Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 1 (17.4.2024-24.4.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P1: (Inspiriert von Teilen einer Staatsexamensaufgabe)

(1) Berechne das (multiplikative) Inverse von 437 im Körper $\mathbb{F}_{911}$.
(2) Sei $p > 3$ eine Primzahl und K ein Körper mit p^2 Elementen. Zeige, dass die multiplikative Gruppe K^* ein Element der Ordnung 12 enthält.

Aufgabe P2: Wir betrachten die komplexen Zahlen

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = i, \quad \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, i.$$

Bestimme normierte Polynome $f, g, h \in \mathbb{Q}[x]$ mit

$$f(\alpha) = 0, \quad g(\beta) = 0, \quad h(\gamma) = 0$$

und zeige damit, dass die Zahlen α, β, γ algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe P3: Zeige mit Hilfe des Satzes von Hermite-Lindemann, dass für alle von 1 verschiedenen, positiven rationalen Zahlen q der Logarithmus $\ln(q)$ eine (über $\mathbb{Q}$) transzendente Zahl ist.

Aufgabe P4: Führe in $\mathbb{Q}[x]$ Polynomdivision für nachfolgende Polynompaare (a, b) durch. (Als Ergebnis erhält man Polynome $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ mit $a = qb + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(b)$.)

(1) $a = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $b = x^2 + x - 3$
(2) $a = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$, $b = 5x^2 + x - 3$

Aufgabe P5: Beweise, dass folgende Polynome irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind.

(1) $f = x^2 + x + 11$
(2) $f = x^3 + 2x^2 + x + 1$
(3) $f = x^3 - 10x^2 - 11x + 111$
(4) $f = x^4 - 9x^3 + 6$
(5) $f = x^5 + 5$
(6) $f = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 4$

(Diese Aufgabe dient dazu, den entsprechenden Stoff aus der Algebra-Vorlesung in Erinnerung zu rufen.)

Datei: kt_u1.tex. Version vom 22.4.2024

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H1: Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $\xi \in L \setminus K$. Seien $a, b, c, d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$.

(1) Zeige, dass $c\xi + d \neq 0$ ist. (Daher ist $\frac{a\xi+b}{c\xi+d}$ definiert.)
(2) Zeige, dass $\frac{a\xi+b}{c\xi+d} \notin K$ gilt.
(3) Zeige, dass $-c \cdot \frac{a\xi+b}{c\xi+d} + a \neq 0$ ist.
(4) Nach (3) ist
$$\frac{d \cdot \frac{a\xi+b}{c\xi+d} - b}{-c \cdot \frac{a\xi+b}{c\xi+d} + a}$$
definiert. Vereinfache die Darstellung.
(5) Zeige:
$$K(\xi) = K(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}).$$

Aufgabe H2: Sei K ein Körper, x eine Unbestimmte über K und $K(x)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[x]$. Zeige:

(1) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$K(x^n) \subseteq K(x^m) \quad \Longleftrightarrow \quad m \mid n.$$
(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$K(x^n) = K(x^m) \quad \Longleftrightarrow \quad m = n.$$
(3) Die Körpererweiterung $K(x)|K$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper.

Aufgabe H3: (Nach einer Staatsexamensaufgabe) Sei $f = x^4 + 5x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

(1) Dividiere in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ das Polynom f durch $x^2 - \alpha^2$. Welche Zerlegung von f erhält man?
(2) Zeige, dass die Gleichung $(\alpha^3 + 3\alpha)^2 = -(5 + \alpha^2)$ gilt.
(3) Zerlege f in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ in Linearfaktoren.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 24.4.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen