Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 6 (22.5.2024-29.5.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Einführung: In den folgenden Aufgaben geht es um **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**, wie sie auch im Schulunterricht behandelt werden. Wir betrachten Punkte, Geraden, Kreise und Winkel in der Ebene $\mathbb{R}^2$:

- Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ werden **Punkte** genannt.
- Der **Abstand** der Punkte P und Q wird mit $|PQ|$ bezeichnet.
- Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q sei $G(P, Q)$ die **Gerade durch** P **und** Q.
- Mit $K(P, r)$ wird der **Kreis mit Mittelpunkt** P **und Radius** r bezeichnet, wobei P ein Punkt und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist.
- Kennt man zwei verschiedene Punkte P, Q, so kann man mit dem **Lineal** die Gerade $G(P, Q)$ zeichnen.
- Kennt man drei Punkte P, Q, R mit $Q \neq R$, so kann man mit dem **Zirkel** den Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $|QR|$ zeichnen, also $K(P, |QR|)$.

Man startet mit einer Menge M von Punkten, wobei wir hier üblicherweise $M \supseteq \{(0, 0), (1, 0)\}$ voraussetzen. Durch folgende **elementare Konstruktionsschritte** kann man M vergrößern:

(i) Sind $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in M$ mit $P_1 \neq Q_1$ und $P_2 \neq Q_2$, so können wir die Geraden $G(P_1, Q_1)$ und $G(P_2, Q_2)$ zeichnen. Die Geraden können identisch oder parallel sein, oder sich in genau einem Punkt schneiden. Gibt es genau einen Schnittpunkt P, so kann dieser zu M dazugenommen werden.

(ii) Sind $P_1, Q_1, P, P_2, Q_2 \in M$ mit $P_1 \neq Q_1$ und $P_2 \neq Q_2$, so können wir die Gerade $G(P_1, Q_1)$ und den Kreis $K(P, |P_2Q_2|)$ zeichnen. Gerade und Kreis können sich in 0, 1 oder 2 Punkten schneiden. Mögliche Schnittpunkte können zu M hinzugenommen werden.

(iii) Sind $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2$ mit $Q_1 \neq R_1$ und $Q_2 \neq R_2$, so können wir die Kreise $K(P_1, |Q_1R_1|)$ und $K(P_2, |Q_2R_2|)$ zeichnen. Gilt $P_1 \neq P_2$, so können sich die Kreise in 0, 1 oder 2 Punkten schneiden. Mögliche Schnittpunkte können zu M hinzugenommen werden. (Im Fall $P_1 = P_2$ handelt es sich um konzentrische Kreise.)

Man sagt, **ein Punkt** P **lässt sich mit Zirkel und Lineal aus einer gegebenen Menge** M **von Punkten konstruieren**, wenn sich M durch endlich viele elementare Konstruktionsschritte zu einer Menge $M' \subseteq \mathbb{R}^2$ vergrößern lässt mit $P \in M'$.

Motivation: Welche Punkte kann man ausgehend von einer Punktmenge M mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren? Hier sind ein paar klassische Probleme:

- *Quadratur des Kreises:* Kann man zu einem Kreis mit Radius 1 ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt konstruieren? Da das Quadrat Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ haben muss, kann man das Problem auch so formulieren: Kann man aus $\{(0, 0), (1, 0)\}$ den Punkt $(\sqrt{\pi}, 0)$ konstruieren?
- *Würfelverdoppelung:* Kann man zu einem Würfel mit Seitenlänge 1 einen Würfel mit doppeltem Volumen, also Seitenlänge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren? Man kann das Problem auch so formulieren: Kann man aus $\{(0, 0), (1, 0)\}$ den Punkt $(\sqrt[3]{2}, 0)$ konstruieren?
- *Dreiteilung eines (allgemeinen) Winkels:* Kann man aus einem gegebenen Winkel φ einen Winkel $\frac{\varphi}{3}$ konstruieren? Man kann dies auch so formulieren: Kann man aus $(0, 0), (1, 0), (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit Zirkel und Lineal den Punkt $(\cos\frac{\varphi}{3}, \sin\frac{\varphi}{3})$ konstruieren?

Erstaunlicherweise kann man die angegebenen Probleme mit Hilfe der Körpertheorie lösen. Die folgenden Übungsaufgaben sollen Konstruktionsmethoden mit Zirkel und Lineal, wie man sie bereits in der Schule kennenlernt, wieder in Erinnerung bringen.

Datei: kt_u6.tex. Version vom 20.5.2024

Präsenzaufgaben

Aufgabe P26:

(1) Welche Geraden und Kreise kann man zeichnen, wenn man nur mit den beiden Punkten $(0,0)$ und $(1,0)$, also mit $M = \{(0,0),(1,0)\}$ startet? Welche neuen Punkte kann man mit einem elementaren Konstruktionsschritt daraus erhalten?
(2) Zeige, dass man den Punkt $(0,1)$ aus $M = \{(0,0),(1,0)\}$ konstruieren kann.

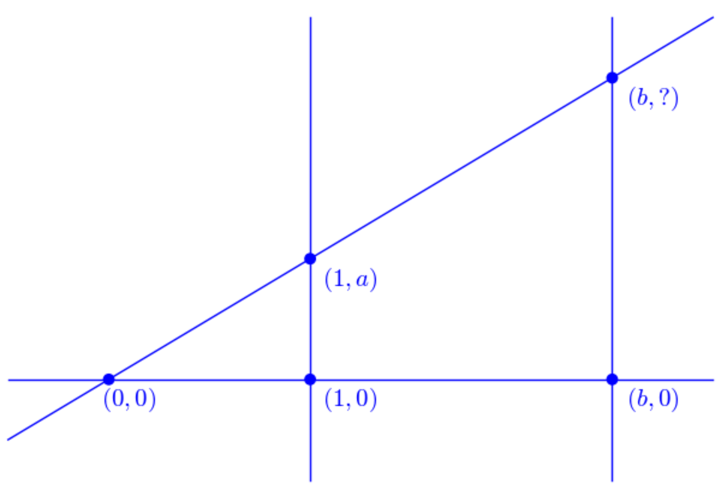
Bemerkungen:

- Wir sagen, eine Gerade ist konstruierbar, wenn man zwei verschiedene Punkte auf der Geraden konstruieren kann.
- Wir nennen eine positive reelle Zahl a konstruierbar, wenn sich Punkte P, Q konstruieren lassen mit $a = |PQ|$.

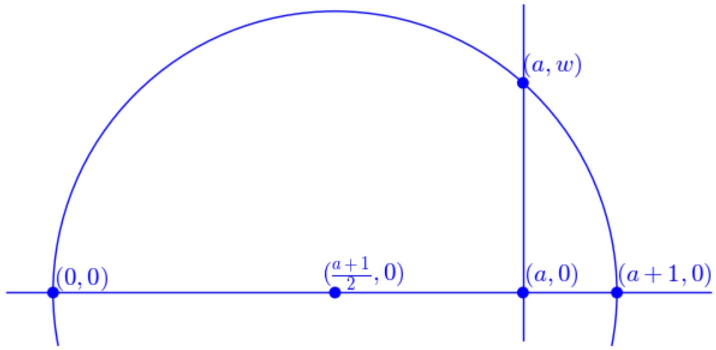
Aufgabe P27:

(1) Zu zwei verschiedenen Punkten P_1, P_2 konstruiere man die Mittelsenkrechte und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$.
(2) Gegeben sei eine Gerade G (durch zwei Punkte P_1, P_2) und ein Punkt P. Zeige, dass man die Gerade, die senkrecht auf G steht und durch P geht, konstruieren kann.
(3) Gegeben sei eine Gerade G (durch zwei Punkte P_1, P_2) und ein Punkt P, der nicht auf G liegt. Zeige, dass man die Gerade, die parallel zu G ist und durch P geht, konstruieren kann.

Aufgabe P28: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ konstruierbar. Zeige, dass dann auch das Produkt ab konstruierbar ist. (Eventuell kann man sich dies an Hand folgender Skizze überlegen.)



Aufgabe P29: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ konstruierbar. Zeige, dass dann auch $\sqrt{a}$ konstruierbar ist. (Hinweis: Berechne die in folgender Skizze vorkommende Zahl w. Alternative: Wende den Höhensatz geeignet an.)



Bemerkungen:

- Ein Winkel φ (mit $0 \leq \varphi < 2\pi$) kann durch drei Punkte Z, S, T beschrieben werden, sodass die Strahlen $\overrightarrow{ZS}$ und $\overrightarrow{ZT}$ den Winkel φ einschließen.
- Zwei reelle Zahlen φ_1, φ_2 beschreiben genau dann den gleichen Winkel, wenn gilt

  $$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \bmod 2\pi\mathbb{Z},$$

  wenn also ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$.

Aufgabe P30:

(1) Wie kann man einen Winkel φ mit Zirkel und Lineal halbieren?
(2) Wie kann man zwei Winkel φ und φ' mit Zirkel und Lineal addieren?
(3) Sind $k, n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, n) = 1$, so existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $k\ell \equiv 1 \bmod n$. (Warum?) Zeige, dass die ℓ-fache Addition des Winkels $\frac{2\pi k}{n}$ den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ ergibt.

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H16: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ konstruierbar. Zeige, dass dann auch $\frac{a}{b}$ konstruierbar ist. (Hinweis: Man kann das Verfahren aus Aufgabe P28 modifizieren.)

Aufgabe H17: Gegeben sei ein Rechteck (durch vier Punkte). Konstruiere ein flächengleiches Quadrat. (Hinweis: Höhensatz)

Aufgabe H18: Zeige, dass es unendlich viele Winkel φ (mit $0 < \varphi < \pi$) gibt, die man mit Zirkel und Lineal dreiteilen kann. Wie erreicht man die Dreiteilung? (Hinweis: Aufgabe P30(3))

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 29.5.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen