

Der Satz des Pythagoras

Pythagoras von Samos lebte ca. von 560 v.Chr. bis 480 v.Chr., etwa gleichzeitig mit Buddha und Konfuzius. *Genaue* Daten über sein Leben haben wir nicht; auch sind keine schriftlichen Werke von ihm überliefert. Seine Lehren kennt man nur indirekt durch Zeugnisse anderer. Er war der Begründer und das Haupt eines Geheimbundes oder mönchischen Ordens (manche sprechen von einer „Sekte“), aus dem bedeutende Gelehrte und Philosophen hervorgingen.

Als sicher gilt, dass die Pythagoräer an *Seelenwanderung* glaubten und deshalb sowohl rituelle Tieropfer wie auch das Töten und Essen von Tieren strikt *ablehnten*. Darauf geht zurück, dass in späteren Zeiten alle Menschen, die es ablehnten, Tiere zu töten, um sie zu essen, ganz allgemein als *Pythagoräer* bezeichnet wurden. Die Begriffe *Vegetarismus* und *Vegetarier* sind erst jüngeren Datums.

Pythagoras soll den Zusammenhang zwischen harmonischen Klängen und einfachen Zahlenverhältnissen entdeckt und die Pythagoräer ganz allgemein eine Art Zahlenmystik vertreten haben; „Alles ist Zahl“ im Sinne von: Die Zusammenhänge zwischen den Dingen und Geschehnissen lassen sich durch Zahlen erfassen und ausdrücken. Dabei wurden nur ganze Zahlen und Brüche als *Zahl* verstanden. Einen logisch sauberen Begriff der *Irrationalzahl* hat man ja erst im 19. Jahrhundert entwickelt; ein Vorläufer davon war allerdings schon die Proportionenlehre des Eudoxos, die Euklid (eigentlich Eukleides) ca. 300 v.Chr. in seinem bahnbrechenden Lehrbuch *Elemente* darstellte.

Hier soll es aber nur um den „Satz des Pythagoras“ gehen; es ist vielleicht der berühmteste und bekannteste mathematische Lehrsatz überhaupt.

Zunächst: Der Satz stammt *überhaupt nicht* von Pythagoras, sondern war schon etwa tausend Jahre früher den Babyloniern bekannt; dies belegen altbabylonische Keilschrift-Tafeln. Überhaupt muss man sagen: Wenn auch die Leistungen der antiken griechischen Mathematiker, namentlich Eudoxos, Euklid, Apollonios, Archimedes und etliche andere, *einzigartig* waren und den eigentlichen Beginn einer wissenschaftlichen Mathematik bedeuteten, so standen doch auch sie *auf den Schultern von Riesen*; das Wissen, das die Babylonier und Ägypter in ihren uralten Kulturen allmählich erworben und überliefert haben, hatte erheblichen Einfluss auf die Entstehung der wissenschaftlichen Mathematik im antiken Griechenland.

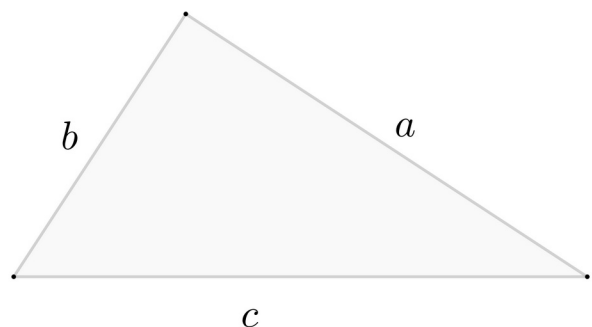
Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen geht es von jetzt an darum, den (so genannten) Satz des Pythagoras zu formulieren und – auf drei verschiedene Weisen – zu begründen.

Der Satz lautet:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Katheten-Quadrate genau gleich dem Hypotenusen-Quadrat.

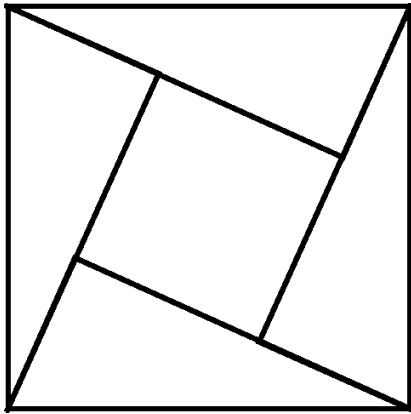
Die *Hypotenuse* ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, und die beiden anderen und damit kürzeren Seiten nennt man *Katheten*.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Der vielleicht einfachste *Beweis* des Pythagoras-Satzes ist der ca. Mitte des 12. Jahrhunderts in einem Werk des bedeutenden indischen Mathematikers Bhāskara II formulierte. (Etwa ein halbes Jahrtausend früher lebte der indische Mathematiker Bhāskara I; es gab auch, im zehnten Jahrhundert, einen indischen *Philosophen* mit Namen Bhāskara.)

Die *Fläche* eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt, mit den bisherigen Bezeichnungen, $\frac{1}{2}ab$; es ist ja die *Hälfte eines Rechtecks* mit den Seitenlängen a und b .



Dieses Bild findet sich bei Bhaskara, verbunden mit der Aufforderung: „Siehe!“

In der Tat: Das große Quadrat hat die Fläche c^2 , die vier rechtwinkligen Dreiecke haben zusammen eine Fläche $2ab$, und das innere Quadrat hat die Kantenlänge $a - b$, also die Fläche $(a - b)^2$.

Fazit:

$$c^2 = 2ab + (a - b)^2, \text{ also wegen } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Literaturhinweise:

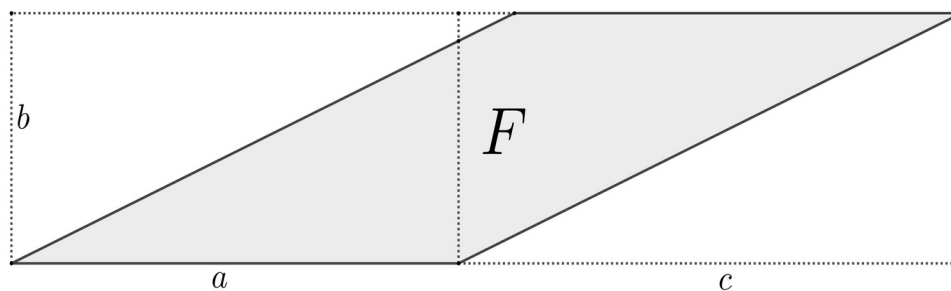
Helmuth Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*, Fourier Verlag, Wiesbaden ²1993

Hans Wußing, *6000 Jahre Mathematik, Band 1*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008

André Pichot, *Die Geburt der Wissenschaft*, Campus Verlag, Frankfurt/M. 1995

Nun folgt der *erste Euklidsche Beweis*, meines Erachtens der nach wie vor *schönste* Beweis des Satzes. Er liefert auch *mehr* als nur $a^2 + b^2 = c^2$.

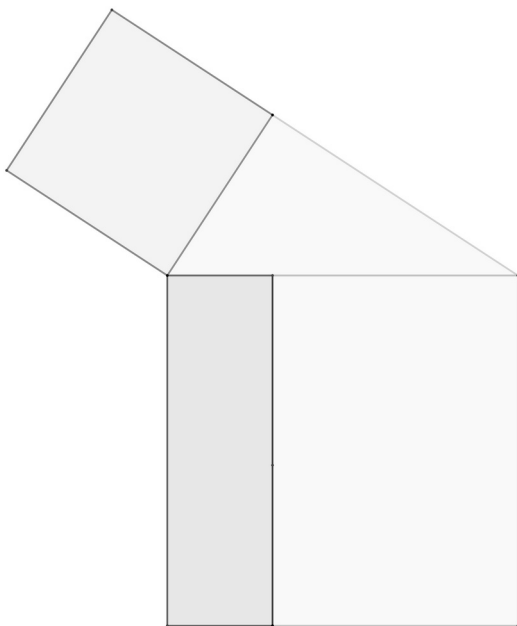
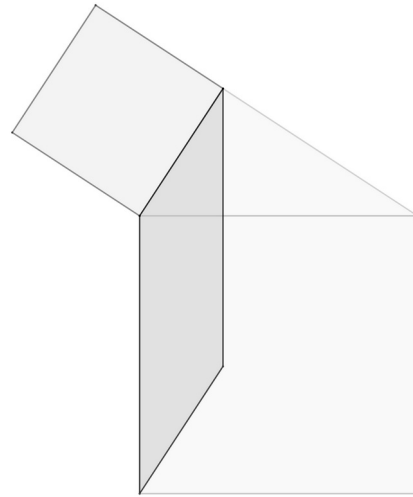
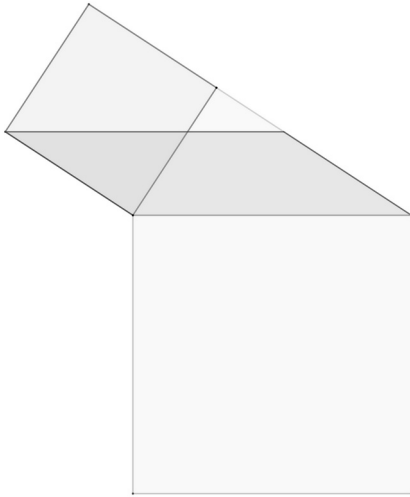
Zunächst bemerken wir: Durch *Scherung* entsteht aus dem Rechteck mit Breite a und Höhe b ein *Parallelogramm* mit derselben *Grundseite* und *Höhe* und auch mit *derselben Fläche F*; dies macht folgende Grafik deutlich:



$$F = (a + c)b - 2 \cdot \frac{cb}{2} = ab$$

Bei Euklid wird alles sorgfältig durch *Kongruenz-Argumente* begründet. Auch der folgende Pythagoras-Beweis wird *nur hier* als *Scherung und Drehung* anschaulich gemacht. Euklid argumentiert mit genauen *Kongruenz-Überlegungen*.

Durch Scherung verwandelt man beim rechtwinkligen Dreieck eines der Katheten-Quadrate in ein Parallelogramm, dessen zweite Seite mit der Hypotenuse zusammenfällt, dreht dieses Parallelogramm um 90 Grad um die Hypotenusen-Ecke des Quadrats und verwandelt durch erneute Scherung das verdrehte Parallelogramm in ein Rechteck, das einen Teil des Hypotenusen-Quadrats einnimmt. Die analoge Scherung-Drehung-Scherung beim anderen Katheten-Quadrat ergibt das komplementäre Teil-Rechteck des Hypotenusen-Quadrats:

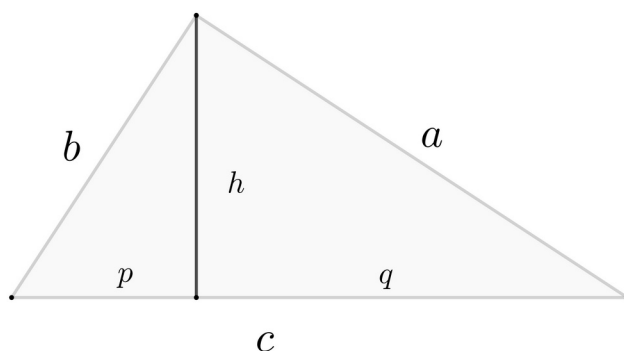


Analog ist das *andere* Kathetenquadrat flächengleich zum anderen Teilrechteck des Hypotenusenquadrats.

Zusammen ergeben also beide Kathetenquadrate die Fläche des Hypotenusenquadrats; und das ist der Satz des Pythagoras.

Die genaueren beiden Aussagen nennt man den **Kathetensatz des Euklid**:

Das Quadrat über einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



Unmittelbare *Folgerung* aus dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 = b^2 - p^2 = a^2 - q^2 = \frac{a^2 + b^2 - p^2 - q^2}{2}$$

und damit wegen

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

schließlich

$$h^2 = p \cdot q .$$

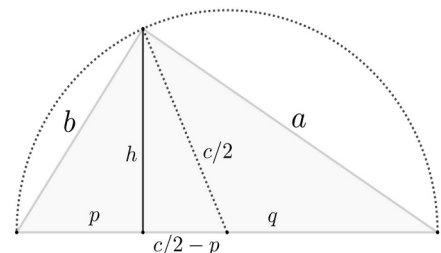
(Nebenbei folgt $b^2 = h^2 + p^2 = p(q + p) = pc$, also der Kathetensatz.)

Das Quadrat über der Höhe im rechtwinkligen Dreieck ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

Hieraus folgt auch der *Satz des Thales* (Thales von Milet, ca. 625-545 v.Chr.):

$$\left(\frac{c}{2} - p\right)^2 + h^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - p(c - p) + h^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Der *Abstand* der gegenüberliegenden Ecke vom Hypotenusen-Mittelpunkt ist immer $\frac{c}{2}$, sie liegt also stets auf dem *Thales-Kreis*.



Der *zweite Euklidische Beweis* nutzt die *Proportionenlehre*: Zwei *ähnliche Dreiecke* haben genau übereinstimmende Winkel; und dann stehen die sich entsprechenden Seiten beider Dreiecke jeweils *im selben Verhältnis* zueinander. Genauso sind zwei *Rechtecke* ähnlich genau dann, wenn die beiden Seiten („Länge“ und „Breite“ der beiden Rechtecke) im selben Verhältnis zueinander stehen. Die *Flächen* verhalten sich dann zueinander wie die Quadrate der Seiten. Dies ergibt einen *sehr* einfachen Pythagoras-Beweis:

Mit den Bezeichnungen der letzten Grafik gilt (*drei* ähnliche Dreiecke!):

$$ab = hp + hq = \left(\left(\frac{b}{c} \right)^2 + \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right) ab, \quad \text{also} \quad \frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1.$$

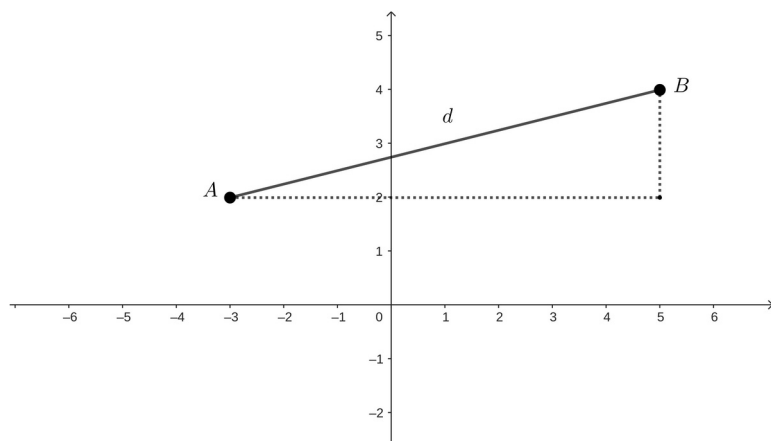
Der tatsächliche Ähnlichkeitsbeweis bei Euklid formuliert eine etwas allgemeinere Aussage, die z.B. auch den Fall von über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks errichteten *gleichseitigen* Dreiecken oder *zueinander ähnlichen* Rechtecken umfasst.

Literaturhinweise:

Euklid, *Die Elemente, Buch I – XIII*, übers. (nach Heibergs Text) u. hrsg. von **Clemens Thaer**, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1980 (ca. 480 S.); siehe insb. Buch I §47 und Buch VI §31. Ferner die umfassend *kommentierte* Ausgabe (mehr als 1400 Seiten!): **Euclid**, *The Thirteen Books of the Elements, Vol. I, II, III*, Hrsg. **Sir Thomas Little Heath**, Dover, New York 2024 (Nachdruck). Manchmal als Skurrilität abgetan, aber dennoch interessant: **Oliver Byrne**, *The First Six Books of the Elements of Euclid*, William Pickering, London 1847; als bibliophile Ausgabe nachgedruckt durch den Benedikt Taschen Verlag, Köln 2010 (2017)

Der Satz des Pythagoras wird in der Mathematik ständig benutzt, und es gibt auch *unzählige* verschiedene Beweise. Eine simple Variante des Bhāskaraschen Beweises: Man klappe die vier rechtwinkligen Dreiecke längs ihrer Hypotenusen nach außen; so entsteht ein Quadrat mit Kantenlänge $a + b$ und Fläche $c^2 + 2ab$.

Die *grundlegendste* Anwendung des Pythagoras-Satzes ist die *Berechnung des Abstandes zweier Punkte*, die durch ihre Koordinaten gegeben sind, in der Ebene oder im Raum.



Der Abstand d der beiden Punkte $A = (-3, 2)$ und $B = (5, 4)$ ist gegeben durch

$$d^2 = (5 - (-3))^2 + (4 - 2)^2$$

und damit

$$d = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Die allgemeine Formel für den Abstand der Punkte $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem lautet

$$|P, Q| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Und im dreidimensionalen Fall ergibt *zweimalige* Anwendung des Pythagoras-Satzes die Formel

$$|P, Q| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

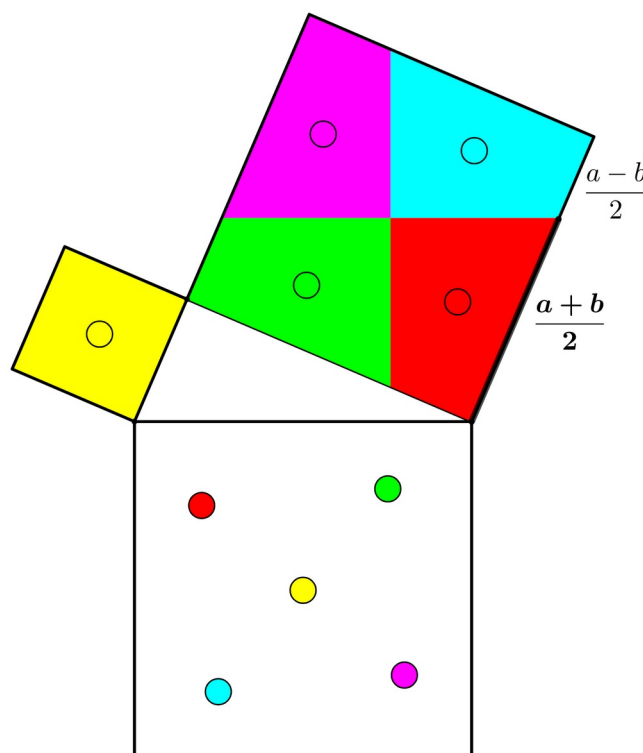
für den Abstand der Punkte $P = (x_1, y_1, z_1)$ und $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

Last but not least:

Geogebra-Download – Ein Pythagoras-Beweis „ohne Worte“ (von Steve Phelps)

Da dieser Beweis *ohne Worte* nicht ganz so leicht wie der Bhāskara-Beweis *genau* zu verstehen ist, habe ich zwei Längenangaben hinzugefügt. Die Katheten-Längen sind dabei wie bisher a und b . Die vier zueinander kongruenten Teile des größeren Katheten-Quadrats sowie das kleinere Katheten-Quadrat werden durch reine Verschiebung (ohne Drehung) an die durch farbige Punkte markierten Plätze gebracht und füllen dann lückenlos das Hypotenusenquadrat.

Man beachte: Der waagerechte und senkrechte Schnitt durch den Mittelpunkt des größeren Kathetenquadrats (Kantenlänge a) haben beide die Länge $c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$ (Parallelogramm und Symmetrie). Ferner: $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$, $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$.



Das bedeutet: Man kann immer zwei Quadrate durch Zerschneidung zu *einem* Quadrat zusammensetzen. (Auch im Grenzfall zweier *gleichgroßer* Quadrate.)

Per *Induktion* folgt die auf den ersten Blick ziemlich überraschende Aussage:

Man kann stets mehrere Quadrate durch endlich viele geradlinige Zerschneidungen zu einem einzigen Quadrat zusammensetzen.

Ein sehr schönes *geometrisches* Induktions-Beispiel.

Siehe auch: **I.S. Sominskij, L.I. Golovina, I.M. Jaglom**, *Die vollständige Induktion*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991