KAPITEL 4

# Kategorien

Für eine weiterführende Einführung in Kategorien verweisen wir auf folgende Quellen:

- C. Meusburger. Einführung in die Darstellungstheorie. Vorlesungsskript, Erlangen, Sommersemester 2019. (5. Kapitel: Kategorien und Funktoren)
- K.-H. Neeb. Einführung in die Darstellungstheorie. Vorlesungsskript, Erlangen, Sommersemester 2015. (7. Kapitel: Kategorien und Funktoren)
- M. Brandenburg. Einführung in die Kategorientheorie. 2. Auflage. SpringerSpektrum, 2017.
- S. Lang. Algebra. Revised Third Edition. Springer, 2002.

Wir orientieren uns an Brandenburg.

## 1. Definitionen

Im Folgenden werden wir mit mengentheoretischen Begriffen wie *Menge* und *Klasse* naiv und unkritisch umgehen.

DEFINITION. *Eine* **Kategorie** $\mathcal{C}$ *besteht aus folgenden Daten:*

- *einer Klasse* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$*, deren Elemente* **Objekte** *genannt werden,*
- *zu je zwei Objekten* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *gibt es eine Menge* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$*, deren Elemente als* $f : A \to B$ *notiert werden und* **Morphismen** *von* $A$ *nach* $B$ *genannt werden,*
- *zu je drei Objekten* $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *gibt es eine Abbildung*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$
*die als* $(f, g) \mapsto g \circ f$ *geschrieben und als* **Komposition von Morphismen** *bezeichnet wird,*
- *zu jedem Objekt* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *gibt es einen ausgezeichneten Morphismus*
$$\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A),$$
*der als* **Identität** *von* $A$ *bezeichnet wird.*

*Dabei müssen folgende Regeln erfüllt sein:*

- *Die Komposition von Morphismen ist* **assoziativ***, d.h. für drei Morphismen* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$*,* $h : C \to D$ *gilt*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$
*wobei in der vorangegangenen Zeile ein Element von* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$ *steht.*
- *Die Identitäten sind* **neutral** *bezüglich der Komposition, d.h. für jeden Morphismus* $f : A \to B$ *gilt*
$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Wir beginnen mit einer Reihe von Beispielen. Die Abkürzungen sind zum Teil dem Buch von Brandenburg entnommen.

- **Set** - Die Kategorie der Mengen: Die Objekte sind die Mengen. Für zwei Mengen $A, B$ ist
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B) = \{f : A \to B\}$$
die Menge aller Abbildungen von $A$ nach $B$. Die Komposition ist die Komposition von Abbildungen, $\mathrm{id}_A$ ist einfach die identische Abbildung $A \to A$. Die Eigenschaften einer Kategorie sind einfach zu überprüfen. Die Assoziativität gilt, weil sie für alle Abbildungen gilt:
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ g)(x).$$

Datei: edt_kat.tex. Version vom 26.7.2022

- **Ring** - Die Kategorie der Ringe: Die Objekte sind Ringe. Für zwei Ringe $R, S$ ist
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, S) = \{f : R \to S : \ f \text{ ist Ringhomomorphismus}\}.$$
$\mathrm{id}_R$ ist die Identität, die auch ein Ringhomomorphismus ist. Die Komposition ist einfach die Komposition von Abbildungen.
- **CRing** - Die Kategorie der kommutativen Ringe: Die Objekte sind die kommutativen Ringe. Für zwei kommutative Ringe $R, S$ ist
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(R, S) = \{f : R \to S : \ f \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\}.$$
Der Rest ist wie bei den Ringen.
- **Grp** - Die Kategorie der Gruppen: Die Objekte sind Gruppen. Für zwei Gruppen ist $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen von $G$ nach $H$.
- **Mon** - Die Kategorie der Monoide: Die Objekte sind Monoide, als Mengen, die eine assoziative Verknüpfung und ein neutrales Element besitzen. Sind $(M, *_M)$ und $(N, *_N)$ Monoide mit neutralen Elementen $e_M$ und $e_N$, so ist ein Monoidhomomorphismus eine Abbildung $f : M \to N$, sodass gilt
$$f(x *_M y) = f(x) *_N f(y) \text{ für alle } x, y \in M \quad \text{ und } \quad f(e_M) = e_N.$$
$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(M, N)$ ist dann die Menge der Monoidhomomorphismen von $M$ nach $N$. Der Rest geht wie bei den oben angesprochenen Kategorien.
- $\mathbf{Vect}_k$ - Die Kategorie der $k$-Vektorräume: Hier liegt ein festgewählter Körper $k$ zugrunde. Die Objekte sind die $k$-Vektorräume, die Morphismen die $k$-linearen Abbildungen.
- $\mathbf{Mod}_R$ - Die Kategorie der $R$-Moduln: Hier liegt ein Ring $R$ zugrunde. Die Objekte sind die $R$-Moduln, die Homomorphismen die $R$-linearen Abbildungen. (Bei Brandenburg steht ${}_R\mathbf{Mod}$, die Kategorie der $R$-Rechtsmoduln wird mit $\mathbf{Mod}_R$ bezeichnet.)

Die vorangegangenen Beispiele kommen direkt in der Algebra vor. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Definition einer Kategorie nicht nur zu bereits bekannten Beispielen führt.

- Sei $M$ eine Menge. Die Objekte der Kategorie seien die Teilmengen von $M$. Für zwei Teilmengen $A, B$ von $M$ sei
$$\mathrm{Hom}(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } A \not\subseteq B, \\ \{\iota_{A,B}\}, & \text{falls } A \subseteq B. \end{cases}$$
- Sei $k$ ein Körper. Die Objekte der Kategorie seien die natürlichen Zahlen, also $1, 2, 3, 4, \ldots$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei
$$\mathrm{Hom}(m, n) = \mathrm{M}(n \times m, k)$$
die Menge der $n \times m$-Matrizen mit Einträgen aus $k$. Ein Homomorphismus $m \to n$ ist also gegeben durch eine $n \times m$-Matrix. Haben wir zwei Homomorphismen $m \to n$ (gegeben durch eine $n \times m$-Matrix $A$) und $n \to p$ (gegeben durch eine $p \times n$-Matrix $B$), so wird die Komposition $m \to p$ gegeben durch das Matrizenprodukt $BA$. Da Matrizenmultiplikation - sofern definiert - assoziativ ist, gilt das auch für die Verknüpfung hier. $\mathrm{id}_m$ ist die $m \times m$-Einheitsmatrix.

Das folgende Beispiel ist wird näher an der algebraischen Situation:

- Sei $R$ ein kommutativer Ring und $E_1, \ldots, E_n$ seien $R$-Moduln. Die Objekte der Kategorie sind multilineare Abbildungen
$$f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F,$$
wo $F$ ein $R$-Modul ist. Ein Objekt ist also gegeben durch einen $R$-Modul $F$ und eine multilineare Abbildung $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, was wir auch in der Form
$$E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{f} F$$

notieren. Ein Homomorphismus von $E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{f_1} F_1$ nach $E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{f_2} F_2$ besteht aus einer $R$-linearen Abbildung $g : F_1 \to F_2$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[dd, "g"] \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & F_2 \end{tikzcd}$$

Definition. *Sei* **C** *eine Kategorie. Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt* **invertierbar** *oder ein* **Isomorphismus***, wenn ein Morphismus $g : B \to A$ existiert mit*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \textit{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

*$g$ ist dann eindeutig bestimmt und wird als $f^{-1} : B \to A$ geschrieben. Objekte $A$ und $B$ der Kategorie heißen* **isomorph***, wenn es einen Isomorphismus $A \to B$ gibt. Wir schreiben dann auch $A \simeq B$.*

**Bemerkung:** Warum ist $f^{-1}$ durch $f$ eindeutig bestimmt? Seien $g, h : B \to A$ Morphismen mit

$$g \circ f = h \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = f \circ h = \mathrm{id}_B.$$

Dann gilt:

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h.$$

Dies beweist die Aussage.

**Beispiel:** In der Kategorie **Set** der Mengen bedeutet Isomorphie nichts anderes als Gleichmächtigkeit.

Lemma. *Sei* **C** *eine Kategorie.*

(1) *Für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ ist $\mathrm{id}_A$ ein Isomorphismus mit $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.*
(2) *Ist $f : A \to B$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : B \to A$ ein Isomorphismus und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.*
(3) *Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Homomorphismen, so ist auch $g \circ f : A \to C$ ein Homomorphismus und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

**Bemerkung:** Isomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf den Objekten einer Kategorie. Die Äquivalenzklassen werden auch als Isomorphieklassen bezeichnet.

Definition. *Sei* **C** *eine Kategorie und $A$ ein Objekt der Kategorie. Ein Isomorphismus $f : A \to A$ wird auch* **Automorphismus** *von $A$ genannt. Die Menge aller Automorphismen von $A$ bilden die* **Automorphismengruppe** *von $A$:*

$$\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A) = \{f : A \to A : \ f \textit{ ist Isomorphismus}\}.$$

*Mit der Komposition $\circ$ bildet $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A)$ eine Gruppe.*

**Beispiel:** Ist $V$ ein $k$-Vektorraum, so ist $\mathrm{GL}(V)$ die Automorphismengruppe des $k$-Vektorraums $V$. Unter einer Darstellung einer Gruppe $G$ auf $V$ hatten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

verstanden. Allgemeiner kann man nun unter einer Darstellung einer Gruppe $G$ auf einem Objekti $A$ einer Kategorie **C** einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(A)$$

verstehen.

Definition (Universelle Objekte). *Sei* **C** *eine Kategorie.*

- *Ein Objekt $A$ heißt* **initial**, *wenn es für jedes Objekt $B$ genau einen Morphismus*
$$A \to B$$
*gibt.*
- *Ein Objekt $Z$ heißt* **final** *oder* **terminal**, *wenn es für jedes Objekt $B$ genau einen Morphismus*
$$B \to Z$$
*gibt.*
- *Ein* **Nullobjekt** *ist ein Objekt, das gleichzeitig initial und final ist.*

**Beispiele:**

- Für die Kategorie **Ring** der Ringe ist $\mathbb{Z}$ ein initiales Objekt und der triviale Ring $\{0\}$ ein finales Objekt.
- In der Kategorie der $k$-Vektorräume ist $\{0\}$ ein initiales und finales Objekt, also ein Nullobjekt.
- In der Kategorie **Set** der Mengen ist $\{2\}$ ein finales Objekt, weil es von jeder Menge $B$ genau eine Abbildung $B \to \{2\}$ gibt.

Initiale und finale Objekte einer Kategorie sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir betrachten nochmals ein Beispiel von vorne:

- Sei $R$ ein kommutativer Ring und $E_1, \dots, E_n$ seien $R$-Moduln. Ein Objekt der Kategorie ist gegeben durch einen $R$-Modul $F$ und eine multilineare Abbildung $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$. Ein Homomorphismus von $E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{f_1} F_1$ nach $E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{f_2} F_2$ besteht aus einer $R$-linearen Abbildung $g : F_1 \to F_2$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:
$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[dd, "g"] \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & F_2 \end{tikzcd}$$
Das Tensorprodukt $E_1 \times \cdots \times E_n$ ist ein initiales Objekt in dieser Kategorie.

**Produkte:** Sei **C** eine Kategorie und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von **C**. Ein **Produkt** von $(A_i)_{i\in I}$ besteht aus einem Objekt $P$ und einer Familie $(P \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I}$ von Morphismen, sodass für jedes Objekt $B$ mit einer Familie $(B \xrightarrow{g_i} A_i)_{i\in I}$ von Morphismen ein Morphismus $B \xrightarrow{h} P$ existiert, sodass für alle $i \in I$ folgendes Diagramm kommutiert:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g_i"'] & & P \arrow[dl, "f_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$
Hier sind die ersten Beispiele:

- In der Kategorie **Ring** der Ringe ist das kartesische Produkt
$$P = \prod_{i\in I} A_i$$
ein Produkt. Hier ist $f_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ einfach die Projektion und $h : B \to \prod_{i\in I} A_i$ gegeben durch.
$$h(b) = (g_i(b))_{i\in I}.$$
(Dies haben wir bereits gesehen.)
- Das kartesische Produkt liefert auch das Produkt in den Kategorien **Set**, $R$-**Mod**, $k$-**Vekt** und **Grp**.

- In der Kategorie der Körper existiert das Produkt im Allgemeinen nicht.

**Koprodukte:** Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathbf{C}$. Ein **Koprodukt** von $(A_i)_{i\in I}$ besteht aus einem Objekt $S$ und einer Familie $(A_i \xrightarrow{f_i} S)_{i\in I}$ von Morphismen, sodass für jedes Objekt $B$ mit einer Familie $(A_i \xrightarrow{g_i} B)_{i\in I}$ ein Morphismus $S \xrightarrow{h} B$ existiert, sodass für alle $i \in I$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ S \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

Beispiele:

- Wir haben bereits gesehen, dass in der Kategorie $R$-**Mod** der $R$-Modul die direkte Summe
$$\bigoplus_{i\in I} A_i$$
ein Koprodukt definiert mit
$$h((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(a_i).$$
Dabei ist
$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i : a_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i \in I\}.$$
- Gibt es ein Koprodukt in der Kategorie **Set** der Mengen? Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und $B$ irgendeine Menge mit einer Familie von Abbildungen $(A_i \xrightarrow{g_i} B)_{i\in I}$. Wir wählen für $S$ die disjunkte Vereinigung
$$S = \bigcup_{i\in I} \widetilde{A_i},$$
wobei $\widetilde{A_i}$ isomorph zu $A_i$ ist. Dann sei
$$f_i(a_i) = a_i \in \widetilde{A_i} \subseteq S$$
und für $a_i \in \widetilde{A_i}$
$$h(a_i) = g_i(a_i).$$

## 2. Funktoren

Definition. *Seien* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{D}$ *zwei Kategorien. Ein* **Funktor** *(oder auch* **kovarianter Funktor***)*
$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$
*von* $\mathbf{C}$ *nach* $\mathbf{D}$ *wird durch folgende Daten gegeben:*

- *jedem Objekt* $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *ist ein Objekt* $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ *zugeordnet,*
- *zu jedem Morphismus* $f : A \to B$ *in* $\mathbf{C}$ *gibt es einen Morphismus*
$$F(f) : F(A) \to F(B)$$
*in* $\mathbf{D}$.

*Dabei gilt:*

- *Für jedes* $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *ist*
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}.$$
- *Für je zwei Morphismen* $f : A \to B$ *und* $g : B \to C$ *von* $\mathbf{C}$ *gilt in* $\mathbf{D}$
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

**Beispiele:**

- Jeder Gruppe $G$ können wir die zugrundeliegende Menge zuordnen, wodurch wir einen Funktor
$$F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$$
erhalten. So etwas nennt man einen **Vergissfunktor**. Dieses Beispiel lässt sich leicht auch auf andere Situationen übertragen.
- Einer Menge $S$ können wir den freien $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $S$, also
$$\{\sum_{s \in S} a_s s : a_s \in \mathbb{Z},\ \text{nur endlich viele } a_s \text{ sind} \neq 0\}$$
zuordnen. Wir erhalten dann einen Funktor
$$F : \mathbf{Set} \to \mathbb{Z}-\mathbf{Mod}.$$
- Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ fest gewählt. Wir definieren einen Funktor
$$M_C : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$
durch
$$M_C(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X).$$
Ist $\varphi : X \to X'$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, so definiert man
$$M_C(\varphi) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X'), \quad f \mapsto \varphi \circ f.$$
Man nennt $M_C$ auch einen **Darstellungsfunktor**.

Definition. *Seien* $\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{D}$ *zwei Kategorien. Ein* **kontravarianter Funktor**
$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$
*von* $\mathbf{C}$ *nach* $\mathbf{D}$ *wird durch folgende Daten gegeben:*
- *jedem Objekt* $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *ist ein Objekt* $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ *zugeordnet,*
- *zu jedem Morphismus* $f : A \to B$ *in* $\mathbf{C}$ *gibt es einen Morphismus*
$$F(f) : F(B) \to F(A)$$
*in* $\mathbf{D}$*. Also*
$$A \xrightarrow{f} B \quad \textit{wird zu} \quad F(A) \xleftarrow{F(f)} F(B).$$

*Dabei gilt:*
- *Für jedes* $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *ist*
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}.$$
- *Für je zwei Morphismen* $f : A \to B$ *und* $g : B \to C$ *von* $\mathbf{C}$ *gilt in* $\mathbf{D}$
$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$
*Also:*
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad \textit{wird zu} \quad F(A) \xleftarrow{F(f)} F(B) \xleftarrow{F(g)} F(C).$$