pi}{2} r^4 \right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Beispiel: Wir lassen ein achsenparalleles Rechteck in der x-z-Ebene mit Minimalabstand a, Breite b und Höhe c um die z-Achse rotieren und erhalten so einen Rotationskörper K. Er lässt sich wie folgt beschreiben:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi < 2\pi, a \le r \le a+b, 0 \le z \le c\}.$$

Die zugehörige Menge in Polarkoordinaten ist

$$H = \{(r,\varphi,z) : a \le r \le a+b, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le c\}.$$

Mit der Transformationsformel für Zylinderkoordinaten erhalten wir für das Volumen

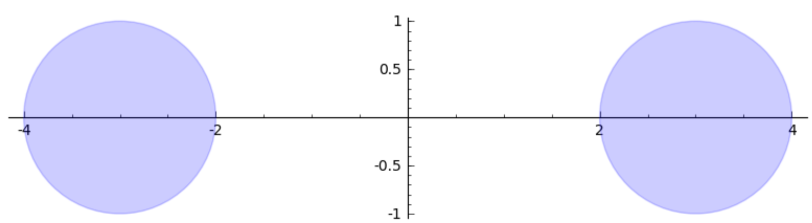
$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(K) &= \int_K d(x,y,z) = \int_H r d(r,\varphi,z) = \int_{r=a}^{a+b} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{c} r dz \right) d\varphi \right) dr = \\ &= \int_{r=a}^{a+b} 2\pi c r dr = \left[\pi c r^2 \right]_{r=a}^{a+b} = \pi c \left((a+b)^2 - a^2 \right)\end{aligned}$$

Beispiel: (Volltorus) Rotiert man einen Kreis in der x-z-Ebene mit Radius b und Abstand a vom Nullpunkt, also

$$(x-a)^2 + z^2 \le b^2,$$

um die z-Achse, so erhält man einen Torus T, also

$$T = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) : 0 \le \varphi \le 2\pi, (r-a)^2 + z^2 \le b^2\}.$$



Die Bedingungen an r und z lassen sich auch in der Form

$$a - b \le r \le a+b, \quad -\sqrt{b^2-(r-a)^2} \le z \le \sqrt{b^2-(r-a)^2}$$

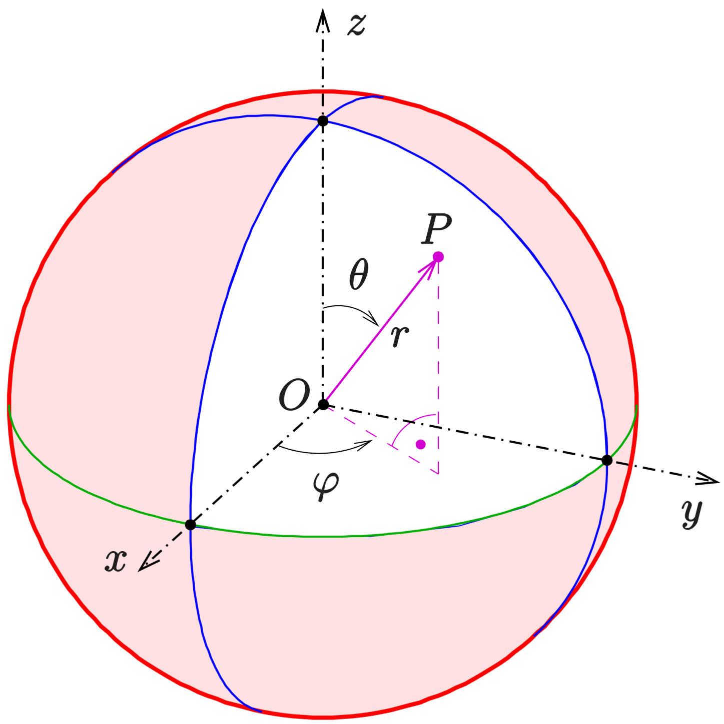
beschreiben. Für das Volumen erhält man dann unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(T) &= \int_T d(x,y,z) = \int_{r=a-b}^{a+b} \left(\int_{z=-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi \right) dz \right) dr = \\ &= 2\pi \int_{r=a-b}^{a+b} r \left(\int_{z=-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} dz \right) dr = 4\pi \int_{r=a-b}^{a+b} r\sqrt{b^2-(r-a)^2} dr = \\ &= 4\pi \int_{u=-b}^{b} (u+a)\sqrt{b^2-u^2} du = \cdots = 4\pi \cdot \frac{1}{2}\pi a b^2 = 2\pi^2 a b^2\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: Durch die Formeln

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

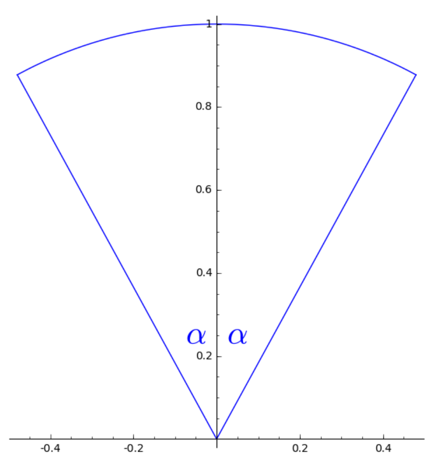
werden die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ eingeführt mit $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



(Das Bild wurde dem Wikipedia-Artikel „Kugelkoordinaten“ entnommen.) Für die Jacobi-Matrix gilt

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Determinante} \qquad r^2\sin(\vartheta).$$

Beispiel: Wir schneiden aus einer Kugel mit Radius a eine „Eistüte“ mit Neigungswinkel α gegen die z-Achse aus. In der Mitte durchgeschnitten soll dies so aussehen:



Dann ist also

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = r\sin\vartheta\cos\varphi, y = r\sin\vartheta\sin\varphi, z = r\cos\vartheta, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \vartheta \leq \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Die Bedingungen in den Kugelkoordinaten sind klar und werden durch die Menge H beschrieben:

$$H = \{(r,\vartheta,\varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \vartheta \leq \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Dann erhalten wir für das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_G d(x,y,z) = \int_H |\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}| d(r,\vartheta,\varphi) = \int_{r=0}^a \left(\int_{\vartheta=0}^\alpha \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta) d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = \\ &= \int_{r=0}^a \left(\int_{\vartheta=0}^\alpha 2\pi r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta \right) dr = \int_{r=0}^a \left(2\pi r^2 \left[-\cos(\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^\alpha \right) dr = \int_{r=0}^a 2\pi r^2 (1-\cos(\alpha)) dr = \\ &= \left[\frac{2}{3} \pi r^3 (1-\cos(\alpha)) \right]_{r=0}^a = \frac{2}{3}\pi a^3 (1-\cos(\alpha)). \end{aligned}$$

(Das Ergebnis ist plausibel: Wenn α gegen π geht, erhält man die volle Kugel und V geht gegen $\frac{4}{3}\pi a^3$.)

Bemerkung: Physikalisch motiviert sind folgende Begriffe:

- Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine messbare Menge. Dann ist
$$V = \int_G d(x,y,z)$$
das **Volumen** von G.
- Ist eine Dichteverteilung $\rho(x,y,z)$ für G gegeben, so heißt
$$M = \int_G \rho(x,y,z) d(x,y,z)$$
die **Masse** von G.
- Der **Schwerpunkt** (x_S, y_S, z_S) von G bezüglich der Dichteverteilung $\rho(x,y,z)$ berechnet sich aus den Formeln
$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_G x\rho(x,y,z) d(x,y,z), \\ y_S &= \frac{1}{M} \int_G y\rho(x,y,z) d(x,y,z), \\ z_S &= \frac{1}{M} \int_G z\rho(x,y,z) d(x,y,z). \end{aligned}$$

Beispiel: Sei G der Anteil der Einheitskugel, der im 1. Oktanten liegt, also

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ und } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Der Schwerpunkt soll bestimmt werden, wobei wir die Dichte 1 voraussetzen. In Kugelkoordinaten wird K durch die Menge

$$H = \{(r,\vartheta,\varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

beschrieben. Daher folgt für das Volumen mit der Transformationsformel für Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_K d(x,y,z) &= \int_H r^2 \sin(\vartheta) d(r,\vartheta,\varphi) = \int_{r=0}^1 \left(\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin(\vartheta) d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 r^2 \left(\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta) d\vartheta \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 r^2 \left(\left[-\cos(\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \right) dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 r^2 dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_K x d(x,y,z) &= \int_H r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \cdot r^2 \sin(\vartheta) d(r,\vartheta,\varphi) = \int_H r^3 (\sin(\vartheta))^2 \cos(\varphi) d(r,\vartheta,\varphi) = \\ &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^3 (\sin(\vartheta))^2 \cos(\varphi) d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = \\ &= \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \right) \left(\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\vartheta))^2 d\vartheta \right) \left(\int_{r=0}^1 r^3 dr \right) = 1 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

(Dabei haben wir benutzt, dass $\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)$ eine Stammfunktion von $(\sin(\vartheta))^2$ ist.) Für die x-Koordinate des Schwerpunkts folgt

$$x_S = \frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{8}.$$

Aus Symmetriegründen folgt für den Schwerpunkt

$$S = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}).$$

3. Die n-dimensionale Transformationsformel

SATZ. *Seien $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : H \to G$ bijektiv und stetig differenzierbar, sodass für die Jacobi-Matrix $D\Phi$ gilt*

$$\det D\Phi(\mathbf{u}) \neq 0 \text{ für alle } \mathbf{u} \in H.$$

Sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

- *Genau dann ist $f : G \to \mathbb{R}$ integrierbar über G, wenn die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\Phi(\mathbf{u})) \cdot |\det D\Phi(\mathbf{u})|$ integrierbar über H ist.*
- *Ist f integrierbar über G, so gilt*

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_H f(\Phi(\mathbf{u}))|\det D\Phi(\mathbf{u})|d\mathbf{u}.$$

4. Das Cavalieri-Prinzip

SATZ (Cavalieri-Prinzip). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Für $t \in \mathbb{R}$ sei K_t der Schnitt von K mit der Hyperebene $x_n = t$, etwas genauer*

$$K_t = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in K\}.$$

Dann ist die Funktion $t \mapsto \operatorname{vol}_{n-1}(K_t)$ integrierbar und es gilt

$$\operatorname{vol}_n(K) = \int_R \operatorname{vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

Beispiel: Wir betrachten den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} K_t &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + t^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 - t^2\} = \\ &= \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}\} & \text{für } -1 \leq t \leq 1, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\operatorname{vol}_1(K_t) = \begin{cases} 2\sqrt{1-t^2} & \text{für } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\operatorname{vol}_2(K) = \int_{t=-1}^{1} \operatorname{vol}_1(K_t)dt) = \int_{t=-1}^{1} 2\sqrt{1-t^2}dt = \cdots = \pi.$$