KAPITEL 3

Kurvenintegrale

1. Kurven

Eine **Kurve** K wird bei uns durch eine **Parametrisierung**

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei γ eine stetige Abbildung sein soll. Manchmal bezeichnet man auch die Bildmenge

$$\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$$

als Kurve. Dabei heißt $\gamma(a)$ der **Anfangspunkt**, $\gamma(b)$ der **Endpunkt** der Kurve K, wir denken uns also die Kurve mit einer Orientierung versehen. Stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, spricht man von einer **geschlossenen Kurve**. Eine Kurve kann durch unterschiedliche Parametrisierungen dargestellt werden. Mitunter findet man statt Kurve auch die Bezeichnung Weg.

Beispiele:

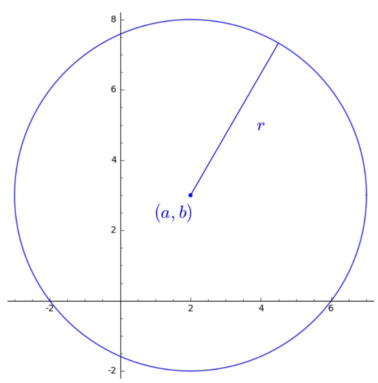
(1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

liefert einen Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt (a, b) und Radius 1. Allgemeiner definiert

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} a + r\cos(t) \\ b + r\sin(t) \end{pmatrix}$$

einen Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r.



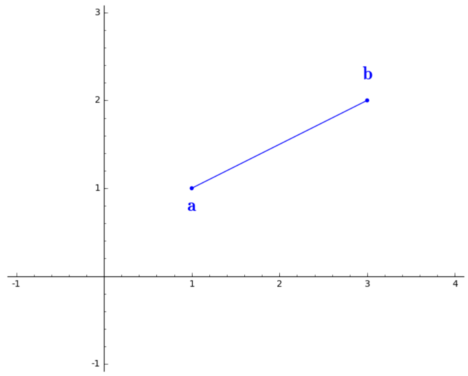
(2) Die **Strecke** von **a** nach **b**, wo **a** und **b** zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind, lässt sich durch

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \gamma(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

beschreiben. Man kann die Strecke aber auch anders parametrisieren. Sind $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 < t_2$, so beschreibt die Parametrisierung

$$\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \gamma(t) = \mathbf{a} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

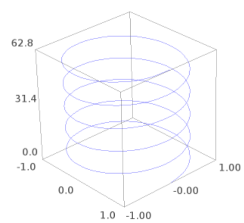
Datei: al_int3.tex. Version vom 27.1.2020 die gleiche Strecke.



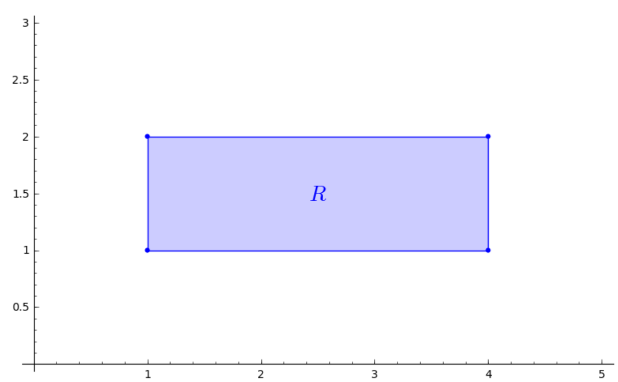
(3) Durch

$$\gamma : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$$

wird eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ definiert.



(4) Wir betrachten das Rechteck R mit den Eckpunkten $(1, 1), (4, 1), (4, 2), (1, 2)$.



Wir wollen den Rand ∂R als Kurve beschreiben, wobei wir mit dem Punkt $(1, 1)$ beginnen und im mathematisch positiven Sinn um das Rechteck herum gehen. Es gibt hier verschiedene Möglichkeiten. Wir beschreiben eine Möglichkeit: Wir wollen haben

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit obiger Formel für die Streckenparametrisierung erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \text{ für } t \in [0,1],\\
\gamma(t) &= \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + (t-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ für } t \in [1,2],\\
\gamma(t) &= \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + (t-2)\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} \text{ für } t \in [2,3],\\
\gamma(t) &= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (t-3)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \text{ für } t \in [3,4].
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix}1+3t\\1\end{pmatrix} & \text{für } 0 \le t \le 1,\\ \begin{pmatrix}4\\t\end{pmatrix} & \text{für } 1 \le t \le 2,\\ \begin{pmatrix}10-3t\\2\end{pmatrix} & \text{für } 2 \le t \le 3,\\ \begin{pmatrix}1\\5-t\end{pmatrix} & \text{für } 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve parametrisiert durch $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Sind die Komponenten von

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$$

differenzierbar bzw. stetig differenzierbar, so nennt man die Kurve **differenzierbar** bzw. **stetig differenzierbar**. In diesem Fall ist die Ableitung der Vektor

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\gamma(t+h)-\gamma(t)) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots \\ \gamma_n'(t)\end{pmatrix}.$$

Beschreibt $\gamma(t)$ den Weg eines Teilchens, so nennt man den Vektor $\gamma'(t)$ auch den **Geschwindigkeitsvektor**. Wichtig ist auch der Betrag des Geschwindigkeitsvektors

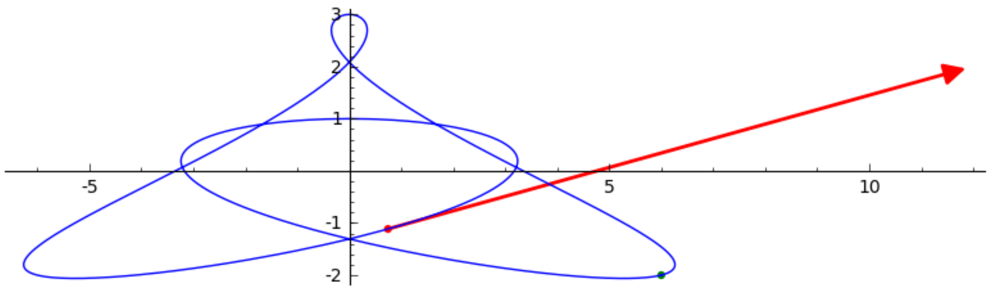
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \cdots + (\gamma_n'(t))^2}.$$

Man nennt die Kurve bzw. die Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ **glatt**, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt. (Anschaulich: Das Teilchen bleibt nie stehen.)

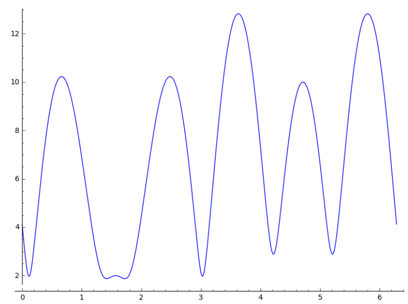
Beispiel: Wir betrachten die Kurve

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix}3\cos(t) + 2\sin(2t) + 3\cos(3t)\\ \sin(t) - 2\cos(2t)\end{pmatrix}.$$

Das Bild zeigt die Kurve und den Geschwindigkeitsvektor für $t = 3.8$.



(Der grüne Punkt ist der Anfangs- und Endpunkt der Kurve.) Das folgende Bild zeigt die Funktion $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ für $0 \le t \le 2\pi$:



Man kann nicht immer erwarten, dass die Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ einer Kurve immer stetig differenzierbar bzw. glatt ist, wie beispielsweise bei obigem Rechteck. Man sagt, die Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Kurve ist **stückweise stetig differenzierbar** bzw. **stückweise glatt**, wenn es eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, sodass die Einschränkung von γ auf jedes offene Intervall (t_i, t_{i-1}) stetig differenzierbar bzw. glatt ist. Mit anderen Worten, man lässt zu, dass γ an endlich vielen Stellen des Intervalls $[a, b]$ nicht differenzierbar ist.

Orientierung: Beschreibt die Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die Kurve K, so gibt es einen Anfangspunkt $\gamma(a)$ und einen Endpunkt $\gamma(b)$, man durchläuft also K von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dies definiert eine **Orientierung**. Man kann die Kurve auch rückwärts durchlaufen. Definiert man

$$\widetilde{\gamma} : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \widetilde{\gamma}(t) = \gamma(-t),$$

so erhält man die rückwärts durchlaufene Kurve, die wir auch mit $-K$ bezeichnen.

Ändern der Parametrisierung: Ist eine Kurve K durch die Parameterdarstellung

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

gegeben, so kann man die Parametrisierung leicht ändern, wofür wir nur ein paar Beispiele angeben:

- Durchläuft t das Intervall $[0, 1]$, so durchläuft $a + t(b - a)$ das Intervall $[a, b]$. Daher ist auch

  $$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \gamma_1(t) = \gamma(a + t(b - a))$$

  eine Parametrisierung der Kurve.
- Durchläuft t für $c \in \mathbb{R}$ das Intervall $[a - c, b - c]$, so durchläuft $t + c$ das Intervall $[a, b]$. Daher ist auch

  $$\gamma_2 : [a - c, b - c] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \gamma_2(t) = \gamma(t + c)$$

  eine Parametrisierung der Kurve.

Aneinandersetzen von Kurven: Sind K_1 und K_2 Kurven, sodass der Endpunkt von K_1 mit dem Anfangspunkt von K_2 übereinstimmt, so kann man die Kurven zusammenfügen, was auch mit $K_1 + K_2$ bezeichnet wird. Indem wir die Parametrisierung der einzelnen Kurven abändern, können wir auch eine gemeinsame Parametrisierung finden. Dies lässt sich sofort auf mehrere Kurven ausdehnen.

Beispiel: Man betrachte den Rand des obigen Rechtecks R. Hier wurden vier Strecken (Kurven) durch geeignete Parameteranpassung zusammengefügt.

2. Skalares Kurvenintegral

Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve, die durch eine Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist, und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so definiert man das **skalare Kurvenintegral** von f längs der Kurve K durch

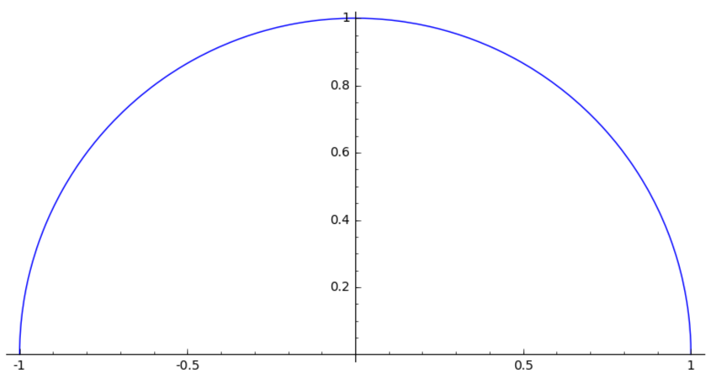
$$\int_K f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Beispiel: Sei K der obere Einheitshalbkreis, den wir durch

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren, und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = y.$$



Wir wollen das Kurvenintegral $\int_K f ds$ berechnen:

$$\begin{aligned} \int_K f ds &= \int_{t=0}^{\pi} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_{t=0}^{\pi} \sin(t)\| \begin{pmatrix} -\sin(t)\cdot \\ \cos(t) \end{pmatrix} \|dt = \int_{t=0}^{\pi} \sin(t)dt = \\ &= [-\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sind $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ zwei glatte Parametrisierungen der Kurve K, so gilt

$$\int_a^b f(\gamma_1(t))\|\gamma_1'(t)\|dt = \int_c^d f(\gamma_2(t))\|\gamma_2'(t)\|dt,$$

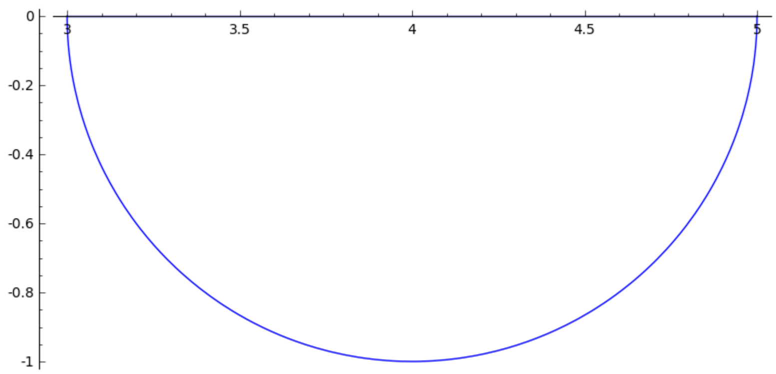
d.h. das skalare Kurvenintegral $\int_K f ds$ ist unabhängig von der Parametrisierung definiert.

Bemerkung: Setzt sich K aus den Kurven K_1 und K_2 zusammen, d.h. $K = K_1 + K_2$, so gilt

$$\int_{K_1+K_2} f ds = \int_{K_1} f ds + \int_{K_2} f ds.$$

Dies ist hilfreich in vielen Anwendungen.

Beispiel: Die Kurve K entstehe, indem wir vom Punkt $(5,0)$ auf der x-Achse zum Punkt $(3,0)$ gehen, und dann auf dem unteren Halbkreis mit Mittelpunkt $(4,0)$ und Radius 1 zurück zu $(5,0)$ gehen.



Wir wollen für $f(x,y) = x+y$ das Kurvenintegral $\int_K f ds$ berechnen. Wir betrachten dazu die Teilkurven.

- Die Strecke von $(5,0)$ nach $(3,0)$ erhalten wir durch
$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5-2t\\0\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0,1].$$
Hier gilt
$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und } \|\gamma_1'(t)\| = 2.$$
Es folgt, wenn wir die Kurve mit K_1 bezeichnen
$$\int_{K_1} f ds = \int_{t=0}^1 f(5-2t,0)\cdot 2\,dt = \int_{t=0}^1 (5-2t)\cdot 2\,dt = \cdots = 8.$$
- Den Halbkreis erhalten wir durch
$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix} \quad \text{für } \pi \le t \le 2\pi.$$
Hier ist
$$\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix} \quad \text{und } \|\gamma_2'(t)\| = 1.$$
Wenn wir diesen Kurventeil mit K_2 bezeichnen, erhalten wir
$$\int_{K_2} f ds = \int_{t=\pi}^{2\pi} f(4+\cos(t),\sin(t))\cdot 1\,dt = \int_{t=\pi}^{2\pi} (4+\cos(t)+\sin(t))dt = \cdots = 4\pi - 2.$$

Damit erhalten wir für das gesamte skalare Kurvenintegral
$$\int_K f ds = \int_{K_1} f ds + \int_{K_2} f ds = 8 + (4\pi - 2) = 6 + 4\pi.$$

Bemerkung: Durchläuft man die Kurve K rückwärts, so ändert sich der Wert des skalaren Kurvenintegrals nicht:
$$\int_{-K} f ds = \int_K f ds.$$

Länge einer Kurve: Ein wichtiger Spezialfall des Kurvenintegrals 1. Art ist die Berechnung der **Länge** einer Kurve K:
$$\ell(K) = \int ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$
wenn $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve ist.

Beispiele:

(1) Was ist die Länge der Verbindungsstrecke zweier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, wenn wir die angegebene Formel benutzen? Eine Parametrisierung ist

$$\gamma(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ für } t \in [0,1].$$

Dann gilt

$$\gamma'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \qquad \text{also} \qquad \|\gamma'(t)\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Wir erhalten als Länge der Strecke K

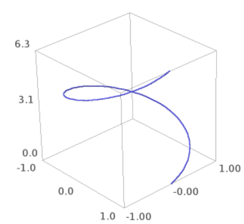
$$\ell(K) = \int_K ds = \int_{t=0}^{1} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t=0}^{1} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|,$$

wie es sein sollte.

(2) Wir betrachten die Schraubenlinie K mit der Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}.$$

(K entsteht also aus dem Einheitskreis, indem man den Endpunkt auf die Höhe h nach oben zieht.)



Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (\frac{h}{2\pi})^2} = \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi})^2}.$$

Damit gilt

$$\ell(K) = \int_K ds = \int_{t=0}^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi})^2} dt = 2\pi \sqrt{1 + (\frac{h}{2\pi})^2}.$$

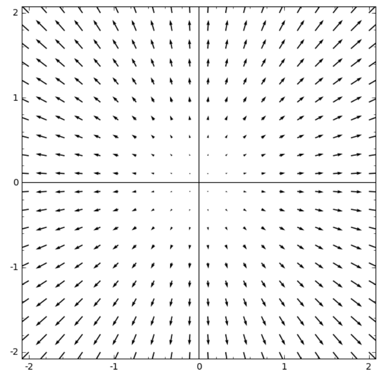
3. Vektorielles Kurvenintegral

Bemerkung: Eine vektorwertige Funktion $\mathbf{F}$ bezeichnet man auch als **Vektorfeld**. Zur Veranschaulichung kann man an jeden Punkt $\mathbf{x}$ den Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ „anheften“.

Beispiele:

(1) Wir betrachten

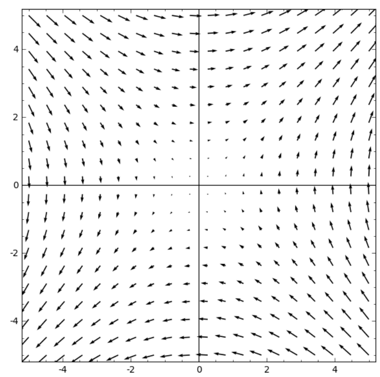
$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



(2) Für

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

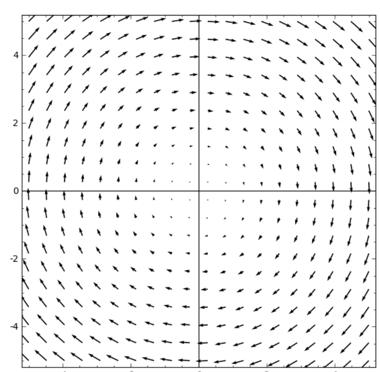
erhält man



(3) Für

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

erhält man



(4) (Gravitationsfeld) Ist ein Massenpunkt mit Masse m_Q im Nullpunkt konzentriert, so erzeugt er ein Gravitationsfeld

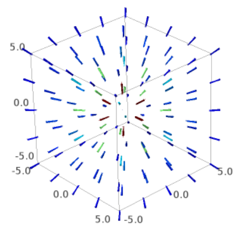
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_Q}{\|x\|^3}\,\mathbf{x},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist. Auf einen Körper mit Masse m_P, der sich am Ort $\mathbf{x}$ befindet, wird dann die Kraft

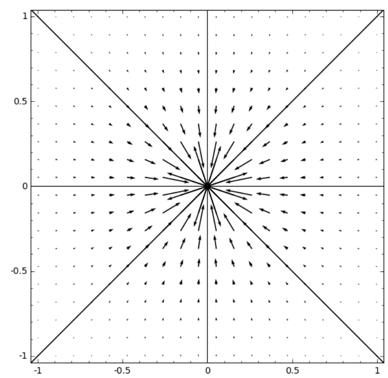
$$\mathbf{F} = -m_P\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ausgeübt. Wir betrachten beispielhaft

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



In der x-y-Ebene sieht das Bild so aus:



Vektorielles Kurvenintegral: Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve parametrisiert durch $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{F} : K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, also ein Vektorfeld, dann heißt

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=a}^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

das **Kurvenintegral** über das Vektorfeld $\mathbf{F}$ längs der Kurve K. Dabei meint $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{F}(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$.

Bemerkungen:

(1) Es ist

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \|\mathbf{F}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot \cos\sphericalangle(\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)).$$

(2) Ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) \right) dt.$$

Bemerkungen:

(1) Aus der Physik kennt man die Formel „Arbeit = Kraft × Weg“. Dies lässt sich mit dem Kurvenintegral so formulieren: Bewegt sich ein Teilchen in einem Kraftfeld $\mathbf{F}$ längs einer Kurve K, so ist die verrichtete Arbeit

$$W = \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

(2) Bei der Integralform der Maxwellgleichungen der Elektrodynamik kommt

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{und} \quad \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

vor, wo $\mathbf{H}$ die magentische Feldstärke und $\mathbf{E}$ die elektische Feldstärke bezeichnet.

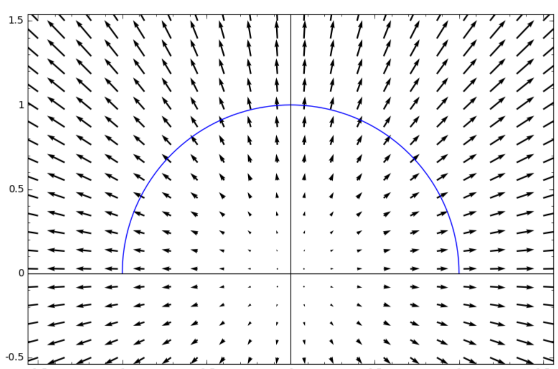
Beispiele:

(1) Wir betrachten den oberen Einheitshalbkreis, der sich durch

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren lässt, und das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Es ist

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ und } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

also $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, d.h. hier steht das Vektorfeld senkrecht auf dem „Geschwindigkeitsvektor“, woraus sofort

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

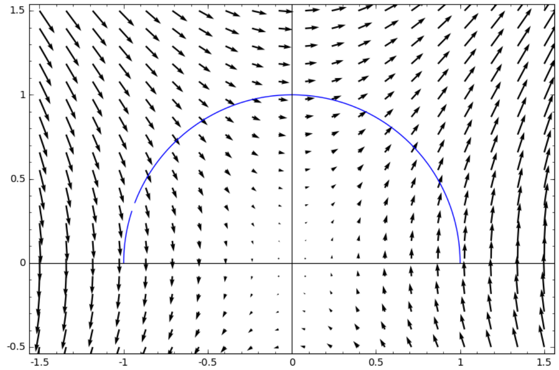
folgt.

(2) Wir betrachten wieder den oberen Einheitshalbkreis mit der Parametrisierung

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ und } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Nun schauen wir uns das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix}$$



an. Hier gilt

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\int_K \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi} (-2\sin(t)^2 + 3\cos(t)^2) dt = \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

(3) Wir wollen nun den oberen Halbkreis des letzten Beispiels in umgekehrter Richtung durchlaufen. Dies können wir erreichen, indem wir in der Parametrisierung t durch $\pi - t$ ersetzen:

$$\delta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \delta(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi - t) \\ \sin(\pi - t) \end{pmatrix} \text{ und } \delta'(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi - t) \\ -\cos(\pi - t) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix} \text{ ergibt sich } \mathbf{F}(\delta(t)) = \begin{pmatrix} 2\sin(\pi - t) \\ 3\cos(\pi - t) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \int_{-K} \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} 2\sin(\pi - t) \\ 3\cos(\pi - t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\pi - t) \\ -\cos(\pi - t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_{t=0}^{\pi} (2\sin(\pi - t)^2 - 3\cos(\pi - t)^2) dt \overset{u=\pi-t}{=} \\ &= \int_{u=\pi}^{0} (2\sin(u)^2 - 3\cos(u)^2)(-du) = \\ &= \int_{u=0}^{\pi} (2\sin(u)^2 - 3\cos(u)^2) du = \cdots = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier gilt also

$$\int_{-K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Bemerkung: Für das vektorielle Kurvenintegral gilt allgemein:

$$\int_{-K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dies ist anders als beim skalaren Kurvenintegral. Wie für das skalare Kurvenintegral gilt aber

$$\int_{K_1+K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Andere Bezeichnungen: Sei

$$\mathbf{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

und K gegeben durch die Parametrisierung

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix},$$

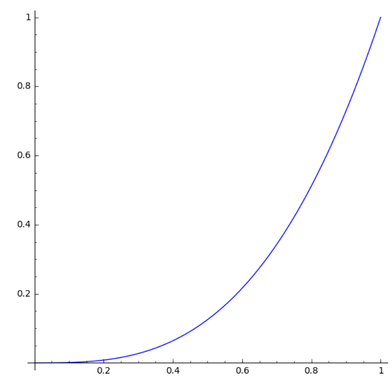
dann gilt

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \begin{pmatrix} P(\alpha(t), \beta(t)) \\ Q(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_a^b \Big(P(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + Q(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) \Big) dt. \end{aligned}$$

Denkt man sich $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, so ist $dx = \alpha'(t)dt$, $dy = \beta'(t)dt$ und die letzte Formel schreibt sich als so findet man auch die Bezeichnung

$$\int_K (P(x, y)dx + Q(x, y)dy).$$

Beispiel: Sei K die Kurve, die auf der „Parabel“ $y = x^3$ von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ läuft.



Das Kurvenintegral

$$\int_K \Big((x^2 - y)dx + (x + y^2)dy \Big)$$

soll berechnet werden. Als Parametrisierung der Kurve wählen wir

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Wir können also setzen

$$x = t, \quad y = t^3, \quad dx = dt, \quad dy = 3t^2 dt$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_K \Big((x^2 - y)dx + (x + y^2)dy \Big) &= \int_{t=0}^1 \Big((t^2 - t^3)dt + (t + t^6) \cdot 3t^2 dt \Big) = \\ &= \int_{t=0}^1 (t^2 - t^3 + 3t^3 + 3t^8)dt = \cdots = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

In unserer ursprünglichen Schreibweise würde man schreiben

$$\int_K \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s}.$$

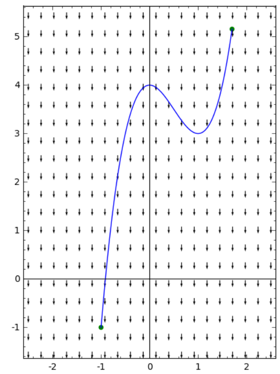
Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und eine Kurve K, die durch die Parametrisierung

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. (Man kann sich die Bewegung eines Teilchens in einem homogenen Gravitationsfeld vorstellen.)



Für das Kurvenintegral erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{t=a}^{b} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} dt = \int_{t=a}^{b} (-\beta'(t))dt = \\ &= [-\beta(t)]_{t=a}^{b} = \beta(a) - \beta(b).\end{aligned}$$

Man sieht hier, dass das Ergebnis nicht von der speziellen Gestalt der Kurve, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt. Dieses Phänomen betrachten wir im nächsten Abschnitt.

4. Gradientenfelder

Definition. *Ist* $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ *ein auf einer offenen Menge* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *definiertes stetige Vektorfeld, so heißt* $\mathbf{F}$ *ein* **Gradientenfeld**, *wenn es eine stetig differenzierbare Funktion* $f : G \to \mathbb{R}$ *mit mit*

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f), \qquad \textit{also} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

die Funktion f *heißt dann eine* **Stammfunktion** *von* $\mathbf{F}$.

Eine fundamentale Eigenschaft von Gradientenfeldern ist, dass Kurvenintegrale über Gradientenfelder wegunabhängig sind:

Satz. *Sei* $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ *ein Gradientenfeld mit Stammfunktion* $f : G \to \mathbb{R}$, *d.h.* $\operatorname{grad}(f) = \mathbf{F}$. *Dann gilt für jede ganz in* G *verlaufende Kurve* K *mit Anfangspunkt* P *und Endpunkt* Q

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(Q) - f(P).$$

(Man spricht hier von Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.) Insbesondere ist das Integral über jede geschlossene Kurve 0.

Beweis: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve K mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Schreiben wir

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{t=a}^{b} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} dt = \\
&= \int_{t=a}^{b} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma_n'(t) \right) dt = \int_{t=a}^{b} \frac{d}{dt} f(\begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix})dt = \\
&= \left[f(\begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}) \right]_{t=a}^{b} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(Q) - f(P),
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Beispiel: Wir betrachten die (skalare) Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Damit folgt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{\|x\|^3}\,\mathbf{x}.$$

Das oben erwähnte Gravitationsfeld ist von dieser Bauart.

Frage: Kann man einem Vektorfeld ansehen, ob es ein Gradientenfeld ist?

LEMMA. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, d.h. $\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f)$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : G \to \mathbb{R}$, so gilt*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ für alle Indizes } i, j.$$

Diese Gleichungen nennt man auch **Integrabilitätsbedingungen** *oder* **Integrabilitätsbedingung**, *wobei man sich natürlich auf Indizes $i < j$ beschränken kann.*

Beweis: Es ist

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

damit

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

woraus sofort die angegebene Gleichung folgt. ■

Ist $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so sagt man, $\mathbf{F}$ erfüllt die **Integrabilitätsbedingung(en)**, wenn gilt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ für alle Indizes } i < j,$$

und damit für alle Indizes i, j.

Bemerkungen: Wir schreiben die Integrabilitätsbedingungen für $n = 2$ und $n = 3$ aus:

(1) Für $n = 2$ schreiben wir

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die Integrabilitätsbedingung lautet dann

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

(2) Für $n = 3$ lauten die Bedingungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

Führt man die **Rotation** eines Vektorfelds durch

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

ein, so lassen sich die drei Gleichungen der Integrabilitätsbedingung zu

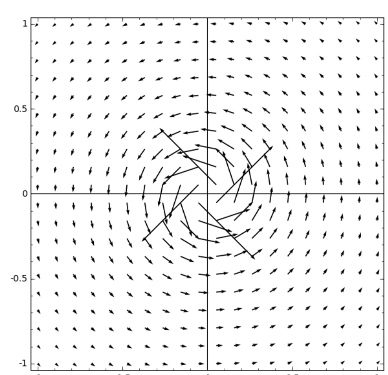
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0$$

zusammenfassen.

Leider ist die Integrabilitätsbedingung nicht immer hinreichend für ein Gradientenfeld, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Wir betrachten

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$



Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt. Nun betrachten wir den Kreis K, der durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird. Es ist wegen $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1,$$

und damit

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi.$$

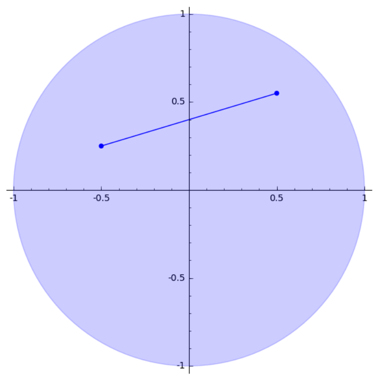
Da das geschlossene Kurvenintegral von 0 verschieden ist, kann das Vektorfeld $\mathbf{F}$ kein Gradientenfeld sein.

Es gibt aber viele Fälle, in denen die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend ist, und zwar, wenn der Definitionsbereich des Vektorfelds keine „Löcher“ hat:

Konvexe Mengen, Sterngebiete, einfach zusammenhängende Mengen:

- Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auch die Strecke von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ zu G gehört. Mathematisch formuliert:

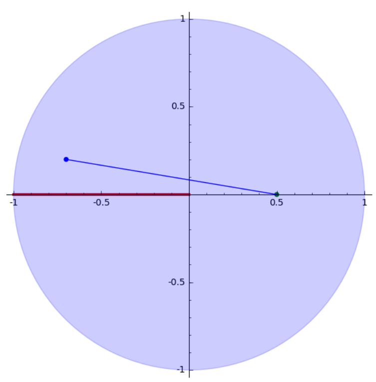
$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in G \text{ für alle } t \in [0, 1].$$



- Eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **Sterngebiet**, wenn es (mindestens) einen Punkt $\mathbf{m} \in G$ gibt, sodass für jeden anderen Punkt $\mathbf{p}$ aus G die Strecke von $\mathbf{m}$ nach $\mathbf{p}$ ganz in G liegt. Mathematisch formuliert:

$$\mathbf{p} \in G \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m} + t(\mathbf{p} - \mathbf{m}) \in G \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

  Den Punkt $\mathbf{m}$ nennen wir dann auch einen **Sternmittelpunkt**.



  (Die rote Strecke soll aus G herausgenommen sein.)
  Jedes konvexe Gebiet ist auch ein Sterngebiet, aber nicht umgekehrt.

- Eine Verallgemeinerung von Sterngebieten sind die **einfach zusammenhängenden Gebiete**. Wir geben keine mathematisch exakte Definition, sondern eine anschauliche: G ist **einfach zusammenhängend**, wenn man jede geschlossene, ganz in G verlaufende Kurve innerhalb von G auf einen Punkt zusammenziehen kann. G darf also keine „Löcher“ haben. (Beispielsweise ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend.) Wir werden im Folgenden nicht weiter auf einfach zusammenhängende Gebiete eingehen.

SATZ. *Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet mit einem Sternmittelpunkt $\mathbf{a}$, ist $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, sodass die Integrabilitätsbedingungen*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ für alle Indizes } i, j$$

erfüllt sind, so ist $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld, d.h. es gibt eine skalare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f).$$

Man kann beispielsweise wählen

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})dt.$$

(Einen Beweis des Satzes findet man für $\mathbf{a} = 0$ bei Forster (Analysis 3. 8. Auflage. S.234) oder Heuser (Lehrbuch der Analysis. Teil 2. 14. Auflage. S.386-387).)

Die Suche nach Stammfunktionen haben wir für $n = 2$ bereits bei exakten Differentialgleichungen kennengelernt. Die folgenden Beispiele sollen nochmals illustrieren, wie man zu einem Gradientenfeld $\mathbf{F}$ eine skalare Funktion f mit $\mathbf{F} = \operatorname{grad}(f)$ finden kann.

Beispiele:

(1) Wir betrachten

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - y^3 \\ 6x^2y - 3xy^2 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial y}(6xy^2 - y^3) = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 3xy^2)$$

gilt, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Wir nehmen an, es gibt eine Funktion $f(x, y)$ mit $\nabla(f) = \mathbf{F}$ und versuchen diese zu konstruieren. Es soll also gelten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 - y^3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2.$$

Wir integrieren

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$$

nach x und erhalten

$$f(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + c(y)$$

mit einer nur von y abhängigen Funktion $c(y)$. Dann ist die erste Bedingung erfüllt. Nun setzen wir in die zweite Bedingung ein und erhalten

$$6x^2y - 3xy^2 + c'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2.$$

Wählen wir $c = 0$, so sind alle Bedingungen erfüllt. Zusammengesetzt: Für

$$f = 3x^2y^2 - xy^3$$

gilt $\operatorname{grad}(f) = \mathbf{F}$.

(2) Wir betrachten

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Man überprüft schnell, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Wir setzen nun an:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz^3 + 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2.$$

Wir integrieren die 1. Gleichung nach x und erhalten:

$$f(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy + g(y,z)$$

mit einer nur von y und z abhängigen Funktion $g(y,z)$. Die zweite Bedingung liefert nun

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 2yz = 6x + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z).$$

Dies liefert die Bedingung

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = -2yz.$$

Integration nach y ergibt

$$g(y,z) = -y^2z + h(z)$$

mit einer nur von z abhängigen Funktion $h(z)$. Wir haben nun

$$f(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy - y^2z + h(z).$$

Wir betrachten die 3. Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2 = 3x^2z^2 - y^2 + \frac{\partial h}{\partial z}(z).$$

Wir wählen $h(z) = 0$ und erhalten dann insgesamt

$$f(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy - y^2z.$$

Man überprüft leicht, dass tatsächlich $\nabla(f) = \mathbf{F}$ gilt.

Hier haben wir das Verfahren für $n = 3$ nochmals systematisch formuliert:

Bestimmung einer Stammfunktion für ein Vektorfeld in Dimension 3: Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

erfülle die Integrabilitätsbedingungen. Wir suchen nach einer Stammfunktion f. (Ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}^3$, so wissen wir, dass eine Stammfunktion existiert.) Wir machen den Ansatz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_z.$$

- Wir betrachten die 1. Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} = F_x$. Wir integrieren F_x nach x:

  $$f_1(x,y,z) = \int F_x(x,y,z)dx.$$

  Dann gilt

  $$f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + g(y,z)$$

  wobei g nur von y und z abhängt.

- Wir setzen f nun in die 2. Gleichung $\frac{\partial f}{\partial y} = F_y$ ein:
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = F_y(x,y,z).$$
Anders geschrieben:
$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = F_y(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$
Die rechte Seite ist bekannt. (Die Integrabilitätsbedingungen garantieren, dass die rechte Seite nicht von x abhängt.) Wir integrieren nach y:
$$g_1(y,z) = \int \left(F_y - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dy.$$
Dann gibt es eine Funktion $h = h(z)$ mit
$$g(y,z) = g_1(y,z) + h(z).$$
Insgesamt erhalten wir
$$f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + g_1(y,z) + h(z).$$
- Wir setzen dies in die 3. Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = F_z$ ein:
$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial g_1}{\partial z} + h'(z) = F_z.$$
Also
$$h'(z) = F_z - \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial g_1}{\partial z}.$$
Wieder garantieren die Integrabilitätsbedingungen, dass die rechte Seite nur von z abhängt. Durch Integration nach z erhalten wir also eine Funktion $h(z)$
$$h(z) = \int \left(F_z(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial g_1}{\partial z}(y,z)\right) dz,$$
und damit schließlich
$$f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + g_1(y,z) + h(z)$$
mit $\operatorname{grad}(f) = \mathbf{F}$.

Der folgende Satz zeigt noch eine andere Möglichkeit, wie man eine Stammfunktion berechnen kann:

SATZ. *Sei* $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt, d.h.*
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$
Definiert man $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *durch*
$$f(x,y,z) = \int_0^x F_x(t,y,z)dt + \int_0^y F_y(0,t,z)dt + \int_0^z F_z(0,0,t)dt,$$
so ist f *eine Stammfunktion von* $\mathbf{F}$*, d.h.* $\operatorname{grad}(f) = \mathbf{F}$.

Beweis: Unter Verwendung der Integrabilitätsbedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= F_x(x,y,z),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial y}(t,y,z)dt + F_y(0,y,z) \overset{\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}}{=} \int_0^x \frac{\partial F_y}{\partial x}(t,y,z)dt + F_y(0,y,z) =\\
&= [F_y(t,y,z)]_{t=0}^x + F_y(0,y,z) = F_y(x,y,z) - F_y(0,y,z) + F_y(0,y,z) =\\
&= F_y(x,y,z),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial z}(t,y,z)dt + \int_0^y \frac{\partial F_y}{\partial z}(0,t,z)dt + F_z(0,0,z) \overset{\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x},\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}}{=}\\
&= \int_0^x \frac{\partial F_z}{\partial x}(t,y,z)dt + \int_0^y \frac{\partial F_z}{\partial y}(0,t,z)dt + F_z(0,0,z) =\\
&= [F_z(t,y,z)]_{t=0}^x + [F_z(0,t,z)]_{t=0}^y + F_z(0,0,z) =\\
&= (F_z(x,y,z) - F_z(0,y,z)) + (F_z(0,y,z) - F_z(0,0,z)) + F_z(0,0,z) =\\
&= F_z(x,y,z),
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Beispiel: Wir betrachten das frühere Beispiel

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

bei dem die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x \left(2tz^3 + 6y\right) dt + \int_0^y (-2tz)\, dt + \int_0^z 0\, dt =\\
&= x^2z^3 + 6xy - y^2z.
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis haben wir zuvor erhalten.

5. Der Satz von Green

Als ersten Integralsatz besprechen wir hier den sogenannten Satz von Green, der ein Flächenintegral in Beziehung zu einem Kurvenintegral setzt.

SATZ (Green). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand ∂A sich aus stückweise glatten Kurven zusammensetzt; die Orientierung des Rands ∂A sei so gewählt, dass das Innere immer links von ∂A liegt. Seien weiter g, h auf einer offenen Umgebung von A stetig partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} (g(x,y)dx + h(x,y)dy) = \int_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) d(x,y),$$

wobei die linke Seite auch in der Form

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s}$$

geschrieben werden kann.

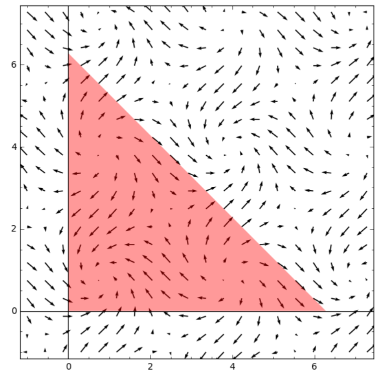
Beispiel: Sei A das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$ und $\mathbf{F}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \sin(x-y) \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad g(x,y) = \cos(x+y), \quad h(x,y) = \sin(x-y).$$

Wir wollen

$$\int_{\partial A} (g(x,y)dx + h(x,y)dy) = \int_{\partial A} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{und} \quad \int_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) d(x,y)$$

vergleichen.



- Schreiben wir
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi - x\},$$
so sieht man, dass A y-projizierbar ist. Es folgt
$$\begin{aligned}
\int_A \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) d(x,y) &= \int_A (\cos(x-y) + \sin(x+y))\, d(x,y) = \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} \left(\int_{y=0}^{2\pi - x} (\cos(x-y) + \sin(x+y))\, dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} \left([-\sin(x-y) - \cos(x+y)]_{y=0}^{2\pi-x} \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} (-\sin(x - 2\pi + x) + \sin(x) - \cos(x + 2\pi - x) + \cos(x))\, dx = \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} (-\sin(2x) + \sin(x) + \cos(x) - 1)\, dx = \\
&= \left[\frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x) + \sin(x) - x\right]_{x=0}^{2\pi} = -2\pi.
\end{aligned}$$
- Für den Rand berechnen wir drei Kurvenintegrale:
  - K_1 sei die Strecke von $(0,0)$ nach $(2\pi, 0)$, die wir durch
  $$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0, 2\pi]$$
  parametrisieren. Es ist
  $$\mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(t).$$
  Damit erhalten wir
  $$\int_{K_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad = \quad \int_{t=0}^{2\pi} \cos(t) = 0.$$
  - K_2 sei die Strecke von $(0, 2\pi)$ nach $(2\pi, 0)$, die wir so parametrisieren:
  $$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\pi - t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0, 2\pi].$$
  Es ist
  $$\mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2t - 2\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - \sin(2t).$$
  Damit erhalten wir
  $$\int_{K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} (1 - \sin(2t))dt = \left[t + \frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{t=0}^{2\pi} = 2\pi.$$

– K_3 sei die Strecke von $(0,0)$ nach $(2\pi, 0)$, die wir durch

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren. Hier gilt

$$\mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin(t),$$

und damit

$$\int_{K_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} (-\sin(t))dt = [\cos(t)]_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Der Rand von A soll so orientiert sein, dass das Innere von A immer links liegt. Daher gilt

$$\partial A = K_1 + (-K_2) + (-K_3),$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{K_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-K_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \int_{K_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{K_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -2\pi. \end{aligned}$$

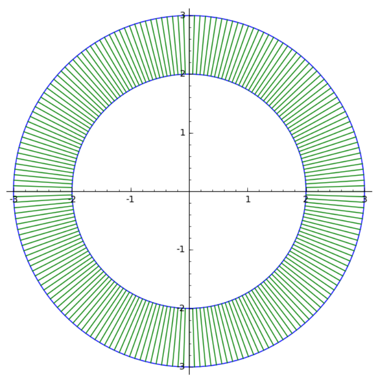
Damit haben wir die Gleichheit, die der Satz von Green behauptet, nochmals explizit nachgerechnet.

Beispiel: Wir hatten zuvor das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

betrachtet. Es erfüllte die Integrabilitätsbedingungen, war aber kein Gradientenfeld. Der Satz von Green sagt dann: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, die den Nullpunkt nicht enthält, so gilt

$$\int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$



Wählen wir für A den Kreisring

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9\},$$

so setzt sich der Rand aus K_3 und $-K_2$ zusammen:

$$\partial A = K_3 \cup (-K_2).$$

Wir betrachten daher allgemeiner den Kreis K_r mit Radius r und parametrisieren ihn durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{1}{(r\cos(t))^2 + (r\sin(t))^2} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} = 1$$

und damit

$$\int_{K_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Es folgt

$$\int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi - 2\pi = 0,$$

wie es auch der Satz von Green besagt.

Flächenberechnung mit dem Satz von Green: Wählen wir

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

so ist

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

und damit mit dem Satz von Green

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} = \int_A 2d(x,y),$$

also

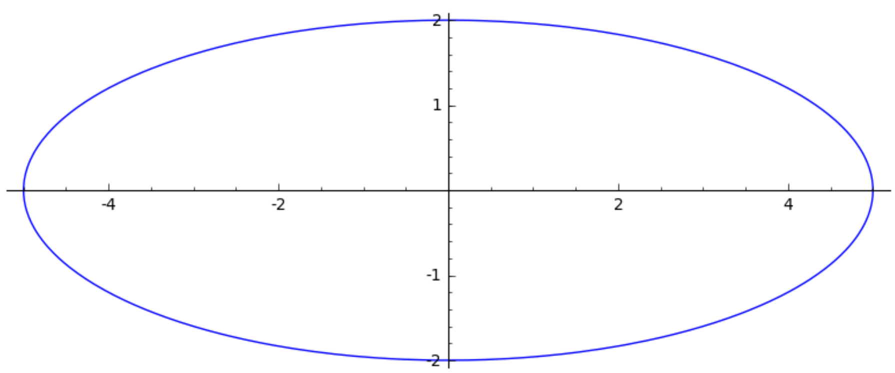
$$\operatorname{vol}_2(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_{\partial A} \left(-y\,dx + x\,dy\right).$$

Beispiel: Für $a, b > 0$ wird durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

eine Ellipse E parametrisiert. Die zugehörige Gleichung lautet

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1.$$



Mit dem Satz von Green erhalten für die eingeschlossene Fläche $\widetilde{E}$

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{E}} d(x,y) &= \frac{1}{2} \int_E \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -b\sin(t) \\ a\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} ab(\sin(t)^2 + \cos(t)^2)dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Planimeter: Ein Planimeter ist ein mechanisches mathematisches Instrument, mit dem man Flächeninhalte bestimmen kann, indem man die Randkurve entlangfährt Deutsches Museum - Mathematische Instrumente. Die Funktionsweise lässt sich mit dem Satz von Green begründen[1].

[1] R. W. Gatterdam. The Planimeter as an Example of Green's Theorem. The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 9 (Nov., 1981), pp. 701-704.