Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 7 (28.5.2021)

Aufgabe 31: Bestimme für folgende Büschel ebener Quadriken die Basispunkte, die singulären Kurven der Büschel, und skizziere die zu $(u:v) = (1:0), (0:1), (1:1), (1:-1)$ gehörigen Kurven.

(1) $f_{(u,v)} = u(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) + v(x_0x_1 + x_1^2)$.
(2) $f_{(u,v)} = u(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) + v(x_0^2 - x_1^2)$.
(3) $f_{(u,v)} = u(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) + v(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2)$.

(Die Anzahl der Basispunkte ist $1, 2, 3$.)

Aufgabe 32: (Der Grundkörper sei algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik $\neq 2$.) Ein Büschel $f_{(u,v)} = 0$ ebener projektiver Quadriken enthalte (mindestens) zwei Doppelgeraden.

(1) Zeige, dass es genau einen Basispunkt gibt. Wie kann man diesen Punkt beschreiben?
(2) Zeige, dass alle Kurven des Büschels singulär sind.
(3) Wieviele Doppelgeraden enthält das Büschel?

Aufgabe 33: Durch

$$f_{(u,v)} = ux_0x_2 + vx_1x_2 \quad \text{und} \quad g_{(u,v)} = ux_1^2 + vx_2^2$$

werden zwei Büschel ebener projektiver Quadriken definiert.

(1) Bestimme die Basispunkte jedes Büschels.
(2) Zeige, dass jede Kurve der beiden Büschel singulär ist.
(3) Zerlege $f_{(u,v)}$ und $g_{(u,v)}$ für alle $(u:v) \in \mathbb{P}^1$ in Linearfaktoren.

(Die beiden Büschel zeigen zwei Weisen, wie es passieren kann, dass jede Kurve eines Büschels singulär ist.)

Aufgabe 34: Gegeben sei

$$f = \frac{4x_0^4 - 4x_0^3x_1 - 3x_0^2x_1^2 + 4x_0x_1^3 - x_1^4}{8x_0^4 + 8x_0^3x_1 - 2x_0^2x_1^2 - 4x_0x_1^3 - x_1^4} \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1).$$

(1) Schreibe f als rationale Funktion in $x = \frac{x_1}{x_0}$.
(2) Schreibe f als rationale Funktion in $u = \frac{x_0}{x_1}$.
(3) Untersuche, ob f in den folgenden Punkten P definiert ist, und bestimme gegebenenfalls den Wert $f(P)$:
$$0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \quad -2, \quad \infty.$$
(4) Bestimme die Null- und Polstellen von f und die zugehörigen Vielfachheiten.

Aufgabe 35: Gegeben sei

$$f = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1).$$

Da Zähler und Nenner (teilerfremde) Polynome vom Grad 2 sind, gibt es - nach Vorlesung - zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte $P_\lambda, Q_\lambda \in \mathbb{P}^1$ mit

$$f(P_\lambda) = f(Q_\lambda) = \lambda, \quad \text{d.h.} \quad f^{-1}(\lambda) = \{P_\lambda, Q_\lambda\}.$$

Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die die Punkte P_λ und Q_λ zusammenfallen, d.h. für die gilt

$$\#f^{-1}(\lambda) = 1.$$