

# Vorlesung „Funktionentheorie II“ (Wintersemester 2025/2026)

## Fragen zur Prüfungsvorbereitung

- (1) Grundlagen
  - (a) Umlaufzahl: Definition. Praktische Berechnungsmöglichkeit.
  - (b) Wie kann man mit einem Integral Nullstellen zählen?
  - (c) Satz von Rouché.
  - (d) Lokales Verhalten holomorpher Funktionen.
- (2) Folgen holomorpher Funktionen
  - (a) Erläutere die Begriffe gleichmäßige Konvergenz, lokal gleichmäßige Konvergenz, kompakte Konvergenz.
  - (b) Satz von Weierstraß.
  - (c) Satz von Hurwitz.
  - (d) Folgen injektiver holomorpher Funktionen.
  - (e) Satz von Montel.
- (3) Die Riemannsche Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$ 
  - (a) Was ist  $\widehat{\mathbb{C}}$ ? Wie sehen die offenen Umgebungen von  $\infty$  aus?
  - (b) Ist eine Funktion  $f$  auf einer Umgebung von  $\infty$  definiert, so ist  $\infty$  eine isolierte Singularität. Welche Möglichkeiten gibt es, wie untersucht man sie?
  - (c) Eine ganze Funktion hat eine isolierte Singularität in  $\infty$ . Welche Möglichkeiten gibt es?
  - (d) Welche Gestalt haben die auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen?
  - (e) Was ist der Grad einer auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen? Was kann man über  $f^{-1}(w)$  sagen (mit  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ )?
  - (f) Was ist ein Verzweigungspunkt?
  - (g) Riemann-Hurwitz-Formel für  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (4) Möbius-Transformationen
  - (a) Wie rechnet man mit  $\infty$  in einer Möbius-Transformation?
  - (b) Möbius-Transformationen  $f$  mit  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$ ,  $f(z_3) = w_3$ .
  - (c) Doppelverhältnis. Definition und wichtige Eigenschaften.
  - (d) Was ist ein verallgemeinerter Kreis?
  - (e) Rechte und linke Seiten verallgemeinerter Kreise.
  - (f) Bilder von Kreisen und Geraden unter Möbius-Transformationen
- (5) Biholomorphe Abbildungen
  - (a) Definition einer biholomorphen Abbildung.
  - (b) Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Wann erhält man eine biholomorphe Abbildung  $G \rightarrow f(G)$ ? Warum?
  - (c) Automorphismengruppe eines Gebiets.
  - (d) Lemma von Schwarz.
  - (e) Beschreibung von  $\text{Aut}(\mathbb{E})$ .
  - (f) Beschreibung von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ .
  - (g) Die Automorphismengruppe von  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ .
- (6) Der Riemannsche Abbildungssatz
  - (a) Was besagt der Satz?
  - (b) Beispiele?
  - (c) Nur auf Wunsch wird geprüft: Beweisskizze.
- (7) Meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$ 
  - (a) Was sind die Hauptteile einer meromorphen Funktion? Beispiele.
  - (b) Normale Konvergenz von Reihen.
  - (c) Der Satz von Mittag-Leffler. Inhalt und Beispiele.
  - (d) Unter welchen Bedingungen kann man zu vorgegebenen Hauptteilen eine meromorphe Funktion finden? Wie?