

Skript zur Vorlesung
Vertiefungsmodul Algebra: Einführung in die
Darstellungstheorie

Sommersemester 2019

Catherine Meusburger
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
`catherine.meusburger@math.uni-erlangen.de`

(Stand: 6. April 2020)

Zur Vorbereitung der Vorlesung habe ich die folgenden Lehrbücher benutzt, die ich auch als Literatur zur Vorlesung für Studierende empfehle:

- J. L. Alperin, Rowen B. Bell: Groups and Representations, Springer Graduate Texts in Mathematics (für Kapitel 1)
- Michael Artin: Algebra, Birkhäuser (für Kapitel 1,2)
- Serge Lang: Algebra, Addison-Wesley (für Kapitel 1,2,3,4)
- Jens Carsten Jantzen, Joachim Schwermer: Algebra, Springer (für Kapitel 1,2,3,4)
- Saunders MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer Graduate Texts in Mathematics (für Kapitel 5)
- Emily Riehl, Category Theory in Context, Aurora Dover Modern Math Originals (für Kapitel 5): <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>
- Bruce E. Sagan, The Symmetric Group - Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Springer Graduate Texts in Mathematics (für die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe)
- Jean-Pierre Serre, Lineare Darstellungen endlicher Gruppen, Springer (für Kapitel 1)

Zusätzlich habe ich mein eigenes Vorlesungsskript aus dem Wintersemester 2012/2013 und die Vorlesungsskripten von Christoph Schweigert (Universität Hamburg) und Karl-Hermann Neeb (FAU) genutzt und aus diesen Skripten auch Inhalte übernommen.

Einige Online-Ressourcen zu den in der Vorlesung behandelten Themen, die eventuell für Studierende hilfreich sein können:

- das Blog **Abstract Nonsense**
- das Blog **The n-Category Cafe**
- die Foren **Mathoverflow.net** und **Stackexchange**
- die Webseite **nLab** zum Thema Kategorien und Funktoren.

Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen zu diesem Skript an catherine.meusburger@math.uni-erlangen.de.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	5
1	Darstellungen von Gruppen	7
1.1	Darstellungen und Homomorphismen von Darstellungen	7
1.2	Zerlegbarkeit und Reduzibilität	13
1.3	Charakter	19
1.4	Die Gruppenalgebra	29
1.5	Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppe	32
1.6	Übungen zu Kapitel 1	40
2	Moduln über Ringen	46
2.1	Grundbegriffe	46
2.2	Konstruktionen mit Moduln: Untermoduln und Quotienten	51
2.3	Konstruktionen mit Moduln: Summen und Produkte	56
2.4	Erzeuger und Relationen	59
2.5	Konstruktionen mit Moduln: Tensorprodukte über Ringen	63
2.6	Aufgaben zu Kapitel 2	69
3	Klassifikation von Moduln über Hauptidealringen	73
3.1	Beschreibung von Modulhomomorphismen durch Matrizen	73
3.2	Klassifikation mit dem Elementarteilersatz	77
3.3	Übungen zu Kapitel 3	84
4	(Halb)einfache Moduln	86
4.1	Einfache Moduln	86
4.2	Halbeinfache Moduln	93
4.3	Strukturtheorie halbeinfacher Ringe	97
4.4	Übungen zu Kapitel 4	108
5	Kategorien und Funktoren	111

5.1	Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen	111
5.2	Universelle Eigenschaften und adjungierte Funktoren	122
5.3	Darstellbare Funktoren und das Yoneda-Lemma	133
5.4	Übungen zu Kapitel 5	139

0 Einleitung

In der Darstellungstheorie beschreibt man algebraische Strukturen wie Gruppen, Ringe, Algebren und Lie Algebren, indem man sie mit *linearen Strukturen* in Verbindung bringt. Genauer gesagt betrachtet man *strukturerhaltende Abbildungen* wie Gruppen-, Ring-, Algebra- oder Lie Algebromorphismen von der betrachteten algebraischen Struktur in die Endomorphismen von Vektorräumen oder gewisse Verallgemeinerungen davon. Dies hat den Vorteil, dass man die algebraische Struktur mit Hilfe von Methoden der linearen Algebra und gewissen Weiterentwicklungen dieser Methoden untersuchen kann.

Neben dieser praktischen Motivation besitzt Darstellungstheorie auch deswegen viele mathematische Anwendungen, weil sie *Symmetrien* von mathematischen Problemen oder physikalischen Systemen beschreibt. Beispiele davon sind Symmetriegruppen geometrischer Objekte wie Polyeder, Kreise oder Sphären, Symmetrien von Differentialgleichungen, die es einem erlauben, diese effizienter zu lösen.

Ebenso durchzieht die Darstellungstheorie die gesamte moderne Physik. So werden physikalische Symmetrien quantenmechanisch durch Darstellungen der Symmetriegruppen beschrieben, meist durch Gruppenhomomorphismen in die unitäre Gruppe gewisser Hilberträume. So lässt sich beispielsweise mit Darstellungstheorie verstehen, wie sich Elementarteilchen wie Quarks und Leptonen zu komplizierteren Teilchen wie Hadronen zusammensetzen. Das Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen entsteht so aus den Darstellungen der Gruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, wobei die Gruppe $U(1)$ die elektromagnetische, die Gruppe $SU(2)$ die schwache und die Gruppe $SU(3)$ die starke Wechselwirkung beschreibt.

Ein wichtiges Ziel der Darstellungstheorie ist die *Klassifikation von Darstellungen*, also die Bestimmung aller Darstellungen einer algebraischen Struktur bis auf Isomorphie. Eine vollständige Klassifikation lässt dabei wie auch in anderen mathematischen Problemen nur unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen durchführen. Die Methode, mit der dies erreicht wird, ist die Zerlegung einer Darstellung in *einfache Darstellungen*, Grundbausteine die eine besonders einfache Gestalt haben und sich mittels direkter Summen zu komplizierteren Darstellungen zusammensetzen.

Um dies für verschiedene algebraische Strukturen systematisch zu untersuchen, arbeitet man schließlich mit einem allgemeineren Konzept von Linearität, in dem die Darstellungen verschiedener mathematischer Strukturen vereinheitlicht werden. Dies ist der Begriff des *Moduls*¹, der analog zum Begriff des Vektorraums definiert ist, bei dem aber der Körper in der Definition des Vektorraums durch einen unitalen Ring ersetzt wird. Der Begriff des Moduls ermöglicht es einem beispielsweise Vektorräume, abelsche Gruppen und Darstellungen von Gruppen als verschiedene Spezialfälle ein- und derselben mathematischen Struktur zu sehen. Analog sind Untervektorräume, Untergruppen abelscher Gruppen und Ideale in Ringen Spezialfälle eines einheitlichen Konzepts, nämlich des *Untermoduls*, und Quotientenräume, Faktorgruppen abelscher Gruppen und Quotientenringe sind Spezialfälle von *Quotientenmoduln*.

Wegen ihres vereinheitlichenden Charakters spielen Moduln in der modernen Algebra eine wichtige Rolle. Während sich bekannte Konstruktionen für Vektorräume wie Unterräume, direkte Summen, Produkte, Quotientenräume und Tensorprodukte direkt auf Moduln verallgemeinern lassen, verfügen Moduln im Gegensatz zu Vektorräumen aber nicht notwendigerweise über Basen. Dies hat weitreichende Konsequenzen und erfordert neue Methoden, die über die lineare

¹Der Modul, nicht das Modul. Der Plural ist Moduln, nicht Module. Das Wort wird auf der ersten Silbe betont.

Algebra hinausgehen.

Letztlich geht es in vielen Teilen der Darstellungstheorie darum, Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Strukturen herzustellen, die jeweils bis auf Isomorphie klassifiziert werden sollen. Das zwingt einem, ein Konzept von Zuordnung zwischen mathematischen Strukturen zu entwickeln, das nicht nur die mathematischen Strukturen selbst sondern auch die zugehörigen strukturerhaltenden Abbildungen enthält und ineinander überführt. Dazu werden jeweils die mathematische Strukturen und die zugehörigen strukturerhaltenden Abbildungen in einer neuen mathematischen Struktur zusammengefasst, die man als *Kategorie* bezeichnet. Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien werden durch *Funktoren* beschrieben.

Der Begriff der Kategorie verkörpert die Systematik in der Untersuchung mathematischer Strukturen, die sich bereits in den Grundvorlesungen abgezeichnet hat. So folgt beispielsweise auf die Definition der Menge der Begriff der Abbildung, auf die Definition einer Gruppe, eines Rings und einer Algebra der Begriff des Gruppen-, Ring- und Algebromorphismus und auf den Begriff des Vektorraums der Begriff der linearen Abbildung.

In all diesen Fällen wird zunächst eine mathematische Struktur definiert (Menge, Gruppe, Ring, Algebra, Vektorraum) und anschließend werden die Abbildungen zwischen solchen Strukturen untersucht, die die Strukturmerkmale erhalten oder mit den entsprechenden Strukturabbildungen oder Verknüpfungen vertauschen. In all diesen Fällen ergibt die Verkettung zweier strukturerhaltender Abbildungen wieder eine strukturerhaltende Abbildung, die Verkettung ist assoziativ, und die Identitätsabbildung ist strukturerhaltend. Dies sind genau die Bedingungen, die in einer Kategorie gefordert werden. Allerdings nimmt man dort nicht mehr auf Abbildungen Bezug, sondern gibt diese Bedingungen abstrakt vor.

Viele interessante darstellungstheoretische Fragen lassen sich kompakt und präzise mit Hilfe von Kategorien und Funktoren formulieren, und daher spielen Kategorien und Funktoren in der modernen Darstellungstheorie eine wichtige Rolle. Der letzte Teil der Vorlesung beschäftigt sich daher systematisch mit diesen Strukturen und ihren Anwendungen in der Darstellungstheorie.

1 Darstellungen von Gruppen

1.1 Darstellungen und Homomorphismen von Darstellungen

In der Darstellungstheorie von Gruppen beschreibt man Gruppen, indem man sie durch Gruppenhomomorphismen in die Gruppe der invertierbaren Endomorphismen eines Vektorraums oder in gewisse Matrixgruppen abbildet. Dies hat den Vorteil, dass man so die Struktur von Gruppen mit Methoden der linearen Algebra untersuchen kann. Im Vergleich zu allgemeinen Gruppen sind Gruppen von Matrizen oder Endomorphismen von Vektorräumen oft deutlich einfacher zu untersuchen.

Darstellungen von Gruppen treten außerdem in vielen mathematischen Problemen auf, da sie *Symmetrien* beschreiben. Beispiele sind die *unitäre Gruppe* eines unitären Vektorraums oder die *orthogonale Gruppe* eines euklidischen Vektorraums, die die skalarprodukterhaltenden linearen Endomorphismen enthalten. Weitere Beispiele sind endliche Gruppen, die als Symmetriegruppen gewisser geometrischer Figuren wie Würfel oder regulärer n -Ecke auftreten.

Definition 1.1.1: Eine **Darstellung** einer Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} ist ein Paar (ρ, V) aus einem \mathbb{K} -Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ in die Gruppe der invertierbaren \mathbb{K} -linearen Endomorphismen von V .

- Die **Dimension** einer Darstellung (ρ, V) ist die Dimension von V . Insbesondere heißt (ρ, V) **endlich-dimensional**, wenn V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ist.
- Eine **komplexe Darstellung** von G ist eine Darstellung von G über \mathbb{C} , und eine **reelle Darstellung** von G ist eine Darstellung von G über \mathbb{R} .

Beispiel 1.1.2:

1. Für jeden \mathbb{K} -Vektorraum V und jede Untergruppe $G \subset \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ definiert die Inklusionsabbildung $\rho = \iota : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, $\phi \mapsto \phi$ eine Darstellung (ι, V) von G auf V . Insbesondere trägt jeder \mathbb{K} -Vektorraum V eine Darstellung seiner Automorphismengruppe $\text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.
2. Jeder \mathbb{K} -Vektorraum V trägt eine Darstellung jeder Gruppe G , nämlich die **triviale Darstellung** von G auf V mit $\rho(g) = \text{id}_V$ für alle $g \in G$.
3. Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis eines \mathbb{K} -Vektorraums V , so definiert jede Permutation $\pi \in S_n$ eine invertierbare \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi_\pi : V \rightarrow V$ mit $\phi_\pi(v_i) = v_{\pi(i)}$. Offensichtlich gilt $\phi_{\pi \circ \sigma} = \phi_\pi \circ \phi_\sigma$ für alle $\pi, \sigma \in S_n$, und man erhält eine Darstellung der symmetrischen Gruppe auf V

$$\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V), \quad \pi \mapsto \phi_\pi.$$

Die beschreibenden Matrizen der Abbildungen ϕ_π bezüglich B sind gerade die **Permutationsmatrizen**. Sie bilden eine Untergruppe der Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$.

4. Darstellungen der Gruppe $G = (\mathbb{Z}, +)$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V entsprechen genau den Elementen von $\text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$.

Denn jeder Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ erfüllt $\rho(0) = \text{id}_V =: \rho(1)^0$ und $\rho(n) = \rho(1 + \dots + 1) = \rho(1) \cdots \rho(1) = \rho(1)^n$ sowie $\rho(-n) = \rho(n)^{-1} = \rho(1)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist ρ durch $\rho(1)$ eindeutig bestimmt, und jedes Element $\phi \in \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ liefert einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $\rho(1) = \phi$.

5. Darstellungen der Gruppe $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V entsprechen genau den Elementen $\phi \in \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $\phi^m = \text{id}_V$.

Denn ein Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ist durch $\rho(\bar{1})$ eindeutig bestimmt und muss die Bedingung $\rho(\bar{1})^m = \rho(\bar{m}) = \rho(\bar{0}) = \text{id}_V$ erfüllen.

Insbesondere liefert jede m te Einheitswurzel $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Darstellung $(\rho_\lambda, \mathbb{K})$ von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf \mathbb{K} mit $\rho_\lambda(\bar{k})\mu = \lambda^k \mu$.

Neben diesen konkreten Beispielen gibt es eine Vielzahl von Konstruktionen, mit denen sich aus gegebenen Gruppendarstellungen weitere Darstellungen konstruieren lassen. Dabei werden jeweils bekannte Konstruktionen mit Vektorräumen wie direkte Summen, Tensorprodukte und Dualräume mit einer Darstellung versehen. Auch Gruppenhomomorphismen erlauben es einem, aus gegebenen Darstellungen neue Darstellungen zu konstruieren.

Beispiel 1.1.3: Seien (ρ_V, V) und (ρ_W, W) Darstellungen einer Gruppe G über \mathbb{K} .

1. Dann erhält man eine Darstellung von G auf der direkten Summe $V \oplus W$ mit

$$\rho_{V \oplus W}(g)(v + w) = \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w) \quad \forall g \in G, v \in V, w \in W.$$

Diese wird als **direkte Summe** der Darstellungen (ρ_V, V) und (ρ_W, W) bezeichnet. Analog definiert man die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} (\rho_{V_i}, V_i)$ für beliebige Indextmengen I .

2. Auch das Tensorprodukt $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ trägt eine Darstellung von G mit

$$\rho_{V \otimes W}(g)(v \otimes w) = \rho_V(g)(v) \otimes \rho_W(g)(w) \quad \forall g \in G, v \in V, w \in W.$$

Diese wird als das **Tensorprodukt** der Darstellungen (ρ_V, V) und (ρ_W, W) bezeichnet. Analog definiert man Darstellungen auf endlichen Tensorprodukten von Vektorräumen.

3. Man erhält eine Darstellung von G auf dem \mathbb{K} -Vektorraum $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit

$$\rho_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}(g)\phi = \rho_W(g) \circ \phi \circ \rho_V(g)^{-1} \quad \forall \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), g \in G.$$

4. Wählt man in 3. $W = \mathbb{K}$ als Vektorraum über sich selbst mit der trivialen Darstellung von G , so erhält man eine Darstellung (ρ_{V^*}, V^*) von G auf dem Dualraum $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$

$$\rho_{V^*}(g)\alpha = \alpha \circ \rho_V(g^{-1}) \quad \forall \alpha \in V^*, g \in G.$$

Diese wird als die zu (ρ, V) **duale Darstellung** bezeichnet.

5. Ist $f : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und (ρ, V) eine Darstellung von G auf V , so ist $(\rho \circ f, V)$ eine Darstellung von H auf V , der **Pullback** von ρ entlang f .

Insbesondere ist für jede Untergruppe $U \subset G$ die Inklusionsabbildung $\iota : U \rightarrow G, u \mapsto u$ ein Gruppenhomomorphismus, und jede Darstellung (ρ, V) von G definiert eine Darstellung $(\rho \circ \iota, V)$ von U . Dies wird als **Restriktion** oder **Einschränkung** bezeichnet.

Darstellungen einer Gruppe G hängen außerdem eng mit *Gruppenwirkungen* zusammen. Ist (ρ, V) eine Darstellung einer Gruppe G auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V , so ist die Abbildung

$$\triangleright : G \times V \rightarrow V, \quad (g, v) \mapsto g \triangleright v = \rho(g)v$$

eine **Gruppenwirkung** von G auf V , denn es gilt für alle $v \in V$ und $g, h \in G$

$$\begin{aligned} e \triangleright v &= \rho(e)v = \text{id}_V(v) = v \\ (gh) \triangleright v &= \rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v = g \triangleright (\rho(h)v) = g \triangleright (h \triangleright v). \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man aus einer Gruppenwirkung $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ auf einer Menge M eine Darstellung der Gruppe konstruieren. Dazu wird aus der Menge M ein Vektorraum mit Basis M konstruiert. Da jeder Endomorphismus eines Vektorraums durch seine Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt ist, lässt sich so die Gruppenwirkung zu einer Darstellung fortsetzen. Wir erinnern dazu zunächst an die Definition des von einer Menge M erzeugten \mathbb{K} -Vektorraums aus der linearen Algebra.

Definition 1.1.4: Sei M eine Menge und \mathbb{K} ein Körper. Der **von M erzeugte \mathbb{K} -Vektorraum** \mathbb{K}^M ist der \mathbb{K} -Vektorraum der Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(m) = 0$ für fast alle $m \in M$ mit der punktweisen Vektoraddition und Skalarmultiplikation

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m) \quad (\lambda f)(m) = \lambda f(m) \quad \forall m \in M.$$

Bemerkung 1.1.5:

- Die Abbildungen $\delta_m : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\delta_m(m') = 0$ für $m' \neq m$ und $\delta_m(m) = 1$ bilden eine Basis von \mathbb{K}^M , denn sie sind linear unabhängig und jede Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(m) = 0$ für fast alle $m \in M$ lässt sich eindeutig schreiben als *endliche* Summe

$$f = \sum_{m \in M} f(m) \delta_m = \sum_{m \in M, f(m) \neq 0} f(m) \delta_m.$$

- Schreibt man $f = \sum_{m \in M} \lambda_m m$ mit $m \in M$ und $\lambda_m \in \mathbb{K}$ statt $\sum_{m \in M, f(m) \neq 0} f(m) \delta_m$, so sind die Vektoraddition und Skalarmultiplikation gegeben durch

$$\left(\sum_{m \in M} \lambda_m m \right) + \left(\sum_{m \in M} \mu_m m \right) = \sum_{m \in M} (\lambda_m + \mu_m) m \quad \lambda \cdot \left(\sum_{m \in M} \lambda_m m \right) = \sum_{m \in M} (\lambda \lambda_m) m$$

Man also \mathbb{K}^M auch veranschaulichen als die Menge endlicher Linearkombinationen von Elementen in M mit Koeffizienten in \mathbb{K} .

Mit Hilfe des von einer Menge M frei erzeugten \mathbb{K} -Vektorraums können wir nun jede Gruppenwirkung einer Gruppe G auf M zu einer Darstellung von G erweitern. Dabei können wir insbesondere eine Gruppenwirkungen betrachten, die für jede Gruppe definiert sind, wie die triviale Gruppenwirkung und die Gruppenwirkung einer Gruppe G auf sich selbst durch Linksmultiplikation. Letztere liefert die sogenannte *reguläre Darstellung* einer Gruppe G .

Beispiel 1.1.6: (Aufgabe 2)

- Sei G eine Gruppe und $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ eine Gruppenwirkung von G auf einer Menge M . Dann ist (ρ, \mathbb{K}^M) mit

$$(\rho(g)f)(m) = f(g^{-1} \triangleright m) \quad \forall g \in G, m \in M, f \in \mathbb{K}^M.$$

eine Darstellung von G auf \mathbb{K}^M . Schreibt man die Elemente von \mathbb{K}^M als Linearkombinationen $\sum_{m \in M} \lambda_m m$ mit $\lambda_m = 0$ für fast alle $m \in M$ so erhält man

$$\rho(g) \left(\sum_{m \in M} \lambda_m m \right) = \sum_{m \in M} \lambda_m (g \triangleright m).$$

2. Wählt man in 1. als Menge $M = G$ mit der Gruppenwirkung $\triangleright : G \times G \rightarrow G$, $g \triangleright h = gh$ durch Linksmultiplikation so erhält man die Darstellung (ρ, \mathbb{K}^G) mit

$$(\rho(g)f)(h) := f(g^{-1}h) \quad \forall g, h \in G, f \in \mathbb{K}^G$$

$$\rho(g) \left(\sum_{h \in G} \lambda_h h \right) = \sum_{h \in G} \lambda_h (gh) = \sum_{h \in G} \lambda_{g^{-1}h} h.$$

Diese wird als die **reguläre Darstellung** von G über \mathbb{K} bezeichnet.

Wie für die Begriffe der Gruppe, des Rings, Körpers, Vektorraums und der Algebra gibt es auch für das Konzept der Gruppendarstellung einen Begriff von strukturerhaltender Abbildung. Da es sich bei einer Darstellung um zwei zusammenwirkende Strukturen handelt - einen \mathbb{K} -Vektorraum V und einen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ - sollte ein Homomorphismus von Darstellungen mit beiden Strukturen verträglich sein, also eine \mathbb{K} -lineare Abbildung, die die beiden Gruppenhomomorphismen ineinander überführt.

Definition 1.1.7: Seien (ρ, V) , (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} .

1. Ein **Homomorphismus von Darstellungen** von (ρ, V) nach (τ, W) ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ mit

$$\phi \circ \rho(g) = \tau(g) \circ \phi \quad \forall g \in G.$$

Die Menge der Homomorphismen von Darstellungen von (ρ, V) nach (τ, W) wird mit $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W))$ bezeichnet.

2. Ein **Isomorphismus von Darstellungen** ist ein bijektiver Homomorphismus von Darstellungen. Zwei Darstellungen einer Gruppe G über \mathbb{K} heißen **isomorph**, wenn ein Isomorphismus von Darstellungen zwischen ihnen existiert.
3. Ein **Endomorphismus** einer Darstellung (ρ, V) ist ein Homomorphismus von Darstellungen von (ρ, V) nach (ρ, V) . Die Menge der Endomorphismen einer Darstellung (ρ, V) wird mit $\text{End}(\rho, V) = \text{Hom}((\rho, V), (\rho, V))$ bezeichnet. Ein bijektiver Endomorphismus einer Darstellung (ρ, V) heißt **Automorphismus von Darstellungen**.

Bemerkung 1.1.8:

1. Die Homomorphismen von Darstellungen von (ρ, V) nach (τ, W) bilden einen Untervektorraum $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Denn die Summe und skalare Vielfache von Homomorphismen von Darstellungen sind wieder Homomorphismen von Darstellungen.
2. Für jede Gruppe G und Darstellung (ρ, V) von G auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist die Identitätsabbildung $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ein Automorphismus von Darstellungen.

3. Sind $\psi \in \text{Hom}((\rho, U), (\sigma, V))$ und $\phi \in \text{Hom}((\sigma, V), (\tau, W))$ Homomorphismen von Darstellungen einer Gruppe G , so ist $\phi \circ \psi : U \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen von (ρ, U) nach (τ, W) . Daraus folgt insbesondere, dass das Inverse eines Isomorphismus von Darstellungen wieder ein Isomorphismus von Darstellungen ist.
4. Aus 2. und 3. folgt, dass Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} und Homomorphismen solcher Darstellungen eine Kategorie bilden (vgl. Kapitel 5). Die Identitätsmorphisme sind Identitätsabbildungen und die Isomorphismen sind Isomorphismen von Darstellungen.
5. Isomorphie von Darstellungen definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse² der Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} .

Beispiel 1.1.9:

1. Tragen zwei \mathbb{K} -Vektorräume V, W die triviale Darstellung einer Gruppe G , so ist jede \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen.
2. Wir betrachten die Darstellung $\rho = \text{id}_{\text{GL}_{\mathbb{C}}(V)} : \text{GL}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ der Gruppe $\text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ auf einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum V . Die Endomorphismen dieser Darstellung sind genau die \mathbb{C} -linearen Abbildungen $\phi : V \rightarrow V$ mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ für alle $\psi \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ und damit die Abbildungen der Form $\phi = \lambda \text{id}_V$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Denn aus der linearen Algebra ist bekannt, dass jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ für alle $\psi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ von der Form $\phi = \lambda \text{id}_V$ ist. Da $\text{GL}_{\mathbb{C}}(V) \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine dichte Teilmenge ist und $F_{\phi} : \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $\psi \mapsto \psi \circ \phi - \phi \circ \psi$ eine lineare und damit stetige Abbildung, gilt dies auch schon für jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ für alle $\psi \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

3. Da nach Beispiel 1.1.2, 4. und 5. jede Darstellung der Gruppen \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V eindeutig bestimmt ist durch $\rho(1) : V \rightarrow V$, ist $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Homomorphismus von Darstellungen von (ρ, V) nach (τ, W) genau dann, wenn $\phi \circ \rho(1) = \tau(1) \circ \phi$ gilt. Denn daraus folgt wegen $\rho(n) = \rho(1)^n$ und $\tau(n) = \tau(1)^n$ auch $\phi \circ \rho(n) = \tau(n) \circ \phi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Isomorphieklassen von Darstellungen der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V entsprechen damit genau den Ähnlichkeitsklassen von Vektorraumautomorphismen von V . Isomorphieklassen von Darstellungen von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ entsprechen den Ähnlichkeitsklassen von Vektorraumautomorphismen $\psi : V \rightarrow V$ mit $\psi^m = \text{id}_V$.

4. Nach Beispiel 1.1.3 definieren zwei Darstellungen (ρ, V) und (τ, W) von G über \mathbb{K} eine Darstellung von G auf dem Vektorraum $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, die gegeben ist durch

$$\rho_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}(g)\phi = \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}) \quad \forall g \in G, \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W).$$

Die Homomorphismen von Darstellungen von (ρ, V) nach (τ, W) sind damit genau die *Fixpunkte* der Darstellung auf $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

²Achtung: Die Darstellungen einer Gruppe G über \mathbb{K} bilden keine Menge. Der Begriff der Äquivalenzrelation ist aber analog zu Äquivalenzrelationen auf Mengen auch für Klassen definiert.

5. Für jede Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G und $h \in G$ ist auch (ρ_h, V) mit

$$\rho_h : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V), \quad g \mapsto \rho(hgh^{-1})$$

eine Darstellung von G auf V . Die Abbildung $\phi_h : V \rightarrow V, v \mapsto \rho(h)v$ ist ein Homomorphismus von Darstellungen von (ρ, V) nach (ρ_h, V) .

Insbesondere ist für jedes Element $c \in Z(G) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in G\}$ die Abbildung $\phi_c : V \rightarrow V, v \mapsto \rho(c)v$ ein Automorphismus von (ρ, V) (Aufgabe 5).

In vielen Fällen ist es schwierig, alle Homomorphismen zwischen zwei Darstellungen einer Gruppe zu bestimmen. Bekannt ist im Allgemeinen nur, dass diese einen Untervektorraum des Vektorraums der linearen Abbildungen bilden. Im Fall *endlicher* Gruppen gibt es aber unter bestimmten Voraussetzungen ein Verfahren, mit dem man aus jeder linearen Abbildung zwischen den Darstellungsräumen einen Homomorphismus von Darstellungen konstruieren kann, und dieses Verfahren liefert alle Homomorphismen von Darstellungen. Dazu verkettet man die lineare Abbildung mit den zwei Gruppenhomomorphismen und mittelt über alle Gruppenelemente. Da die Mittelung eine Division durch die Anzahl der Elemente in G enthält, muss man dazu voraussetzen, dass die Charakteristik des Körpers die Gruppenordnung nicht teilt. Diese Bedingung ist natürlich für Körper der Charakteristik 0 wie \mathbb{Q}, \mathbb{R} oder \mathbb{C} immer erfüllt.

Lemma 1.1.10: Sei G eine endliche Gruppe, \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $(\rho, V), (\tau, W)$ Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann ist die \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$\text{Sym} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \quad \phi \mapsto \text{Sym}(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1})$$

ein Projektor auf den Untervektorraum $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Beweis:

Aus $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ folgt, dass das Element $|G| = 1 + \dots + 1 \in \mathbb{K}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Die Formel für $\text{Sym}(\phi)$ ist also wohldefiniert. Zum Nachweis, dass $\text{Sym}(\phi)$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist, berechnen wir für $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $h \in G$

$$\begin{aligned} \tau(h) \circ \text{Sym}(\phi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(h) \circ \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(hg) \circ \phi \circ \rho(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(hg) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}h^{-1}h) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \tau(u) \circ \phi \circ \rho(u^{-1}h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(u) \circ \phi \circ \rho(u^{-1}) \circ \rho(h) = \text{Sym}(\phi) \circ \rho(h), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass es sich bei ρ und τ um Darstellungen handelt und $u = hg$ substituiert wurde. Also ist $\text{Sym}(\phi)$ ein Homomorphismus von Darstellungen.

Aus der Formel für $\text{Sym}(\phi)$ ergibt sich direkt

$$\text{Sym}(\phi + \psi) = \text{Sym}(\phi) + \text{Sym}(\psi), \quad \text{Sym}(\lambda \cdot \psi) = \lambda \cdot \text{Sym}(\psi)$$

für alle $\psi, \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Also ist der Symmetrisator eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\text{Sym} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit $\text{Bild } \text{Sym}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) \subset \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W))$. Ist

$\phi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so gilt $\tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}) = \phi$ und damit

$$\text{Sym}(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \phi = \phi.$$

Also gilt $\text{Sym} \circ \text{Sym} = \text{Sym}$ und $\text{Sym}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W))$. □

Bemerkung 1.1.11: Falls $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ kann man, indem man den Faktor $\frac{1}{|G|}$ in der Definition des Symmetrisators weglässt, immer noch eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$\text{Sym}' : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)), \quad \psi \mapsto \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \psi \circ \rho(g^{-1})$$

konstruieren. Diese ist aber kein Projektor, sondern wird nilpotent. Denn es gilt $|G| = 0$ in \mathbb{K} und damit für alle Homomorphismen von Darstellungen $\phi : V \rightarrow W$

$$\text{Sym}'(\phi) = \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \phi = |G| \phi = 0.$$

1.2 Zerlegbarkeit und Reduzibilität

Ein wichtiges Ziel der Darstellungstheorie von Gruppen ist es, Darstellungen von Gruppen systematisch zu klassifizieren, also alle Isomorphieklassen von Darstellungen zu bestimmen und eine Darstellung in jeder Isomorphieklasse anzugeben. Dazu möchte man Darstellungen einer Gruppe G in Grundbausteine zerlegen, die von einer besonders einfachen Form sind und sich nicht weiter zerlegen lassen. Das relevante Konzept dabei ist die *Unterdarstellung*, die als das darstellungstheoretische Analogon von Untervektorräumen, Untergruppen oder Unterringen gesehen werden kann.

Definition 1.2.1: Sei (ρ, V) eine Darstellung von G über \mathbb{K} . Eine Darstellung (τ, U) von G über \mathbb{K} heißt **Unterdarstellung** von (ρ, V) , wenn $U \subset V$ ein Untervektorraum ist und $\rho(g)|_U = \tau(g)$ für alle $g \in G$.

Bemerkung 1.2.2:

1. Unterdarstellungen einer Darstellung (ρ, V) entsprechen den Untervektorräumen $U \subset V$, die stabil sind unter der Wirkung von G : $\rho(g)u \in U$ für alle $u \in U$, $g \in G$.
2. Jede Darstellung (ρ, V) hat mindestens zwei Unterdarstellungen, nämlich $(\text{id}_0, 0)$ und (ρ, V) . Alle anderen Unterdarstellungen bezeichnet man als **echte Unterdarstellungen**.
3. Ist $\phi : (\rho, V) \rightarrow (\tau, W)$ ein Homomorphismus von Darstellungen einer Gruppe G , so sind $\ker(\phi) \subset V$ und $\text{Im}(\phi) \subset W$ Unterdarstellungen von (ρ, V) und (τ, W) .

Denn für alle $v \in \ker(\phi)$ und $g \in G$ gilt $\phi(\rho(g)v) = \tau(g)\phi(v) = \tau(g)0 = 0$ und damit $\rho(g)v \in \ker(\phi)$, und aus $w = \phi(v) \in \text{Im}(\phi)$ folgt $\tau(g)w = \tau(g) \circ \phi(v) = \phi(\rho(g)v) \in \text{Im}(\phi)$.

Es liegt nahe, dass Darstellungen ohne echte Unterdarstellungen eine besonders einfache Form haben. Ebenso ist offensichtlich, dass eine direkte Summe zweier nicht-trivialer Darstellungen stets echte Unterdarstellungen besitzt. Die Idee ist es daher, die Darstellungen ohne echte Unterdarstellungen als Grundbausteine zu verwenden und zu versuchen Darstellungen mittels direkter Summen in solche einfachen Darstellungen zu zerlegen.

Definition 1.2.3:

1. Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt **einfach** oder **irreduzibel** falls $V \neq 0$ und sie keine echten Unterdarstellungen besitzt.
2. Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt **halbeinfach**, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe einfacher Darstellungen ist: es gibt eine Familie von einfachen Darstellungen $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$ von G und einen Isomorphismus von Darstellungen $\phi : \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow V$.
3. Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G heißt **unzerlegbar**, wenn $V \neq 0$ und sie nicht isomorph ist zu einer direkten Summe zweier nicht-trivialer Darstellungen:
Sind (σ, U) und (τ, W) Darstellungen von G und ist $\phi : U \oplus W \rightarrow V$ ein Isomorphismus von Darstellungen, so folgt $W = 0$ oder $U = 0$.

Aus Dimensionsgründen ist offensichtlich jede eindimensionale Darstellung einfach. Per Definition ist jede einfache Darstellung unzerlegbar. Einfache Darstellungen können somit als Grundbausteine dienen, aus denen man weitere Darstellungen durch Bildung direkter Summen zusammensetzt. Allerdings ist nicht jede unzerlegbare Darstellung einfach, wie aus den folgenden Beispielen hervorgeht. Eine vollständige Zerlegung einer Darstellung als direkte Summe einfacher Darstellungen ist daher im Allgemeinen nicht möglich. Die Darstellungen, für die eine solche Zerlegung existiert, sind gerade die halbeinfachen Darstellungen.

Beispiel 1.2.4: Ist (τ, U) eine Unterdarstellung einer Darstellung (ρ, V) von G , so gilt $\rho(g)(U) \subset U$ für alle $g \in G$, und man erhält eine Darstellung $(\rho', V/U)$ von G auf dem Quotientenraum V/U mit $\rho'(g)(v + U) = \rho(g)v + U$.

Diese ist einfach genau dann, wenn (τ, U) eine **maximale Unterdarstellung** von (ρ, V) ist: für jede Unterdarstellung $(\sigma, W) \subset (\rho, V)$ mit $U \subsetneq W$ folgt $W = V$. Denn die Unterdarstellungen von $(\rho', V/U)$ entsprechen Unterdarstellungen $(\sigma, W) \subset (\rho, V)$ mit $(\tau, U) \subset (\sigma, W)$.

Beispiel 1.2.5: Wir betrachten eine Darstellung $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ auf dem \mathbb{C}^n . Da nach Beispiel 1.1.9, 3. Isomorphieklassen solcher Darstellungen durch Ähnlichkeitsklassen von Vektorraumisomorphismen gegeben sind, können wir annehmen, dass diese durch $\rho(1) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, v \mapsto Mv$ mit einer Matrix M in Jordan-Normalform gegeben ist

$$M = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & J_{m-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & J_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \text{GL}(n_k, \mathbb{C})$$

Diese Darstellung ist die direkte Summe $(\rho, \mathbb{C}^n) = \bigoplus_{k=1}^m (\rho_k, \mathbb{C}^{n_k})$ von Unterdarstellungen $(\rho_k, \mathbb{C}^{n_k})$ mit $\rho_k : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n_k}), n \mapsto \phi_k^n$, wobei $\phi_k^n : \mathbb{C}^{n_k} \rightarrow \mathbb{C}^{n_k}, v \mapsto J_k^n v$.

Für $n_k \neq 1$ besitzen die Unterdarstellungen $(\rho_k, \mathbb{C}^{n_k})$ echte Unterdarstellungen auf den Untervektorräumen $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_j\} \subset \mathbb{C}^{n_k}$ für $0 < j < n_k$. Die Unterdarstellungen $(\rho_k, \mathbb{C}^{n_k})$ sind jedoch nicht isomorph zu einer direkten Summe echter Unterdarstellungen. Dies würde nämlich bedeuten, dass sich der Jordanblock J_k in zwei andere Jordan-Blöcke aufspalten lässt - ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Jordan-Normalform.

Damit ist die Darstellung (ρ, \mathbb{C}^n)

- *halbeinfach* genau dann, wenn in der beschreibenden Matrix von $\rho(1)$ nur Jordan-Blöcke der Länge 1 auftreten, also genau dann, wenn $\rho(1)$ diagonalisierbar ist,
- *einfach*, wenn $n = 1$ gilt,
- *unzerlegbar*, wenn die beschreibende Matrix von $\rho(1)$ nur einen Jordan-Block enthält.

Beispiel 1.2.5 zeigt, dass Gruppendarstellungen nicht halbeinfach sein müssen. Um eine vollständige Zerlegung von Darstellungen in einfache Darstellungen zu erhalten sind zusätzliche Annahmen an die Darstellungen oder an die Gruppe notwendig. Die einfachste Situation, in der eine solche vollständige Zerlegung möglich ist, sind endliche Darstellungen von endlichen Gruppen über Körpern, deren Charakteristik die Gruppenordnung nicht teilt.

Satz 1.2.6: (Satz von Maschke)

Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann ist jede endlichdimensionale Darstellung von G über \mathbb{K} halbeinfach.

Beweis:

Induktion über die Dimension der Darstellung. Ist (ρ, V) eine Darstellung mit $\dim(V) = 0$, so ist $V = 0$ und (ρ, V) halbeinfach, da isomorph zur leeren direkten Summe von Darstellungen.

Sei nun die Aussage für alle Darstellungen der Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(V) \leq n$ bewiesen und (ρ, V) eine Darstellung mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n + 1$. Ist (ρ, V) einfach, so gilt die Aussage. Ansonsten reicht es, zu zeigen, dass (ρ, V) isomorph zur direkten Summe zweier Unterdarstellungen der Dimension $\leq n$ ist, denn dann folgt mit der Induktionsannahme die Behauptung.

Ist V nicht einfach, so existiert ein Untervektorraum $0 \neq U \subsetneq V$, der stabil unter der Wirkung von G ist: $\rho(g)u \in U$ für alle $u \in U, g \in G$. Wir wählen einen Untervektorraum $0 \neq W \subsetneq V$ mit $U \oplus W = V$. Dieser muss nicht stabil unter (ρ, V) sein, aber wir können aus ihm eine Unterdarstellung konstruieren. Dazu betrachten wir die Projektionsabbildung $\pi : V \rightarrow U$ mit $\pi(u + w) = u$ für alle $u \in U, w \in W$ und deren Symmetrisierung $\text{Sym}(\pi) : V \rightarrow U$ aus Lemma 1.1.10. Da U stabil unter G ist folgt dann

$$\text{Sym}(\pi)(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\pi(\rho(g^{-1})u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\rho(g^{-1})(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u \quad \forall u \in U$$

und somit $\text{Sym}(\pi)|_U = \text{id}_U$ und $\text{im}(\text{Sym}(\pi)) = U$. Damit erhalten wir eine Zerlegung

$$V \cong \ker(\text{Sym}(\pi)) \oplus \text{Im}(\text{Sym}(\pi)) = \ker(\text{Sym}(\pi)) \oplus U.$$

Da $\text{Sym}(\pi)$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist folgt mit Bemerkung 1.2.2, dass auch $\ker(\text{Sym}(\pi))$ eine Unterdarstellung ist. □

Da wir einfache Darstellungen einer Gruppe als Grundbausteine in der Klassifizierung von Darstellungen verwenden möchten, stellt sich insbesondere die Frage, inwieweit sich verschiedene einfache Darstellungen einer Gruppe durch Homomorphismen oder Isomorphismen von Darstellungen ineinander überführen lassen, und welche Endomorphismen eine einfache Gruppendarstellung besitzt. Die Antwort auf diese Fragen findet sich im Lemma von Schur.

Satz 1.2.7: (Lemma von Schur)

1. Sind (ρ, V) und (τ, W) einfache Darstellungen einer Gruppe und $\phi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so gilt $\phi = 0$ oder ϕ ist ein Isomorphismus.
2. Ist (ρ, V) eine endlich-dimensionale einfache Darstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} , so hat jeder Endomorphismus von (ρ, V) die Form λid_V mit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Beweis:

1. Nach Bemerkung 1.2.2 sind der Kern und das Bild eines Homomorphismus von Darstellungen Unterdarstellungen. Da (ρ, V) und (τ, W) einfach sind, folgt $\text{Im}(\phi) = \{0\}$ oder $\text{Im}(\phi) = W$ und $\text{ker}(\phi) = V$ oder $\text{ker}(\phi) = \{0\}$. Ist $\text{Im}(\phi) = \{0\}$ oder $\text{ker}(\phi) = V$, so gilt $\phi = 0$. Andernfalls ist ϕ surjektiv und injektiv, also ein Isomorphismus.

2. Da \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen ist, hat jeder Endomorphismus von Darstellungen $\phi : V \rightarrow V$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Da ϕ ein Homomorphismus von Darstellungen ist, ist der dazugehörige Eigenraum $E_\lambda \subset V$ eine Unterdarstellung von G , denn aus $\phi(v) = \lambda v$ folgt $\phi(\rho(g)v) = \rho(g)\phi(v) = \lambda\rho(g)v$ für alle $g \in G$. Da (ρ, V) einfach ist und $E_\lambda \neq 0$, folgt $E_\lambda = V$ und $\phi = \lambda \text{id}_V$. \square

Bemerkung 1.2.8:

1. Die Voraussetzung \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen im Lemma von Schur ist notwendig. Wir betrachten für $2 < n \in \mathbb{N}$ die Matrix, die eine Drehung um $2\pi/n$ in der Ebene beschreibt

$$D_{2\pi/n} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$$

Diese erfüllt die Bedingung $D_{2\pi/n}^n = \mathbf{1}$ und definiert damit eine reelle Darstellung der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf dem \mathbb{R}^2 mit $\rho(\bar{k}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto D_{2\pi/n}^k \cdot v$. Da der Nullvektorraum und \mathbb{R}^2 selbst die einzigen Untervektorräume des \mathbb{R}^2 sind, die durch eine Drehung um $2\pi/n$ auf sich selbst abgebildet werden, ist diese Darstellung einfach. Da aber jede Drehmatrix D_ϕ mit $D_{2\pi/n}$ kommutiert, ist jede Drehung ein Homomorphismus von Darstellungen und somit $\text{End}(\rho, \mathbb{R}^2) \supsetneq \mathbb{R}\text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

2. Die Bedingung, dass die Darstellung endlich-dimensional ist lässt sich abschwächen. Es reicht, vorauszusetzen, dass die Dimension von V abzählbar und \mathbb{K} überabzählbar ist.

Das Lemma von Schur ist auch sehr hilfreich, um Aussagen über Homomorphismen von Darstellungen zu beweisen. Als Anwendungen betrachten wir die endlich-dimensionalen einfachen Darstellungen abelscher Gruppen.

Korollar 1.2.9: Jede endlich-dimensionale einfache Darstellung einer abelschen Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist eindimensional.

Beweis:

Sei (ρ, V) eine einfache Darstellung einer abelschen Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V . Dann gilt $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 1$, und für jedes Element $h \in G$ ist $\rho(h) : V \rightarrow V$ ein Homomorphismus von Darstellungen nach Beispiel 1.1.9, 5. Ist \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen, so gibt es nach dem Lemma von Schur für jedes $h \in G$ ein $\lambda_h \in \mathbb{K}$ mit $\rho(h) = \lambda_h \text{id}_V$. Wäre $\dim_{\mathbb{K}} V > 1$, so wäre damit jeder eindimensionale Untervektorraum eine echte Unterdarstellung, im Widerspruch zur Einfachheit von (ρ, V) . Also folgt $\dim_{\mathbb{K}} V = 1$. \square

Wir möchten nun zumindest die endlich-dimensionalen Darstellungen endlicher Gruppen klassifizieren, wobei wir jeweils nur an Darstellungen bis auf Isomorphie interessiert sind. Über Körpern der Charakteristik Null können wir dazu mit dem Satz von Maschke jede endlich-dimensionale Darstellung als direkte Summe einfacher Darstellungen zerlegen. Ist der zugrundeliegende Körper auch noch algebraisch abgeschlossen, so erlaubt uns das Lemma von Schur, uns auf Isomorphieklassen endlich-dimensionaler einfacher Darstellungen zu beschränken. Wir können also das Klassifikationsproblem lösen, wenn es uns gelingt, alle Isomorphieklassen einfacher Darstellungen zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist die *reguläre Darstellung* aus Beispiel 1.1.6. Sie enthält jede einfache Darstellung als Unterdarstellung.

Satz 1.2.10: Für jede endliche Gruppe G und jeden Körper \mathbb{K} gilt:

1. Jede einfache Darstellung von G über \mathbb{K} ist endlich-dimensional und isomorph zu einer Unterdarstellung der regulären Darstellung \mathbb{K}^G .
2. Es gibt höchstens $|G|$ Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} .

Beweis:

1. Für jede Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} und $v \in V \setminus \{0\}$ ist $0 \neq U = \text{span}_{\mathbb{K}}\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ eine Unterdarstellung von (ρ, V) , denn für alle $h \in G$ und $u \in U$ gilt $\rho(h)u \in U$. Ist (ρ, V) einfach, so folgt $U = V$ und $\dim_{\mathbb{K}}V = \dim_{\mathbb{K}}U \leq |G|$.

Jedes Element $\alpha \in V^*$ definiert eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi_{\alpha} : V \rightarrow \mathbb{K}^G$, $\phi_{\alpha}(v)(g) = \alpha(\rho(g^{-1})v)$. Diese ist ein Homomorphismus von Darstellungen $\phi_{\alpha} : (\rho, V) \rightarrow \mathbb{K}^G$, denn für alle $h \in G$ gilt

$$\phi_{\alpha}(\rho(h)v)(g) = \alpha(\rho(g^{-1})\rho(h)v) = \alpha(\rho(g^{-1}h)v) = \alpha(\rho((h^{-1}g)^{-1})v) = \phi_{\alpha}(v)(h^{-1}g).$$

Nach Bemerkung 1.2.2, 3. ist das Bild $\phi_{\alpha}(V) \subset \mathbb{K}^G$ damit eine Unterdarstellung der regulären Darstellung und der Kern $\ker(\phi_{\alpha}) = \{v \in V \mid \alpha(\rho(g)v) = 0 \forall g \in G\} \subset V$ eine Unterdarstellung der einfachen Darstellung (ρ, V) . Ist $\alpha \neq 0$, so ist damit $\ker(\phi_{\alpha}) = 0$, ϕ_{α} ist injektiv und die Darstellung (ρ, V) ist isomorph zur Unterdarstellung $\phi_{\alpha}(V) \subset \mathbb{K}^G$.

2. Wir betrachten die reguläre Darstellung von G auf \mathbb{K}^G . Wir setzen $U_0 := 0$ und wählen induktiv zu der Unterdarstellung $U_{i-1} \subset \mathbb{K}^G$ eine Unterdarstellung $U_i \subset \mathbb{K}^G$ minimaler Dimension mit $U_{i-1} \subsetneq U_i \subsetneq \mathbb{K}^G$. Da $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^G = |G| < \infty$ bricht das Verfahren nach $n \leq |G|$ Schritten ab und liefert eine aufsteigende Kette $0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_{n-1} \subsetneq U_n = \mathbb{K}^G$ von Unterdarstellungen. Da die Unterdarstellung $U_{i-1} \subsetneq U_i$ maximal ist, erhalten wir nach Beispiel 1.2.4 *einfache* Unterdarstellungen $(\rho_i, U_i/U_{i-1})$ auf den Quotientenräumen U_i/U_{i-1} mit $\rho_i(g)(\alpha + U_{i-1}) = \rho(g)\alpha + U_{i-1}$.

Nach 1. gibt es für jede einfache Darstellung (ρ, V) von G einen injektiven Homomorphismus von Darstellungen $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}^G$ und nach 2. ein eindeutig bestimmtes $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $U_{i-1} \subsetneq \phi(V) \subset U_i$. Durch Verkettung mit der kanonischen Surjektion $\pi_i : U_i \rightarrow U_i/U_{i-1}$ erhalten wir einen Homomorphismus von Darstellungen $\pi_i \circ \phi : (\rho, V) \rightarrow (\rho_i, U_i/U_{i-1})$, und wegen $U_{i-1} \subsetneq \phi(V)$ gilt $\pi_i \circ \phi \neq 0$. Da (ρ, V) und $(\rho_i, U_i/U_{i-1})$ einfach sind, folgt dann aus der ersten Aussage im Schurschen Lemma, dass $\pi_i \circ \phi$ ein Isomorphismus von Darstellungen ist. Damit ist jede einfache Darstellung (ρ, V) von G isomorph zu einer Darstellung der Form $(\rho_i, U_i/U_{i-1})$, und es gibt maximal $n \leq |G|$ Isomorphieklassen einfacher Darstellungen. \square

Indem wir dieses Ergebnis mit dem Satz von Maschke kombinieren, können wir endlich-dimensionale Darstellungen endlicher Gruppen als direkte Summen einfacher Darstellungen

zerlegen. Nach Satz 1.2.10 gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher Darstellungen. Wir können also eine endliche Familie $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ einfacher Darstellungen wählen, ein sogenanntes *Repräsentantensystem*, so dass jede einfache Darstellung isomorph zu genau einer Darstellung in dieser Familie ist. Damit ergeben sich dann alle endlich-dimensionalen Darstellungen als direkte Summen von Darstellungen in dieser Familie.

Korollar 1.2.11: Sei G eine endliche Gruppe, \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann gilt:

1. Jede endlich-dimensionale Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} ist von der Form

$$(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i} \quad \text{mit} \quad m_i \in \mathbb{N}_0.$$

2. Zwei Darstellungen $(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}$ und $(\rho', V') \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m'_i}$ sind isomorph genau dann, wenn $m_i = m'_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Die Koeffizienten $m_i \in \mathbb{N}_0$ sind also eindeutig bestimmt. Sie heißen **Vielfachheiten** oder **Multiplizitäten** von (ρ_i, V_i) in (ρ, V) .

Beweis:

1. Nach Satz 1.2.10 gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Indem wir einen Repräsentanten in jeder Isomorphieklasse wählen, erhalten wir ein Repräsentantensystem $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$. Gilt $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$, so ist nach dem Satz von Maschke jede endlich-dimensionale Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} halbeinfach und damit eine direkte Summe der Form $(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}_0$.

2. Zu zeigen ist noch, dass die Koeffizienten durch die Isomorphieklasse der Darstellung (ρ, V) eindeutig bestimmt sind. Nach dem Schurschen Lemma gilt $\text{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho_i, V_i)) = 0$ für $i \neq k$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho, V)) &\cong \text{Hom}((\rho_k, V_k), \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho_i, V_i))^{\oplus m_i} \\ &\cong \text{End}(\rho_k, V_k)^{\oplus m_k} \end{aligned}$$

$$m_k = \frac{\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}((\rho_k, V_k), (\rho, V))}{\dim_{\mathbb{K}} \text{End}(\rho_k, V_k)}$$

Damit haben isomorphe Darstellungen die gleichen Multiplizitäten $m_k \in \mathbb{N}_0$. □

Korollar 1.2.12: Sei G eine endliche Gruppe und (ρ, V) eine einfache Darstellung von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann gilt für alle $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) \text{Sym}(\phi) = \text{tr}(\phi) \text{id}_V.$$

Beweis:

Für alle $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist nach Lemma 1.1.10 die lineare Abbildung $\text{Sym}(\phi) : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von einfachen Darstellungen. Nach der zweiten Aussage im Lemma von Schur existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\text{Sym}(\phi) = \lambda \text{id}_V$. Durch Spurbildung erhält man

$$\lambda \dim_{\mathbb{K}}(V) = \text{tr}(\lambda \text{id}_V) = \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) \circ \phi \circ \rho(g) \right) = \frac{\sum_{g \in G} \text{tr}(\phi)}{|G|} = \text{tr}(\phi). \quad \square$$

1.3 Charakter

Die Ergebnisse im letzten Abschnitt sind wichtige Aussagen über die Darstellungen endlicher Gruppen. Allerdings sind sie abstrakt. Sie liefern in dieser Form beispielsweise kein Rechenverfahren zur Bestimmung von Multiplizitäten und auch keinen direkten Weg, zu entscheiden, ob zwei gegebene Gruppendarstellungen isomorph sind oder ob eine gegebene endlich-dimensionale Darstellung einfach ist.

Ein wichtiges Hilfsmittel um solche Fragen effizient zu beantworten, sind die *Charakter*. Diese sind konjugationsinvariante Abbildungen von einer Gruppe G in einen Körper \mathbb{K} , die sich als Spuren in endlich-dimensionalen Darstellungen von G über \mathbb{K} ergeben. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Charakter ihrer einfachen Darstellungen alle relevante Information über die Darstellungstheorie einer endlichen Gruppe in kompakter Form enthalten. Insbesondere ergeben sich daraus Formeln, mit denen sich darstellungstheoretische Größen wie Multiplizitäten leicht berechnen lassen.

Definition 1.3.1: Sei (ρ, V) eine endlich-dimensionale Darstellung einer Gruppe G über \mathbb{K} . Der **Charakter** von (ρ, V) ist die Abbildung

$$\chi_{(\rho, V)} : G \rightarrow \mathbb{K}, \quad g \mapsto \text{tr}(\rho(g)).$$

Aus der Definition der Charakter und den Eigenschaften der Spur ergeben sich direkt einige Aussagen über Charakter, die auch nützlich zu ihrer Berechnung sind.

Bemerkung 1.3.2: Sei (ρ, V) eine endlich-dimensionale Darstellung der Gruppe G über \mathbb{K} .

1. Für jede geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V erhält man Abbildungen

$$\rho_{ij} : G \rightarrow \mathbb{K}, \quad g \mapsto \rho(g)_{ij},$$

die einem Element $g \in G$ die Einträge der darstellenden Matrix von $\rho(g) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ bezüglich der Basis B zuordnen.

Diese bezeichnet man als die **Matrixkoeffizienten** der Darstellung (ρ, V) bezüglich B .

2. Der Charakter von (ρ, V) ist dann gegeben durch

$$\chi_{(\rho, V)}(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \sum_{i=1}^n \rho(g)_{ii}.$$

Wegen der zyklischen Invarianz der Spur hängt er nicht von der Wahl der Basis ab.

3. Damit lassen sich die Charakter von endlich-dimensionalen Darstellungen über algebraisch abgeschlossenen Körpern aus der Jordan-Normalform berechnen. Es gilt

$$\chi_{(\rho, V)}(g) = \sum_{i=1}^r n_i(g) \lambda_i(g),$$

wobei $\lambda_i(g)$ die Eigenwerte der Abbildung $\rho(g) \in \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ und $n_i(g) \in \mathbb{N}$ deren algebraische Vielfachheiten bezeichnet.

4. Wegen der zyklischen Invarianz der Spur sind die Charakter auf den Konjugationsklassen in G konstant:

$$\chi_{(\rho, V)}(ghg^{-1}) = \text{tr}(\rho(ghg^{-1})) = \text{tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1}) = \text{tr}(\rho(h)) = \chi_{(\rho, V)}(h) \quad \forall g, h \in G.$$

Abbildungen $f : G \rightarrow \mathbb{K}$, die auf den Konjugationsklassen konstant sind, nennt man auch **Klassenfunktionen**. Ist G endlich, bilden sie einen Untervektorraum $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \subset \mathbb{K}^G$.

5. Isomorphe Darstellungen haben den gleichen Charakter (Aufgabe 19).

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, dass die Charakter gegenüber den Matrixkoeffizienten zwei wesentlichen Vorteile haben. Erstens sind sie kanonisch, hängen also nicht von der Wahl zusätzlicher Strukturen wie geordneter Basen ab. Zweitens hängen sie nur von der Isomorphieklasse einer Darstellung ab, unterscheiden also isomorphe Darstellungen nicht. Da wir die Darstellungen nur bis auf Isomorphie klassifizieren möchten, bietet es sich an, mit Charaktern zu arbeiten. Das folgende Beispiel zeigt, dass Charakter relevante Informationen über die Gruppe selbst und den Darstellungsraum enthalten.

Beispiel 1.3.3:

1. Für die triviale Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, $g \mapsto \text{id}_V$ einer Gruppe G auf einem n -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V gilt offensichtlich $\chi_{(\rho, V)}(g) = \text{tr}(\text{id}_V) = n$ für alle $g \in G$. Ihre Charakter enthalten also keine Information über die Gruppe G , sondern nur über den Vektorraum V .
2. Sei M eine endliche Menge und $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ eine Gruppenwirkung von G auf M . Nach Beispiel 1.1.6 ist dann $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^M)$ mit $(\rho(g)f)(m) = f(g^{-1} \triangleright m)$ eine Darstellung von G auf dem von M erzeugten \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{K}^M .

Für die Basiselemente $\delta_m : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\delta_m(m') = 0$ für $m \neq m'$ und $\delta_m(m) = 1$ gilt $\rho(g)\delta_m = \delta_{g \triangleright m}$. Daraus ergibt sich

$$\chi_{(\rho, \mathbb{K}^M)}(g) = \sum_{m \in M} \delta_{g \triangleright m}(m) = |\{m \in M \mid g \triangleright m = m\}|$$

Der Charakter gibt also die Anzahl der Fixpunkte von $g \triangleright - : M \rightarrow M$, $m \mapsto g \triangleright m$ an, und es gilt $\chi_{(\rho, \mathbb{K}^M)}(e) = |M| = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^M)$. Insbesondere erhält man:

- (a) Für die reguläre Darstellung \mathbb{K}^G einer endlichen Gruppe G aus Beispiel 1.1.6 mit $M = G$ und $\triangleright : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$

$$\chi_{\mathbb{K}^G}(g) = |\{h \in G \mid gh = h\}| = |G| \delta_e(g).$$

- (b) Für $M = G$ mit der Konjugationswirkung $\triangleright : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$

$$\chi_{(\rho, \mathbb{K}^G)}(g) = |\{h \in G \mid ghg^{-1} = h\}| = |\{h \in G \mid hgh^{-1} = g\}| = |Z(g)|,$$

wobei $Z(g) = \{h \in G \mid hgh^{-1} = g\}$ den **Zentralisator** von $g \in G$ bezeichnet.

- (c) Für $G = S_n$, eine n -elementige Menge $M = \{1, \dots, n\}$ und die Gruppenwirkung $\triangleright : S_n \times M \rightarrow M$, $(\pi, i) \mapsto \pi(i)$ aus Beispiel 1.1.2 erhält man

$$\chi_{(\rho, \mathbb{K}^M)}(\pi) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \pi(i) = i\}|.$$

Um endlich-dimensionale Gruppendarstellungen systematisch durch Charakter zu beschreiben, untersuchen wir zunächst das Verhalten von Charaktern unter den Standardkonstruktionen für Darstellungen aus Beispiel 1.1.3 - direkte Summen, Tensorprodukten und Dualräume. Für zwei endlich-dimensionale Darstellungen (ρ, V) und (τ, W) von G sind die zugehörigen Gruppenhomomorphismen $\rho_{V \oplus W} : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V \oplus W)$, $\rho_{V \otimes W} : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V \otimes W)$ und $\rho_{V^*} : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V^*)$ gegeben durch (vgl. Beispiel 1.1.3)

$$\rho_{V \oplus W}(g)(v + w) = \rho(g)v + \tau(g)w \quad \rho_{V \otimes W}(g)(v \otimes w) = \rho(g)v \otimes \tau(g)w \quad \rho_{V^*}(g)\alpha = \alpha \circ \rho(g^{-1})$$

Tatsächlich gibt es einfache Formeln, die die Charakter dieser Darstellungen durch die Charakter von (ρ, V) und (τ, W) ausdrücken. Ebenso erkennt man, dass die Formel $\chi_{(\rho, V)}(e) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ aus Beispiel 1.3.3 für jede endlich-dimensionale Darstellung gilt.

Lemma 1.3.4: Seien (ρ, V) , (τ, W) endlich-dimensionale Darstellungen einer Gruppe G über \mathbb{K} mit Charaktern $\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)} : G \rightarrow \mathbb{K}$. Dann gilt:

1. $\chi_{(\rho, V)}(e) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.
2. $\chi_{(\rho, V) \oplus (\tau, W)} = \chi_{(\rho, V)} + \chi_{(\tau, W)}$.
3. $\chi_{(\rho, V) \otimes (\tau, W)} = \chi_{(\rho, V)} \cdot \chi_{(\tau, W)}$.
4. $\chi_{(\rho^*, V^*)}(g) = \chi_{(\rho, V)}(g^{-1})$ für alle $g \in G$.

Beweis:

1. Per Definition ist $\chi_{(\rho, V)}(e) = \text{tr}(\rho(e)) = \text{tr}(\text{id}_V) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

2. Bildet man aus geordneten Basen B_V von V und B_W von W die Basis $B_{V \oplus W} = (B_V, B_W)$ von $V \oplus W$, so ist die darstellende Matrix von $\rho_{V \oplus W}(g) : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$ bezüglich $B_{V \oplus W}$

$$\rho_{V \oplus W}(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \tau(g) \end{pmatrix},$$

und durch Spurbildung erhält man

$$\chi_{(\rho, V) \oplus (\tau, W)}(g) = \text{tr}(\rho_{V \oplus W}(g)) = \text{tr}(\rho(g)) + \text{tr}(\tau(g)) = \chi_{(\rho, V)}(g) + \chi_{(\tau, W)}(g).$$

3. Ist $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ eine geordnete Basis von V und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ eine geordnete Basis von W , so ist $B_{V \otimes W} = (v_1 \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_n, \dots, v_m \otimes w_1, \dots, v_m \otimes w_n)$ eine geordnete Basis von $V \otimes W$. Die beschreibenden Matrizen und Charakter von $\rho_{V \otimes W}$ sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_{V \otimes W}(g)(v_i \otimes w_j) &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \rho(g)_{ki} \tau(g)_{lj} v_k \otimes w_l \\ \chi_{(\rho_{V \otimes W}, V \otimes W)}(g) &= \text{tr}(\rho_{V \otimes W}(g)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho(g)_{ii} \tau(g)_{jj} = \text{tr}(\rho(g)) \cdot \text{tr}(\tau(g)) = \chi_{(\rho, V)}(g) \cdot \chi_{(\tau, W)}(g). \end{aligned}$$

4. Ist $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B_{V^*} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die dazu duale Basis von V^* mit $\alpha^i(v_j) = \delta_{ij}$, so ergibt sich für die beschreibenden Matrizen und Charakter

$$\begin{aligned} \rho^*(g)\alpha^i &= \sum_{j=1}^n \rho^*(g)_{ji} \alpha^j = \sum_{j=1}^n \rho(g^{-1})_{ij} \alpha^j \\ \chi_{(\rho^*, V^*)}(g) &= \text{tr}(\rho^*(g)) = \text{tr}(\rho(g^{-1})^T) = \text{tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_{(\rho, V)}(g^{-1}). \end{aligned} \quad \square$$

Um die Charakter effizient zu untersuchen, betrachten wir sie nun vom Standpunkt der linearen Algebra. Offensichtlich können wir Charakter einer endlichen Gruppe als Elemente des Vektorraums \mathbb{K}^G auffassen oder aufgrund ihrer Konjugationsinvarianz als Elemente des Untervektorraums $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \subset \mathbb{K}^G$. Ein entscheidender Fortschritt in der Behandlung der Charakter ergibt sich daraus, dass wir den Vektorraum \mathbb{K}^G mit zusätzlicher Struktur versehen können, nämlich einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform.

Lemma 1.3.5: Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$.

1. Die Abbildung $(,) : \mathbb{K}^G \times \mathbb{K}^G \rightarrow \mathbb{K}$

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) f_2(g^{-1}).$$

ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum \mathbb{K}^G .

2. Sie induziert eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem Untervektorraum der Klassenfunktionen.

Beweis:

1. Anhand der Formel erkennt man direkt, dass $(,) : \mathbb{K}^G \times \mathbb{K}^G \rightarrow \mathbb{K}$ bilinear und symmetrisch ist. Ist $(f, k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}^G$, so gilt für alle $h \in G$

$$0 = (f, \delta_{h^{-1}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \delta_{h^{-1}}(g^{-1}) = \frac{f(h)}{|G|}$$

und damit $f = 0$. Also ist $(,)$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf \mathbb{K}^G .

2. Die Einschränkung von $(,)$ definiert eine symmetrische Bilinearform $(,)$ auf dem Untervektorraum der Klassenfunktionen. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ eine Klassenfunktion mit $(f, k) = 0$ für alle Klassenfunktionen $k : G \rightarrow \mathbb{K}$, so gilt insbesondere $(f, \delta_{C_h}) = 0$ für die Klassenfunktion $\delta_{C_h} : G \rightarrow \mathbb{K}$, die auf der Konjugationsklasse $C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$ den Wert 1 und auf allen anderen Konjugationsklassen den Wert 0 annimmt. Daraus ergibt sich

$$(f, \delta_{C_{h^{-1}}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \delta_{C_{h^{-1}}}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C_h} f(g) = \frac{|C_h|}{|G|} f(h)$$

Da nach der Bahnformel $|C_h|$ ein Teiler von $|G|$ ist, folgt aus $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ auch $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |C_h|$ für alle $h \in G$. Damit gilt $|C_h| \neq 0$, und aus $(f, \delta_{C_{h^{-1}}}) = 0$ für alle $h \in G$ folgt $f = 0$. \square

Wir untersuchen nun das Verhalten der Charakter bezüglich der symmetrischen Bilinearform $(,)$. Dazu bietet es sich an, zunächst mit den Matrixkoeffizienten bezüglich geordneter Basen zu arbeiten und anschließend durch Spurbildung Formeln für die Charakter herzuleiten.

Satz 1.3.6: (Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten)

Seien $(\rho, V), (\tau, W)$ endlich-dimensionale Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann gilt für die Matrixkoeffizienten $\rho_{ij}, \tau_{kl} : G \rightarrow \mathbb{K}$ bezüglich beliebiger geordneter Basen von V und W :

1. Ist $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = 0$, so folgt

$$(\rho_{ji}, \tau_{lk}) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, \dim_{\mathbb{K}} V\}, k, l \in \{1, \dots, \dim_{\mathbb{K}} W\}.$$

2. Ist \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen und (ρ, V) einfach, so folgt

$$(\rho_{ji}, \rho_{lk}) = \frac{\delta_{il}\delta_{jk}}{\dim_{\mathbb{K}} V} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, \dim_{\mathbb{K}} V\}.$$

Beweis:

Wir wählen geordnete Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ von V und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ von W und erhalten für die Matrixkoeffizienten der Darstellungen (ρ, V) und (τ, W) bezüglich B_V und B_W und die beschreibende Matrix einer \mathbb{K} -linearen Abbildung $\phi : V \rightarrow W$

$$\rho(g)v_i = \sum_{j=1}^m \rho(g)_{ji}v_j \quad \tau(g)w_k = \sum_{l=1}^n \tau(g)_{lk}w_l \quad \phi(v_i) = \sum_{l=1}^n \phi_{li}w_l.$$

Nach Lemma 1.1.10 definiert der Symmetrisator einen Projektor

$$\text{Sym} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)), \quad \phi \mapsto \text{Sym}(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1}).$$

Dieser lässt sich durch die Matrixkoeffizienten von (ρ, V) und (τ, W) und die darstellende Matrix von ϕ beschreiben:

$$\text{Sym}(\phi)v_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1})v_i = \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \tau(g)_{lk} \phi_{kj} \rho(g^{-1})_{ji} \right) w_l.$$

Insbesondere ergibt sich für die Abbildungen $\phi^{jk} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ mit $\phi^{jk}(v_r) = \delta_{rj}w_k$

$$\text{Sym}(\phi^{jk})v_i = \sum_{l=1}^n (\rho_{ji}, \tau_{lk})w_l \tag{1}$$

Gilt $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = 0$, so folgt $\text{Sym}(\phi^{jk}) = 0$ und damit auch $(\rho_{ji}, \tau_{lk}) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

Ist \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und (ρ, V) einfach, so gilt nach Korollar 1.2.12 $\dim_{\mathbb{K}} V \text{Sym}(\phi) = \text{tr}(\phi) \text{id}_V$ für alle $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{K}} V \neq 0$. Indem wir $(\rho, V) = (\tau, W)$ und $B_V = B_W$ setzen, ergibt sich daraus mit Formel (1)

$$\dim_{\mathbb{K}} V \text{Sym}(\phi^{jk})v_i = \dim_{\mathbb{K}} V \sum_{l=1}^m (\rho_{ji}, \tau_{lk})v_l = \text{tr}(\phi^{jk})v_i = \delta_{jk}v_i.$$

Daraus folgt für $k = j$ auch $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid \dim_{\mathbb{K}}(V)$, und damit ist die zweite Aussage bewiesen. \square

Satz 1.3.7: (Orthogonalitätsrelationen für Charakter)

Seien $(\rho, V), (\tau, W)$ einfache Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann gilt:

$$(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\rho, V) \not\cong (\tau, W) \\ 1 & \text{falls } (\rho, V) \cong (\tau, W). \end{cases}$$

Beweis:

Nach Satz 1.2.10 sind (ρ, V) und (τ, W) endlich-dimensional. Wir wählen geordnete Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ von V und W und betrachten die Matrixkoeffizienten $\rho_{ij}, \tau_{kl} : G \rightarrow \mathbb{K}$ bezüglich B_V und B_W . Aus der Bilinearität von (\cdot, \cdot) , Satz 1.3.6 und der Formel für die Charakter aus Bemerkung 1.3.2 erhalten wir dann

$$(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\rho_{ii}, \tau_{jj}) \stackrel{1.3.6}{=} \begin{cases} 0 & (\rho, V) \not\cong (\tau, W) \\ \frac{1}{\dim_{\mathbb{K}} V} \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} \delta_{ij} = 1 & (\rho, V) \cong (\tau, W), \end{cases}$$

denn nach dem Lemma von Schur ist $\text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) = 0$ für $(\rho, V) \not\cong (\tau, W)$. \square

Satz 1.3.7 zeigt, dass die Charakter der einfachen Darstellungen ein Orthonormalsystem bezüglich der symmetrischen Bilinearform aus Lemma 1.3.5 bilden. Das erlaubt es uns, interessante Größen wie Multiplizitäten oder die Dimensionen der Vektorräume von Homomorphismen zwischen zwei Darstellungen direkt aus den Charakteren zu berechnen. Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3.7 können wir nämlich alle endlich-dimensionalen Darstellungen einer endlichen Gruppe als direkte Summe einfacher Darstellungen zerlegen, und das Verhalten der Charakter unter einer solchen Zerlegung ergibt sich aus Lemma 1.3.4.

Korollar 1.3.8: Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann gilt:

1. Die Multiplizität einer einfachen Darstellung (ρ, V) in einer endlich-dimensionalen Darstellung (τ, W) von G ist gegeben durch $(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)})$.
2. Für alle endlich-dimensionale Darstellungen $(\rho, V), (\tau, W)$ von G über \mathbb{K} ist

$$(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)}) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)).$$

Beweis:

Sei $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} und (ρ, V) und (τ, W) endlich-dimensionale Darstellungen von G . Dann gibt es nach Korollar 1.2.11 eindeutige $m_i, n_i \in \mathbb{N}_0$ mit $(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}$ und $(\tau, W) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus n_i}$. Mit Lemma 1.3.4 ergibt sich daraus für die Charakter

$$\chi_{(\rho, V)} = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{(\rho_i, V_i)} \quad \chi_{(\tau, W)} = \sum_{i=1}^n n_i \chi_{(\rho_i, V_i)}, \quad (2)$$

und mit Satz 1.3.7 folgt

$$(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)}) = \sum_{i,j=1}^n m_i n_j (\chi_{(\rho_i, V_i)}, \chi_{(\rho_j, V_j)}) \stackrel{1.3.7}{=} \sum_{i,j=1}^n m_i n_j \delta_{ji} = \sum_{i=1}^n m_i n_i.$$

Andererseits ergibt sich aus dem Lemma von Schur $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}((\rho_i, V_i), (\rho_j, V_j)) = \delta_{ij}$ und damit

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}((\rho, V), (\tau, W)) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}(\bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}, \bigoplus_{j=1}^n (\rho_j, V_j)^{\oplus n_j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n m_i n_j \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}((\rho_i, V_i), (\rho_j, V_j)) = \sum_{i=1}^n m_i n_i \end{aligned}$$

Ist (ρ, V) einfach, so gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $(\rho, V) \cong (\rho_i, V_i)$ und $(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\tau, W)}) = n_i$. \square

Da sich aus den Charakteren nach Korollar 1.3.8 die Multiplizitäten bestimmen lassen, die jede endlich-dimensionale Darstellung bis auf Isomorphie eindeutig beschreiben, enthalten die Charakter alle Information über die Isomorphieklassen endlich-dimensionaler Darstellungen. Insbesondere können wir damit entscheiden, ob zwei endlich-dimensionale Darstellungen isomorph sind und ob eine gegebene endlich-dimensionale Darstellung einfach ist.

Korollar 1.3.9: Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann haben zwei endlich-dimensionale Darstellungen von G über \mathbb{K} genau dann den gleichen Charakter, wenn sie isomorph sind.

Beweis:

Nach Bemerkung 1.3.2, 5. haben isomorphe endlich-dimensionale Darstellungen von G den gleichen Charakter. Um die Umkehrung zu zeigen, wählen wir ein Repräsentantensystem $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann gibt es nach Korollar 1.2.11 zu zwei endlich-dimensionalen Darstellungen (ρ, V) und (τ, W) eindeutige $m_i, n_i \in \mathbb{N}_0$ mit $(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}$ und $(\tau, W) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus n_i}$, und die Darstellungen sind isomorph genau dann, wenn $m_i = n_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Ist $\chi_{(\rho, V)} = \chi_{(\tau, W)}$, so folgt mit Korollar 1.3.8 für die Multiplizitäten $m_i = (\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\rho_i, V_i)}) = (\chi_{(\tau, W)}, \chi_{(\rho_i, V_i)}) = n_i$ und mit Korollar 1.2.11 ergibt sich $(\rho, V) \cong (\tau, W)$. \square

Bemerkung 1.3.10: Korollar 1.3.9 gilt nicht, wenn $\text{char}(\mathbb{K}) \mid |G|$. Für $p \in \mathbb{N}$ prim und einen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) = p$ hat die Darstellung

$$\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2), \quad \rho(\bar{k}) : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \bar{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

den Charakter $\chi_{(\rho, \mathbb{K}^2)}(\bar{k}) = 2$ für alle $\bar{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, also den selben Charakter wie die triviale Darstellung von G auf \mathbb{K}^2 . Sie ist aber offensichtlich nicht isomorph zur trivialen Darstellung.

Korollar 1.3.11: Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$. Dann ist eine endlich-dimensionale Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} einfach genau dann, wenn $(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\rho, V)}) = 1$ gilt.

Beweis:

Ist (ρ, V) einfach, so folgt aus den Orthogonalitätsrelationen für Charakter in Satz 1.3.7 $(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\rho, V)}) = 1$. Um die Umkehrung zu zeigen, wählen wir ein Repräsentantensystem $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann ist die endlich-dimensionale Darstellung (ρ, V) nach Korollar 1.2.11 isomorph zu einer direkten Summe $(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i}$, und ihr Charakter ist $\chi_{(\rho, V)} = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{(\rho_i, V_i)}$. Daraus ergibt sich

$$(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\rho, V)}) = \sum_{i,j=1}^n m_i m_j (\chi_{(\rho_i, V_i)}, \chi_{(\rho_j, V_j)}) \stackrel{1.3.7}{=} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i^2$$

Ist $(\chi_{(\rho, V)}, \chi_{(\rho, V)}) = 1$, so folgt daraus mit der Bedingung $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, dass $m_j = 1$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und $m_k = 0$ für $k \neq j$. Damit ist $(\rho, V) \cong (\rho_j, V_j)$ einfach. \square

Eine weitere interessante Aussage ergibt sich, wenn wir die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe aus Beispiel 1.1.6 betrachten, denn diese enthält nach Satz 1.2.10 jede einfache

Darstellung als Unterdarstellung. Mit den Resultaten über Charakter können wir nun die Multiplizitäten der einfachen Darstellung in der regulären Darstellung bestimmen und erhalten einen interessanten Zusammenhang zwischen deren Dimensionen und der Gruppenordnung.

Korollar 1.3.12: Sei G eine endliche Gruppe, \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann ist die Multiplizität von (ρ_i, V_i) in der regulären Darstellung gegeben durch $m_i = \dim_{\mathbb{K}} V_i$, und es gilt

$$|G| = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)^2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_n)^2.$$

Beweis:

Nach Beispiel 1.3.3, 2. ist der Charakter der regulären Darstellung von G gegeben durch $\chi_{\mathbb{K}G}(g) = |G| \delta_e(g)$. Mit Korollar 1.3.8 und der ersten Aussage in Lemma 1.3.4 ergibt sich für die Multiplizität m_i von (ρ_i, V_i) in $\mathbb{K}G$

$$m_i \stackrel{1.3.8}{=} (\chi_{\mathbb{K}G}, \chi_{(\rho_i, V_i)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbb{K}G}(g) \chi_{(\rho_i, V_i)}(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \delta_e(g) \chi_{(\rho_i, V_i)}(g^{-1}) = \chi_{\rho_i, V_i}(e) \stackrel{1.3.4}{=} \dim_{\mathbb{K}}(V_i).$$

Nach Formel (2) gilt damit $\chi_{\mathbb{K}G} = \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i) \chi_{(\rho_i, V_i)}$, und mit Lemma 1.3.4, 1. folgt

$$|G| = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}G) \stackrel{1.3.4}{=} \chi_{\mathbb{K}G}(e) = \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i) \chi_{(\rho_i, V_i)}(e) \stackrel{1.3.4}{=} \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i)^2. \quad \square$$

Die Korollare 1.3.8 bis 1.3.12 zeigen, dass die Charakter der einfachen Darstellungen alle relevante Information über die endlich-dimensionalen Darstellungen einer endlichen Gruppe G in leicht zugänglicher Form enthalten. Allerdings ist bis jetzt noch nicht geklärt, ob sie auch alle Information über die Klassenfunktionen oder, dazu äquivalent, alle Information über die Konjugationsklassen der Gruppe G enthalten.

Satz 1.3.7 zeigt lediglich, dass die Charakter endlich-dimensionaler Darstellungen ein Orthonormalsystem für die nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform aus Lemma 1.3.5 bilden. Um zu zeigen, dass die Klassenfunktionen auf G vollständig durch diese Charakter beschrieben werden, müssen wir beweisen, dass diese nicht nur ein Orthonormalsystem, sondern eine Orthonormalbasis bilden.

Satz 1.3.13: Sei G eine endliche Gruppe, \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Repräsentantensystem einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} . Dann bilden die Charakter $\chi_{(\rho_1, V_1)}, \dots, \chi_{(\rho_n, V_n)}$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$.

Beweis:

Nach Satz 1.3.7 bilden die Charakter $\chi_{(\rho_1, V_1)}, \dots, \chi_{(\rho_n, V_n)}$ ein Orthonormalsystem in $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$ und sind damit wie jedes Orthonormalsystem linear unabhängig. Es reicht also, zu zeigen, dass $\dim_{\mathbb{K}} \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \leq n$ gilt.

Dazu konstruieren wir eine injektive \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi : \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \rightarrow \mathbb{K}^n$. Für jede Klassenfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ und Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} ist die Abbildung

$$\phi_{f, \rho} : V \rightarrow V, \quad v \mapsto \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)v.$$

ein Endomorphismus von Darstellungen. Denn $\phi_{f,\rho}$ ist \mathbb{K} -linear und für alle $h \in G$ gilt

$$\phi_{f,\rho}(\rho(h)v) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(gh)v = \sum_{u \in G} f(huh^{-1})\rho(hu)v = \sum_{u \in G} f(u)\rho(hu)v = \rho(h)\phi_{f,\rho}(v),$$

wobei im zweiten Schritt $u = h^{-1}gh$ substituiert wurde. Außerdem gilt für die direkte Summe zweier Darstellungen (ρ, V) und (τ, W)

$$\phi_{f,\rho \oplus \tau}(v + w) = \sum_{g \in G} f(g)(\rho(g)v + \tau(g)w) = \phi_{f,\rho}(v) + \phi_{f,\tau}(w) \quad (3)$$

und für alle $f, f' \in \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$, $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$ und $v \in V$

$$\phi_{\mu f + \mu' f', \rho}(v) = \sum_{g \in G} (\mu f(g) + \mu' f'(g))\rho(g)v = \mu\phi_{f,\rho}(v) + \mu'\phi_{f',\rho}(v) \quad (4)$$

Für die einfachen Darstellungen (ρ_i, V_i) gibt es nach dem Lemma von Schur $\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f) \in \mathbb{K}$ mit $\phi_{f,\rho_i} = \lambda_i(f) \text{id}_{V_i}$. Wir erhalten eine Abbildung

$$\phi : \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad f \mapsto (\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f)),$$

und nach (4) ist diese Abbildung \mathbb{K} -linear. Ist $f \in \ker(\phi)$, so folgt $\lambda_i(f) = 0$ und damit $\phi_{f,\rho_i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Aus der Zerlegung der regulären Darstellung als direkte Summe $\mathbb{K}^G \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus \dim_{\mathbb{K}} V_i}$ und Gleichung (3) erhält man dann $\phi_{f,\mathbb{K}^G} = 0$, und mit den Formeln für die reguläre Darstellung \mathbb{K}^G aus Beispiel 1.1.6 ergibt sich

$$0 = \phi_{f,\mathbb{K}^G}(\delta_e) = \sum_{g \in G} f(g)\rho_{\mathbb{K}^G}(g)(\delta_e) = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g = f$$

Damit ist $\ker(\phi) = 0$, die Abbildung $\phi : \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \rightarrow \mathbb{K}^n$ injektiv und $\dim_{\mathbb{K}} \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \leq n$. \square

Dieser Satz zeigt, dass die Charakter der einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe nicht nur alle Information über ihre endlich-dimensionalen Darstellungen enthalten, sondern auch über ihre Klassenfunktionen. Daraus ergibt sich insbesondere ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen und der Konjugationsklassen.

Korollar 1.3.14: Sei G eine endliche Gruppe und \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Dann ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G .

Beweis:

Nach Satz 1.3.13 bilden für jedes Repräsentantensystem $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ von Isomorphieklassen einfacher Darstellungen die Charakter χ_{ρ_i, V_i} eine Basis von $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$. Andererseits bilden auch die Klassenfunktionen $\delta_{C_h} : G \rightarrow \mathbb{K}$ die auf der Konjugationsklasse $C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$ den Wert 1 und auf allen anderen Konjugationsklassen den Wert 0 annehmen, eine Basis von $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$. Zwei Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums haben gleich viele Elemente. \square

Beispiel 1.3.15: In der Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt es wegen der Abelianität genau m einelementige Konjugationsklassen. Die einfachen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} stehen in Bijektion mit den m ten Einheitswurzeln in \mathbb{K} .

Da $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ abelsch ist, ist nämlich nach Korollar 1.2.9 jede einfache Darstellung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ über \mathbb{K} eindimensional und damit durch einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ gegeben. Der Gruppenhomomorphismus ρ ist durch den Wert $\rho(\bar{1})$ eindeutig bestimmt und erfüllt die Bedingung $\rho(\bar{1})^m = \rho(\bar{m}) = \rho(\bar{0}) = 1$, und damit ist $\rho(\bar{1})$ eine m te Einheitswurzel. Da \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen ist, gibt es genau m m te Einheitswurzeln und damit m Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ über \mathbb{K} .

Beispiel 1.3.16: Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid n!$ stehen nach Korollar 1.3.14 in Bijektion mit den Konjugationsklassen von S_n . In der Vorlesung Algebra wurde gezeigt, dass zwei Permutationen genau dann in der gleichen Konjugationsklasse liegen, wenn in ihrer Zykelzerlegung jeweils die gleiche Anzahl von Zykeln jeder Länge auftritt. Damit ist die Anzahl der Konjugationsklassen und der einfachen Darstellungen gleich der Anzahl der Partitionen

$$n = k_1 + \dots + k_r \quad \text{mit} \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r.$$

Da die Charakter der einfachen Darstellungen alle Information über die endlich-dimensionalen Darstellungen und die Klassenfunktionen einer endlichen Gruppe enthalten und selbst Klassenfunktionen sind, besitzt man alle relevante Information, sobald man die Werte dieser Charakter auf jeder Konjugationsklasse kennt. Diese Information lässt sich kompakt in Tabellen organisieren, den sogenannten *Charaktertafeln*. Aus Korollar 1.3.14 folgt, dass eine Charaktertafel stets gleich viele Zeilen und Spalten hat.

Definition 1.3.17: Eine **Charaktertafel** einer endlichen Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ ist eine Tabelle, deren Spalten durch die Konjugationsklassen in G und deren Zeilen durch die Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G indiziert werden. Der Eintrag in der i ten Zeile und j ten Spalte gibt den Wert des Charakters der i ten einfachen Darstellung auf der j ten Konjugationsklasse an. Über den Konjugationsklassen wird oft auch noch die Anzahl ihrer Elemente angegeben.

Beispiel 1.3.18: Wir bestimmen die Charaktertafel der symmetrischen Gruppe S_3 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$.

- Die einfachen Darstellungen von S_3 über \mathbb{K} stehen nach Beispiel 1.3.16 in Bijektion mit den Partitionen von 3. Damit gibt es bis auf Isomorphie nur drei einfache Darstellungen, die den Partitionen $3 = 1 + 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ und $3 = 3$ entsprechen. Wir bezeichnen sie mit (ρ_1, V_1) , (ρ_2, V_2) und (ρ_3, V_3) .

- Diese Partitionen entsprechen den Konjugationsklassen $C_1 = \{\text{id}\}$ mit 3 Zykeln der Länge 1, $C_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, die die elementaren Vertauschungen mit einem Zykel der Länge 2 und einem Zykel der Länge 1 enthält, und $C_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, deren Elemente jeweils einen Zykel der Länge 3 aufweisen.

- Nach Korollar 1.3.12 gilt für die Dimensionen der Darstellungsräume

$$|S_3| = 6 = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)^2 + \dim_{\mathbb{K}}(V_2)^2 + \dim_{\mathbb{K}}(V_3)^2.$$

Also gibt es zwei nicht-isomorphe eindimensionale einfache Darstellungen und eine einfache Darstellung der Dimension zwei. Erstere sind die triviale Darstellung $\rho_1 : S_3 \rightarrow \mathbb{K}, \pi \mapsto 1$ sowie die Signumsdarstellung $\rho_2 : S_3 \rightarrow \mathbb{K}, \pi \mapsto \text{sgn}(\pi)$. Die zweidimensionale einfache Darstellung von S_3 lässt sich aus ihrer dreidimensionalen Darstellung durch Permutationsmatrizen konstruieren (vgl. Aufgabe 7)

$$\rho' : S_3 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^3), \quad \rho'(\pi)e_i = e_{\pi(i)}.$$

Denn die Untervektorräume $U = \text{span}_{\mathbb{K}}\{e_1 + e_2 + e_3\}$ und $V = \text{span}_{\mathbb{K}}\{e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$ sind beide stabil unter der Darstellung ρ' , und es gilt $\mathbb{K}^3 = U \oplus V$. Also erhalten wir Unterdarstellungen von (ρ', \mathbb{K}^3) auf U und V . Die Unterdarstellung auf U ist isomorph zur trivialen Darstellung auf \mathbb{K} , und die Unterdarstellung auf V ist eine einfache Darstellung (ρ_3, V) der Dimension zwei.

• Die Charakter der einfachen Darstellungen ergeben sich als die Spuren der zugehörigen linearen Abbildungen:

- Der Charakter der trivialen Darstellung nimmt offensichtlich auf jeder Konjugationsklasse den Wert 1 an.
- Der Charakter der Signumsdarstellung ist gegeben durch $\chi_{(\rho_2, \mathbb{K})}(\pi) = \text{sgn}(\pi)$. Er nimmt auf C_1 und C_3 den Wert 1 und auf C_2 den Wert -1 an.
- Für den Charakter der Darstellung auf V ergibt sich $\chi_{(\rho_3, V)}(\text{id}) = \dim_{\mathbb{K}} V = 2$. Die anderen beiden Werte lassen sich aus den darstellenden Matrizen $\rho_3((2, 3))$ und $\rho_3((1, 3, 2))$ von $(2, 3) \in C_2$ und $(1, 3, 2) \in C_3$ bezüglich der Basis $(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ berechnen. Das ergibt

$$\begin{aligned} \rho_3((2, 3))(e_1 - e_2) &= e_1 - e_3, & \rho_3((2, 3))(e_1 - e_3) &= e_1 - e_2 \\ \rho_3((1, 3, 2))(e_1 - e_2) &= -(e_1 - e_3), & \rho_3((1, 3, 2))(e_1 - e_3) &= e_3 - e_2 = -(e_1 - e_3) + e_1 - e_2 \\ \chi_{(\rho_3, V)}((2, 3)) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 & \chi_{(\rho_3, V)}((1, 3, 2)) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1. \end{aligned}$$

• Damit erhalten wir die Charaktertafel

	1	2	3
	C_1	C_2	C_3
ρ_1	1	1	1
ρ_2	1	-1	1
ρ_3	2	0	-1

1.4 Die Gruppenalgebra

In diesem Abschnitt betrachten wir die Charakter endlich-dimensionaler Gruppendarstellungen aus einem anderen Blickwinkel, mit dem wir sie später als Spezialfall einer allgemeineren Theorie verstehen können. Die Grundidee ist es, den Vektorraum \mathbb{K}^G der Abbildungen $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(g) = 0$ für fast alle $g \in G$ mit der Struktur einer Algebra zu versehen, die durch die Gruppenmultiplikation in G gegeben ist. Dazu nutzen wir aus, dass die Abbildungen $\delta_g : G \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\delta_g(h) = 0$ für $g \neq h$ und $\delta_g(g) = 1$ eine Basis von \mathbb{K}^G bilden und definieren die Multiplikation $\star : \mathbb{K}^G \times \mathbb{K}^G \rightarrow \mathbb{K}^G$ auf dieser Basis durch $\delta_g \star \delta_h = \delta_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Setzt man diese

Multiplikation bilinear auf \mathbb{K}^G fort, so erhält man für $f_1, f_2 \in \mathbb{K}^G$

$$\begin{aligned} f_1 \star f_2 &= \left(\sum_{h \in G} f_1(h) \delta_h \right) \star \left(\sum_{u \in G} f_2(u) \delta_u \right) = \sum_{h, u \in G} f_1(h) f_2(u) \delta_h \star \delta_u = \sum_{h, u \in G} f_1(h) f_2(u) \delta_{hu} \\ &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g) \right) \delta_g, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $g = hu$ substituiert wurde. In der Tat definiert diese Multiplikationsformel eine Algebrastruktur auf \mathbb{K}^G mit neutralem Element δ_e , in der die Klassenfunktionen eine besondere Rolle spielen.

Satz 1.4.1:

1. Für jede Gruppe G ist der \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{K}^G mit der **Faltung** $\star : \mathbb{K}^G \times \mathbb{K}^G \rightarrow \mathbb{K}^G$

$$f_1 \star f_2(g) = \sum_{g_1 \cdot g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$$

eine Algebra $\mathbb{K}[G]$ mit Einselement δ_e . Sie heißt **Gruppenalgebra** von G .

2. Ist G endlich, so ist das **Zentrum** der Gruppenalgebra die Unteralgebra

$$\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) = Z(\mathbb{K}[G]) = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid f \star f' = f' \star f \quad \forall f' \in \mathbb{K}[G]\}.$$

Beweis:

1. Die durch die Faltung definierte Multiplikationsabbildung assoziativ, denn es gilt $(\delta_g \star \delta_h) \star \delta_k = \delta_{(gh)k} = \delta_{g(hk)} = \delta_g \star (\delta_h \star \delta_k)$ auf der Basis, und sie ist per Definition \mathbb{K} -bilinear. Da $\delta_e \star \delta_g = \delta_{eg} = \delta_g = \delta_{ge} = \delta_g \star \delta_e$ für alle $g \in G$, ist $\delta_e : G \rightarrow \mathbb{K}$ das Einselement für die Faltung.

2. Ist G endlich, so ist jede Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ in \mathbb{K}^G und damit gilt $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \subset \mathbb{K}^G$. Ist $f \in \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$, so gilt für alle $f' \in \mathbb{K}[G]$ und $g \in G$

$$f' \star f(g) = \sum_{h \in G} f'(h) f(h^{-1}g) \stackrel{f \in \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)}{=} \sum_{h \in G} f'(h) f(gh^{-1}) \stackrel{u=gh^{-1}}{=} \sum_{u \in G} f'(u^{-1}g) f(u) = f \star f'(g)$$

und damit $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \subset Z(\mathbb{K}[G])$. Ist umgekehrt $f \in Z(G)$, so folgt für alle $g, h \in G$

$$f(gh) = \sum_{u \in G} f(u) \delta_{h^{-1}}(u^{-1}g) = f \star \delta_{h^{-1}}(g) = \delta_{h^{-1}} \star f(g) = \sum_{u \in G} \delta_{h^{-1}}(u) f(u^{-1}g) = f(hg)$$

und damit $Z(\mathbb{K}[G]) = \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$. Das Zentrum einer Algebra ist stets eine Unteralgebra, die das Einselement enthält. \square

Natürlich definiert für jede Gruppe G auch die punktweise Multiplikation von Abbildungen eine Algebrastruktur auf dem \mathbb{K} -Vektorraum der Abbildungen $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ und auf dem Untervektorraum \mathbb{K}^G . Allerdings hat diese Algebrastruktur auf \mathbb{K}^G nur für *endliche* Gruppen ein Einselement. Denn das Einselement für die Multiplikation ist $1 : G \rightarrow \mathbb{K}, g \mapsto 1$. Ist G unendlich, so liegt diese Abbildung nicht in \mathbb{K}^G . Das Faltungsprodukt hat also bessere Eigenschaften und führt auch zu interessanteren Schlussfolgerungen.

Die Gruppenalgebra lässt sich auch abstrakt durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren. Diese universelle Eigenschaft erfasst die Idee, die Gruppe G zu einer Algebra zu machen, indem man auch Linearkombinationen von Gruppenelementen zulässt und die Algebramultiplikation durch die Gruppenmultiplikation definiert. Die resultierende Algebra vermittelt also zwischen Gruppen- und Algebrastrukturen. Damit liegt es nahe, einen Bezug zu Einheitengruppen von Algebren zu vermuten, also der Gruppe der Algebraelemente mit multiplikativen Inversen.

Satz 1.4.2: (universelle Eigenschaft der Gruppenalgebra)

Die Inklusionsabbildung $\iota : G \rightarrow \mathbb{K}[G]^\times$, $g \mapsto \delta_g$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus in die Einheitengruppe $\mathbb{K}[G]^\times$ der Gruppenalgebra.

Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow A^\times$ in die Einheitengruppe einer Algebra A über \mathbb{K} existiert genau ein Algebromorphismus $\phi' : \mathbb{K}[G] \rightarrow A$ mit $\phi' \circ \iota = \iota_A \circ \phi$, wobei $\iota_A : A^\times \rightarrow A$, $a \mapsto a$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{K}[G] \\ \phi \downarrow & & \downarrow \exists! \phi' \\ A^\times & \xrightarrow{\iota_A} & A \end{array}$$

Beweis:

Dass die Inklusion $\iota : G \rightarrow \mathbb{K}[G]^\times$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ergibt sich direkt aus der Formel $\delta_g \star \delta_h = \delta_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Da die Elemente δ_g für $g \in G$ eine Basis von $\mathbb{K}[G]$ bilden und aus $\phi' \circ \iota = \iota_A \circ \phi$ die Bedingung $\phi'(\delta_g) = \phi' \circ \iota(g) = \iota_A \circ \phi(g) = \phi(g)$ folgt, gibt es zu jeder Abbildung $\phi : G \rightarrow A^\times$ genau eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi' : \mathbb{K}[G] \rightarrow A$ mit $\phi' \circ \iota = \iota_A \circ \phi$:

$$\phi' : \mathbb{K}[G] \rightarrow A, \quad f = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\phi(g).$$

Ist ϕ ein Gruppenhomomorphismus, so ist diese ein Algebromorphismus. □

Beispiel 1.4.3: Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G über \mathbb{K} ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V) = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)^\times$ in die Einheitengruppe der Algebra $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Damit gibt es nach Satz 1.4.2 einen Algebromorphismus $\rho' : \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $\rho'(\delta_g) = \rho(g)$ für alle $g \in G$.

Da die Klassenfunktionen offensichtlich eine ausgezeichnete Rolle in der Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ spielen, stellt sich die Frage nach der Rolle der Charakter. Aus Satz 1.3.13 ist bekannt, dass für algebraisch abgeschlossene Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ die Charakter der einfachen Darstellungen eine Basis des Untervektorraums $\text{Klass}_{\mathbb{K}}(G) \subset \mathbb{K}[G]$ bilden, die eine Orthonormalbasis bezüglich der symmetrischen Bilinearform aus Lemma 1.3.5 ist. Um diese Aussage im Kontext der Gruppenalgebra zu interpretieren, müssen wir einen Zusammenhang zwischen dieser symmetrischen Bilinearform und der Faltung herstellen. Tatsächlich ergibt der Vergleich der Formeln in Lemma 1.3.5 und in Satz 1.4.1

$$(f_1, f_2) = \frac{(f_1 \star f_2)(e)}{|G|} \quad \forall f_1, f_2 \in \mathbb{K}[G].$$

Die Aussage, dass die Charakter der einfachen Darstellungen eine Orthonormalbasis für die Bilinearform $(,)$ bilden, übersetzt sich damit in eine Aussage über ihre Faltungsprodukte.

Satz 1.4.4: Sei G eine endliche Gruppe und $(\rho_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$. Dann sind die Elemente

$$e_i = \frac{\dim_{\mathbb{K}} V_i}{|G|} \chi_{(\rho_i, V_i)}$$

Idempotente in der Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ mit $e_i \star e_j = \delta_{ij} e_i$ und $\sum_{i=1}^n e_i = \delta_e$.

Beweis:

Seien $B_k = (v_1^k, \dots, v_{n_k}^k)$ geordnete Basen von V_k und $\rho_{ij}^k : G \rightarrow \mathbb{K}$ die Matrixkoeffizienten von (ρ_k, V_k) bezüglich der Basis B_k . Dann ergibt sich mit der Formel für das Skalarprodukt aus Lemma 1.3.5 und den Orthogonalitätsrelationen für Matrixkoeffizienten aus Satz 1.3.6

$$\begin{aligned} \chi_{(\rho_i, V_i)} \star \chi_{(\rho_j, V_j)}(g) &= \sum_{h \in G} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} \rho_{kk}^i(h) \rho_{ll}^j(h^{-1}g) = \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l,s=1}^{n_j} \left(\sum_{h \in G} \rho_{kk}^i(h) \rho_{ls}^j(h^{-1}) \right) \rho_{sl}^j(g) \\ &\stackrel{1.3.5}{=} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l,s=1}^{n_j} |G| (\rho_{kk}^i, \rho_{ls}^j) \rho_{sl}^j(g) \stackrel{1.3.6}{=} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l,s=1}^{n_j} \frac{|G| \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ks}}{n_j} \rho_{sl}^j(g) \\ &= \frac{\delta_{ij} |G|}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \rho_{kk}^i(g) = \frac{\delta_{ij} |G|}{\dim_{\mathbb{K}} V_i} \chi_{(\rho_i, V_i)}(g). \end{aligned}$$

Einsetzen der Formeln für e_i liefert dann $e_i \star e_j = \delta_{ij} p_i$. Die Identität $\sum_{i=1}^n e_i = \delta_e$ folgt aus der Zerlegung $\mathbb{K}^G \cong \bigoplus_{i=1}^n (\rho_i, V_i)^{\oplus n_i}$ der regulären Darstellung, die mit Lemma 1.3.4 die Formel $\chi_{\mathbb{K}^G} = \sum_{i=1}^n n_i \chi_{(\rho_i, V_i)}$ für ihren Charakter impliziert. Aus der Formel für die Charakter der regulären Darstellung in Beispiel 1.3.3, 2. (a) ergibt sich dann

$$\delta_e \stackrel{1.3.3}{=} \frac{\chi_{\mathbb{K}^G}}{|G|} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i \chi_{(\rho_i, V_i)}}{|G|} = \sum_{i=1}^n e_i. \quad \square$$

Die Idempotente e_i in Satz 1.4.4 definieren Projektoren $P_i = e_i \star - : \mathbb{K}[G] \rightarrow \mathbb{K}[G]$, $f \mapsto p_i \star f$, deren Bilder paarweise disjunkt sind, und jede Klassenfunktion $f \in \text{Klass}_{\mathbb{K}}(G)$ lässt sich mit Hilfe dieser Projektoren eindeutig als Linearkombination der Charakter darstellen. Wir werden in Abschnitt 4.3 sehen, dass sich diese Zerlegung als Teil einer allgemeineren Theorie ergibt.

1.5 Einfache Darstellungen der symmetrischen Gruppe

In diesem Abschnitt konstruieren wir ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n . Der Grundbaustein dieser Konstruktion sind die Partitionen von n , denn nach Korollar 1.3.14 stehen die Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von S_n über \mathbb{K} in Bijektion zu den Konjugationsklassen von S_n . Die Konjugationsklassen in S_n lassen sich über die Zykelzerlegung von Permutationen analysieren und stehen in Bijektion mit den Partitionen von n . Wir erinnern an die relevanten Begriffe und Resultate aus der Algebra.

- Ein k -Zykel einer Permutation $\pi \in S_n$ ist ein k -Tupel (i_1, \dots, i_k) mit $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, so dass $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $j = 1, \dots, k-1$ und $\pi(i_k) = i_1$.

- Da jede Zahl $i \in \{1, \dots, n\}$ in genau einem Zykel von π enthalten ist, lässt sich die Permutation schreiben als $\pi = (i_1^1, \dots, i_{\lambda_1}^1) \dots (i_1^k, \dots, i_{\lambda_k}^k)$ mit $\{i_1^r, \dots, i_{\lambda_r}^r\} \cap \{i_1^s, \dots, i_{\lambda_s}^s\} = \emptyset$ für $r \neq s$ und $\cup_{r=1}^k \{i_1^r, \dots, i_{\lambda_r}^r\} = \{1, \dots, n\}$. Dies wird als **Zykelzerlegung** von π bezeichnet und ist eindeutig bis auf zyklische Permutation der Einträge in den Zykeln und bis auf die Reihenfolge der Zykeln.

- Zwei Permutationen $\pi, \tau \in S_n$ sind zueinander konjugiert genau dann, wenn die Zykellängen in ihren Zykelzerlegungen übereinstimmen.

Denn ist (i_1, \dots, i_k) ein k -Zykel von π und $\tau = \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$, so ist $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ ein k -Zykel von τ . Stimmen umgekehrt die Längen der Zykeln in den Zykelzerlegungen von π und τ überein, so sind die Zykelzerlegungen gegeben durch

$$\pi = (i_1^1, \dots, i_{\lambda_1}^1) \dots (i_1^k, \dots, i_{\lambda_k}^k) \quad \tau = (j_1^1, \dots, j_{\lambda_1}^1) \dots (j_1^k, \dots, j_{\lambda_k}^k).$$

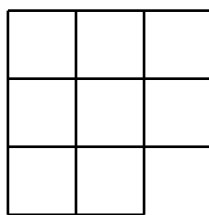
Indem wir $\sigma(i_s^r) = j_s^r$ setzen, erhalten wir dann eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\tau = \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}$. Ordnen wir die Zykellängen absteigend, so wird das k -Tupel der Zykellängen eindeutig.

- Damit stehen die Konjugationsklassen der S_n in Bijektion mit den **Partitionen** von n , also Zerlegungen $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ mit $\lambda_i, k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$. Wir bezeichnen eine solche Partition mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

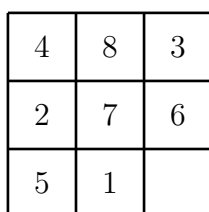
Mit diesen Ergebnissen ist es naheliegend, dass die Kombinatorik von Partitionen und von Zykelzerlegungen eine zentrale Rolle in der Konstruktion der einfachen Darstellungen der S_n spielen wird. Partitionen von natürlichen Zahlen und die Zykelzerlegungen von Permutationen lassen sich mit den sogenannten *Young-Diagrammen* und *Young-Tableaus* veranschaulichen.

Definition 1.5.1: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n .

1. Ein **Young-Diagramm** der Form λ ist das Diagramm aus n quadratischen Kästchen mit k Zeilen und λ_i Kästchen in der i ten Zeile:



2. Ein **Young-Tableau** der Form λ ist ein Young-Diagramm der Form λ , dessen Kästchen paarweise verschiedene Einträge aus der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ enthalten. Die Menge der Young-Tableaus der Form λ wird mit Y^λ bezeichnet.



Man beachte, dass die Bedingung $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ für eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ impliziert, dass jede Zeile in einem Young-Diagramm oder Young-Tableau für λ maximal so viele Kästchen

enthält wie die Zeile darüber und jede Spalte maximal so viele Kästchen wie die Spalte links davon. Damit können wir Young-Diagramme als Visualisierungen von Partitionen und Young-Tableaus als Visualisierungen von Zykelzerlegungen verstehen, wobei die Einträge in den Zeilen genau den Zykeln entsprechen.

Indem wir eine Permutation auf die Einträge eines Young-Tableaus wirken lassen, erhalten wir eine Gruppenwirkung der S_n auf die Menge der Young-Tableaus. Interpretieren wir Young-Tableaus als Zykelzerlegungen von Permutationen, so können wir diese Gruppenwirkung mit der Konjugationswirkung $\triangleright : S_n \times S_n \rightarrow S_n, g \triangleright h = ghg^{-1}$ in Verbindung bringen. Die Bahnen dieser Gruppenwirkung sind nämlich genau die Konjugationsklassen, die durch die Zykellängen, also die Zeilenlängen des Young-Tableaus, spezifiziert werden. Nach Beispiel 1.1.6 induziert die Gruppenwirkung $\triangleright : S_n \times S_n \rightarrow S_n, g \triangleright h = ghg^{-1}$ eine Darstellung $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{S_n})$ der S_n auf dem Vektorraum \mathbb{C}^{S_n} , und ihre Bahnen spannen Unterdarstellungen auf.

Diese Unterdarstellungen sind zwar nach dem Satz von Maschke halbeinfach, aber im allgemeinen nicht einfach. Um die einfachen Darstellungen der S_n zu konstruieren, betrachtet man daher geeignete Quotientendarstellungen. Dazu identifiziert man Young-Tableaus, die durch Permutation der Einträge in den Zeilen auseinander hervorgehen. Die auf diese Weise entstehenden Äquivalenzklassen von Young-Tableaus sind die sogenannten *Young-Tabloide*.

Definition 1.5.2: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n .

1. Zwei Young-Tableaus der Form λ heißen **zeilenäquivalent** wenn sie durch Permutationen der Einträge innerhalb der Zeilen auseinander hervorgehen.
2. Eine Zeilen-Äquivalenzklasse eines Young-Tableaus der Form λ heißt **Young-Tabloid** der Form λ . Die Menge der Young-Tabloide der Form λ wird mit $T^\lambda = Y^\lambda / \sim$ bezeichnet.

4	8	3	~	4	3	8
2	7	6		6	2	7
5	1			1	5	

Lemma 1.5.3: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n .

1. Die Abbildung $\triangleright : S_n \times Y^\lambda \rightarrow Y^\lambda, (\pi \triangleright m)_{ij} = \pi(m_{ij})$ ist eine Gruppenwirkung der Gruppe S_n auf die Menge der Young-Tableaus.

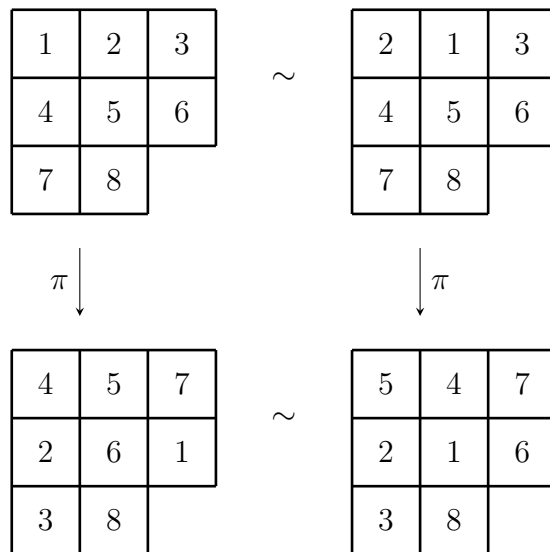
$\pi \triangleright$	4	8	3	=	$\pi(4)$	$\pi(8)$	$\pi(3)$
	2	7	6		$\pi(2)$	$\pi(7)$	$\pi(6)$
	5	1			$\pi(5)$	$\pi(1)$	

2. Sie induziert eine Gruppenwirkung $\triangleright : S_n \times T^\lambda \rightarrow T^\lambda, \pi \triangleright [m] = [\pi \triangleright m]$ der Gruppe S_n auf die Menge der Young-Tabloide.
3. Dies definiert eine komplexe Darstellung der Gruppe S_n auf dem von T^λ frei erzeugten komplexen Vektorraum $M^\lambda = \mathbb{C}^{T^\lambda}$

$$\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(M^\lambda), \quad \rho(\pi)[m] = \pi \triangleright [m] = [\pi \triangleright m]$$

Beweis:

Die Gruppenwirkung auf die Young-Tableaus ist offensichtlich die Wirkung der symmetrischen Gruppe S_n auf die Zahlenmenge $\{1, \dots, n\}$. Für die zweite Aussage ist nur zu zeigen, dass zwei zeilenäquivalente Young-Tableaus $m, m' \in Y^\lambda$ durch diese Gruppenwirkung wieder auf zeilenäquivalente Young-Tableaus abgebildet werden. Dies ergibt sich direkt aus der Definition. Entsteht die i te Zeile von m' aus der i ten Zeile von m durch Vertauschen des k ten und l ten Eintrags, so entsteht auch die i te Zeile von $\pi \triangleright m'$ aus der i ten Zeile von $\pi \triangleright m$ durch Vertauschen des k ten und l ten Eintrags. Nach Beispiel 1.1.6 erhält man damit eine Darstellung von S_n auf dem komplexen Vektorraum $M^\lambda = \mathbb{C}^{T^\lambda}$ \square



Es stellt sich heraus, dass die Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n auf dem von den Young-Tabloiden erzeugten Vektorraum M^λ im allgemeinen nicht einfach ist, sondern echte Unterdarstellungen enthält. Diese kann man systematisch konstruieren, indem man Einträge in den Spalten eines Young-Diagramms permutiert und die so entstehenden Young-Tabloide unter Berücksichtigung des Signums aufsummiert. Dies liefert die nach dem Mathematiker Wilhelm Specht benannten *Specht-Moduln*. Wilhelm Specht war ab 1950 bis zu seiner Emeritierung 1972 als Professor am Department Mathematik der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg beschäftigt. Die Specht-Moduln konstruierte er allerdings schon 1935 in seiner Zeit als Assistent im damaligen Königsberg.

Definition 1.5.4: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n und $M^\lambda = \mathbb{C}^{T^\lambda}$ der von den Young-Tabloiden der Form λ frei erzeugte komplexe Vektorraum.

1. Der **Spaltenstabilisator** eines Young-Tableaus $m \in Y^\lambda$ ist die Untergruppe $S(m) \subset S_n$, die unter der Gruppenwirkung $\triangleright : S_n \times Y^\lambda \rightarrow Y^\lambda$ die Einträge in jeder Spalte des Diagramms permutiert.
2. Das **Polytabloid** für ein Young-Tableau $m \in Y^\lambda$ ist der Vektor

$$e_m = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) [\sigma \triangleright m] \in M^\lambda$$

3. Den von den Polytabloiden der Form λ erzeugten Untervektorraum

$$\text{Sp}^\lambda = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_m \mid m \in Y^\lambda\} \subset M^\lambda$$

nennt man den **Specht-Modul** für λ .

Bemerkung 1.5.5: Ein Young-Tableau der Form λ heißt **Standardtableau**, wenn die Einträge in jeder Zeile und Spalte, respektive, von links nach rechts und von oben nach unten wachsen. Man kann zeigen, dass die Polytabloide der Standardtableaus eine Basis des Specht-Moduls Sp^λ bilden. Der Beweis ist aufwändig und kombinatorisch und findet sich in [Sa, Abschnitt 2.5].

Beispiel 1.5.6: Wir betrachten die Partition $\lambda = (3, 2)$ von $n = 5$. Für das Young-Tableau

$$m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

erhält man das Polytabloid

$$e_m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} .$$

Die Standardtableaus für λ sind

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} .$$

Die zugehörigen Polytabloide spannen den Specht-Modul Sp^λ auf.

Wir werden nun zeigen, dass die Specht-Moduln für Partitionen von n ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen der Gruppe S_n definieren. Der erste Schritt ist es, zu zeigen, dass sie einfache Unterdarstellungen der Darstellung von S_n auf M^λ aus Lemma 1.5.3 bilden.

Satz 1.5.7: Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine Partition von n . Dann ist der Specht-Modul $\text{Sp}^\lambda \subset M^\lambda$ stabil unter $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(M^\lambda)$, und die Einschränkung von ρ auf Sp^λ liefert eine einfache Darstellung von S_n auf Sp^λ

$$\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\text{Sp}^\lambda) \quad \rho(\pi)e_m = e_{\pi \triangleright m} \quad \forall m \in Y^\lambda.$$

Beweis:

1. Wir bezeichnen mit $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(M^\lambda)$, $\rho(\pi)[m] = [\pi \triangleright m]$ die Darstellung von S_n auf M^λ aus Lemma 1.5.3. Wir zeigen, dass der Untervektorraum $\text{Sp}^\lambda \subset M^\lambda$ stabil unter ρ ist und die Unterdarstellung auf Sp^λ durch die Formel im Satz gegeben ist. Sei dazu $m \in Y^\lambda$ ein Young-Tableau mit zugehörigem Polytabloid e_m . Dann ist für jede Permutation $\pi \in S_n$ der Spaltenstabilisator von $\pi \triangleright m$ gegeben durch $S(\pi \triangleright m) = \{\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \mid \sigma \in S(m)\}$, und es folgt

$$\begin{aligned} \rho(\pi)e_m &= \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) \pi \triangleright [\sigma \triangleright m] = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) [(\pi \circ \sigma) \triangleright m] \\ &= \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) [(\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}) \triangleright (\pi \triangleright m)] = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}) [(\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}) \triangleright (\pi \triangleright m)] \\ &= \sum_{\tau \in S(\pi \triangleright m)} \text{sgn}(\tau) [\tau \triangleright (\pi \triangleright m)] = \sum_{\tau \in S(\pi \triangleright m)} \text{sgn}(\tau) \tau \triangleright [\pi \triangleright m] = e_{\pi \triangleright m}. \end{aligned}$$

Damit ist $(\rho, \text{Sp}^\lambda)$ eine Unterdarstellung von (ρ, V^λ) .

2. Um zu zeigen, dass $(\rho, \text{Sp}^\lambda)$ einfach ist, benötigen wir eine Hilfsaussage. Wir betrachten für jedes Young-Tableau $m \in Y^\lambda$ die \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$f_m : M^\lambda \rightarrow M^\lambda, \quad [j] \mapsto \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [j].$$

und zeigen, dass für jedes Young-Tableau $j \in Y^\lambda$ entweder $f_m([j]) = 0$ oder $f_m([j]) = \pm e_m$ gilt.

Für zwei Young-Tableaus $m, j \in Y^\lambda$ gilt entweder (a) Es gibt $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ die in einer Spalte von m und in einer Zeile von j liegen oder (b) Alle Einträge, die in einer Spalte von m liegen, liegen in verschiedenen Zeilen von j .

In Fall (a) gilt offensichtlich $(i_1, i_2) \in S(m)$ und $(i_1, i_2) \triangleright [j] = [j]$. Damit können wir jede ungerade Permutation $\sigma' \in S(m)$ schreiben als Produkt $\sigma' = \sigma \circ (i_1, i_2)$ mit einer geraden Permutation $\sigma = \sigma' \circ (i_1, i_2) \in S(m)$, und es folgt

$$f_m([j]) = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [j] = \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \text{sgn}(\sigma)=1}} \sigma \triangleright [j] - \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \text{sgn}(\sigma)=-1}} \sigma \triangleright [j] = \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \text{sgn}(\sigma)=1}} \sigma \triangleright [j] - \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \text{sgn}(\sigma)=-1}} \sigma \triangleright [j] = 0.$$

In Fall (b) erhalten wir durch Umordnen der Einträge in jeder Zeile von j ein zu j zeilenäquivalentes Young-Tableau j' , das durch Anwendung einer Permutation $\pi \in S(m)$ im Spaltenstabilisator von m aus m hervorgeht. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f_m([j]) &= f_m([j']) = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [j'] = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [\pi' \triangleright m] = \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma) (\sigma \circ \pi') \triangleright [m] \\ &= \sum_{\sigma \in S(m)} \text{sgn}(\sigma \circ \pi') \text{sgn}(\pi'^{-1}) (\sigma \circ \pi') \triangleright [m] = \text{sgn}(\pi') \sum_{\tau \in S(m)} \text{sgn}(\tau) \tau \triangleright [m] = \text{sgn}(\pi') e_m. \end{aligned}$$

3. Sei nun $U \subset \text{Sp}^\lambda \subset M^\lambda$ ein Untervektorraum, der stabil unter ρ ist. Aus der Stabilität unter ρ folgt $f_m(U) \subset U$ für alle Young-Tableaus $m \in Y^\lambda$.

Gibt es ein Young-Tableau $m \in Y^\lambda$ mit $f_m(U) \neq 0$, so folgt $e_m \in f_m(U)$ und damit $e_{\pi \triangleright m} = \rho(\pi)e_m \in U$ für alle $\pi \in S_n$. Daraus folgt

$$U = \text{Sp}^\lambda = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_k \mid k \in Y^\lambda\} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{\pi \triangleright m} \mid \pi \in S_n\}.$$

Ist $f_m(U) = 0$ für alle Young-Tableaus $m \in Y^\lambda$, so betrachten wir das durch $\langle t, t' \rangle = \delta_{tt'}$ für alle $t, t' \in T^\lambda$ gegebene Skalarprodukt auf M^λ . Aus $f_m(u) = 0$ für alle $m \in Y^\lambda$ und $u \in U$ folgt

$$0 = \langle f_m(u), [m] \rangle = \sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle \rho(\sigma)u, [m] \rangle = \sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle u, \sigma^{-1} \triangleright [m] \rangle = \langle u, e_m \rangle$$

für alle $u \in U$ und $m \in Y^\lambda$. Damit gilt $U \subset \operatorname{Sp}^{\lambda^\perp} \cap \operatorname{Sp}^\lambda = 0$, und $(\rho, \operatorname{Sp}^\lambda)$ ist einfach. \square

Nach Korollar 1.3.14 ist die Zahl der Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen von S_n gleich der Zahl der Konjugationsklassen in S_n und damit gleich der Zahl der Partitionen von n . Dies ist auch die Anzahl der Specht-Moduln für n . Um zu zeigen, dass die Specht-Moduln ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen von n bilden, reicht es also, zu zeigen, dass zwei Specht-Moduln nur dann isomorphe Darstellungen von S_n liefern, wenn die zugehörigen Partitionen gleich sind.

Satz 1.5.8: Sei $n \in \mathbb{N}$ und λ, μ zwei Partitionen von n . Dann gilt:

1. Die Darstellungen $(\rho, \operatorname{Sp}^\lambda)$ und $(\rho, \operatorname{Sp}^\mu)$ sind isomorph genau dann, wenn $\lambda = \mu$.
2. Die Specht-Moduln der Partitionen von n bilden ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher komplexer Darstellungen der Gruppe S_n .

Beweis:

Seien $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ zwei Partitionen von n und $\phi : \operatorname{Sp}^\lambda \rightarrow \operatorname{Sp}^\mu$ ein Isomorphismus von Darstellungen.

Wir setzen ϕ zu einem Homomorphismus von Darstellungen $\phi' : M^\lambda \rightarrow M^\mu$ fort. Dazu betrachten wir das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : M^\lambda \times M^\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\langle t, t' \rangle = \delta_{tt'}$ für $t, t' \in T^\lambda$. Dann gilt $M^\lambda = \operatorname{Sp}^\lambda \oplus \operatorname{Sp}^{\lambda^\perp}$ als komplexer Vektorraum, $\operatorname{Sp}^\lambda \subset M^\lambda$ ist als Unterdarstellung nach Satz 1.5.7 stabil unter $\rho : S_n \rightarrow \operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(M^\lambda)$ und $\operatorname{Sp}^{\lambda^\perp}$ ist ebenfalls stabil unter ρ , da aus $x \in \operatorname{Sp}^{\lambda^\perp}$ und $\pi \in S_n$ folgt $\langle \rho(\pi)x, y \rangle = \langle x, \rho(\pi^{-1})y \rangle = 0$ für alle $y \in \operatorname{Sp}^\lambda$, also $\rho(\pi)x \in \operatorname{Sp}^{\lambda^\perp}$. Indem wir $\phi'(v) = \phi(v)$ für alle $v \in \operatorname{Sp}^\lambda$ und $\phi'(v) = 0$ für $v \in \operatorname{Sp}^{\lambda^\perp}$ setzen, erhalten wir einen Homomorphismus von Darstellungen $\phi' : M^\lambda \rightarrow M^\mu$.

Da ϕ ein Isomorphismus von Darstellungen ist, gilt $\phi' \neq 0$ und es gibt ein $m \in Y^\lambda$ mit

$$0 \neq \phi(e_m) = \phi'(e_m) = \sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \phi'(\sigma \triangleright [m]) = \sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright \phi'([m]).$$

Da $\phi'([m])$ eine Linearkombination von Polytabloiden der Form μ ist, muss es also ein Young-Tableau $x \in Y^\mu$ mit $\sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [x] \neq 0$ geben.

Gäbe es zwei Elemente i_1, i_2 einer Spalte von m , die in der selben Zeile von x liegen, so wäre $(i_1, i_2) \in S(m)$ und $(i_1, i_2) \triangleright [x] = [x]$, und wir könnten jede ungerade Permutation $\sigma' \in S(m)$ als $\sigma' = \sigma \circ (i_1, i_2)$ mit einer geraden Permutation $\sigma \in S(m)$ schreiben. Daraus ergäbe sich

$$\sum_{\sigma \in S(m)} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright [x] = \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \operatorname{sgn}(\sigma)=1}} \sigma \triangleright [x] - \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \operatorname{sgn}(\sigma)=-1}} \sigma \triangleright [x] = \sum_{\substack{\sigma \in S(m) \\ \operatorname{sgn}(\sigma)=1}} \sigma \triangleright [x] - \sigma \triangleright [x] = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also liegen alle Einträge aus einer Spalte von m in verschiedenen Zeilen von x oder, dazu äquivalent, alle Einträge aus einer Zeile von x in verschiedenen Spalten

von m . Durch Anwenden von Permutationen im Spaltenstabilisator $S(m)$ können wir dann für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ das Young-Tableau m in ein Young-Tableau $m' \in Y^\lambda$ überführen, so dass die Einträge aus den ersten i Zeilen von x in den ersten i Zeilen von m' liegen. Daraus ergibt sich

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Indem wir das selbe Argument auf $\phi^{-1} : \text{Sp}^\mu \rightarrow \text{Sp}^\lambda$ anwenden, erhalten wir analog

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\},$$

und das impliziert $l = k$ und $\mu_i = \lambda_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. □

Beispiel 1.5.9: Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Der Modul M^λ und der Specht-Modul Sp^λ für die Partition $\lambda = (n)$ von n sind eindimensional, denn es gibt zu dieser Partition nur ein einziges Young-Tabloid

$$m = e_m = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline \end{array}.$$

Dieses wird von jeder Permutation $\pi \in S_n$ auf sich selbst abgebildet, und damit entspricht der Specht-Modul der Partition $\lambda = (n)$ der trivialen Darstellung von S_n .

2. Für die Partition $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ von n gilt $\dim_{\mathbb{C}}(M^\lambda) = n!$ und $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Sp}^\lambda) = 1$, denn zu dieser Partition gibt es $n!$ nicht äquivalente Young-Tableaus und damit $n!$ verschiedene Young-Tabloide, aber nur ein einziges Standardtableau $m \in Y^\lambda$

$$m = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array} \qquad e_m = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \triangleright \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Es gilt für alle $\pi \in S_n$

$$\begin{aligned} \rho(\pi)e_m &= e_{\pi \triangleright m} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \pi \triangleright [\sigma \triangleright m] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) [(\pi \circ \sigma) \triangleright m] \\ &= \text{sgn}(\pi) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\pi \circ \sigma) [(\pi \circ \sigma) \triangleright m] = \text{sgn}(\pi)e_m. \end{aligned}$$

Damit entspricht der Specht-Modul von $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ der Signumsdarstellung von S_n .

1.6 Übungen zu Kapitel 1

Aufgabe 1: Seien (ρ, V) , (τ, W) Darstellungen einer Gruppe G über \mathbb{K} .

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \rho_{V \oplus W}(g)(v+w) &= \rho(g)(v) + \tau(g)(w) & \rho_{V \otimes W}(g)(v \otimes w) &= \rho_V(g)(v) \otimes \rho_W(g)(w) \\ \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}(g)\phi &= \rho_W(g) \circ \phi \circ \rho_V(g)^{-1} & \rho_{V^*}(g)\alpha &= \alpha \circ \rho_V(g^{-1}) \end{aligned}$$

Darstellungen von G auf $V \oplus W$, $V \otimes W$, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und V^* definiert werden.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Homomorphismen von Darstellungen sind

$$\begin{aligned} \phi : V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha \otimes v \mapsto \alpha(v) \\ \psi : \mathbb{K} \otimes V &\rightarrow V, \quad \lambda \otimes v \mapsto \lambda v \\ \xi : V^* \otimes W &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \quad \alpha \otimes w \mapsto f_{\alpha, w} \quad \text{mit} \quad f_{\alpha, w}(v) = \alpha(v)w \end{aligned}$$

wobei \mathbb{K} mit der trivialen Darstellung versehen wird.

Aufgabe 2: Sei $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ eine Gruppenwirkung auf einer Menge M . Zeigen Sie, dass die Abbildung $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^M)$ mit $(\rho(g)f)(m) = f(g^{-1} \triangleright m)$ eine Darstellung von G auf \mathbb{K}^M definiert mit $\rho(g)\delta_m = \delta_{g \triangleright m}$ für alle $m \in M$, $g \in G$.

Aufgabe 3: Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ eine normale Untergruppe, d. h. eine Untergruppe $N \subset G$ mit $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$, $n \in N$. Zeigen Sie:

- (a) Die Äquivalenzklassen von Elementen in G bezüglich der Äquivalenzrelation $g \sim g' \Leftrightarrow \exists n \in N : g' = gn$ bilden eine Gruppe. (Diese wird als **Faktorgruppe** und mit G/N bezeichnet. Die Äquivalenzklassen heißen **Nebenklassen** von G .)
- (b) Ist (ρ, V) eine Darstellung von G über \mathbb{K} mit $\rho(n) = \text{id}_V$ für alle $n \in N$, so definiert dies eine Darstellung der Faktorgruppe G/N auf V .

Aufgabe 4: Seien G, G_1, \dots, G_n Gruppen und \mathbb{K} ein Körper.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $X_{\mathbb{K}}(G)$ der Gruppenhomomorphismen $f : G \rightarrow \mathbb{K}^{\times}$ mit der punktweisen Multiplikation eine Gruppe bildet. Sie heißt die **Charaktergruppe** von G .
- (b) Zeigen Sie dass die Gruppen $X_{\mathbb{K}}(G_1 \times \dots \times G_n)$ und $X_{\mathbb{K}}(G_1) \times \dots \times X_{\mathbb{K}}(G_n)$ isomorph sind.
- (c) Zeigen Sie, dass für endliche abelsche Gruppen G die Gruppe $X_{\mathbb{C}}(G)$ isomorph ist zu G .

Aufgabe 5: Seien G, H Gruppen, $f : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und (ρ, V) eine Darstellung von G über \mathbb{K} .

- (a) Zeigen Sie, dass der Pullback $(\rho \circ f, V)$ eine Darstellung von H auf V ist.

- (b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $h \in G$ auch (ρ_h, V) mit $\rho_h : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, $g \mapsto \rho(hgh^{-1})$ eine Darstellung von G auf V ist und die Abbildung $\rho(h) : V \rightarrow V$, $v \mapsto \rho(h)v$ ein Isomorphismus von Darstellungen.
- (c) Folgern Sie, dass für jedes Element $c \in Z(G)$ die Abbildung $\phi = \rho(c) : V \rightarrow V$ ein Automorphismus von Darstellungen von (ρ, V) ist.
- (d) Finden Sie eine Gruppe G , einen Gruppenautomorphismus $f : G \rightarrow G$ und eine Darstellung (ρ, V) von G , so dass der Pullback $(\rho \circ f, V)$ nicht isomorph zu (ρ, V) ist.

Aufgabe 6: Seien G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe, (ρ, U) eine Darstellung von G und (σ, V) , (τ, W) Darstellungen von H über \mathbb{K} . Wir betrachten den Vektorraum

$$F(\sigma, V) = \{f : G \rightarrow V \mid f(hg) = \rho(h)f(g) \forall g \in G, h \in H\}$$

mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation.

- (a) Zeigen Sie, dass $\omega_{(\sigma, V)} : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(F(\rho, V))$, $(\omega_{(\rho, V)}(g)f)(g') = f(g'g)$ eine Darstellung von G auf $F(\rho, V)$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für jeden Homomorphismus von Darstellungen $\phi \in \text{Hom}((\sigma, V), (\tau, W))$ die Abbildung $F(\phi) : F(\sigma, V) \rightarrow F(\tau, W)$, $f \mapsto \phi \circ f$ ein Homomorphismus von Darstellungen der Gruppe G ist.

Aufgabe 7: Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, (v_1, \dots, v_n) eine geordnete Basis von V und

$$\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V) \quad \rho(\pi)v_i = v_{\pi(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

die in der Vorlesung definierte Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n auf V .

- (a) Bestimmen Sie alle Endomorphismen der Darstellung (ρ, V) .
- (b) Zeigen Sie, dass (ρ, V) die direkte Summe einer eindimensionalen und einer $(n - 1)$ -dimensionalen Unterdarstellung ist.

Aufgabe 8: Sei G eine Gruppe und \mathbb{K} ein Körper. Eine Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} heißt **treu**, wenn der Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ injektiv ist. Zeigen Sie: Jede endliche Gruppe G besitzt eine treue Darstellung auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum.

Aufgabe 9: Sei \mathbb{K} ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n auf \mathbb{K} .

Aufgabe 10: Bestimmen Sie alle endlich-dimensionalen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 11: Sei G eine Gruppe und $[G, G] = \langle a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} : a, b \in G \rangle$ die von Elementen der Form $[a, b] = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ erzeugte normale Untergruppe von G , also die kleinste normale Untergruppe von G , die alle Elemente dieser Form enthält.

Zeigen Sie, dass die Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen von G über einem Körper \mathbb{K} in Bijektion stehen mit Gruppenhomomorphismen $\phi : G/[G, G] \rightarrow \mathbb{K}^\times$.

Aufgabe 12: Finden Sie eine einfache reelle Darstellung einer endlichen abelschen Gruppe, die nicht eindimensional ist.

Aufgabe 13: Sei G eine Gruppe, (ρ, V) eine Darstellung von G über \mathbb{K} und $(\tau, U) \subset (\rho, V)$ eine Unterdarstellung.

- (a) Zeigen Sie, dass $\rho' : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V/U)$, $\rho'(g)(v + U) = \rho(g)v + U$ eine Darstellung $(\rho', V/U)$ von G auf dem Quotientenraum V/U definiert.
- (b) Zeigen Sie, dass $(\rho', V/U)$ einfach ist genau dann, wenn die Unterdarstellung (τ, U) **maximal** ist, d. h. für jede Unterdarstellung $(\sigma, W) \subset (\rho, V)$ mit $U \subsetneq W$ folgt $W = V$.

Aufgabe 14: Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Satz von Maschke falsch wird, wenn man die Voraussetzung $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ weglässt.

Aufgabe 15: Sei (ρ, \mathbb{C}^n) eine einfache komplexe Darstellung einer Gruppe G und $M(g) = (\rho_{ij}(g))_{i,j=1,\dots,n}$ die darstellenden Matrizen der linearen Abbildungen $\rho(g)$ bezüglich einer Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathbb{C}^n . Beweisen Sie, dass jede Matrix, die mit allen Matrizen $M(g)$ kommutiert, ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 16: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweisen Sie sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

- (a) Ist G eine endliche Gruppe und (ρ, V) eine einfache Darstellung von G der Dimension ≥ 2 , so gilt $\sum_{g \in G} \rho(g)v = 0$ für alle $v \in V$.
- (b) Ist G eine einfache endliche Gruppe, so ist auch jede komplexe Darstellung von G einfach.
- (c) Ist G eine einfache Gruppe, so ist jede Darstellung von G entweder trivial oder treu (vgl. Übungsblatt 1, Aufgabe 6).
- (d) Sei $\triangleright : G \times M \rightarrow M$ eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge M und $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^M)$ die zugehörige Darstellung von G mit $\rho(g)\delta_m = \delta_{g \triangleright m}$ für $g \in G$ und $m \in M$. Dann ist (ρ, \mathbb{K}^M) einfach genau dann, wenn \triangleright nur eine einzige Bahn hat.
- (e) Für jede Darstellung (ρ, V) einer endlichen Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass alle Eigenwerte der Abbildungen $\rho(g)$ für $g \in G$ n te Einheitswurzeln in \mathbb{K} sind.

Aufgabe 17: Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G auf einem unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **unitär**, wenn $\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $g \in G$ und $v, w \in V$ gilt. Zeigen Sie:

- (a) Jede endlich-dimensionale unitäre Darstellung einer Gruppe G ist halbeinfach.
- (b) Zu jeder endlich-dimensionalen komplexen Darstellung (ρ, W) einer endlichen Gruppe G gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf W , bezüglich dem ρ unitär ist.
- (c) Jede endlich-dimensionale komplexe Darstellung einer endlichen Gruppe G auf einem unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist isomorph zu einer bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ unitären Darstellung von G .
- (d) Für $n \in \mathbb{N}$ ist jede endliche Untergruppe $H \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ konjugiert zu einer endlichen Untergruppe der unitären Gruppe $U(n)$.

Hinweis: Wählen Sie in (b) ein beliebiges Skalarprodukt auf V und konstruieren Sie daraus ein neues Skalarprodukt, indem Sie über die Gruppenelemente mitteln.

Aufgabe 18: Sei \mathbb{K} ein Körper, G eine endliche Gruppe mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Einschränkungen $(\rho|_H, V)$ einfacher Darstellungen (ρ, V) von G über \mathbb{K} auf die Untergruppe H .

Zeigen Sie, dass zu jeder einfachen Darstellung (τ, W) von H über \mathbb{K} eine einfache Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} existiert, so dass (τ, W) isomorph zu einem Summanden in der Zerlegung von $(\rho|_H, V)$ als direkte Summe einfacher Darstellungen von H ist.

Aufgabe 19: Beweisen Sie, dass isomorphe endlich-dimensionale Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper \mathbb{K} den gleichen Charakter haben.

Aufgabe 20:

- (a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie alle einfachen komplexen Darstellungen der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und deren Charakter.
- (b) Sei V ein komplexer Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ die Darstellung mit $\rho(\bar{1})v_i = v_{i+1}$ für $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und $\rho(\bar{1})v_n = v_1$. Bestimmen Sie die Multiplizitäten der einfachen Darstellungen aus (a) in der Darstellung (ρ, V) .

Aufgabe 21: Seien G, H endliche Gruppen, (ρ, V) eine Darstellung von G und (τ, W) eine Darstellung von H über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0.

Zeigen Sie:

- (a) $(\rho \square \tau, V \otimes W)$ mit $\rho \square \tau : G \times H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V \otimes W)$, $(\rho \square \tau)(g, h)(v \otimes w) = \rho(g)v \otimes \tau(h)w$ ist eine Darstellung von $G \times H$ auf $V \otimes W$.
- (b) Sind (ρ, V) und (τ, W) einfach, so ist auch $(\rho \square \tau, V \otimes W)$ einfach.
- (c) Die reguläre Darstellung von $G \times H$ auf $\mathbb{K}^{G \times H}$ ist isomorph zu $\mathbb{K}^G \square \mathbb{K}^H$.

- (d) Für jede einfache Darstellung (σ, U) von $G \times H$ über \mathbb{K} existieren einfache Darstellungen (ρ, V) von G und (τ, W) von H mit $(\sigma, U) \cong (\rho, V) \square (\tau, W)$. Diese sind eindeutig bis auf Isomorphie.

Aufgabe 22: Sei G eine endliche Gruppe und (ρ, V) eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung von G mit Charakter $\chi_{(\rho, V)}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\chi_{(\rho, V)}(g^{-1}) = \overline{\chi_{(\rho, V)}(g)}$ für alle $g \in G$ gilt.
 (b) Zeigen Sie, dass

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)} \quad \text{für} \quad f_1, f_2 \in \text{Klass}_{\mathbb{C}}(G)$$

ein Skalarprodukt auf dem komplexen Vektorraum $\text{Klass}_{\mathbb{C}}(G)$ definiert und dass es auf dem von den Charaktern endlich-dimensionaler komplexer Darstellungen von G erzeugten *reellen* Untervektorraum von $\text{Klass}_{\mathbb{C}}(G)$ von mit der symmetrischen Bilinearform auf $\text{Klass}_{\mathbb{C}}(G)$ aus der Vorlesung übereinstimmt.

- (c) Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\phi^\dagger \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ bezeichne die zu $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ adjungierte Abbildung mit $\langle v, \phi(v') \rangle = \langle \phi^\dagger(v), v' \rangle$ für alle $v, v' \in V$.

Zeigen Sie, dass durch $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, $g \mapsto \rho(g^{-1})^\dagger$ eine weitere Darstellung von G auf V definiert wird und dass die Darstellungen (ρ, V) und (ρ^*, V) isomorph sind.

Hinweis: Nutzen Sie in (a) die Jordan-Normalform.

Aufgabe 23: Sei G eine endliche Gruppe.

- (a) Zeigen Sie: Für jede einfache komplexe Darstellung (ρ, V) von G gilt $|\chi_{(\rho, V)}(g)| \leq \dim_{\mathbb{C}} V$ für alle $g \in G$ und $|\chi_{(\rho, V)}(g)| = \dim_{\mathbb{C}} V$ genau dann, wenn $\rho(g) = \xi_\rho \text{id}_V$ mit einer Einheitswurzel $\xi_\rho \in \mathbb{C}$.
 (b) Gilt (a) auch für endlich-dimensionale einfache komplexe Darstellungen unendlicher Gruppen?
 (c) Zeigen Sie: Für ein Element $g \in G$ gilt $g \in Z(G)$ genau dann, wenn $|\chi_{(\rho, V)}(g)| = \dim_{\mathbb{C}} V$ für alle einfachen komplexen Darstellungen (ρ, V) von G .

Hinweis: Benutzen Sie in (a) die Jordan-Normalform.

Aufgabe 24: Sei G eine endliche Gruppe und $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n)$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen von G . Beweisen Sie, dass eine Klassenfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann Charakter einer endlich-dimensionalen komplexen Darstellung von G ist, wenn gilt

$$(f, \chi_{(\rho_i, V_i)}) \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 25: Sei $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n)$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen einer endlichen Gruppe G . Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Charakter gilt

$$\chi_{(\rho_i, V_i)}(g) \cdot \chi_{(\rho_j, V_j)}(g) = \sum_{k=1}^n n_k \cdot \chi_{(\rho_k, V_k)}(g) \quad \forall g \in G$$

mit Koeffizienten $n_k \in \mathbb{N}_0$. Drücken Sie diese Koeffizienten durch die Charakter $\chi_{(\rho_i, V_i)}$ aus.

Aufgabe 26: Bestimmen Sie die Charaktertafel für die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ über \mathbb{C} .

Aufgabe 27: Sei $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n)$ ein Repräsentantensystem einfacher komplexer Darstellungen einer endlichen Gruppe G . Beweisen Sie:

$$\sum_{i=1}^n \chi_{(\rho_i, V_i)}(g) \chi_{(\rho_i, V_i)}(h^{-1}) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|} & \text{falls } g, h \text{ in der selben Konjugationsklasse } C \text{ liegen} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 28: Sei G eine endliche Gruppe und (ρ, V) eine einfache komplexe Darstellung von G . Zeigen Sie, dass dann $\dim_{\mathbb{K}} V$ die Gruppenordnung teilt.

Hinweis: Betrachten Sie für $m := |G|$ den unitalen Unterring

$$U = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/m}] = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} z_k e^{2\pi i k/m} \mid z_0, \dots, z_{m-1} \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass $\chi_{(\rho, V)}(g) \in U$ für alle $g \in G$ gilt und folgern Sie mit Satz 1.4.4, dass $|G|/\dim_{\mathbb{C}} V \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 29: Ergänzen Sie in der folgenden Charaktertafel einer endlichen Gruppe G über \mathbb{C} die fehlende Zeile:

	1	3	6	6	8
	e	g_1	g_2	g_3	g_4
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	-1	-1	1
ρ_3	3	-1	1	-1	0
ρ_4	3	-1	-1	1	0
ρ_5	?	?	?	?	?

Aufgabe 30: Bestimmen sie mit Hilfe der Specht-Moduln die Charaktertafel der Gruppe S_4 . Gehen sie dabei wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Anzahl der Konjugationsklassen und ein Element in jeder Konjugationsklasse von S_4 .
- Bestimmen Sie die Standardtableaus für jede Partition von $n = 4$ und die Dimensionen der zugehörigen Specht-Moduln.
- Bestimmen Sie die Charakter indem Sie (falls nötig) ein Element in jeder Konjugationsklasse auf die Polytabloide der Standardtableaus wirken lassen.

Hinweis: Überlegen Sie sich genau, welche Größen Sie wirklich berechnen müssen, sonst wird die Aufgabe sehr aufwändig.

2 Moduln über Ringen

2.1 Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden wir den Begriff des Moduls über einem Ring einführen. Wir werden sehen, dass dieser Begriff mehrere bekannte Konzepte aus der Algebra wie Vektorräume über Körpern, abelsche Gruppen und Darstellungen von Gruppen als Spezialfälle enthält. Indem man das Konzept des Moduls benutzt, kann man diese Strukturen also zusammen behandeln und ihre Gemeinsamkeiten erfassen. Dazu wiederholen wir zunächst die wesentlichen Definitionen zu Ringen.

Definition 2.1.1:

1. Ringe:

- Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe $(R, +)$ zusammen mit einer Multiplikationsabbildung $\cdot : R \times R \rightarrow R$, $(r, s) \mapsto r \cdot s$, die assoziativ und distributiv ist:

$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t, \quad r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t, \quad (s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r \quad \forall r, s, t \in R.$$

Das neutrale Element der abelschen Gruppe $(R, +)$ wird mit 0 bezeichnet.

- Ein Ring heißt **unital** oder **Ring mit Einselement**, wenn ein Element $1 \in R$ existiert mit $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$ für alle $r \in R$.
- Ein Element $r \in R$ eines unitären Rings heißt **Einheit**, wenn es ein multiplikatives Inverses besitzt, d. h. es existiert ein $s \in R$ mit $r \cdot s = s \cdot r = 1$. Die Einheiten in R bilden eine Gruppe, die mit R^\times bezeichnet wird.
- Ein Ring heißt **kommutativ** wenn die Multiplikationsabbildung kommutativ ist: $r \cdot s = s \cdot r$ für alle $r, s \in R$.
- Ein Ring heißt **nullteilerfrei**, wenn für alle $r, s \in R$ aus $r \cdot s = 0$ folgt $r = 0$ oder $s = 0$.
- Ein **Integritätsring** oder **Integritätsbereich** ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring $R \neq 0$ mit Einselement.
- Ein Ring heißt **Schiefkörper** oder **Divisionsring**, wenn jedes Element außer 0 ein multiplikatives Inverses besitzt: $R^\times = R \setminus \{0\}$.

2. Unterringe und Ideale: Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- Ein **Unterring** oder **Teilring** von R ist eine Untergruppe $(U, +) \subset (R, +)$, die mit der Einschränkung der Ringmultiplikation in R wieder einen Ring bildet: $u \cdot u' \in U$ für alle $u, u' \in U$. Gilt auch $1 \in U$, so spricht man von einem **unitalen Unterring**.
- Ein **Linksideal** in einem Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Untergruppe $(I, +) \subset (R, +)$, so dass $r \cdot i \in I$ für alle $r \in R, i \in I$. Analog ist ein **Rechtsideal** in R eine Untergruppe $(I, +) \subset (R, +)$, so dass $i \cdot r \in I$ für alle $r \in R, i \in I$. Ist $I \subset R$ sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal in R , so nennt man I ein **zweiseitiges Ideal**.
- Ein **Hauptidealring** ist ein Integritätsring, in dem jedes Ideal I ein **Hauptideal** ist, also von der Form $I = (a) = \{r \cdot a : r \in R\}$ für ein festes $a \in R$.

3. Ringhomomorphismen:

- Ein **Ringhomomorphismus** $f : (R, +, \cdot) \rightarrow (S, +, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der die multiplikative Struktur der Ringe respektiert:

$$f(r + r') = f(r) + f(r'), \quad f(r \cdot r') = f(r) \cdot f(r') \quad \forall r, r' \in R.$$

- Sind $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ unitale Ringe, so fordert man zusätzlich, dass ein Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ die multiplikativen Einheiten aufeinander abbildet: $f(1_R) = 1_S$. Man spricht dann auch von einem **unitalen Ringhomomorphismus** oder **Homomorphismus von unitalen Ringen**.

Konvention 2.1.2: Sofern nicht anders angegeben, sind im Folgenden alle Ringe unitale Ringe, alle Unterringe unitale Unterringe und alle Ringhomomorphismen Homomorphismen unitaler Ringe.

Beispiel 2.1.3:

1. Der Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Dieser spielt eine besonders wichtige Rolle und wird auch als **initialer Ring** bezeichnet. Denn für jeden unitalen Ring R existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ (Beweis: Übung).
2. Der Nullring $R = \{0\}$. Dieser wird auch als **terminaler Ring** bezeichnet. Denn für jeden Ring R existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow \{0\}$.
3. Jeder Körper ist ein Ring, also insbesondere $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, und die endlichen Zahlkörper.
4. Jede assoziative Algebra $(A, +, \cdot, \circ)$ mit Einselement ist auch ein Ring $(R, +, \circ)$. Insbesondere gilt das für die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ aus Satz 1.4.1 sowie für die Endomorphismenalgebra $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eines \mathbb{K} -Vektorraums.
5. Die Polynome mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R bilden bezüglich der Polynomaddition und Multiplikation einen Ring, der mit $R[X]$ bezeichnet wird.
6. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, bilden die reellwertigen Funktionen auf U einen Ring bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation. Dasselbe gilt für die stetigen, die differenzierbaren und die analytischen Funktionen auf U .
7. Ist $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, so bilden die Gruppenendomorphismen $\phi : G \rightarrow G$ einen unitalen Ring, den **Endomorphismenring** $\text{End}_{\mathbb{Z}}(G)$. Die Ringstruktur ist gegeben durch die punktweise Addition und die Verkettung von Gruppenendomorphismen.
8. Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring, so erhält man einen weiteren Ring $(R, +, \cdot')$, indem man die Multiplikation in R umdreht: $r \cdot' s := s \cdot r$ für alle $r, s \in R$. Dieser wird als der zu R **opponierte Ring** und mit R^{op} bezeichnet. Offensichtlich ist der Ring $(R, +, \cdot)$ kommutativ genau dann, wenn $\text{id}_R : R \rightarrow R^{op}$ ein Ringhomomorphismus ist.
9. Ist $f : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\ker(f) = \{r \in R : f(r) = 0\}$ ein zweiseitiges Ideal in R und $\text{Im}(f) = \{s \in S : \exists r \in R \text{ mit } f(r) = s\}$ ein Unterring von S .

Ein weiteres wichtiges Beispiel ergibt sich als eine Verallgemeinerung der Gruppenalgebra aus Satz 1.4.1. Ersetzen wir in Satz 1.4.1 den Körper \mathbb{K} durch einen Ring R , so erhalten wir den sogenannten Gruppenring.

Beispiel 2.1.4: (Gruppenring)

Sei G eine Gruppe, R ein Ring und R^G die Menge der Abbildungen $f : G \rightarrow R$ mit $f(g) = 0$ für fast alle $g \in G$. Dann bildet R^G zusammen mit der punktweisen Addition von Abbildungen und der Faltung $\star : R^G \times R^G \rightarrow R^G$

$$f \star k(g) = \sum_{g_1, g_2 \in G: g_1 \cdot g_2 = g} f(g_1)k(g_2) = \sum_{u \in G} f(u)k(u^{-1}g)$$

einen Ring $(R^G, +, \star)$ mit Einselement δ_e , der als **Gruppenring** und mit $R[G]$ bezeichnet wird.

Wir führen nun Begriff des Moduls³ über einem Ring ein. Dabei nehmen wir weiterhin an, dass die betrachteten Ringe unital sind und Ringhomomorphismen die multiplikativen Einheiten aufeinander abbilden. Die Definition eines Moduls ist völlig analog zu der eines Vektorraums, nur dass der Körper in der Definition des Vektorraums durch einen Ring ersetzt wird. Da auch nicht-kommutative Ringe betrachtet werden, unterscheidet man Links- und Rechtsmoduln.

Definition 2.1.5:

1. Ein **(Links)modul** über einem unitalen Ring R ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\triangleright : R \times M \rightarrow M$, $(r, m) \mapsto r \triangleright m$, die **Strukturabbildung**, so dass für alle $m, m' \in M$ und $r, r' \in R$ die folgenden Identitäten gelten:

$$\begin{aligned} r \triangleright (m + m') &= r \triangleright m + r \triangleright m' & (r + r') \triangleright m &= r \triangleright m + r' \triangleright m \\ r \triangleright (r' \triangleright m) &= (r \cdot r') \triangleright m & 1 \triangleright m &= m \quad \forall m \in M. \end{aligned}$$

2. Ein **R -Modulhomomorphismus** oder eine **R -lineare Abbildung** von einem R -Modul $(M, +, \triangleright)$ in einem R -Modul $(M', +', \triangleright')$ ist ein Homomorphismus $\phi : (M, +) \rightarrow (M', +')$ von abelschen Gruppen, der kompatibel mit den Strukturabbildungen ist:

$$\phi(r \triangleright m) = r \triangleright' \phi(m) \quad \forall m \in M, r \in R.$$

Die Menge der R -Modulhomomorphismen von $(M, +, \triangleright)$ nach $(M', +', \triangleright')$ wird mit $\text{Hom}_R(M, M')$ bezeichnet.

3. Einen bijektiven R -Modulhomomorphismus nennt man einen **Modulisomorphismus**. Gibt es einen Modulisomorphismus $\phi : (M, +, \triangleright) \rightarrow (M', +', \triangleright')$ so heißen die Moduln $(M, +, \triangleright)$ und $(M', +', \triangleright')$ **isomorph**, und man schreibt $M \cong M'$.
4. Ein R -Modulhomomorphismus $\phi : (M, +, \triangleright) \rightarrow (M, +, \triangleright)$ heißt **R -Modulendomorphismus**. Die Menge der R -Modulendomorphismen von (M, \triangleright) wird mit $\text{End}_R(M)$ bezeichnet. Ein bijektiver Modulendomorphismus heißt **Modulautomorphismus**.

Bemerkung 2.1.6:

1. Aus den Bedingungen in der Definition des Linksmoduls ergeben sich die Identitäten $0 \triangleright m = 0$, $r \triangleright 0 = 0$ und $(-1) \triangleright m = -m$ für alle $r \in R$ und $m \in M$ (Übung).

³Der Modul. Der Plural ist Moduln, und das Wort wird auf der ersten Silbe betont.

2. Alternativ kann man eine R -Modulstruktur auf einer abelschen Gruppe $(M, +)$ auch als einen Ringhomomorphismus $\rho : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ definieren.

Denn für jede R -Modulstruktur $\triangleright : R \times M \rightarrow M$ ist $\rho' : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, $\rho'(r)m := r \triangleright m$ ein Ringhomomorphismus, und für jeden Ringhomomorphismus $\rho' : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ist $\triangleright : R \times M \rightarrow M$, $(r, m) \mapsto \rho'(r)m$ eine R -Modulstruktur auf M (Aufgabe 33).

3. Analog definiert man einen **Rechtsmodul** über einem Ring $(R, +, \cdot)$ als eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\triangleleft : M \times R \rightarrow M$, $(m, r) \mapsto m \triangleleft r$, so dass für alle $m, m' \in M$ und $r, r' \in R$ die folgenden Identitäten gelten:

$$\begin{aligned} (m + m') \triangleleft r &= m \triangleleft r + m' \triangleleft r & m \triangleleft (r + r') &= m \triangleleft r + m \triangleleft r' \\ (m \triangleleft r) \triangleleft r' &= m \triangleleft (r \cdot r') & m \triangleleft 1 &= m. \end{aligned}$$

Ein **Homomorphismus von R -Rechtsmoduln** von $(M, +, \triangleleft)$ nach $(M', +', \triangleleft')$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : (M, +) \rightarrow (M', +')$ mit $\phi(m \triangleleft r) = \phi(m) \triangleleft' r$ für alle $m \in M$ und $r \in R$.

Jeder R -Rechtsmodul $(M, +, \triangleleft)$ erhält durch $\triangleright' : R^{op} \times M \rightarrow M$, $r \triangleright' m := m \triangleleft r$ die Struktur eines R^{op} -Linksmoduls. Analog hat jeder R -Linksmodul eine R^{op} -Rechtsmodulstruktur. Rechtsmoduln über R sind also nichts anderes als Linksmoduln über R^{op} . Insbesondere ist für einen *kommutativen* Ring R jeder R -Linksmodul auch ein R -Rechtsmodul und umgekehrt.

4. Seien R, S zwei Ringe. Ein (R, S) -**Bimodul** ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$, die sowohl die Struktur eines R -Linksmoduls $(M, +, \triangleright)$ als auch eines S -Rechtsmoduls $(M, +, \triangleleft)$ hat, so dass die beiden Strukturabbildungen verträglich sind

$$r \triangleright (m \triangleleft s) = (r \triangleright m) \triangleleft s \quad \forall r \in R, s \in S, m \in M.$$

Ein **Homomorphismus von (R, S) -Bimoduln** von $(M, +, \triangleright, \triangleleft)$ nach $(M', +', \triangleright', \triangleleft')$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : M \rightarrow M'$, der gleichzeitig ein Homomorphismus von R -Linksmoduln und von S -Rechtsmoduln ist.

Beispiel 2.1.7:

- Die Ringmultiplikation gibt jedem Ring R die Struktur eines Links-, Rechts- und (R, R) -Bimoduls über sich selbst mit $r \triangleright s = r \cdot s = r \triangleleft s$. Die Modulendomorphismen sind die Gruppenhomomorphismen $\phi : (R, +) \rightarrow (R, +)$ mit $\phi(r) = r \cdot \phi(1)$, mit $\phi(r) = \phi(1) \cdot r$ und mit $\phi(r) = r \cdot \phi(1) = \phi(1) \cdot r$ für alle $r \in R$. Sie sind also durch $\phi(1)$ eindeutig bestimmt.
- Jede abelsche Gruppe $(A, +)$ hat eine kanonische \mathbb{Z} -Modulstruktur $\triangleright : \mathbb{Z} \times A \rightarrow A$ mit $0 \triangleright a = 0$, $n \triangleright a = na = a + \dots + a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \triangleright a = -|n|a = -(a + \dots + a)$ für $-n \in \mathbb{N}$. Die Modulhomomorphismen $\phi : (A, +, \triangleright) \rightarrow (A', +', \triangleright')$ sind gerade die Gruppenhomomorphismen $\phi : (A, +) \rightarrow (A', +')$.

Aus Bemerkung 2.1.6, 2. ergibt sich, dass dies die *einzige* \mathbb{Z} -Modulstruktur auf A ist. Denn die \mathbb{Z} -Modulstrukturen auf A entsprechen nach Bemerkung 2.1.6, 2. den Ringhomomorphismen von \mathbb{Z} nach $\text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$, und nach Bemerkung 2.1.3, 1. existiert genau ein Ringhomomorphismus von \mathbb{Z} nach $\text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$.

- Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so sind die Moduln über \mathbb{K} gerade die \mathbb{K} -Vektorräume, und die Modulhomomorphismen die \mathbb{K} -linearen Abbildungen.

4. Moduln über einer Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ entsprechen den Darstellungen von G über \mathbb{K} .
 Denn nach Beispiel 1.4.3 definiert jede Darstellung (ρ, V) von G über \mathbb{K} einen Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $f \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$ und damit nach Bemerkung 2.1.6, 2. eine $\mathbb{K}[G]$ -Modulstruktur $\triangleright : \mathbb{K}[G] \times V \rightarrow V$, $(f, v) \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)v$.
 Umgekehrt definiert jede $\mathbb{K}[G]$ -Modulstruktur $\triangleright : \mathbb{K}[G] \times V \rightarrow V$ auf einer abelschen Gruppe V eine \mathbb{K} -Vektorraumstruktur auf V durch $\lambda \cdot v = (\lambda\delta_e) \triangleright v$ und einen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $\rho(g)v = \delta_g \triangleright v$ (Übung).
5. Moduln über dem Polynomring $\mathbb{K}[x]$ über einem Körper \mathbb{K} entsprechen Paaren (V, ϕ) aus einem \mathbb{K} -Vektorraum V und einem \mathbb{K} -linearen Endomorphismus $\phi : V \rightarrow V$ (Aufgabe 37).
6. Für jeden Ring R und jede Gruppe G trägt der Gruppenring $R[G]$ die Struktur eines R -Moduls. Die Strukturabbildung ist durch die punktweise Linksmultiplikation mit Ringelementen gegeben: $(r \triangleright f)(g) = r \cdot f(g)$.
7. Ist $\phi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und $(M, +, \triangleright)$ ein S -Modul, so ist

$$\triangleright_{\phi} : R \times M \rightarrow M, \quad (r, m) \mapsto \phi(r) \triangleright m$$

eine R -Modulstruktur auf $(M, +)$. Sie heißt **Restriktion der Skalare** oder **Pullback** des S -Moduls entlang ϕ .

Ein weiteres interessantes Beispiel ergibt sich, wenn man die R -Modulendomorphismen eines gegebenen R -Moduls $(M, +, \triangleright)$ betrachtet. Diese bilden mit der punktweisen Addition und der Verkettung einen Ring, den Endomorphismenring $\text{End}_R(M)$. Die abelsche Gruppe $(M, +)$ wird dann zu ein Modul über $\text{End}_R(M)$.

Beispiel 2.1.8:

- Für jeden R -Modul $(M, +, \triangleright)$ bilden die R -Modulendomorphismen von M mit der punktweisen Addition und der Verkettung einen Ring, der als **Endomorphismenring** des R -Moduls M und mit $\text{End}_R(M)$ bezeichnet wird.
- Die abelsche Gruppe M hat eine kanonische $\text{End}_R(M)$ -Modulstruktur

$$\triangleright' : \text{End}_R(M) \times M \rightarrow M, \quad \phi \triangleright' m = \phi(m).$$

- Die Modulendomorphismen des $\text{End}_R(M)$ -Moduls $(M, +, \triangleright')$ sind die Gruppenhomomorphismen $\psi : M \rightarrow M$, die mit allen R -Modulhomomorphismen vertauschen. Denn aus $\psi(\phi \triangleright' m) = \phi \triangleright' \psi(m)$ für alle R -Modulendomorphismen $\phi : M \rightarrow M$ folgt

$$\psi \circ \phi = \phi \circ \psi \quad \forall \phi \in \text{End}_R(M).$$

Die Modulendomorphismen des $\text{End}_R(M)$ -Moduls M bilden wieder einen Ring, den wir mit $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ bezeichnen.

- Der Ring $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ enthält alle Gruppenhomomorphismen $\phi_r : M \rightarrow M$, $m \mapsto r \triangleright m$ für $r \in R$, denn für jeden R -Modulhomomorphismus $\phi : (M, \triangleright) \rightarrow (M, \triangleright)$ gilt

$$\phi_r \circ \phi(m) = r \triangleright \phi(m) = \phi(r \triangleright m) = \phi \circ \phi_r(m).$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Abbildung $\phi : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$, $r \mapsto \phi_r$ ein Ringhomomorphismus ist. Wir werden diesen Ringhomomorphismus in Abschnitt ?? noch genauer untersuchen.

Aus den Beispielen wird deutlich, dass es sich bei Moduln über Ringen um eine sehr vielseitige und nützliche Struktur handelt, mit der sich viele schon bekannte Konzepte erfassen lassen. Fassen wir die bisher betrachteten Beispiele von Moduln über Ringen zusammen, so erhalten wir die Tabelle in Abbildung 1.

2.2 Konstruktionen mit Moduln: Untermoduln und Quotienten

Wir verallgemeinern nun grundlegende Konstruktionen mit Vektorräumen wie Unterräume und Quotientenräume, direkte Summen, Produkte und Tensorprodukte auf Moduln über Ringen. Die Definitionen und universellen Eigenschaften sind völlig analog zu den entsprechenden Konstruktionen von Vektorräumen. Sie bringen diese aber in Verbindung mit anderen bekannten Konstruktionen aus der Algebra und Darstellungstheorie.

Definition 2.2.1: Sei R ein Ring und $(M, +, \triangleright)$ ein Modul über R . Ein R -**Untermodul** von M ist eine Untergruppe $U \subset M$ der abelschen Gruppe M , die stabil unter der Operation des Rings R auf M ist: $r \triangleright u \in U$ für alle $r \in R$ und $u \in U$.

Bemerkung 2.2.2: Jeder R -Modul M besitzt mindestens zwei Untermoduln, nämlich $0 \subset M$ und $M \subset M$. Alle anderen Untermoduln von M werden als **echte Untermoduln** bezeichnet.

Beispiel 2.2.3:

1. Die Untermoduln eines Rings R als Links-, Rechts- oder Bimodul über sich selbst sind gerade die Links-, Rechts- und zweiseitigen Ideale von R .
2. Die Untermoduln eines \mathbb{Z} -Moduls M sind genau die Untergruppen der abelschen Gruppe M . In diesem Fall ist jede Untergruppe $U \subset M$ stabil unter der Wirkung von R .
3. Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so sind die Untermoduln eines \mathbb{K} -Moduls M gerade ein Untervektorräume von M .
4. Ist G eine Gruppe und \mathbb{K} ein Körper, so sind die Untermoduln eines $\mathbb{K}[G]$ -Moduls M gerade den Unterdarstellungen der zugehörigen Darstellung (ρ, M) .
5. Ist $R = \mathbb{K}[x]$, so ist ein R -Modul M nach Beispiel 2.1.7 und Aufgabe 37 ein Paar (M, ϕ) aus einem \mathbb{K} -Vektorraum M und einem Endomorphismus $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$. Die Untermoduln von M entsprechen den Untervektorräumen $U \subset M$, die stabil unter ϕ sind: $\phi(U) \subset U$.
6. Ist $\phi : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von R -Moduln, so sind $\ker(\phi) \subset M$ und $\text{im}(\phi) \subset N$ Untermoduln. Denn für $m \in \ker(\phi)$ gilt $\phi(r \triangleright m) = r \triangleright \phi(m) = r \triangleright 0 = 0$. Ebenso erhält man für $n = \phi(m) \in \text{Im}(\phi)$ die Identität $r \triangleright n = r \triangleright \phi(m) = \phi(r \triangleright m) \in \text{Im}(\phi)$.
7. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M , so sind auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ und ihre Summe $+_{i \in I} U_i = \{ \sum_{i \in I} u_i \mid u_i \in U_i, u_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \}$ Untermoduln von M .

Ähnlich wie Quotientenräume eines Vektorraums bezüglich einer Unterräume kann man auch Quotienten eines Moduls bezüglich eines Untermoduls bilden. Dieser trägt dann wieder eine kanonische R -Modulstruktur und zeichnet sich durch eine charakteristische Eigenschaft aus.

Beispiele von Moduln über Ringen:

Ring R	R -Moduln	R -Modulhomomorphismen
\mathbb{Z}	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen zwischen abelschen Gruppen
Körper \mathbb{K}	Vektorräume über \mathbb{K}	\mathbb{K} -lineare Abbildungen
Gruppenring $\mathbb{K}[G]$	Darstellungen von G über \mathbb{K}	Homomorphismen von Darstellungen
Polynomring $\mathbb{K}[X]$	\mathbb{K} -Vektorraum V mit linearer Abbildung $\phi_V : V \rightarrow V$	Lineare Abbildungen $\psi : V \rightarrow W$ mit $\phi_W \circ \psi = \psi \circ \phi_V$

Beispiele von Endomorphismenringen eines Moduln:

Modul	$\text{End}_R(M)$
Ring R als Linksmodul über sich selbst	Gruppenhomomorphismen $\phi : (R, +) \rightarrow (R, +)$ mit $\phi(r) = r \cdot \phi(1)$ für alle $r \in R$
Ring R als Rechtsmodul über sich selbst	Gruppenhomomorphismen $\phi : (R, +) \rightarrow (R, +)$ mit $\phi(r) = \phi(1) \cdot r$ für alle $r \in R$
Ring R als Bimodul über sich selbst	Gruppenhomomorphismen $\phi : (R, +) \rightarrow (R, +)$ mit $\phi(r) = r \cdot \phi(1) = \phi(1) \cdot r$ für alle $r \in R$
M als Modul über $\text{End}_R(M)$	Gruppenhomomorphismen $\psi : M \rightarrow M$ mit $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ für alle $\phi \in \text{End}_R(M)$.

Abbildung 1: Beispiele von Moduln über Ringen und von Endomorphismenringen

Satz 2.2.4: Sei M ein R -Modul, $U \subset M$ ein Untermodul und $\pi : M \rightarrow M/U$, $m \mapsto [m]$ die kanonische Surjektion auf die Faktorgruppe. Dann gilt:

1. Auf der abelschen Gruppe M/U existiert genau eine R -Modulstruktur, die $\pi : M \rightarrow M/U$ zu einem R -Modulhomomorphismus macht. Die abelsche Gruppe M/U mit dieser R -Modulstruktur wird als **Quotientenmodul** oder **Faktormodul** bezeichnet.
2. Zu jeder R -linearen Abbildung $\phi : M \rightarrow M'$ mit $U \subset \ker(\phi)$ gibt es genau eine R -lineare Abbildung $\phi' : M/U \rightarrow M'$ mit $\phi' \circ \pi = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \phi' & \\ M/U & & \end{array}$$

Dies wird als **charakteristische Eigenschaft** der Quotientenmoduln bezeichnet.

Beweis:

1. Die R -Linearität von $\pi : M \rightarrow M/U$, $m \mapsto [m]$ legt wegen der Surjektivität von π die R -Modulstruktur auf M/U eindeutig fest auf $r \triangleright [m] = r \triangleright \pi(m) = \pi(r \triangleright m) = [r \triangleright m]$ für alle $m \in M$. Zu zeigen ist, dass die Abbildung

$$\triangleright : R \times M/U \rightarrow M/U, (r, [m]) \mapsto [r \triangleright m]$$

wohldefiniert ist und tatsächlich eine R -Modulstruktur auf M/U definiert. Gilt $[m] = [m']$, so folgt $[m - m'] = 0$ und damit $m - m' \in U$. Da $U \subset M$ ein Untermodul ist, folgt $r \triangleright (m - m') \in U$ für alle $r \in R$ und damit $r \triangleright [m] = [r \triangleright m] = [r \triangleright m'] + [r \triangleright (m - m')] = [r \triangleright m'] = r \triangleright [m']$. Die übrigen Identitäten ergeben sich aus der R -Modulstruktur von M

$$\begin{aligned} r \triangleright ([m] + [m']) &= [r \triangleright (m + m')] = [r \triangleright m + r \triangleright m'] = [r \triangleright m] + [r \triangleright m'] = r \triangleright [m] + r \triangleright [m'] \\ (r + r') \triangleright [m] &= [(r + r') \triangleright m] = [r \triangleright m + r' \triangleright m] = [r \triangleright m] + [r' \triangleright m] = r \triangleright [m] + r' \triangleright [m] \\ 1 \triangleright [m] &= [1 \triangleright m] = [m] & (rr') \triangleright [m] &= [(rr') \triangleright m] = [r \triangleright (r' \triangleright m)] = r \triangleright (r' \triangleright [m]). \end{aligned}$$

2. Die Bedingung $\phi' \circ \pi = \phi$ legt die Abbildung $\phi' : M/U \rightarrow M'$ wegen der Surjektivität von π eindeutig fest, denn sie erzwingt $\phi'([m]) = \phi(m)$ für alle $m \in M$. Zu zeigen ist, dass

$$\phi' : M/U \rightarrow M', [m] \mapsto \phi(m)$$

wohldefiniert und R -linear ist. Gilt $[m] = [m']$, so folgt $m - m' \in U$ und wegen $U \subset \ker(\phi)$ auch $\phi(m - m') = 0$. Damit ergibt sich $\phi'([m]) = \phi(m) = \phi(m' + m - m') = \phi(m') + \phi(m - m') = \phi(m') = \phi'([m'])$. Die R -Linearität folgt direkt aus der R -Linearität von ϕ

$$\begin{aligned} \phi'(r \triangleright [m]) &= \phi'([r \triangleright m]) = \phi(r \triangleright m) = r \triangleright \phi(m) = r \triangleright \phi'([m]) \\ \phi'([m] + [m']) &= \phi'([m + m']) = \phi(m + m') = \phi(m) + \phi(m') = \phi'([m]) + \phi'([m']). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.5:

1. Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper und M ein R -Modul, so sind nach Beispiel 2.2.3 die Untermoduln von M gerade die Untervektorräume, und die Quotientenmoduln entsprechen Quotienten von Vektorräumen.

2. Ist $R = \mathbb{K}[G]$, so besagt Satz 2.2.4, dass jede Unterdarstellung $(\rho, U) \subset (\rho, M)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem Quotientenvektorraum M/U definiert (Aufgabe 13).
3. Im Fall eines Rings R als Links-, Rechts- oder Bimodul über sich selbst besagt Satz 2.2.4, dass jeder Quotient eines solchen Rings bezüglich eines Links-, Rechts- oder beidseitigen Ideals einen Links-, Rechts- oder Bimodul über dem Ring liefert.
4. Ist $R = \mathbb{K}[x]$, so ist ein R -Modul M nach Beispiel 2.1.7 und Aufgabe 37 ein Paar (M, ϕ) aus einem \mathbb{K} -Vektorraum M und einem Endomorphismus $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$, und die Untermoduln von M entsprechen nach Beispiel 2.2.3 den Untervektorräumen $U \subset M$, die stabil unter ϕ sind. Der Quotientenmodul M/U ist dann der Quotientenraum M/U zusammen mit dem Endomorphismus $\phi' : M/U \rightarrow M/U, m + U \mapsto \phi(m) + U$. Dass U stabil unter ϕ ist garantiert die Wohldefiniertheit von ϕ' .

Die Beschreibung von Quotientenmoduln durch eine charakteristische Eigenschaft hat zwei wesentliche Vorteile. Der erste ist, dass sie prägnant zusammenfasst, worum es in der Konstruktion eigentlich geht, nämlich um eine R -Modulstruktur auf der Faktorgruppe M/U , die mit der kanonischen Surjektion $\pi : M \rightarrow M/U$ verträglich ist.

Der zweite Vorteil ist, dass die charakteristische Eigenschaft es einem erlaubt, R -Modulhomomorphismen $\phi' : M/U \rightarrow M'$ durch R -Modulhomomorphismen $\phi : M \rightarrow M'$ mit $U \subset \ker(\phi)$ zu beschreiben, was oft deutlich einfacher ist als ein umständliches Rechnen mit Äquivalenzklassen. In vielen Beweisen wird die konkrete Definition der R -Modulstruktur auf dem Quotientenmodul überhaupt nicht benötigt, und man kommt schneller und eleganter zum Ziel, wenn man die charakteristische Eigenschaft benutzt. Dies wird unter anderem durch den Beweis der *Noetherschen Isomorphiesätze* illustriert, die auf die Erlanger Mathematikerin **Emmy Noether** zurückgehen. Die drei Noetherschen Homomorphiesätze erscheinen in einer etwas anderen Notation auf der Gedenktafel für Emmy Noether am Hörsaal H12.

Lemma 2.2.6: (Noethersche Homomorphiesätze)

1. Jeder R -Modulhomomorphismus $\phi : M \rightarrow N$ induziert einen R -Modulisomorphismus $\phi' : M/\ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$.
2. Sind $U \subset V \subset M$ Untermoduln eines R -Moduls M , so ist V/U ein Untermodul von M/U , und es existiert ein kanonischer R -Modulisomorphismus

$$\phi : (M/U)/(V/U) \rightarrow M/V.$$

3. Ist M ein R -Modul und $U, V \subset M$ Untermoduln, so sind auch $U \cap V \subset M$ und $U + V \subset M$ Untermoduln, und es existiert ein kanonischer R -Modulisomorphismus

$$\phi : V/(U \cap V) \rightarrow (U + V)/U.$$

Beweis:

1. Nach Beispiel 2.2.3, 6. ist $\ker(\phi) \subset M$ ein Untermodul. Nach der charakteristischen Eigenschaft des Quotienten existiert zu der R -linearen Abbildung $\phi'' : M \rightarrow \text{im}(\phi), m \mapsto \phi(m)$ genau eine R -lineare Abbildung $\phi' : M/\ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$ mit $\phi' \circ \pi = \phi''$, wobei $\pi : M \rightarrow M/\ker(\phi)$ die kanonische Surjektion bezeichnet. Da $\ker(\phi') = \pi(\ker(\phi'')) = \pi(\ker(\phi)) = 0$ ist ϕ' injektiv und wegen der Surjektivität von ϕ'' auch surjektiv.

2. Sind $U \subset V \subset M$ Untermoduln, so ist die Faktorgruppe V/U eine Untergruppe von M/U . Außerdem gilt $r \triangleright [v] = [r \triangleright v] \in V/U$ für alle $r \in R, v \in V$. Damit ist $V/U \subset M/U$ ein Untermodul. Die kanonische Surjektion $\pi_{M/V} : M \rightarrow M/V$ ist nach der charakteristischen Eigenschaft des Quotienten eine surjektive R -lineare Abbildung mit $\ker(\pi_{M/V}) = V$. Damit gilt $U \subset \ker(\pi_{M/V})$, und nach der charakteristischen Eigenschaft des Quotienten induziert sie eine surjektive R -lineare Abbildung $\pi'_{M/V} : M/U \rightarrow M/V$ mit $\pi'_{M/V} \circ \pi_{M/U} = \pi_{M/V}$. Diese erfüllt $\ker(\pi'_{M/V}) = \pi_{M/U}(\ker(\pi_{M/V})) = \pi_{M/U}(V) = V/U$ und induziert damit nach 1. einen R -Modulisomorphismus $\phi : (M/U)/(V/U) \rightarrow M/V$.

3. Nach Beispiel 2.2.3, 7. sind $U + V$ und $U \cap V$ Untermoduln von M . Wir betrachten die surjektive R -lineare Abbildung $\pi \circ \iota : V \rightarrow (U + V)/U, v \mapsto [v]$, wobei $\iota : V \rightarrow V + U$ die Inklusion und $\pi : V + U \rightarrow (V + U)/U$ die kanonische Surjektion bezeichnet. Dann gilt $\ker(\pi \circ \iota) = U \cap V$, und nach 1. induziert $\pi \circ \iota$ einen R -Modulisomorphismus $\phi : V/(U \cap V) \rightarrow (U + V)/U$. \square

Besonders wichtige Beispiele von Untermoduln ergeben sich, wenn man die Menge aller Ringelemente betrachtet, die eine gegebene Teilmenge eines Moduls auf die Null abbilden oder die Menge der Modulelemente, die von einem nichttrivialen Ringelement auf die Null abgebildet werden. Dies führt auf die Konzepte des *Annulators* und des *Torsionselements*. Die Präsenz von Torsionselementen führt oft dazu, dass Moduln über einem Ring ein kompliziertes Verhalten zeigen und erweist sich in vielen Fällen als ein Hindernis.

Definition 2.2.7: Sei R ein Ring und M ein R -Modul.

1. Der **Annulator** eines Elements $m \in M$ und einer Teilmenge $U \subset M$ sind die Mengen
$$\text{Ann}(m) = \{r \in R \mid r \triangleright m = 0\} \quad \text{Ann}(U) = \{r \in R \mid r \triangleright u = 0 \forall u \in U\} = \bigcap_{u \in U} \text{Ann}(u).$$
2. Ein Element $m \in M$ heißt **Torsionselement**, wenn $\text{Ann}(m) \neq \{0\}$. Die Menge der Torsionselemente in M wird mit $\text{Tor}_R(M)$ bezeichnet.
3. Der Modul M heißt **treu**, wenn $\text{Ann}(M) = \{0\}$ und **torsionsfrei**, wenn $\text{Tor}_R(M) = \{0\}$.

Bemerkung 2.2.8:

1. Der Annulator einer Teilmenge $U \subset M$ ist ein Linksideal in R .
Denn aus $r, r' \in \text{Ann}(U)$ und $r'' \in R$ folgt $(r + r') \triangleright u = r \triangleright u + r' \triangleright u = 0 + 0 = 0$ und $(r''r) \triangleright u = r'' \triangleright (r \triangleright u) = r'' \triangleright 0 = 0$ für alle $u \in U$.
2. Ist $U \subset M$ ein Untermodul, so ist $\text{Ann}(U)$ ein zweiseitiges Ideal in R .
Denn aus $r'' \triangleright u \in U$ für alle $r'' \in R, u \in U$ folgt $(rr'') \triangleright u = r \triangleright (r'' \triangleright u) = 0$ für alle $r \in \text{Ann}(U)$.

Beispiel 2.2.9:

1. Ist R ein Schiefkörper, so ist jeder R -Modul torsionsfrei und damit insbesondere treu.
Denn dann gilt $R^\times = R \setminus \{0\}$, und es folgt $r^{-1} \triangleright (r \triangleright m) = (r^{-1}r) \triangleright m = 1 \triangleright m = m$ für alle $r \in R \setminus \{0\}$ und damit $r \triangleright m \neq 0$ für alle $r \in R \setminus \{0\}, m \in M \setminus \{0\}$.

2. Jeder treue Modul über einer Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ definiert eine **treue Darstellung** der Gruppe G , also einen *injektiven* Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$.

Denn aus $\rho(g) = \rho(g')$ für $g \neq g' \in G$, folgt $0 \neq \delta_g - \delta_{g'} \in \text{Ann}(M)$. Es gibt aber treue Darstellungen von Gruppen, die keine treuen $\mathbb{K}[G]$ -Moduln sind, beispielsweise die Darstellung $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ mit $\rho(\bar{0}) = 1$ und $\rho(\bar{1}) = -1$.

3. Ein kommutativer Ring als Linksmodul über sich selbst ist torsionsfrei, genau dann, wenn er nullteilerfrei ist. Denn die Torsionselemente sind genau die Elemente $r \in R$ mit $s \triangleright r = sr = 0$ für ein $s \in R \setminus \{0\}$ und damit genau die Nullteiler von R .
4. Im \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist jedes Element ein Torsionselement, denn $n \triangleright \bar{m} = \overline{nm} = 0$ für alle $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Betrachtet man $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Modul über sich selbst, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nach 3. torsionsfrei genau dann, wenn n eine Primzahl ist.
5. Ein Modul über dem Polynomring $\mathbb{K}[x]$ ist nach Beispiel 2.1.7 und Aufgabe 37 ein Paar $M = (V, \phi)$ aus einem \mathbb{K} -Vektorraum V und einem Endomorphismus $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Ist $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, so ist $\text{Ann}(M) \subset \mathbb{K}[x]$ das von dem Minimalpolynom von ϕ erzeugte Ideal in $\mathbb{K}[x]$ und jedes Element von V ist ein Torsionselement (Übung).

Man beachte, dass die Menge $\text{Tor}_R(M)$ der Torsionselemente *kein* Untermodul eines R -Moduls M sein muss (Aufgabe 39). Für Moduln über einem Integritätsbereich R ist aber $\text{Tor}_R(M)$ ein Untermodul von M , und durch Quotientenbildung erhält man einen torsionsfreien Modul.

Satz 2.2.10: Ist M ein Modul über einem Integritätsbereich R , so ist $\text{Tor}_R(M) \subset M$ ein Untermodul von M und $M/\text{Tor}_R(M)$ ein torsionsfreier R -Modul.

Beweis:

1. Ist $m \in M$ ein Torsionselement, so gibt es ein Element $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r \triangleright m = 0$. Daraus folgt $0 = r' \triangleright (r \triangleright m) = (r'r) \triangleright m = (rr') \triangleright m = r \triangleright (r' \triangleright m)$, und damit ist auch $r' \triangleright m$ ein Torsionselement für alle $r' \in R$. Ist $m' \in M$ ein weiteres Torsionselement, so gibt es ein Element $r' \in R \setminus \{0\}$ mit $r' \triangleright m' = 0$, und es folgt $(r \cdot r') \triangleright (m + m') = (r'r) \triangleright m + (rr') \triangleright m' = r' \triangleright (r \triangleright m) + r \triangleright (r' \triangleright m) = 0$. Wegen der Nullteilerfreiheit von R ist $rr' \neq 0$, und damit ist auch $m + m'$ ein Torsionselement und $\text{Tor}_R(M)$ ein Untermodul von M .

2. Wir bezeichnen mit $[m]$ die Äquivalenzklasse eines Elements $m \in M$ in $M/\text{Tor}_R(M)$. Ist $[m]$ ein Torsionselement, so existiert ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r \triangleright [m] = [r \triangleright m] = 0$, und es folgt $r \triangleright m \in \text{Tor}_R(M)$. Also existiert ein $r' \in R \setminus \{0\}$ mit $r' \triangleright (r \triangleright m) = (r'r) \triangleright m = 0$, und da R ein Integritätsbereich ist, gilt $rr' \neq 0$. Also folgt $m \in \text{Tor}_R(M)$ und $[m] = 0$. \square

2.3 Konstruktionen mit Moduln: Summen und Produkte

Wir setzen nun die systematische Untersuchung der Eigenschaften von Moduln aus dem letzten Abschnitt fort und befassen uns mit Konstruktionen, die es uns erlauben aus Moduln oder Mengen neue Moduln zu bilden. Zunächst erhalten wir wie im Fall der Vektorräume und Grupendarstellungen einen Begriff von direkten Summen von Moduln.

Definition 2.3.1: Sei R ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Moduln, die durch eine Indexmenge I indiziert wird. Dann tragen die Mengen

$$M = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i, m_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

$$M' = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i\}$$

kanonische R -Modulstrukturen, die gegeben sind durch

$$(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} := (m_i + m'_i)_{i \in I} \quad r \triangleright (m_i)_{i \in I} := (r \triangleright m_i)_{i \in I}.$$

Die Menge M mit dieser R -Modulstruktur heißt **direkte Summe** der Moduln M_i und wird mit $\bigoplus_{i \in I} M_i$ bezeichnet. Die Menge M' mit dieser R -Modulstruktur wird als **direktes Produkt** der Moduln M_i und mit $\prod_{i \in I} M_i$ bezeichnet, für $I = \{1, \dots, n\}$ auch mit $M_1 \times \dots \times M_n$.

Auch die direkte Summe und das direkte Produkt von Moduln lassen sich durch universelle Eigenschaften charakterisieren. Die R -Modulstruktur auf $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist gerade dadurch bestimmt, dass sie mit den Inklusionsabbildungen $\iota_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ kompatibel ist und aus einer Familie von R -Modulhomomorphismen $\phi_i : M_i \rightarrow N$ einen R -Modulhomomorphismus $\bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ macht. Die R -Modulstruktur auf $\prod_{i \in I} M_i$ ist dadurch bestimmt, dass sie mit den Projektionsabbildungen $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ kompatibel ist und aus einer Familie von R -Modulhomomorphismen $\psi_j : L \rightarrow M_j$ einen R -Modulhomomorphismus $\psi : L \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ macht.

Satz 2.3.2: Sei R ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Dann gilt:

1. Die kanonische R -Modulstruktur auf M ist die einzige R -Modulstruktur auf M , die die Inklusionsabbildungen $\iota_j : M_j \rightarrow M$, $m \mapsto (\delta_{ij} m)_{i \in I}$ R -linear macht. Für jede Familie $(\phi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\phi_i : M_i \rightarrow N$ gibt es genau einen R -Modulhomomorphismus $\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ mit $\phi \circ \iota_i = \phi_i$ für alle $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\phi_i} & N \\ \iota_i \downarrow & \nearrow \exists! \phi & \\ \bigoplus_{j \in I} M_j & & \end{array}$$

Dies wird als **universelle Eigenschaft der direkten Summe** von Moduln bezeichnet.

2. Die kanonische R -Modulstruktur auf M' ist die einzige R -Modulstruktur auf M' , die die Projektionsabbildungen $\pi_i : M' \rightarrow M_i$, $(m_j)_{j \in I} \mapsto m_i$ R -linear macht. Für jede Familie $(\psi_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $\psi_i : L \rightarrow M_i$ gibt es genau einen R -Modulhomomorphismus $\psi : L \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ mit $\pi_i \circ \psi = \psi_i$ für alle $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xleftarrow{\psi_i} & L \\ \pi_i \uparrow & \nwarrow \exists! \psi & \\ \prod_{j \in I} M_j & & \end{array}$$

Die wird als **universelle Eigenschaft des direkten Produkts** von Moduln bezeichnet.

Beweis:

1. Dass die angegebene R -Modulstruktur auf M die Inklusionsabbildungen $\iota_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I} M_j$ zu R -Modulhomomorphismen macht, folgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} r \triangleright \iota_j(m) &= r \triangleright (m \delta_{ji})_{i \in I} = (\delta_{ij} r \triangleright m)_{i \in I} = \iota_j(r \triangleright m) \\ \iota_j(m) + \iota_j(m') &= (\delta_{ij} m)_{i \in I} + (\delta_{ij} m')_{i \in I} = (\delta_{ij} (m + m'))_{i \in I} = \iota_j(m + m') \end{aligned}$$

für alle $r \in R$ und $m, m' \in M_j$. Die Eindeutigkeit folgt, da sich jedes Element von M als *endliche* Summe $(m_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I, m_i \neq 0} \iota_i(m_i)$ schreiben lässt. Damit ist die R -Modulstruktur durch $r \triangleright \iota_j(m) = \iota_j(r \triangleright m)$ eindeutig bestimmt. Ist $(\phi_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Modulhomomorphismen $\phi_i : M_i \rightarrow N$, so ist

$$\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N, \quad (m_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \phi_i(m_i)$$

ein R -Modulhomomorphismus mit $\phi \circ \iota_i = \phi_i$. Denn ϕ ist wohldefiniert, da $(m_i)_{i \in I} \in M$ nur endlich viele nicht verschwindende Einträge m_i enthält. Außerdem gilt $\phi \circ \iota_j(m) = \phi((\delta_{ij} m)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \delta_{ij} \phi_i(m) = \phi_j(m)$. Nachrechnen zeigt, dass ϕ R -linear ist. Da jedes Element von M eine endliche Summe von Elementen $\iota_i(m_i)$ ist, bestimmt die Forderung $\phi \circ \iota_i = \phi_i$ den R -Modulhomomorphismus ϕ eindeutig.

2. Dass die angegebene R -Modulstruktur auf M' die Projektionsabbildungen $\pi_i : \prod_{j \in I} M_j \rightarrow M_i$ zu R -Modulhomomorphismen macht, folgt durch direktes Nachrechnen

$$\begin{aligned} \pi_j(r \triangleright (m_i)_{i \in I}) &= \pi_j((r \triangleright m_i)_{i \in I}) = r \triangleright m_j = r \triangleright \pi_j((m_i)_{i \in I}) \\ \pi_j((m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I}) &= \pi_j((m_i + m'_i)_{i \in I}) = m_j + m'_j = \pi_j((m_i)_{i \in I}) + \pi_j((m'_i)_{i \in I}). \end{aligned}$$

Andererseits ist die R -Modulstruktur auf M' durch diese Forderung eindeutig bestimmt. Ist $(\psi_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Modulhomomorphismen $\psi_i : L \rightarrow M_i$, so erhält man durch

$$\psi : L \rightarrow \prod_{i \in I} M_i, \quad l \mapsto (\psi_i(l))_{i \in I}$$

einen R -Modulhomomorphismus mit $\pi_i \circ \psi = \psi_i$, und dies bestimmt ψ eindeutig. \square

Offensichtlich stimmen die direkte Summe und das direkte Produkt von Moduln für endliche Indexmengen I überein, aber für unendliche Indexmengen ist dies nicht der Fall. Aus dem Beweis von Satz 2.3.2 wird deutlich, warum man im Fall der direkten Summe mit Inklusionsabbildungen und im Fall des direkten Produkts mit Projektionsabbildungen arbeiten muss.

Im Beweis der universellen Eigenschaft der direkten Summe, wird zum Beweis der Eindeutigkeit der R -Modulstruktur und für die Wohldefiniertheit der Abbildung $\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ benötigt, dass sich jedes Element von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ als *endliche* Linearkombination von Elementen im Bild der Inklusionsabbildungen darstellen lässt. Dies gilt im Fall unendlicher Indexmengen I nur für die direkte Summe, nicht aber für das direkte Produkt, wo die Bilder der Inklusionsabbildungen lediglich den echten Untermodul $\bigoplus_{i \in I} M_i \subset \prod_{i \in I} M_i$ erzeugen. Umgekehrt lässt sich für den Fall der direkten Summe kein R -Modulhomomorphismus $L \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ wie im Beweis des Lemmas definieren, außer man fordert zusätzlich, dass nur endlich viele der R -Modulhomomorphismen $\psi_i : L \rightarrow M_i$ nicht verschwinden.

Beispiel 2.3.3:

1. Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so entspricht die direkte Summe von \mathbb{K} -Moduln gerade der direkten Summe von Vektorräumen und das direkte Produkt von \mathbb{K} -Moduln dem direkten Produkt von Vektorräumen.
2. Ist G eine Gruppe und $R = \mathbb{K}[G]$, so entspricht die direkte Summe von R -Moduln gerade der direkten Summe von Darstellungen der Gruppe G über \mathbb{K} .

Bemerkung 2.3.4: Die direkte Summen und das direkte Produkte von R -Moduln sind, respektive, ein Koproduct und ein Produkt in der Kategorie $R\text{-Mod}$.

2.4 Erzeuger und Relationen

Wir untersuchen nun, wie sich Moduln über Ringen *konkret* beschreiben lassen, indem man eine Teilmenge von Elementen eines Moduls angibt, aus der alle anderen Elemente entweder durch Summenbildung oder durch die Ringoperation entstehen. Im Fall von Vektorräumen, ist dies bereits bekannt und führt auf den Begriff des Erzeugendensystems. Eine Basis ist ein besonders effizientes Erzeugendensystem, nämlich ein Erzeugendensystem, zwischen dessen Elementen keinerlei lineare Abhängigkeiten mehr bestehen.

Die Begriffe des Erzeugendensystems und der linearen Abhängigkeit lassen sich direkt auf Moduln verallgemeinern, aber man stellt fest, dass im Allgemeinen keine Basis existieren muss. Dadurch verliert man viele hilfreiche Eigenschaften von Vektorräumen, wie beispielsweise die Existenz von Komplementen, also die Tatsache, dass zu jedem Untervektorraum $U \subset V$ ein Untervektorraum $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$ und $W \cong V/U$ existiert. Für einen Untermodul $U \subset M$ kann man zwar den Quotientenmodul M/U betrachten, es muss im allgemeinen aber kein Untermodul $W \subset M$ mit $W \cong M/U$ und $M = U \oplus W$ existieren. Um die Situation für Moduln zu verstehen, müssen wir uns systematisch mit deren Beschreibung durch Erzeugendensysteme befassen, die eine kompliziertere Form annimmt als für Vektorräume.

Definition 2.4.1: Sei R ein Ring.

1. Der von einer Teilmenge $A \subset M$ eines R -Moduls (M, \triangleright) **erzeugte Untermodul** ist

$$\langle A \rangle_M = \{ \sum_{a \in A} r_a \triangleright a \mid r_a \in R, r_a = 0 \text{ für fast alle } a \in A \} = \bigcap_{\substack{U \subset M \text{ Untermodul} \\ A \subset U}} U$$

2. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **Erzeugendensystem** von M , wenn gilt $\langle A \rangle_M = M$. Ein Erzeugendensystem von M heißt **Basis** von M , wenn es linear unabhängig ist:

$$\sum_{a \in A} r_a \triangleright a = 0 \text{ mit } r_a \in R, r_a = 0 \text{ für fast alle } a \in A \quad \Rightarrow \quad r_a = 0 \quad \forall a \in A.$$

3. Ein R -Modul M heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt, **zyklisch**, wenn er ein Erzeugendensystem besitzt, das aus einem einzigen Element besteht, und **frei**, wenn er eine Basis besitzt.

Beispiel 2.4.2:

1. Jeder Ring R ist ein zyklischer freier Modul als Links- oder Rechtsmodul über sich selbst, denn es gilt $\langle 1 \rangle_R = R$ und aus $r \cdot 1 = 0$ oder $1 \cdot r = 0$ folgt $r = 0$. Damit ist $\langle 1 \rangle$ eine Basis.
2. Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so ist jeder Modul über \mathbb{K} ein freier Modul, denn jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
3. Der \mathbb{Z} -Modul $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist zyklisch mit Erzeugendensystem $\{\bar{1}\}$, aber kein freier Modul. Wäre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein freier \mathbb{Z} -Modul, müsste sich das Element $\bar{1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Linearkombination von Elementen einer Basis $B \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ darstellen lassen: $\bar{1} = \sum_{j=1}^n n_j \triangleright b_j$ mit $n_j \in \mathbb{Z}$. Dann wäre aber $\bar{0} = \bar{n} = \sum_{j=1}^n (nn_j) \triangleright b_j$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von B .
4. Analog zeigt man, dass jeder freie Modul über einem Integritätsbereich torsionsfrei ist.

Bemerkung 2.4.3:

1. Eine Teilmenge $B \subset M$ eines R -Moduls M ist eine Basis genau dann, wenn $M \cong \bigoplus_B R$ (Übung).
2. Ist M frei und endlich erzeugt, so hat M eine endliche Basis.

Denn dann hat M eine Basis B und ein endliches Erzeugendensystem $\{x_1, \dots, x_m\}$. Jeder der Erzeuger x_i läßt sich als *endliche* Linearkombination $x_i = \sum_{k=1}^{j_i} r_k^i \triangleright b_k^i$ von Basiselementen $b_k^i \in B$ darstellen. Damit ist auch $B' = \{b_1^1, \dots, b_{j_1}^1, \dots, b_1^m, \dots, b_{j_m}^m\} \subset B$ ein Erzeugendensystem von M und als Teilmenge einer linear unabhängigen Menge wieder linear unabhängig. Damit ist B' eine endliche Basis von M .

Wir untersuchen nun, welche Eigenschaften von Basen von Vektorräumen sich auf freie Moduln verallgemeinern lassen. Eine offensichtliche Frage ist, ob für freie Moduln ein Dimensionsbegriff existiert, also alle Basen eines freien Moduls gleiche Mächtigkeit besitzen. Dies ist der Fall, wenn man sich auf *kommutative* Ringe beschränkt.

Satz 2.4.4: Ist R ein kommutativer Ring und M ein freier R -Modul, so haben zwei Basen von M stets die gleiche Mächtigkeit. Die Anzahl der Elemente in einer Basis von M wird als **Rang** von M und mit $\text{rang}(M)$ bezeichnet.

Beweis:

Wir führen diese Aussage durch Quotientenbildung mit maximalen Idealen auf die entsprechende Aussage für Vektorräume zurück. Sei dazu $I \subsetneq R$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathbb{K} = R/I$ ein Körper. Die Menge $I \triangleright M = \{\sum_{j=1}^n i_j \triangleright m_j \mid n \in \mathbb{N}_0, i_j \in I, m_j \in M\} \subset M$ aller Linearkombinationen von Elementen aus M mit Koeffizienten aus I ist ein Untermodul von M , denn es gilt $r \triangleright (i \triangleright m) = (ri) \triangleright m \in I \triangleright M$ für alle $i \in I, r \in R$ und $m \in M$. Der Quotientenmodul $M/(I \triangleright M)$ ist ein Vektorraum über \mathbb{K} mit der Skalarmultiplikation $[r] \cdot [m] = [r \triangleright m]$. Sie ist wohldefiniert, denn aus $r - r' \in I$ und $m - m' \in I \triangleright M$ folgt

$$[r \triangleright m] - [r' \triangleright m'] = [r \triangleright m - r' \triangleright m'] = [(r - r') \triangleright m] + [r' \triangleright (m - m')] = [0] + [0] = 0.$$

Die Vektorraumaxiome ergeben sich durch direktes Nachrechnen aus den Modulaxiomen. Ist B eine Basis von M , so gilt $M \cong \bigoplus_B R$ und $I \triangleright M \cong \bigoplus_B I \cdot R = \bigoplus_B I$. Daraus folgt

$$M/(I \triangleright M) \cong (\bigoplus_B R)/(\bigoplus_B I) \cong \bigoplus_B (R/I) \cong \bigoplus_B \mathbb{K}$$

und damit $|B| = \dim_{\mathbb{K}}(M/I \triangleright M)$ für alle Basen B von M . □

Bemerkung 2.4.5: Für nicht-kommutative Ringe R folgt aus der Isomorphie $R^n \cong R^m$ als R -Linksmoduln nicht unbedingt $n = m$. Ein Gegenbeispiel wird in Aufgabe 50 konstruiert. Daher gibt es für nicht-kommutative Ringe keinen sinnvollen Dimensionsbegriff.

Eine weitere naheliegende Frage ist die nach der Existenz eines Komplements zu einem Untermodul $U \subset M$. Im Fall von Vektorräumen lassen sich Komplemente zu einem Untervektorraum mit Hilfe des Basisergänzungssatzes konstruieren. Sie werden unter anderem in vielen Induktionsbeweisen benutzt, wo eine Induktion über die Dimension des Vektorraums geführt wird, und dienen auch dazu, Quotienten eines gegebenen Vektorraums durch Untervektorräume zu beschreiben. Im Fall von Moduln über allgemeinen Ringen muss ein gegebener Untermodul nicht unbedingt ein Komplement besitzen. Man kann aber zeigen, dass sich die Existenz eines Komplements zu einem Untermodul $U \subset M$ mit der Frage zusammenhängt, ob der Quotientenmodul M/U frei ist. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Komplements lässt sich auch etwas allgemeiner formulieren, nämlich als die Forderung, dass der Modul U Kern einer surjektiven R -linearen Abbildung in einen freien Modul ist.

Satz 2.4.6: Sei R ein Ring, M ein R -Modul, F ein freier R -Modul und $\phi : M \rightarrow F$ surjektiv und R -linear. Dann existiert ein R -Modulhomomorphismus $\psi : F \rightarrow M$ mit $\phi \circ \psi = \text{id}_F$ und $M \cong \text{im}(\psi) \oplus \ker(\phi)$. Man sagt, ψ **spalte** ϕ .

Beweis:

Sei B eine Basis von F . Wir wählen zu jedem $b \in B$ ein Urbild $m_b \in \phi^{-1}(b)$ und definieren den R -Modulhomomorphismus $\psi : F \rightarrow M$ durch $\psi(\sum_{i=1}^k r_i \triangleright b_i) = \sum_{i=1}^k r_i \triangleright m_{b_i}$. Da F ein freier Modul ist, lässt sich jedes Element $f \in F$ eindeutig als endliche Linearkombination der Basiselemente darstellen und die Abbildung $\psi : F \rightarrow M$ ist wohldefiniert. Außerdem gilt per Definition $\phi \circ \psi = \text{id}_F$. Nun können wir jedes Element von M schreiben als $m = \psi \circ \phi(m) + (m - \psi \circ \phi(m))$ mit $\psi \circ \phi(m) \in \text{im}(\psi)$ und $\phi(m - \psi \circ \phi(m)) = \phi(m) - \phi \circ \psi \circ \phi(m) = \phi(m) - \phi(m) = 0$, also $m - \psi \circ \phi(m) \in \ker(\phi)$. Damit ist $M = \text{im}(\psi) + \ker(\phi)$. Ist $m = \psi(f) \in \text{im}(\psi) \cap \ker(\phi)$, so folgt $f = \phi \circ \psi(f) = \phi(m) = 0$ und $m = \psi(f) = 0$. Also gilt $\text{im}(\psi) \cap \ker(\phi) = \{0\}$ und $M = \text{im}(\psi) \oplus \ker(\phi)$. \square

Korollar 2.4.7: Sei M ein R -Modul und $U \subset M$ ein Untermodul, so dass der Quotientenmodul M/U ein freier Modul ist. Dann existiert ein Untermodul $W \subset M$ mit $W \cong M/U$ und $M \cong W \oplus U$.

Beweis:

Die kanonische Surjektion $\pi : M \rightarrow M/U$, $m \mapsto [m]$ ist ein surjektiver R -Modulhomomorphismus. Mit Satz 2.4.6 folgt, dass ein R -Modulhomomorphismus $\psi : M/U \rightarrow M$ existiert mit $\pi \circ \psi = \text{id}_{M/U}$ und $M \cong \text{im}(\psi) \oplus \ker(\pi) = \text{im}(\psi) \oplus U$. Wir können also den Untermodul $W = \text{im}(\psi)$ wählen. Per Definition ist $\pi|_W : W \rightarrow M/U$ surjektiv, und wegen $\pi \circ \psi = \text{id}_{M/U}$ ist $\pi|_W$ injektiv. Also ist $\pi|_W : W \rightarrow M/U$ ein Isomorphismus. \square

Nachdem nun geklärt ist, dass Moduln im allgemeinen weder Basen besitzen müssen noch sich als direkte Summe eines Untermoduls und eines Komplements aufspalten lassen, stellt sich die Frage wie man solche Moduln überhaupt möglichst effizient beschreibt bzw systematisch konstruiert. Die Antwort ist im wesentlichen, dass man sie als *Quotienten* von freien Moduln beschreibt. Das führt auf die sogenannten Präsentationen mit Erzeugern und Relationen.

Definition 2.4.8: Sei R ein Ring.

1. Der von einer Menge A **erzeugte freie R -Modul** ist die Menge

$$\langle A \rangle_R = \{f : A \rightarrow R : f(a) = 0 \text{ für fast alle } a \in A\}$$

mit der kanonischen R -Modulstruktur

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad (r \triangleright f)(a) = r \cdot f(a) \quad \forall f, g \in \langle A \rangle_R, r \in R, a \in A.$$

2. Für eine Teilmenge $B \subset \langle A \rangle_R$ des von A erzeugten freien Moduls bezeichnen wir mit $\langle A|B \rangle_R$ den Quotientenmodul $\langle A|B \rangle_R = \langle A \rangle_R / \langle B \rangle_{\langle A \rangle_R}$. Ist $M \cong \langle A|B \rangle_R$, so nennt man $\langle A|B \rangle_R$ eine **Präsentation** des R -Moduls M . Die Elemente von A heißen **Erzeuger** und die Elemente von B **Relationen**.

Bemerkung 2.4.9:

1. Für jede Menge A und jeden Ring R gilt $\langle A \rangle_R \cong \bigoplus_A R$. Eine Teilmenge $A \subset M$ ist eine Basis von M genau dann, wenn $M \cong \langle A \rangle_R$. Insbesondere bilden die Deltafunktionen $\delta_a : A \rightarrow R$ mit $\delta_a(a) = 1$ und $\delta_a(a') = 0$ für $a \neq a'$ eine Basis des von A erzeugten freien Moduls $\langle A \rangle_R$.
2. Der von einer Menge A erzeugte freie R -Modul hat die folgende **universelle Eigenschaft**:
Zu jeder Abbildung $f : A \rightarrow M$ in einen R -Modul M existiert genau eine R -lineare Abbildung $f' : \langle A \rangle_R \rightarrow M$ mit $f'(\delta_a) = f(a)$ für alle $a \in A$.
3. Der von einer Teilmenge $A \subset M$ erzeugte Untermodul $\langle A \rangle_M$ ist im Allgemeinen *nicht* isomorph zu dem von ihr erzeugten freien Modul $\langle A \rangle_R$.
Beispielsweise ist für $R = M = \mathbb{C}$ und $A = \{1, 2\}$ der von A frei erzeugte Vektorraum $\langle A \rangle_R$ isomorph zu \mathbb{C}^2 , während der von A erzeugte Unterraum $\langle A \rangle_M = \mathbb{C}$ ist.
4. Jeder R -Modul M besitzt eine Präsentation. Ist $\phi : \langle M \rangle_R \rightarrow M$ die R -lineare Abbildung, die nach 2. durch $\text{id}_M : M \rightarrow M$ induziert wird, so gilt

$$M = \text{im}(\phi) \cong \langle M \rangle_R / \ker(\phi) = \langle M \rangle_R / \langle \ker(\phi) \rangle_M = \langle M \mid \ker(\phi) \rangle_R.$$

Die Präsentation eines Moduls ist alles andere als eindeutig. In der Praxis bemüht man sich, mit möglichst wenigen Erzeugern und Relationen auszukommen.

5. Ist $M = \langle A|B \rangle_R$ eine Präsentation von M und $b - b' \in B$ eine Relation, so schreibt man oft auch $b = b'$ statt $b - b' \in B$.

Beispiel 2.4.10:

1. Eine Präsentation des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle 1|n \rangle$, denn der von $A = \{1\}$ erzeugte freie Modul ist isomorph zu \mathbb{Z} , und der von $B = \{n\} \subset \langle A \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$ erzeugte Untermodul ist $\langle B \rangle_{\mathbb{Z}} \cong n\mathbb{Z}$.
2. Allgemein sind Präsentationen von \mathbb{Z} -Moduln gerade die aus der Algebra bekannten Präsentationen von abelschen Gruppen.

3. Ein Modul über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$ entspricht nach Beispiel 2.1.7 einem Paar (V, ϕ) aus einem komplexen Vektorraum V und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Ist $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, so erhält man aus der Jordan-Normalform eine Präsentation von (V, ϕ) .

Der Vektorraum V lässt sich als direkte Summe $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ von Unterräumen V_i schreiben, die von Jordanketten erzeugt werden: $V_i = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\}$ mit $\phi(v_j^i) = \lambda_i v_j^i + v_{j+1}^i$ für $j = 1, \dots, n_i - 1$ und $\phi(v_{n_i}^i) = \lambda_i v_{n_i}^i$, wobei λ_i die Eigenwerte von ϕ bezeichnet. Damit erhält man eine Präsentation mit einer minimalen Anzahl an Erzeugern

$$(V, \phi) \cong \langle v_1^1, \dots, v_1^k \mid (\phi - \lambda_1 \text{id}_V)^{n_1}(v_1^1), \dots, (\phi - \lambda_k \text{id}_V)^{n_k}(v_1^k) \rangle_{\mathbb{C}[x]}.$$

4. Für eine Familie von Untermoduln $(M_i)_{i \in I}$ eines R -Moduls M ist die **Summe** definiert als der von ihrer Vereinigung erzeugten Untermodul

$$\Sigma_{i \in I} M_i := \langle \cup_{i \in I} M_i \rangle_M.$$

Die Summe $\Sigma_{i \in I} M_i$ einer Familie von Untermoduln $M_i \subset M$ ist das Bild der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} M_i$ unter dem durch die Inklusionen $j_i : M_i \rightarrow M$ induzierten R -Modulhomomorphismus $\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$. Er ist injektiv genau dann, wenn $M_i \cap (\Sigma_{j \in I \setminus \{i\}} M_j) = \{0\}$ für alle $i \neq j \in I$, und in diesem Fall gilt $\Sigma_{i \in I} M_i \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$. Man bezeichnet dann die Summe $\Sigma_{i \in I} M_i$ als **innere direkte Summe** und schreibt $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

2.5 Konstruktionen mit Moduln: Tensorprodukte über Ringen

Wir lernen nun eine weitere wichtige Konstruktion für Moduln kennen, das Tensorprodukt von Moduln über einem Ring R . Diese Konstruktion verallgemeinert das Tensorprodukt von Vektorräumen auf Moduln über Ringen. Allerdings liefert das Tensorprodukt von zwei R -Moduln im allgemeinen keinen R -Modul, sondern lediglich eine abelsche Gruppe. Um eine kanonische R -Modulstruktur auf dem Tensorprodukt zweier R -Moduln zu erhalten, muss man voraussetzen, dass der Ring R *kommutativ* ist. Wie auch im Fall der direkten Summen und Produkte werden wir sowohl eine konkrete Konstruktion als auch eine Charakterisierung mittels einer universellen Eigenschaft angeben.

Definition 2.5.1: Sei R ein Ring, (M, \triangleleft) ein R -Rechtsmodul und (N, \triangleright) ein R -Linksmodul. Das **Tensorprodukt** $M \otimes_R N$ wird präsentiert als die von der Menge $M \times N$ erzeugte abelsche Gruppe mit Relationen

$$\begin{aligned} \delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)} &= \delta_{(m+m',n)} & \delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')} &= \delta_{(m,n+n')} \\ \delta_{(m \triangleleft r, n)} &= \delta_{(m, r \triangleright n)} & \forall m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R, \end{aligned}$$

also als der Quotient der abelschen Gruppe $\langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}}$ bezüglich der von den Relationen erzeugten Untergruppe. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen von $\delta_{(m,n)}$ in $M \otimes_R N$ mit $m \otimes n$ und mit $\otimes = \pi \circ \iota : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ die Verkettung der Inklusion $\iota : M \times N \rightarrow \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}}$ mit der kanonischen Surjektion $\pi : \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow M \otimes_R N$.

Bemerkung 2.5.2:

1. Die Elemente $m \otimes n$ mit $m \in M, n \in N$ erzeugen die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$, denn die kanonische Surjektion $\pi : \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow M \otimes_R N$ ist surjektiv, und die Elemente $\delta_{(m,n)}$ bilden eine Basis von $\langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}}$. Jedes Element von $M \otimes_R N$ lässt sich also als endliche Summe von Elementen $m \otimes n$ schreiben.

2. Wir können die Relationen in Definition 2.5.1 auch als Rechenregeln in $M \otimes_R N$ auffassen:

$$\begin{aligned}(m + m') \otimes n &= m \otimes n + m' \otimes n, \\ m \otimes (n + n') &= m \otimes n + m \otimes n', \\ (m \triangleleft r) \otimes n &= m \otimes (r \triangleright n).\end{aligned}$$

3. Ist M ein R -Rechtsmodul und N ein (R, S) -Bimodul, so hat die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ auch die Struktur eines S -Rechtsmoduls mit $(m \otimes n) \triangleleft s := m \otimes (n \triangleleft s)$.

Analog hat für einen (Q, R) -Bimodul M und ein R -Linksmodul N das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ die Struktur eines Q -Linksmoduls mit $q \triangleright (m \otimes n) := (q \triangleright m) \otimes n$.

Für einen (Q, R) -Bimodul M und einen (R, S) -Bimodul N erhält $M \otimes_R N$ so die Struktur eines (Q, S) -Bimoduls.

4. Insbesondere besitzt für einen *kommutativen* Ring R das Tensorprodukt zweier R -Moduln stets eine kanonische R -Modulstruktur, denn jeder R -Linksmodul ist auch automatisch ein R -Rechtsmodul und ein (R, R) -Bimodul.

5. Da jeder R -Modul eine abelsche Gruppe ist, kann man stets Tensorprodukte von Moduln über \mathbb{Z} bilden. In diesem Fall folgt die Relation $(m \triangleleft r) \otimes n = m \otimes (r \triangleright n)$ aus den ersten beiden Relationen.

Beispiel 2.5.3:

1. Ist R ein Ring und $R^k := R \oplus R \oplus \dots \oplus R$ dessen k -fache direkte Summe, dann gilt $R^m \otimes_R R^n \cong R^{nm}$.

2. Ist R ein kommutativer Ring und bezeichnet $R[X_1, \dots, X_n]$ den Polynomring über R in den Variablen X_1, \dots, X_n , so gilt

$$R[X] \otimes_R R[Y] \cong R[X, Y].$$

3. Das Tensorprodukt der \mathbb{Z} -Moduln $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\text{ggT}(m, n)\mathbb{Z},$$

wobei $\text{ggT}(m, n)$ der größte gemeinsame Teiler von m und n ist (siehe Aufgabe 51).

4. Es gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \{0\}$, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$ ergibt sich:

$$\bar{k} \otimes q = \overline{k \cdot n} \otimes \frac{q}{n} = \bar{0} \otimes \frac{q}{n} = 0.$$

Analog kann man zeigen, dass für jeden Integritätsbereich R das Tensorieren eines R -Moduls M mit dem Quotientenkörper von R die Torsionselemente in M vernichtet.

Wie direkte Summen und Produkte von Moduln lässt sich auch das Tensorprodukt von Moduln nicht nur durch die konkrete Konstruktion in Definition 2.5.1 sondern auch durch eine universelle Eigenschaft beschreiben. Diese beruht auf dem Begriff einer R -bilinearen Abbildung.

Definition 2.5.4: Sei R ein Ring, (M, \triangleleft) ein R -Rechtsmodul, (N, \triangleright) ein R -Linksmodul und A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $f : M \times N \rightarrow A$ heißt **R -bilinear**, wenn für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} f(m + m', n) &= f(m, n) + f(m', n) \\ f(m, n + n') &= f(m, n) + f(m, n'), \\ f(m \triangleleft r, n) &= f(m, r \triangleright n). \end{aligned}$$

Satz 2.5.5: Sei R ein Ring, (M, \triangleleft) ein R -Rechtsmodul und (N, \triangleright) ein R -Linksmodul.

1. Die Abbildung $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ ist R -bilinear.
2. Ist A eine abelsche Gruppe und $f : M \times N \rightarrow A$ eine R -bilineare Abbildung, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $f' : M \otimes_R N \rightarrow A$ mit $f' \circ \otimes = f$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & A \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! f' & \\ M \otimes_R N & & \end{array}$$

Dies wird als **universelle Eigenschaft des Tensorprodukts** bezeichnet.

Beweis:

1. Dies gilt per Definition: die Relationen in Definition 2.5.1 sind gerade so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist.

2. Ist $f : M \times N \rightarrow A$ eine R -bilineare Abbildung, dann definieren wir $f' : M \otimes_R N \rightarrow A$ durch $f'(m \otimes n) = f(m, n)$ und additive Fortsetzung auf $M \otimes_R N$. Da die Elemente der Form $m \otimes n$ die abelschen Gruppe $M \otimes_R N$ erzeugen, ist f' dadurch eindeutig bestimmt. Zu zeigen ist noch, dass f' wohldefiniert ist. Dies folgt aus der R -Bilinearität von $f : M \times N \rightarrow A$:

$$\begin{aligned} f'((m + m') \otimes n) &= f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n) = f'(m \otimes n) + f'(m' \otimes n) \\ f'(m \otimes (n + n')) &= f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n') = f'(m \otimes n) + f'(m \otimes n') \\ f'((m \triangleleft r) \otimes n) &= f(m \triangleleft r, n) = f(m, r \triangleright n) = f'(m \otimes (r \triangleright n)). \end{aligned}$$

Per Definition ist f' ein Gruppenhomomorphismus und erfüllt die Bedingung $f' \circ \otimes = f$. Ist $f'' : M \otimes_R N \rightarrow A$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus mit dieser Eigenschaft, so folgt $(f'' - f')(m \otimes n) = f'' \circ \otimes(m, n) - f' \circ \otimes(m, n) = f(m, n) - f(m, n) = 0$ für alle $m \in M$, $n \in N$ und damit $f'' = f'$. \square

Wir untersuchen nun noch systematisch die Eigenschaften des Tensorprodukts. Der Nutzen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts lässt sich gut am Beweis des folgenden Satzes erkennen, der auch Tensorprodukte von Modulhomomorphismen definiert. Wie in diesem Beweis, reicht es zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer gesuchten Abbildung *aus einem Tensorprodukt*, eine entsprechende R -bilineare Abbildung *aus dem Produkt* zu konstruieren. Zum Nachweis, dass zwei solche Abbildungen gleich sind, reicht es dann aus, zu zeigen, dass sie beide die Bedingung aus der universellen Eigenschaft erfüllen.

Satz 2.5.6: (Tensorprodukt von Modulhomomorphismen)

Sei R ein Ring, M, M' R -Rechtsmoduln, N, N' R -Linksmoduln, $\phi : M \rightarrow M'$ ein Homomorphismus von R -Rechtsmoduln und $\psi : N \rightarrow N'$ ein Homomorphismus von R -Linksmoduln.

Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\phi \otimes \psi : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ mit $(\phi \otimes \psi) \circ \otimes = \otimes \circ (\phi \times \psi)$, das **Tensorprodukt** von ϕ und ψ

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi \times \psi} & M' \times N' \\ \downarrow \otimes & & \downarrow \otimes \\ M \otimes_R N & \xrightarrow{\exists! \phi \otimes \psi} & M' \otimes_R N'. \end{array}$$

Er erfüllt die Bedingungen:

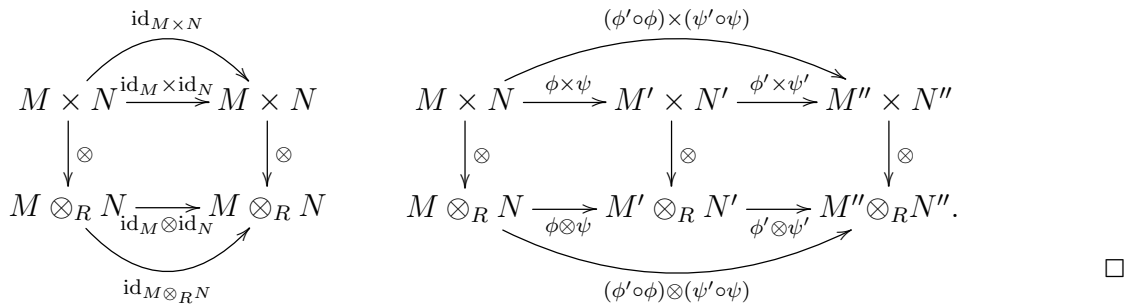
1. $(\phi_1 + \phi_2) \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \phi_1 \otimes \psi_1 + \phi_2 \otimes \psi_1 + \phi_1 \otimes \psi_2 + \phi_2 \otimes \psi_2$ für alle R -Rechtsmodulhomomorphismen $\phi_1, \phi_2 : M \rightarrow M'$ und R -Linksmodulhomomorphismen $\psi_1, \psi_2 : N \rightarrow N'$,
2. $\text{id}_M \otimes \text{id}_N = \text{id}_{M \otimes_R N}$ für alle R -Rechtsmoduln M und R -Linksmoduln N ,
3. $(\phi' \circ \phi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\phi' \otimes \psi') \circ (\phi \otimes \psi)$ für alle R -Rechtsmodulhomomorphismen $\phi : M \rightarrow M'$, $\phi' : M' \rightarrow M''$ und R -Linksmodulhomomorphismen $\psi : N \rightarrow N'$, $\psi' : N' \rightarrow N''$.

Beweis:

Die Abbildung $\otimes \circ (\phi \times \psi) : M \times N \rightarrow M' \otimes_R N'$, $(m, n) \mapsto \phi(m) \otimes \psi(n)$ ist R -bilinear:

$$\begin{aligned} \phi(m + m') \otimes \psi(n) &= (\phi(m) + \phi(m')) \otimes \psi(n) = \phi(m) \otimes \psi(n) + \phi(m') \otimes \psi(n) \\ \phi(m) \otimes \psi(n + n') &= \phi(m) \otimes (\psi(n) + \psi(n')) = \phi(m) \otimes \psi(n) + \phi(m) \otimes \psi(n') \\ \phi(m \triangleleft r) \otimes \psi(n) &= (\phi(m) \triangleleft r) \otimes \psi(n) = \phi(m) \otimes (r \triangleright \psi(n)) = \phi(m) \otimes \psi(r \triangleright n). \end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert damit genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi \otimes \psi : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ mit $(\phi \otimes \psi) \circ \otimes = \otimes \circ (\phi \times \psi)$. Die erste Identität ergibt sich direkt aus der Additivität von \otimes in beiden Argumenten. Die letzten beiden folgen aus der universellen Eigenschaft, denn die folgenden Diagramme kommutieren:



Satz 2.5.7: (Eigenschaften des Tensorprodukts)

Seien R, S Ringe, I eine Indexmenge, M, M_i R -Rechtsmoduln, N, N_i R -Linksmoduln für alle $i \in I$, P ein (R, S) -Bimodul und Q ein S -Linksmodul. Dann erhält man die folgenden Isomorphismen von abelschen Gruppen:

1. **Nullelement:** $0 \otimes_R N \cong 0 \cong M \otimes_R 0$.
2. **Einselement:** $R \otimes_R N \cong N$, $M \otimes_R R \cong M$.

3. **Distributivgesetz:** $M \otimes_R (\oplus_{i \in I} N_i) \cong \oplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i)$, $(\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \oplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.

4. **Assoziativgesetz:** $(M \otimes_R P) \otimes_S Q \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q)$.

Beweis:

1. Dies folgt direkt aus der Additivität des Tensorprodukts in beiden Argumenten und aus $0 \triangleright n = 0$ und $m \triangleleft 0 = 0$.

2. Der Gruppenhomomorphismus $\phi : R \otimes_R N \rightarrow N$, $r \otimes n \mapsto r \triangleright n$ hat die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : N \rightarrow R \otimes_R N$, $n \mapsto 1 \otimes n$, denn $\phi \circ \phi^{-1}(n) = 1 \triangleright n = n$ und $\phi^{-1} \circ \phi(r \otimes n) = 1 \otimes (r \triangleright n) = (1 \triangleleft r) \otimes n = r \otimes n$. Damit ist er ein Isomorphismus. Der Beweis, dass $M \otimes_R R \cong M$ ist analog.

3. Die Abbildung $\phi : (\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \rightarrow \oplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$, $(m_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}$ ist ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Wir betrachten die Inklusionen $\iota_i : M_i \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i$ und $j_i : M_i \otimes_R N \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$. Nach der universellen Eigenschaft der direkten Summe gibt es zu den Gruppenhomomorphismen $\iota_i \otimes \text{id}_N : M_i \otimes_R N \rightarrow (\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N$ genau einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \oplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \rightarrow (\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N$ mit $\psi \circ j_i = \iota_i \otimes \text{id}_N$, also mit $\psi((m_i \otimes n)_{i \in I}) = (m_i)_{i \in I} \otimes n$. Dies ist die Umkehrabbildung von ϕ .

4. Nachrechnen zeigt, dass $\phi : (M \otimes_R P) \otimes_S Q \rightarrow M \otimes_R (P \otimes_S Q)$, $(m \otimes p) \otimes q \mapsto m \otimes (p \otimes q)$ ein Gruppenhomomorphismus ist mit Inversem $\phi^{-1} : M \otimes_R (P \otimes_S Q) \rightarrow (M \otimes_R P) \otimes_S Q$, $m \otimes (p \otimes q) \mapsto (m \otimes p) \otimes q$. □

Bemerkung 2.5.8: Ist R ein kommutativer Ring, dann kann man nach Bemerkung 2.5.2 jeden R -Linksmodul auch als R -Rechtsmodul auffassen und umgekehrt. Das Tensorprodukt zweier R -Moduln M, N trägt dann eine kanonische R -Modulstruktur, die gegeben ist durch

$$r \triangleright (m \otimes n) := (r \triangleright m) \otimes n = (m \triangleleft r) \otimes n = m \otimes (r \triangleright n) = m \otimes (n \triangleleft r).$$

Das Tensorprodukt zweier R -Modulmorphisamen aus Satz 2.5.6 und die Gruppenisomorphismen aus Satz 2.5.7 sind dann auch Homomorphismen von R -Moduln.

Das Tensorprodukt von Moduln über Ringen besitzt viele nützliche Anwendungen. Eine davon ist die Konstruktion von Moduln über einem Ring R aus Moduln über einem Unterring $S \subset R$. Wählt man für R eine Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ und für S die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[H]$ einer Untergruppe $H \subset G$, so erlaubt es einem diese Konstruktion, Darstellungen der Gruppe G aus Darstellungen der Untergruppe $H \subset G$ zu konstruieren.

Dies spielt in der Darstellungstheorie eine wichtige Rolle und wird als *Induktion von Darstellungen* bezeichnet. Wir betrachten diese Konstruktion in einem etwas allgemeineren Rahmen, nämlich für zwei Ringe R, S die durch einen Ringhomomorphismus $\phi : R \rightarrow S$ in Beziehung stehen. Der Fall von Unterringen entspricht dem Spezialfall, in dem dieser Ringhomomorphismus eine Inklusionsabbildung ist.

Induzierte Modulstrukturen und induzierte Darstellungen stehen in enger Beziehung zu dem *Pullback von Modulstrukturen* und der *Restriktion von Darstellungen* aus Beispiel 2.2.3, 6 und Beispiel 1.1.3, 5. Die Beziehung zwischen den beiden Konstruktionen werden wir in Kapitel 5 über Kategorien und Funktoren noch genauer untersuchen und als Beispiel von *adjungierten Funktoren* identifizieren.

Beispiel 2.5.9: (Induktion von Darstellungen)

• Sei $\phi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann wird nach Beispiel 2.1.7, 8. jeder S -Modul (M, \triangleright) zu einem R -Modul (M, \triangleright_ϕ) mit $r \triangleright_\phi m = \phi(r) \triangleright m$ für alle $r \in R$ und $m \in M$. Wir bezeichnen diesen R -Modul mit $\text{Res}(M)$.

• Mit dem Tensorprodukt über R erhalten wir aus jedem R -Modul (N, \triangleright') einen S -Modul $(S \otimes_R N, \triangleright_\otimes)$. Dazu statten wir S mit der (S, R) -Bimodulstruktur $s \triangleright s' \triangleleft_\phi r = ss' \phi(r)$ aus und betrachten $S \otimes_R N$ mit der induzierten S -Linksmodulstruktur $s \triangleright_\otimes (s' \otimes n) = (ss') \otimes n$. Wir bezeichnen diesen S -Modul mit $\text{Ind}(N)$.

• Jeder R -Modulhomomorphismus $f : (N, \triangleright') \rightarrow (M, \triangleright_\phi)$ induziert dann einen S -Modulhomomorphismus $\text{Ind}(f) : (S \otimes_R N, \triangleright_\otimes) \rightarrow (M, \triangleright)$, $s \otimes n \mapsto s \triangleright f(n)$.

• Umgekehrt liefert jeder S -Modulhomomorphismus $g : (S \otimes_R N, \triangleright_\otimes) \rightarrow (M, \triangleright)$ einen R -Modulhomomorphismus $\text{Res}(g) : (N, \triangleright') \rightarrow (M, \triangleright_\phi)$, $n \mapsto g(1 \otimes n)$.

• Es gilt $\text{Ind}(\text{Res}(g)) = g$ für alle S -Modulhomomorphismen $g : (S \otimes_R N, \triangleright_\otimes) \rightarrow (M, \triangleright)$ und $\text{Res}(\text{Ind}(f)) = f$ für alle R -Modulhomomorphismen $f : (N, \triangleright') \rightarrow (M, \triangleright_\phi)$ und damit

$$\text{Hom}_R(N, \text{Res}(M)) \cong \text{Hom}_S(\text{Ind}(N), M)$$

als abelsche Gruppen. Diese Aussage wird als **Frobenius-Reziprozität** bezeichnet.

• Wählt man $S = \mathbb{K}[G]$ und $R = \mathbb{K}[H]$ für eine endliche Gruppe G und eine Untergruppe $H \subset G$ und für ϕ die Inklusion $\phi = \iota : \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[G]$, so ist $\text{Res}(M)$ gerade die Einschränkung einer Darstellung von G auf M auf die Untergruppe H . Die durch eine Darstellung (ρ, N) von H induzierte Darstellung von G auf $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} N$ ist dann gegeben durch

$$\rho_{\text{Ind}(N)}(g)(\delta_{g'} \otimes n) = \delta_{gg'} \otimes n \quad \forall g \in G, f \in \mathbb{K}[G], n \in N.$$

2.6 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 31: Sei R ein Ring, der isomorph zu seinem opponierten Ring R^{op} ist. Impliziert dies, dass R kommutativ ist? Beweisen Sie dies oder widerlegen Sie es durch ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 32: Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder R -Linksmodul $(M, +, \triangleright)$ durch $\triangleleft' : M \times R^{op} \rightarrow M, m \triangleleft' r = r \triangleright m$ die Struktur eines R^{op} -Rechtsmoduls erhält und jeder R -Rechtsmodul $(M, +, \triangleleft)$ durch $\triangleright' : R^{op} \times M \rightarrow M, r \triangleright' m = m \triangleleft r$ die Struktur eines R^{op} -Linksmoduls.

Aufgabe 33: Sei M eine abelsche Gruppe und R ein Ring. Beweisen Sie:

- (a) Ist $\phi : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ein Ringhomomorphismus, so definiert $\triangleright : R \times M \rightarrow M, r \triangleright m = \phi(r)m$ eine R -Modulstruktur auf M .
- (b) Definiert $\triangleright : R \times M \rightarrow M$ eine R -Modulstruktur auf M , so ist $\phi : R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M), r \mapsto \phi_r \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ mit $\phi_r(m) = r \triangleright m$ für alle $m \in M$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 34: Sei M eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

- (a) M hat höchstens eine \mathbb{Q} -Modulstruktur.
- (b) Ist M endlich und $M \neq 0$, so hat M keine \mathbb{Q} -Modulstruktur.

Aufgabe 35: Der Ring der **Gaußschen Zahlen** ist der Unterring

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen. Bestimmen Sie alle $\mathbb{Z}[i]$ -Modulstrukturen auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 36: Sei G eine Gruppe und \mathbb{K} ein Körper.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[G]$ -Moduln genau den Darstellungen von G über \mathbb{K} entsprechen und $\mathbb{K}[G]$ -Modulhomomorphismen den Homomorphismen von Darstellungen.
- (b) Charakterisieren Sie analog die Moduln und Modulhomomorphismen über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$.
- (c) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ -Modulstrukturen auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 37: Sei \mathbb{K} ein Körper und $\mathbb{K}[x]$ der Ring der Polynome über \mathbb{K} .

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[x]$ -Moduln Paaren (V, ϕ) aus einem \mathbb{K} -Vektorraum V und einer \mathbb{K} -linearen Abbildung $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ entsprechen. Charakterisieren Sie die $\mathbb{K}[x]$ -Modulhomomorphismen $f : (V, \phi) \rightarrow (V', \phi')$.

- (b) Zeigen Sie, dass Untermoduln eines $\mathbb{K}[x]$ -Moduls $M = (V, \phi)$ den Untervektorräumen $U \subset V$ mit $\phi(U) \subset U$ entsprechen.

Aufgabe 38: Ein R -Modul M heißt zyklisch, wenn ein Element $m \in M$ existiert mit

$$M = \{r \triangleright m \mid r \in R\}.$$

Zeigen Sie, dass jeder zyklische R -Modul isomorph ist zu einem Quotientenmodul der Form R/I , wobei R als Linksmodul über sich selbst betrachtet wird und $I \subset R$ ein Linksideal ist.

Aufgabe 39: Finden Sie einen kommutativen Ring R und einen R -Modul M , so dass $\text{Tor}_R(M)$ kein Untermodul von M ist.

Aufgabe 40: Finden Sie einen Ring R und einen R -Modul M , so dass M treu, aber nicht torsionsfrei ist.

Aufgabe 41: Finden Sie einen Ring R und einen R -Modul M , so dass M treu ist und jedes Element ein Torsionselement ist.

Aufgabe 42: Bestimmen Sie den Annulator des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$, mit $q_i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 43: Wir betrachten für $\Lambda \in \mathbb{R}$ den Ring $R_\Lambda = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit Ringaddition und Ringmultiplikation

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + \Lambda bd, ad + bc).$$

- (a) Zeigen Sie, dass es sich dabei um einen kommutativen Ring mit Einselement handelt.
(b) Bestimmen Sie für $\Lambda = 0, 1, -1$ die Torsionselemente von R_Λ als Linksmodul über sich selbst und untersuchen Sie, ob die Menge der Torsionselemente einen Untermodul bildet.

Aufgabe 44:

- (a) Zeigen Sie, dass jeder freie Modul über einem Integritätsbereich R torsionsfrei ist.
(b) Geben Sie einen Ring R und einen freien R -Modul M an, der nicht torsionsfrei ist.
(c) Zeigen Sie, dass jeder endlich erzeugte torsionsfreie \mathbb{Z} -Modul frei ist.

Aufgabe 45: Sei R ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln.

- (a) Zeigen Sie dass für jede Indexmenge I und jeden R -Modul M gilt $\bigoplus_{i \in I} R \cong \langle I \rangle_R$, wobei $\langle I \rangle_R$ den von I erzeugten freien R -Modul bezeichnet.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften von direkter Summe und direktem Produkt, *ohne die explizite Definition* zu benutzen, dass $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \prod_{i \in I} M_i$ für alle *endlichen* Indexmengen I gilt.

Hinweis: Betrachten Sie in (b) die Abbildungen $f_{ij} : M_i \rightarrow M_j$ mit $f_{ij} = 0 : M_i \rightarrow M_j$ für $i \neq j$ und $f_{ii} = \text{id}_{M_i} : M_i \rightarrow M_i$ für alle $i \in I$ und konstruieren Sie daraus eine R -lineare Abbildung $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$.

Aufgabe 46: Geben Sie eine Präsentation des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ durch Erzeuger und Relationen an. Versuchen Sie dabei, mit möglichst wenigen Erzeugern und Relationen auszukommen.

Aufgabe 47: Wir betrachten die \mathbb{Z} -Moduln mit Erzeugern x, y und Relationen

- (a) $x + 4y = 0$,
- (b) $x + 3y = 0, 6y = 0$,
- (c) $3x + 4y = 0$.
- (d) $2x + 4y = 0$.

Geben Sie jeweils einen \mathbb{Z} -Modul der Form $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_l\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen q_1, \dots, q_l an, zu dem die betrachteten Moduln isomorph sind.

Aufgabe 48: Wir betrachten die abelsche Gruppe G mit Erzeugern x, y und einer Relation der Form $ax + by = 0$ für vorgegebene $a, b \in \mathbb{Z}$. Geben Sie eine abelsche Gruppe der Form

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_l\mathbb{Z}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen q_1, \dots, q_l an, zu der die abelsche Gruppe G isomorph ist.

Aufgabe 49: Bestimmen Sie für die folgenden abelschen Gruppen A abelsche Gruppen der Form $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_i \in \mathbb{N}$, die zu A isomorph sind.

- (a) $A = \langle x, y, z \mid x - y, x + z \rangle_{\mathbb{Z}}$
- (b) $A = \langle x, y, z \mid x - y, x + y \rangle_{\mathbb{Z}}$
- (c) $A = \langle x, y, z \mid x + y + z, x - y \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 50: Sei V ein unendlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit abzählbarer Basis $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $R = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ der Ring der \mathbb{K} -linearen Abbildungen $V \rightarrow V$.

(a) Zeigen Sie, dass zu den \mathbb{K} -linearen Abbildungen $\phi, \psi : V \rightarrow V$ mit

$$\phi(b_{2n}) = b_n, \phi(b_{2n-1}) = 0 \quad \psi(b_{2n}) = 0, \psi(b_{2n-1}) = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

\mathbb{K} -lineare Abbildungen $\alpha, \beta : V \rightarrow V$ existieren mit $1 = \alpha \circ \phi + \beta \circ \psi$.

(b) Folgern Sie, dass der Ring R als Linksmodul über sich selbst gegeben ist durch die direkte Summe $R = (R \triangleright \phi) \oplus (R \triangleright \psi)$, wobei $R \triangleright m := \{r \triangleright m \mid r \in R\}$.

(c) Folgern Sie: $R \cong R \oplus R$, und somit $R^k \cong R^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 51: Beweisen Sie, dass für das Tensorprodukt der \mathbb{Z} -Moduln $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\text{ggT}(n, m)\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 52: Sei R ein Integritätsbereich, \mathbb{K} der zugehörige Quotientenkörper und M ein Modul über R . Beweisen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{K} \otimes_R \text{Tor}_R(M) = 0.$$

Aufgabe 53: Seien M, N Moduln über einem Polynomring $\mathbb{K}[x]$ für einen Körper \mathbb{K} . Zeigen Sie, dass dann

$$M \otimes_{\mathbb{K}[x]} N \cong (M \otimes_{\mathbb{K}} N) / \text{im}(F)$$

als \mathbb{K} -Vektorräume für eine geeignete \mathbb{K} -lineare Abbildung $F \in \text{End}_{\mathbb{K}}(M \otimes_{\mathbb{K}} N)$ gilt und bestimmen Sie F .

Aufgabe 54: Seien R, S Ringe.

(a) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$ eine kanonische Ringstruktur hat. Geben Sie die Ringmultiplikation explizit an, und bestimmen Sie das neutrale Element.

(b) Beweisen Sie, dass (R, S) -Bimodulstrukturen auf einer abelschen Gruppe M eins-zu-eins den $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$ -Linksmodulstrukturen auf M entsprechen.

Aufgabe 55: Wir betrachten $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und die Untergruppe $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Für einen $\mathbb{C}[H]$ -Modul M bezeichnen wir mit $\text{Ind}_H^G(M)$ den $\mathbb{C}[G]$ -Modul $\mathbb{C}^G \otimes_{\mathbb{C}[H]} M$, wobei \mathbb{C}^G mit der kanonischen $\mathbb{C}[G]$ -Modulstruktur und ihrer Einschränkung auf $\mathbb{C}[H]$ ausgestattet ist.

(a) Zeigen Sie: Für $M = \mathbb{C}^H$ gilt $\text{Ind}_H^G(\mathbb{C}^H) \cong \mathbb{C}^G$ als $\mathbb{C}[G]$ -Moduln.

(b) Sei nun M der durch eine einfache komplexe Darstellung von H definierte $\mathbb{C}[H]$ -Modul. Berechnen Sie den Charakter von $\text{Ind}_H^G(M)$ und die Multiplizitäten der einfachen komplexen Darstellungen von G in $\text{Ind}_H^G(M)$.

3 Klassifikation von Moduln über Hauptidealringen

3.1 Beschreibung von Modulhomomorphismen durch Matrizen

Nachdem wir uns im letzten Kapitel mit grundlegenden Konstruktionen für Moduln befasst haben, können wir nun die Struktur von Moduln systematisch untersuchen und Moduln unter bestimmten Zusatzannahmen vollständig klassifizieren. Dabei ist man wieder nur an der Klassifikation bis auf Isomorphie interessiert. Prinzipiell sind zwei Arten von Zusatzannahmen für die Klassifikation denkbar: Einschränkungen an den zugrundeliegenden Ring und Einschränkungen an den Modul selbst. Im Fall der Klassifikation von Darstellungen einer endlichen Gruppe würde ersteres beispielsweise der Beschränkung auf komplexe Darstellungen einer gegebenen Gruppe und letzteres der Beschränkung auf einfache oder halbeinfache Darstellungen entsprechen.

Wir befassen uns zunächst mit der Klassifikation *endlich erzeugter* Moduln unter einschränkenden Annahmen an den zugrundeliegenden Ring. Der einfachst mögliche Fall wäre es, zu fordern, dass der zugrundeliegende Ring ein Körper ist. Endlich erzeugte Moduln über einem Körper \mathbb{K} sind aber gerade endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, die bereits im Rahmen der linearen Algebra vollständig klassifiziert wurden. Die Klassifikation endlich erzeugter \mathbb{K} -Moduln bis auf Isomorphie entspricht nämlich gerade der Aussage, dass jeder endlich-dimensionale Vektorraum V über \mathbb{K} isomorph zu $\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$ ist. Die Isomorphieklassen von endlich erzeugten \mathbb{K} -Moduln werden also durch Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ indiziert.

Möchte man die einschränkenden Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Ring lockern, um interessantere Beispiele zu untersuchen, so ist der nächste einfache Fall der eines Hauptidealrings. In diesem Abschnitt werden wir also endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen bis auf Isomorphie vollständig klassifizieren. Dies ist eine Verallgemeinerung der Klassifikation von Vektorräumen und des Klassifikationssatzes für abelsche Gruppen, denn sowohl Körper als auch der Ring \mathbb{Z} sind Hauptidealringe.

Offensichtlich wird man dabei nicht mehr mit dem Rang des Moduls als alleiniges Klassifikationsmerkmal auskommen, denn dieser existiert nur für freie Moduln, aber nicht jeder Modul über einem Hauptidealring ist frei. Im Fall von Moduln über Hauptidealringen ergibt sich aber im Vergleich zu Moduln über beliebigen Ringen dennoch eine wichtige Vereinfachung, nämlich die Aussage, dass jeder Modul Quotient eines freien Moduls bezüglich eines *freien Untermoduls* ist. Da jeder Modul eine Präsentation besitzt, sich also als Quotient $M \cong F/U$ eines freien Moduls F bezüglich eines Untermoduls $U \subset F$ schreiben lässt, reicht es zu zeigen, dass jeder Untermodul eines freien Moduls frei ist.

Satz 3.1.1: Ist M ein freier Modul über einem Hauptidealring R , so ist auch jeder Untermodul $U \subset M$ frei, und es gilt $\text{rang}(U) \leq \text{rang}(M)$.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage für freie Moduln endlichen Rangs durch Induktion über $\text{rang}(M)$. Der allgemeine Fall wird mit dem Zornschen Lemma bewiesen, siehe z. B. [SS, Satz IIIb.3].

$n = 0$: Aus $\text{rang}(M) = 0$ folgt $M = \{0\}$. Damit ist M der von der leeren Menge erzeugte freie Modul, und die Aussage ist wahr.

$n \rightarrow n + 1$: Sei die Aussage bewiesen für freie Moduln von Rang $\leq n - 1$ und M ein freier Modul vom Rang n . Dann ist für jede Basis $B = \{m_1, \dots, m_n\}$ von M der Untermodul

$M' = \langle \{m_2, \dots, m_n\} \rangle_M \subset M$ ein freier Modul vom Rang $n - 1$. Für jeden Untermodul $U \subset M$ ist $U' = U \cap M'$ ein Untermodul von M' und besitzt damit nach Induktionsvoraussetzung eine Basis $B_{U'} = \{u_1, \dots, u_t\}$ mit $t \leq n - 1$. Wir betrachten nun das Linksideal

$$I = (s) = \{r \in R \mid \exists r_2, \dots, r_n \in R \text{ mit } r \triangleright m_1 + \sum_{i=2}^n r_i \triangleright m_i \in U\} \subset R.$$

• Ist $s = 0$, so folgt $I = 0$ und $U = U' \subset M'$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $U = U'$ ein freier Modul vom Rang $\leq n - 1 < n$, und die Aussage ist bewiesen.

• Ist $s \neq 0$, so gibt es $s_2, \dots, s_n \in R$ mit $u_0 := s \triangleright m_1 + \sum_{i=2}^n s_i \triangleright m_i \in U \setminus \{0\}$ (*). Wir zeigen, dass dann $\{u_0, u_1, \dots, u_t\}$ eine Basis von U ist:

Jedes Element $u \in U$ lässt sich als Linearkombination der Basiselemente m_1, \dots, m_n schreiben als $u = \sum_{i=1}^n r_i \triangleright m_i$ (**). Dann gilt $r_1 \in I$ und damit gibt es ein $r \in R$ mit $r_1 = rs$. Es folgt

$$u = r \triangleright u_0 + u - r \triangleright u_0 \quad \text{mit} \quad u - r \triangleright u_0 \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=2}^n (r_i - rs_i) \triangleright m_i \in U \cap M' = U'.$$

Also gilt $u \in \langle \{u_0, \dots, u_t\} \rangle_M$ und $\{u_0, u_1, \dots, u_t\}$ erzeugt U . Ist $\sum_{i=0}^t r_i \triangleright u_i = 0$, so folgt

$$0 = r_0 \triangleright u_0 + \sum_{i=1}^t r_i \triangleright u_i \stackrel{(**)}{=} (r_0 s) \triangleright m_1 + \sum_{i=2}^n (r_0 s_i) \triangleright m_i + \sum_{i=1}^t r_i \triangleright u_i \in (r_0 s) \triangleright m_1 + M'.$$

Da $\{m_1, \dots, m_n\}$ eine Basis von M ist, folgt $r_0 s = 0$. Da R nullteilerfrei ist und $s \neq 0$, ergibt das $r_0 = 0$ und $\sum_{i=1}^t r_i \triangleright u_i = 0$. Da $\{u_1, \dots, u_t\}$ eine Basis von U' ist, folgt daraus $r_1 = \dots = r_t = 0$. Also ist $\{u_0, u_1, \dots, u_t\}$ linear unabhängig, und es ist gezeigt, dass $U \subset M$ ein freier Modul mit Rang $\text{rang}(U) = 1 + t \leq n = \text{rang}(M)$ ist. \square

Nach Satz 3.1.1 ist also jeder Modul über einem Hauptidealring ein Quotient $M \cong F/U$ eines freien Moduls F bezüglich eines *freien* Untermoduls $U \subset F$. Um endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen zu klassifizieren, müssen wir die Struktur der Untermoduln $U \subset F$ verstehen, die den Relationen in der Präsentation des Moduls M entsprechen und diese Relationen in eine möglichst einfache Form bringen. Dies ist äquivalent dazu, Basen von U und von F zu finden, bezüglich derer die Inklusionsabbildung $\iota : U \rightarrow F$ eine besonders einfache Form hat.

Da wir nur endlich erzeugte freie Moduln über einem Hauptidealring R betrachten, können wir dabei mit Matrizen arbeiten, die R -lineare Abbildungen durch ihre Werte auf Basen charakterisieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass sich Matrizen über einem Ring R völlig analog zu Matrizen über Körpern definieren lassen und auch analoge Eigenschaften aufweisen. In nicht-kommutativen Ringen R muss man dabei allerdings bei der Matrixmultiplikation auf die Reihenfolge der Einträge achten. Das Konzept der Determinante ist für allgemeine Ringe nicht sinnvoll, verallgemeinert sich aber auf *kommutative* Ringe.

Bemerkung 3.1.2:

- Für jeden Ring R bilden die $n \times m$ -Matrizen mit Einträgen in R einen R -Modul mit der üblichen Matrixaddition und der Strukturabbildung

$$\triangleright : R \times \text{Mat}(n \times m, R) \rightarrow \text{Mat}(n \times m, R), \quad r \triangleright (m_{ij}) = (rm_{ij}).$$

- Für jeden Ring R ist die Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

assoziativ und erfüllt die Distributivgesetze. Damit ist insbesondere $\text{Mat}(n \times n, R)$ ein Ring mit Einselement.

- Ist R kommutativ, so ist die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times n, R)$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Sie erfüllt die Bedingung $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für alle $A, B \in \text{Mat}(n \times n, R)$.

- Aus der Cramerschen Regel, die auch über kommutativen Ringen R gilt, folgt, dass eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, R)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \in R$ eine Einheit ist.
- Die invertierbaren Matrizen in $\text{Mat}(n \times n, R)$ bilden mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe $\text{GL}_R(n)$. Ist R kommutativ, so bilden die Matrizen $A \in \text{Mat}(n \times n, R)$ mit $\det(A) = 1$ eine Untergruppe $\text{SL}_R(n) \subset \text{GL}_R(n)$.

Mit dem folgenden Satz können wir dann analog zu linearen Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen R -Modulhomomorphismen zwischen endlich erzeugten *freien* R -Moduln durch Matrizen erfassen. Der Beweis der Aussagen in diesem Satzes ist völlig analog zum Beweis der entsprechenden Aussagen für Vektorräume. Er ergibt sich, indem man die Skalarmultiplikationen der Vektorräume durch die Strukturabbildungen der R -Moduln ersetzt.

Satz 3.1.3: Sei R ein kommutativer Ring und M, N endlich erzeugte freie R -Moduln mit geordneten Basen $B = (b_1, \dots, b_m)$ und $C = (c_1, \dots, c_n)$. Dann gilt:

1. Zu jeder R -linearen Abbildung $f : M \rightarrow N$ gibt es genau eine Matrix $M_f^{B,C} = (f_{ij}) \in \text{Mat}(n \times m, R)$ mit

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^n f_{ji} \triangleright c_j \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

2. Die Abbildung $M^{B,C} : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Mat}(n \times m, R)$, $f \mapsto M_f^{B,C}$ ist R -linear.
3. Für jeden R -Modulhomomorphismus $g : N \rightarrow P$ und jede geordnete Basis $D = (d_1, \dots, d_p)$ von P gilt: $M_g^{C,D} \cdot M_f^{B,C} = M_{g \circ f}^{B,D}$.
4. Für jede Matrix $M \in \text{Mat}(n \times m, R)$ erhält man einen R -Modulhomomorphismus

$$F_M : R^m \rightarrow R^n, \quad v \mapsto M \cdot v$$

Aus diesem Satz ergibt sich insbesondere, dass Basiswechsel der Links- und Rechtsmultiplikation der beschreibenden Matrix einer R -linearen Abbildung mit *invertierbaren* Matrizen entsprechen. Um Basen zu finden, für die die beschreibende Matrix einer R -linearen Abbildung eine besonders einfache Form hat, müssen wir also untersuchen, inwieweit sich eine Matrix mit Einträgen in einem Hauptidealring R durch Links- und Rechtsmultiplikation mit *invertierbaren* Matrizen in eine besonders einfache Matrix überführen lässt, etwa in eine Diagonalmatrix.

Im Fall von Matrizen mit Einträgen in einem Körper ist dies mit den Gauß-Verfahren stets möglich. Die dabei auftretenden Operationen - Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Element des Körpers, Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten und Hinzuaddieren von Vielfachen von Zeilen oder Spalten zu anderen Zeilen oder Spalten - entsprechen dabei gerade der Links- und Rechtsmultiplikation mit den sogenannten *Elementarmatrizen*. Diese kann man auch über kommutativen Ringen definieren. Wir bezeichnen mit E_{kl} die Matrix, die in der k ten Zeile und l ten Spalte den Eintrag 1 hat und ansonsten nur Nullen enthält, und betrachten die Matrizen

$$\begin{aligned} M_j(\lambda) &= \mathbb{1}_m + (\lambda - 1)E_{jj} \\ V_{jk} &= \mathbb{1}_m - E_{jj} - E_{kk} + E_{kj} + E_{jk} \\ A_{jk}(\lambda) &= \mathbb{1}_m + \lambda E_{jk} \end{aligned} \quad \lambda \in R.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Elementarmatrizen V_{jk} und $A_{jk}(\lambda)$ invertierbar sind, während $M_j(\lambda)$ invertierbar ist genau dann, wenn $\lambda \in R$ eine Einheit ist. Wie im Fall der Vektorräume können wir durch Rechts- und Linksmultiplikation mit diesen Matrizen elementare Zeilen und Spaltenumformungen durchführen. Der Beweis des folgenden Satzes ist völlig analog zum entsprechenden Beweis für Vektorräume.

Satz 3.1.4: Sei R ein kommutativer Ring und $N \in \text{Mat}(n \times m, R)$. Dann entspricht

- (i) die Linksmultiplikation $N \mapsto M_j(\lambda) \cdot N$ (Rechtsmultiplikation $N \mapsto N \cdot M_j(\lambda)$) der Multiplikation der j ten Zeile (Spalte) von N mit $\lambda \in R$,
- (ii) die Linksmultiplikation $N \mapsto V_{jk} \cdot N$ (Rechtsmultiplikation $N \mapsto N \cdot V_{jk}$) dem Vertauschen der j ten und k ten Zeile (Spalte) von N ,
- (iii) die Linksmultiplikation $N \mapsto A_{jk}(\lambda) \cdot N$ (Rechtsmultiplikation $N \mapsto N \cdot A_{jk}(\lambda)$) dem Hinzuaddieren der mit dem Skalar $\lambda \in R$ multiplizierten k ten Zeile (j ten Spalte) von N zur j ten Zeile (k ten Spalte) von N .

Betrachtet man eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen, so kann man durch geschickte Wahl zweier Basen B_V von V und B_W von W stets erreichen, dass ihre darstellende Matrix Diagonalgestalt hat und in der Diagonale nur die Einträge 1 und 0 auftreten. Beschreiben wir diese Abbildung ϕ durch eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$, so entspricht dies gerade dem Gauß-Algorithmus für Matrizen.

Dabei wird eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ durch Links- und Rechtsmultiplikation mit geeigneten invertierbaren Matrizen $X \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ und $Y \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$, die Produkte der Elementarmatrizen V_{jk} , $A_{jk}(\lambda)$ und $M_j(\lambda)$ sind, in eine Matrix $A' = XAY$ überführt, die Diagonalgestalt hat und in der Diagonalen nur die Einträge 1 und 0 enthält. Möchte man dies auf Matrizen mit Einträgen in einem Hauptidealring R übertragen, so ergeben sich prinzipiell zwei Probleme:

- Gilt $R^\times \subsetneq R \setminus \{0\}$, so ist es nicht möglich eine Diagonalmatrix durch Multiplikation mit $M_j(\lambda)$ in eine Diagonalmatrix zu überführen, die nur Nullen und Einsen enthält.
- Ist ein Eintrag $a_{ij} \in R$ einer Matrix $A \in \text{Mat}(n \times m, R)$ kein Vielfaches des Eintrags $a_{kj} \in R$ (von $a_{ik} \in R$), so kann man durch Hinzuaddieren von Vielfachen der k ten Zeile (Spalte) nicht erreichen, dass der Eintrag a_{ij} Null wird.

Im Fall eines Hauptidealrings kontrolliert man diese Probleme aber dennoch zu einem gewissen Grad, da man sie auf Teilbarkeitsprobleme charakterisieren kann. Zu erwarten ist also ein schwächeres Analogon der Aussagen für Vektorräume.

3.2 Klassifikation mit dem Elementarteilersatz

Wir entwickeln nun ein schwächeres Analogon des Gauß-Algorithmus für Matrizen mit Einträgen in Hauptidealringen, den sogenannten *Elementarteilersatz*. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir dann für jeden Untermodul $U \subset F$ eines freien Moduls F Basen bestimmen können, bezüglich derer die beschreibende Matrix der Inklusionsabbildung $\iota : U \rightarrow F$ eine besonders einfache Gestalt hat und damit die endlich erzeugten Moduln klassifizieren, die sich als Quotienten $M = F/U$ beschreiben lassen. Da sich die dabei auftretenden Teilbarkeitsprobleme auch als Aussagen über Ideale formulieren lassen, benötigen wir dazu einige Vorüberlegungen zu Idealen in Hauptidealringen.

- Zunächst ist in einem Hauptidealring jedes Ideal per Definition ein **Hauptideal**, also von der Form $I = (r) = \{sr \mid s \in R\}$ mit einem Ringelement $r \in R$. Es gilt $(r) \subset (r')$ genau dann, wenn r' ein **Teiler** von r ist, also wenn es ein Element $s \in R$ mit $r = sr'$ gibt. Daraus folgt direkt, dass $(r) = (r')$ genau dann, wenn $r' = sr$ mit einer Einheit $s \in R^\times$ gilt.

- Der **größte gemeinsame Teiler** $\text{ggT}(r, s) \in R$ zweier Elemente $r, s \in R$ ist das bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutige Element, das das Ideal

$$I = (r, s) = rR + sR = \{xr + ys \mid x, y \in R\}$$

erzeugt. Die Gleichung $xr + ys = t$ mit festen $r, s, t \in R$ hat genau dann eine Lösung, wenn $\text{ggT}(r, s)$ das Element t teilt.

- Ein Hauptideal $(p) \subset R$ ist maximal genau dann, wenn $p \in R$ ein **Primelement** ist, also wenn aus $p \mid rr'$ folgt $p \mid r$ oder $p \mid r'$. Dies gilt genau dann, wenn R/pR ein Körper ist.

Eine weitere wichtige Aussage zu Teilbarkeit in Hauptidealringen ist, dass es keine unendlichen Ketten echter Teiler geben kann. Dies entspricht der folgenden Aussage über Ideale, die wir zum Beweis des Elementarteilersatzes benötigen werden.

Lemma 3.2.1: Ist R ein Hauptidealring, so wird jede aufsteigende Kette von Idealen in R stationär: Ist $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Idealen in R mit $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_j = I_k$ für alle $j \geq k$.

Beweis:

Ist $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R , so ist auch $I = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ ein Ideal in R , denn zu $i, i' \in I$ gibt es $j, j' \in \mathbb{N}_0$ mit $i \in I_j$ und $i' \in I_{j'}$. Dann gilt $i, i' \in I_n$ mit $n = \max\{j, j'\}$ und damit $i + i' \in I_n \subset I$ und $ri \in I_n \subset I$.

Da R ein Hauptidealring ist, gibt es Elemente $r_\infty, r_j \in R$ mit $I_j = (r_j)$ und $I = (r_\infty)$. Da $r_\infty \in I$ gibt es per Definition von I ein $j \in \mathbb{N}$ mit $r_\infty \in I_j = (r_j)$, und daraus folgt $(r_j) \subset (r_k) \subset (r_\infty) \subset (r_j)$ und damit $I_k = I_j$ für alle $k \geq j$. \square

Mit Hilfe dieser Aussagen über Ideale können wir nun eine modifizierte Version des Gauß-Algorithmus definieren und den folgenden Satz über R -Modulhomomorphismen zwischen freien Moduln beweisen, der die entsprechende Aussage über lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen verallgemeinert.

Satz 3.2.2: (Elementarteilersatz)

Sei R ein Hauptidealring, M, N freie Moduln über R von Rang m, n und $f : M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus. Dann existiert eine Diagonalmatrix $D \in \text{Mat}(n \times m, R)$ mit

$$d_{11} | d_{22} | \dots | d_{rr} \quad r = \min(n, m)$$

und R -Modulisomorphismen $\phi_M : M \rightarrow R^m$, $\phi_N : N \rightarrow R^n$ mit $f = \phi_N^{-1} \circ F_D \circ \phi_M$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi_M \downarrow & & \downarrow \phi_N \\ R^m & \xrightarrow{F_D: v \mapsto D \cdot v} & R^n. \end{array}$$

Die Elemente $d_{ii} \in R$ sind eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit Einheiten.

Beweis:

1. Seien (x_1, \dots, x_m) , (y_1, \dots, y_n) geordnete Basen von M und N . Dann sind

$$\phi'_M : M \rightarrow R^m, \sum_{i=1}^m r_i \triangleright x_i \mapsto (r_1, \dots, r_m)^T \quad \phi'_N : N \rightarrow R^n, \sum_{i=1}^n r_i \triangleright y_i \mapsto (r_1, \dots, r_n)^T$$

R -Modulisomorphismen, und der R -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ ist gegeben durch durch seine darstellende Matrix $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times m, R)$ mit

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \triangleright y_j.$$

Es reicht also, zu zeigen, dass invertierbare Matrizen $B \in \text{GL}_R(m)$, $C \in \text{GL}_R(n)$ existieren, so dass die Matrix $D := C \cdot A \cdot B$ diagonal ist und ihre Einträge die Teilbarkeitsbedingung im Satz erfüllen. Denn dann sind $\phi_M = F_{B^{-1}} \circ \phi'_M : M \rightarrow R^m$, $m \mapsto B^{-1} \cdot \phi'_M(m)$ und $\phi_N = F_C \circ \phi'_N : N \rightarrow R^n$, $n \mapsto C \cdot \phi'_N(n)$ die gesuchten Isomorphismen im Satz.

2. Wir betrachten das von den Einträgen einer Matrix $Q \in \text{Mat}(k \times l, R)$ erzeugte Ideal

$$(Q) = (q_{11}, \dots, q_{1l}, q_{21}, \dots, q_{2l}, \dots, q_{k1}, \dots, q_{kl}) \subset R.$$

Da R ein Hauptidealring ist, ist (Q) ein Hauptideal, und es existiert ein $d \in R$ mit $(Q) = (d)$, nämlich $d = \text{ggT}(q_{11}, \dots, q_{kl})$. Für jede Matrix $P \in \text{Mat}(l \times i, R)$ mit $(P) = (c)$ gilt dann $(Q \cdot P) \subset (Q) \cap (P)$, denn die Einträge der Matrix $Q \cdot P$ sind Linearkombinationen der Einträge aus Q und P , und daraus folgt, dass d und c alle Einträge von $Q \cdot P$ teilen. Ist P eine invertierbare Matrix, so folgt auch $(Q) = (Q \cdot P \cdot P^{-1}) \subset (Q \cdot P)$ und $(Q \cdot P) = (Q)$. Analog folgt aus Q invertierbar $(Q \cdot P) = (P)$.

3. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Zahl der Zeilen und Spalten der Matrix.

Ist $A \in \text{Mat}(1 \times 1, R) = R$, so ist die Aussage offensichtlich, denn man kann $d_{11} = a_{11}$ wählen. Sei die Aussage nun bewiesen für alle Matrizen $B \in \text{Mat}(j \times k, R)$ mit $j, k \leq r - 1$, und sei $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times m, R)$ eine Matrix mit $\max(n, m) = r$.

3.a) Wir betrachten zunächst den Fall $(A) = (a_{11})$. In diesem Fall teilt a_{11} alle Einträge in der ersten Zeile und Spalte von A , und durch Hinzuaddieren von Vielfachen der ersten Zeile und

ersten Spalte zu den anderen Zeilen und Spalten kann man erreichen, dass alle Einträge in der ersten Zeile und Spalte von A außer a_{11} verschwinden. Also existieren invertierbare Matrizen $X \in \text{GL}_R(n)$, $Y \in \text{GL}_R(m)$, so dass

$$X \cdot A \cdot Y = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (A') \subset (a_{11}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren invertierbare Matrizen B' und C' sowie eine Diagonalmatrix D' , die die Teilbarkeitsbedingung erfüllt, so dass $D' = C' \cdot A' \cdot B'$. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \cdot X \cdot A \cdot Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix},$$

und wegen $(a_{11}) \supset (A') = (C'A'B') = (D')$ gilt $a_{11} \mid d'_{11} \mid d'_{22} \mid \dots \mid d'_{rr}$.

3.b) Wir betrachten nun den Fall $(A) \supsetneq (a_{11})$. Wir zeigen, dass dann invertierbare Matrizen $X \in \text{GL}_R(n)$, $Y \in \text{GL}_R(m)$ und eine Matrix $A' \in \text{Mat}(n \times m, R)$ existieren mit $A' = XAY$ und $(A) = (A') \supset (a'_{11}) \supsetneq (a_{11})$. Dazu betrachten wir die folgenden Fälle:

I.) Der Eintrag a_{11} teilt nicht alle Elemente in der ersten Zeile von A .

Durch Permutieren der letzten $m - 1$ Spalten von A , was der Rechtsmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix $Y \in \text{GL}_R(m)$ entspricht, erhalten wir eine Matrix $A' = A \cdot Y$, so dass $a'_{11} = a_{11} \nmid a'_{12}$. Da R ein Hauptidealring ist, existiert dann ein $d \in R$ mit $(a'_{11}, a'_{12}) = (d)$ und $x, y, z, w \in R$ mit $d = xa'_{11} + ya'_{12}$, $a'_{11} = wd$, $a'_{12} = zd$. Daraus folgt $d = (xw + yz)d$ und wegen der Nullteilerfreiheit von R auch $xw + yz = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A'' = A' \cdot Y' &= A' \cdot \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ y & w & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}x + a'_{12}y & -a'_{11}z + a'_{12}w & * \\ a'_{21}x + a'_{22}y & -a'_{21}z + a'_{22}w & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & 0 & * \\ a'_{21}x + a'_{22}y & -a'_{21}z + a'_{22}w & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $*$ für Einträge von A'' steht, die mit den entsprechenden Einträgen von A' übereinstimmen. Die Matrix Y' hat die Determinante $\det(Y') = xw + yz = 1$ und ist damit invertierbar. Daraus folgt $(A'') = (AY'Y') = (A) \supset (d) = (a''_{11}) \supsetneq (a_{11})$.

II.) Fall 2: Der Eintrag a_{11} teilt nicht alle Einträge in der ersten Spalte von A .

Durch Vertauschen der letzten $n - 1$ Zeilen, was der Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix $X \in \text{GL}_R(n)$ entspricht, erhalten wir eine Matrix $A' = XA$ mit $a_{11} = a'_{11} \nmid a'_{21}$. Da R ein Hauptidealring ist, existiert dann ein $d \in R$ mit $(a'_{11}, a'_{21}) = (d)$ und $x, y, z, w \in R$ mit $d = xa'_{11} + ya'_{21}$, $a'_{11} = wd$, $a'_{21} = zd$. Daraus folgt $d = (xw + yz)d$ und wegen der Nullteilerfreiheit von R dann $xw + yz = 1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} A'' = X'A' &= \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -z & w & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \cdot A' = \begin{pmatrix} a'_{11}x + a'_{21}y & a'_{12}x + a'_{22}y & * \\ -a'_{11}z + a'_{21}w & -a'_{12}z + a'_{22}w & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & a'_{12}x + a'_{22}y & * \\ 0 & -a'_{12}z + a'_{22}w & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\det(X') = xw + yz = 1$, ist $X' \in \text{GL}_R(n)$ und $(A'') = (A) \supset (d) = (a''_{11}) \supsetneq (a_{11})$.

III.) Der Eintrag a_{11} teilt alle Einträge der ersten Zeile und der ersten Spalte von A .

Dann kann man durch Hinzuaddieren von Vielfachen der ersten Spalte zu den anderen Spalten von A erreichen, dass alle Einträge in der ersten Zeile außer a_{11} verschwinden. Anschließend kann man durch Hinzuaddieren von Vielfachen der ersten Zeile von A erreichen, dass alle Einträge in der ersten Spalte außer a_{11} verschwinden. Dies entspricht der Links- und Rechtsmultiplikation mit invertierbaren Matrizen $X \in \text{GL}_R(n)$ und $Y \in \text{GL}_R(m)$. Wir erhalten so eine Matrix $A' = XAY$ mit $a'_{11} = a_{11}$, mit $a'_{1j} = 0$, $a'_{i1} = 0$ für $i, j \geq 2$ und mit $(A') = (A) \supseteq (a_{11}) = (a'_{11})$. Da $(A) = (A') \supseteq (a_{11})$, gibt es ein a'_{ij} mit $i, j \geq 2$, $a'_{11} \nmid a'_{ij}$. Durch Hinzuaddieren der j ten Spalte zur ersten Spalte, was der Rechtsmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix $Y' \in \text{GL}_R(m)$ entspricht, kann man nun a'_{ij} in die erste Spalte bringen. Dies liefert eine Matrix $A'' = A'Y'$ mit $(A'') = (A') = (A)$, $a''_{11} = a_{11}$ und $a''_{11} = a_{11} \nmid a''_{i1} = a'_{ij}$. Auf diese Matrix kann die Prozedur in II.) angewendet werden und liefert die gesuchte Matrix.

Ist also $(A) \supseteq (a_{11})$, so erhält man durch Anwendung der Schritte I.), II.), III.) eine Matrix $A' = XAY$ mit $(A') = (A) \supseteq (a'_{11}) \supseteq (a_{11})$ und invertierbaren Matrizen $X \in \text{GL}_R(n)$ und $Y \in \text{GL}_R(m)$. Wiederholen dieser Prozedur liefert eine echt aufsteigende Kette von Idealen $(a_{11}) = (d_0) \subsetneq (d_1) \subsetneq (d_2) \subsetneq \dots$. Diese Kette muss nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn nach Lemma 3.2.1 wird jede aufsteigende Kette von Idealen in R stationär. Dies liefert eine Matrix $A' = XAY$ mit $X \in \text{GL}_R(n)$, $Y \in \text{GL}_R(m)$ und $(A') = (A) = (a'_{11})$. Mit Fall 3a) folgt dann die Behauptung. Dass die Elemente d_{ii} eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten sind, ergibt sich induktiv aus der Eindeutigkeit des Ideals (A) und der Aussage, dass $(r) = (r')$ für Elemente $r, r' \in R$ genau dann, wenn es eine Einheit $s \in R^\times$ gibt mit $r' = rs$. \square

Mit Hilfe des Elementarteilersatzes können wir endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen durch die Quotienten R/I_i für eine aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_s \subsetneq R$ charakterisieren. Diese ergeben sich aus den Diagonalelementen d_{ii} der Matrix in Satz 3.2.2. Dadurch reduziert sich die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen auf die Klassifikation der entsprechenden Ideale.

Satz 3.2.3: Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R . Dann existiert eine aufsteigende Kette $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_s \subsetneq R$ von Idealen von R , so dass

$$M \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_s,$$

wobei auch $I_j = 0$ zugelassen ist und $R/0 = R$.

Beweis:

1. Sei M ein endlich erzeugter Modul mit n Erzeugern. Nach Bemerkung 2.4.9, 6. gibt es dann einen Untermodul $U \subset R^n$ mit $M \cong R^n/U$. Der Modul U ist nach Satz 3.1.1 als Untermodul eines endlich erzeugten freien R -Moduls ebenfalls ein endlich erzeugter freier R -Modul mit $m = \text{rang}(U) \leq \text{rang}(R^n) = n$ und damit von der Form $U \cong R^m$. Also existiert ein injektiver R -Modulhomomorphismus $f : R^m \rightarrow R^n$ mit $M \cong R^n/\text{im}(f)$.

2. Nach dem Elementarteilersatz 3.2.2 gibt es Matrizen $B \in \text{GL}_R(m)$, $C \in \text{GL}_R(n)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \text{Mat}(n \times m, R)$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^m & \xrightarrow{f} & R^n \\ v \mapsto Bv \downarrow \sim & & \sim \downarrow v \mapsto Cv \\ R^m & \xrightarrow{\quad} & R^n \\ & v \mapsto Dv & \end{array}$$

kommutiert und D die Teilbarkeitsbedingung $d_{11}|d_{22}|\dots|d_{mm}$ erfüllt. Also gilt

$$M \cong R^n/\text{im}(f) \cong R^n/\text{im}(F_D) \cong R^{n-m} \times R/d_{mm}R \times \dots \times R/d_{11}R$$

Setzen wir $I_i = 0$ für $1 \leq i \leq n - m$ und $I_{n-i+1} = (d_{ii})$ für $1 \leq i \leq m$, so erhalten wir eine aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset R$, denn aus $d_i|d_{i+1}$ folgt $(d_{i+1}) \subset (d_i)$. Sei nun $s = \max\{i \in \{1, \dots, n\} \mid I_i \neq R\}$. Dann gilt $R/I_i = 0$ für alle $i > s$ und $I_1 \subset \dots \subset I_s \subsetneq R$ ist die gewünschte Kette von Idealen. \square

Mit Satz 3.2.3 haben wir die endlich erzeugten Moduln über einem Hauptidealring schon recht weitgehend klassifiziert. Allerdings lässt sich die Aussage noch in einer konkreteren und eingängigeren Form formulieren. Dazu zerlegt man die Elemente, die die Ideale in Satz 3.2.3 erzeugen in ihre Primfaktoren. So erhält man eine eindeutige Charakterisierung eines endlich erzeugten Moduls M durch Primpotenzen in R .

Satz 3.2.4: Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R . Dann existieren Primpotenzen $q_1, \dots, q_l \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$M \cong R^n \times R/q_1R \times \dots \times R/q_lR.$$

Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist eindeutig bestimmt, und die Primpotenzen q_i sind eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten und die Reihenfolge.

Beweis:

1. Nach Satz 3.2.3 existiert eine aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_s \subsetneq R$, so dass $M \cong R/I_1 \times \dots \times R/I_s$. Da R ein Hauptidealring ist, existiert zu jedem Ideal I_i ein $r_i \in R$ mit $I_i = (r_i)$ und $r_i = 0$ genau dann, wenn $I_i = 0$. Sei nun $n = \max\{i \in \{1, \dots, s\} \mid I_i = 0\}$. Dann lassen sich für $i > n$ die Zahlen r_i als Produkte $r_i = \prod_{j=1}^{s_i} q_{ij}$ von paarweise teilerfremden Primpotenzen q_{ij} schreiben, und nach dem chinesischen Restsatz gilt dann

$$R/I_i = R/(r_i) = R/(q_{i1}) \times \dots \times R/(q_{is_i}).$$

2. Wir beweisen die Eindeutigkeit der Zahl n , indem wir sie auf eine Weise charakterisieren, die nicht von der Zerlegung abhängt. Sei \mathbb{K} der Quotientenkörper des Hauptidealrings R . Dann gilt aufgrund der universellen Eigenschaft der direkten Summe

$$\text{Hom}_R(M, \mathbb{K}) \cong \text{Hom}_R(R^n, \mathbb{K}) \times \text{Hom}_R(R/q_1R, \mathbb{K}) \times \dots \times \text{Hom}_R(R/q_lR, \mathbb{K}).$$

Da jeder R -Modulhomomorphismus $f : R \rightarrow \mathbb{K}$ wegen $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1)$ durch $f(1)$ eindeutig bestimmt ist und $f(1)$ beliebig vorgegeben werden kann, gilt $\text{Hom}_R(R, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ und damit $\text{Hom}_R(R^n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$.

Wegen der Nullteilerfreiheit von \mathbb{K} ist jeder nichtverschwindende R -Modulhomomorphismus $f : R \rightarrow \mathbb{K}$ injektiv, denn aus $f(r) = r f(1) = 0$ und $f(1) \neq 0$ folgt $r = 0$. Ist $I \neq 0$ ein Ideal in R , so ergibt sich aus der universellen Eigenschaft des Quotienten

$$\text{Hom}_R(R/I, \mathbb{K}) \cong \{f \in \text{Hom}_R(R, \mathbb{K}) \mid f(i) = 0 \forall I\} = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $n = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_R(M, \mathbb{K})$ und n nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt.

3. Wir beweisen die Eindeutigkeit der Primpotenzen q_i bis auf Multiplikation mit Einheiten und Reihenfolge, indem wir sie unabhängig von der Zerlegung charakterisieren.

Für jedes Primelement $p \in R$ ist das Ideal $(p) \subset R$ maximal, und damit $\mathbb{K}_p = R/pR$ ein Körper. Für jeden R -Modul N und alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Quotientenmodul $N_k = (p^{k-1} \triangleright N)/(p^k \triangleright N)$ ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K}_p mit Skalarmultiplikation $[r] \cdot [n] = [r \triangleright n]$ für alle $r \in R$ und $n \in p^{k-1} \triangleright N$. Wir bezeichnen dessen Dimension mit $d_p^k(N) = \dim_{\mathbb{K}_p} N_k$.

Wir zeigen, dass $d_p^k(M)$ durch die Primfaktoren q_i in der Zerlegung bestimmt ist. Da $d_p^k(N \oplus N') = d_p^k(N) + d_p^k(N')$ für alle endlich erzeugten R -Moduln N, N' , reicht es, $d_p^k(R)$, $d_p^k(R/p^m R)$ und $d_p^k(R/q^m R)$ für teilerfremde Primelemente q, p und $m, k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen:

- I.) Die Multiplikation mit p^{k-1} definiert einen Vektorraumisomorphismus $f : \mathbb{K}_p \rightarrow R_k$, $[r] \mapsto [p^{k-1}r]$, und es folgt $d_p^k(R) = 1$.
- II.) Es gilt $p^{k-1} \triangleright (R/p^m R) = 0$ für $m < k$ und damit $d_p^k(R/p^m R) = 0$ für $m < k$. Ist $m \geq k$, so ist $f : R \rightarrow (R/p^m R)_k$, $r \mapsto [p^{k-1}r]$ eine surjektive R -lineare Abbildung mit $\ker(f) \cong pR$. Also gilt $(R/p^m R)_k \cong \text{im}(f) \cong R/\ker(f) \cong R/pR = \mathbb{K}_p$ und $d_p^k(R/p^m R) = 1$ für $m \geq k$.
- III.) Sind $p, q \in R$ teilerfremde Primelemente, so ist die Restklasse von p eine Einheit im Ring $R/q^m R$. Die Multiplikation mit p^n definiert damit für alle $n \in \mathbb{N}$ einen R -Modulisomorphismus $f : R/q^m R \rightarrow R/q^m R$, $[r] \mapsto [p^n r]$. Daraus ergibt sich $p^n \triangleright (R/q^m R) \cong R/q^m R$ und

$$(R/q^m R)_k = \frac{p^{k-1} \triangleright (R/q^m R)}{p^k \triangleright (R/q^m R)} \cong \frac{R/q^m R}{R/q^m R} \cong 0 \quad \Rightarrow \quad d_p^k(R/q^m R) = 0.$$

Durch Kombinieren dieser drei Fälle erhält man

$$d_p^k(M) = n + |\{i \in \{1, \dots, l\} \mid p^k \mid q_i\}|$$

und somit sind die Faktoren $R/q_i R$ mit $p^k \mid q_i$ für alle Primelemente p und $k \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. Dies legt die Primpotenzen q_i bis auf Multiplikation mit Einheiten fest. \square

Insbesondere erlaubt es uns diese Charakterisierung von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen, das Konzept der Torsion besser zu verstehen. Ist R ein Hauptidealring und M ein Modul über R , so bilden nach Satz 2.2.10 die Torsionselemente von M einen Untermodul von M . Mit Hilfe von Satz 3.2.4 können wir diesen nun explizit angeben.

Korollar 3.2.5: Sei R ein Hauptidealring. Dann hat jeder endlich erzeugte R -Modul die Form

$$M \cong \text{Tor}_R(M) \oplus R^n \quad \text{Tor}_R(M) = R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R$$

mit eindeutigem $n \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmten Primpotenzen q_1, \dots, q_l . Insbesondere ist jeder torsionsfreie endlich erzeugte R -Modul frei.

Beweis:

Nach Satz 3.2.4 existiert eine Zerlegung $M \cong R^n \times R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R$ mit Primpotenzen q_i , also ist M gegeben als direkte Summe von Untermoduln $M \cong R^n \oplus (R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R)$. Jedes Element $m \in R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R$ erfüllt $(q_1 q_2 \dots q_l) \triangleright m = 0$ und ist damit ein Torsionselement. Also gilt $R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R \subset \text{Tor}_R(M)$. Andererseits folgt aus $r \triangleright (m_1 + m_2) = 0$ mit $m_1 \in R^n$ und $m_2 \in R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R$, dass $r = 0$ oder $m_1 = 0$ gelten muss. Also folgt $\text{Tor}_R(M) = R/q_1 R \times \dots \times R/q_l R$. \square

Eine weitere nützliche Folgerung aus Satz 3.2.3 und 3.2.4 ist eine vollständige Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen. Denn abelsche Gruppen sind ja nichts anderes als Moduln über dem Hauptidealring $R = \mathbb{Z}$. Wendet man diese Sätze also auf den Fall endlich erzeugter \mathbb{Z} -Moduln an, so erhält man das folgende Korollar.

Korollar 3.2.6: Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gilt:

1. Es existieren eindeutig bestimmte Zahlen $d_1, \dots, d_r \in \{0, 2, 3, 4, \dots\}$ mit $d_i | d_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ so dass

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

2. Es existieren Primzahlpotenzen q_1, \dots, q_l und ein eindeutig bestimmtes $s \in \mathbb{N}_0$ mit

$$G \cong \mathbb{Z}^s \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_l\mathbb{Z}.$$

Für Polynomringe $R = \mathbb{K}[x]$ über algebraisch abgeschlossenen Körpern \mathbb{K} liefert der Klassifikationssatz 3.2.4 die Existenz der Jordan-Normalform (siehe Aufgabe 59). Betrachtet man Polynomringe über Körpern, die nicht algebraisch abgeschlossen sind, so ergeben sich kompliziertere Analoga der Jordan-Normalform, wie etwa die reelle Jordan-Normalform.

3.3 Übungen zu Kapitel 3

Aufgabe 56: Sei R ein Ring, $n \in \mathbb{N}$, M ein R -Modul und $M^{\oplus n} \cong M \oplus \dots \oplus M$. Zeigen Sie, dass der Endomorphismenring $\text{End}_R(M^{\oplus n})$ isomorph zum Ring $\text{Mat}(n \times n, \text{End}_R(M))$ der $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen im Endomorphismenring $\text{End}_R(M)$ ist.

Aufgabe 57: Finden Sie einen kommutativen Ring R , einen freien R -Modul F und einen Untermodul $U \subset F$, der kein freier R -Modul ist.

Hinweis: Sie können den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ betrachten.

Aufgabe 58: Sei R ein Integritätsbereich und $\mathbb{K} = Q(R)$ sein Quotientenkörper. Zeigen Sie:

- (a) Für jeden R -Modul M ist $M \otimes_R \mathbb{K}$ ein Vektorraum über \mathbb{K} und für jeden Untermodul $U \subset M$ ist $U \otimes_R \mathbb{K} \subset M \otimes_R \mathbb{K}$ ein Untervektorraum.
- (b) Ist M ein freier Modul vom Rang n , so gilt $\dim_{\mathbb{K}}(M \otimes_R \mathbb{K}) = n$.
- (c) Für den Ring $R = \mathbb{C}[x, y]$ als Linksmodul über sich selbst ist der Untermodul $U = (x^2, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ nicht frei.

Hinweis:

Nutzen Sie in (c) aus, dass $(x^2, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ kein Hauptideal ist, und benutzen Sie (b).

Aufgabe 59: Wir betrachten einen endlich erzeugten Modul (M, \triangleright) über einem Polynomring $\mathbb{K}[x]$ und die zugehörige \mathbb{K} -lineare Abbildung $\phi : M \rightarrow M$, $m \mapsto x \triangleright m$. Zeigen Sie:

- (a) Jeder zyklische $\mathbb{K}[x]$ -Modul M ist isomorph zu einem $\mathbb{K}[x]$ -Modul der Form $\mathbb{K}[x]/(p)$ für ein Polynom $p \in \mathbb{K}[x]$. Charakterisieren Sie p durch ϕ .
- (b) M ist ein zyklischer $\mathbb{K}[x]$ -Modul genau dann, wenn (i) $M \cong \mathbb{K}[x]$ gilt oder (ii) M ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ist mit einer Basis der Form $B = \{m, \phi(m), \dots, \phi^n(m)\}$ für ein $m \in M$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) Ist $p \neq 0$, so ist $M = \mathbb{K}[x]/(p)$ ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, und es gibt eine Basis des \mathbb{K} -Vektorraums M , so dass die beschreibende Matrix von ϕ die Form hat

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{K}.$$

- (d) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{C}[x]$ eine Primpotenz. Zeigen Sie, dass es eine Basis B des \mathbb{C} -Vektorraums M gibt, bezüglich der die beschreibende Matrix von ϕ ein Jordan-Block ist.

- (e) Folgern Sie aus dem Klassifikationssatz für Moduln über Hauptidealringen, dass zu jedem Endomorphismus $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ eines endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums M eine Basis von M existiert, für die die beschreibende Matrix von ϕ Jordan-Normalform hat.

Aufgabe 60: Klassifizieren Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung $m = 400$, d. h. geben Sie alle abelschen Gruppen der Form

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_l\mathbb{Z}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen q_1, \dots, q_l an, die Gruppenordnung $m = 400$ haben.

4 (Halb)einfache Moduln

4.1 Einfache Moduln

In diesem Kapitel betrachten wir Moduln, die eine besonders einfache Struktur haben, nämlich keine echten Untermoduln besitzen oder sich zumindest als direkte Summe solcher Moduln beschreiben lassen. Die Begriffsbildung ist analog zum Fall von Gruppendarstellungen, nur wird der Begriff der Unterdarstellung durch den Begriff des Untermoduls ersetzt.

Definition 4.1.1: Sei R ein Ring.

1. Ein R -Modul M heißt **einfach** oder **irreduzibel**, wenn $M \neq 0$ und er keine echten Untermoduln besitzt.
2. Ein R -Modul M heißt **unzerlegbar**, wenn $M \neq 0$ und er nicht isomorph zu einer direkten Summe $M_1 \oplus M_2$ nichttrivialer R -Moduln $M_1, M_2 \neq 0$ ist.
3. Ein R -Modul M heißt **halbeinfach**, wenn er isomorph zu einer direkten Summe einfacher R -Moduln ist.

Beispiel 4.1.2:

1. Der Nullmodul $M = 0$ ist halbeinfach als leere direkte Summe einfacher R -Moduln und zerlegbar.
2. Ist G eine Gruppe, so ist ein (halb)einfacher $\mathbb{K}[G]$ -Modul nichts anderes als eine (halb)einfache Darstellung von G über \mathbb{K} , und unzerlegbare $\mathbb{K}[G]$ -Moduln entsprechen unzerlegbaren Darstellungen. Insbesondere sind nach dem Satz von Maschke für endliche Gruppen G mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ alle $\mathbb{K}[G]$ -Moduln halbeinfach.
3. Ist \mathbb{K} ein Körper, so sind die einfachen \mathbb{K} -Moduln gerade die eindimensionalen Vektorräume über \mathbb{K} . Jeder \mathbb{K} -Modul ist halbeinfach, denn jeder Vektorraum ist die direkte Summe der von den Basisvektoren erzeugten eindimensionalen Untervektorräume.
4. Ein Ring als Links-/Rechts-/Bi-Modul über sich selbst ist ein einfacher Modul genau dann, wenn er keine echten links-/rechts-/zweiseitigen Ideale besitzt.
5. Jeder freie R -Modul M mit $\text{rang}(M) > 1$ ist zerlegbar, denn er ist die direkte Summe der von den Basiselementen erzeugten Untermoduln. Jeder einfache freie R -Modul ist daher vom Rang eins. Ein freier R -Modul vom Rang eins ist nach 4. einfach, genau dann, wenn R keine echten Linksideale besitzt.
6. Ein Modul M über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$ ist nach Beispiel 2.1.7, 6. ein Paar (V, ϕ) aus einem komplexen Vektorraum V und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Seine Untermoduln entsprechen Untervektorräumen $U \subset V$ mit $\phi(U) \subset U$. Ist $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, so ist M
 - einfach genau dann, wenn $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$,
 - unzerlegbar genau dann, wenn die Jordan-Normalform von ϕ nur einen einzigen Jordan-Block enthält,
 - halbeinfach genau dann, wenn ϕ diagonalisierbar ist.

7. Nach dem Klassifikationssatz ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe von der Form $A \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_i \in \mathbb{N}$. Die Gruppe A ist

- einfach genau dann, wenn $A \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$,
- unzerlegbar genau dann, wenn $A \cong \mathbb{Z}$ oder $A \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ mit einer Primpotenz $q \in \mathbb{N}$,
- halbeinfach genau dann, wenn $A \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}$ mit Primzahlen $p_i \in \mathbb{N}$.

Wie im Fall der Darstellungen von Gruppen beschäftigen wir uns zunächst mit einfachen Moduln und untersuchen Modulhomomorphismen zwischen einfachen Moduln. Hierbei ergeben sich Verallgemeinerungen der Aussagen über Homomorphismen von Darstellungen.

Lemma 4.1.3: Sei M ein R -Modul und N ein einfacher R -Modul. Dann gilt:

1. Jeder R -Modulhomomorphismus $\phi : N \rightarrow M$ ist injektiv oder null.
2. Jeder R -Modulhomomorphismus $\phi : M \rightarrow N$ ist surjektiv oder null.
3. Der Endomorphismenring $\text{End}_R(N)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis:

1. Ist $\phi : N \rightarrow M$ ein R -Modulhomomorphismus, so ist $\ker(\phi) \subset N$ ein Untermodul, und da N einfach ist, folgt $\ker(\phi) = 0$, also ϕ injektiv, oder $\ker(\phi) = N$, also $\phi = 0$.

2. Ist $\phi : M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus, so ist $\text{im}(\phi) \subset N$ ein Untermodul, und da N einfach ist folgt $\text{im}(\phi) = N$, also ϕ surjektiv, oder $\text{im}(\phi) = 0$, also $\phi = 0$.

3. Ein Schiefkörper ist per Definition ein Ring, in dem jedes Element außer 0 ein multiplikatives Inverses besitzt. Aus 1. und 2. folgt, dass jedes Element des Endomorphismenrings $\text{End}_R(N)$ außer der Null bijektiv ist, also ein multiplikatives Inverses bezüglich der Komposition besitzt. \square

Dies legt es nahe, nach einem Analogon des Schurschen Lemmas für Moduln zu suchen. Allerdings gilt bereits das Schursche Lemma für Gruppendarstellungen nur über algebraisch abgeschlossenen Körpern. In der Tat ergibt sich ein direktes Gegenstück des Schurschen Lemmas für Moduln nur dann, wenn der zugrundeliegende Ring auch gleichzeitig die Struktur eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} hat, und diese Vektorraumstruktur kompatibel mit der Ringmultiplikation ist. Man betrachtet also Moduln über \mathbb{K} -Algebren für algebraisch abgeschlossene Körper \mathbb{K} .

Korollar 4.1.4: (Lemma von Schur für Moduln)

Sei \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper, A eine \mathbb{K} -Algebra und M ein einfacher A -Modul. Dann hat M die Struktur eines \mathbb{K} -Vektorraums, und falls $\dim_{\mathbb{K}} M < \infty$, so gilt $\text{End}_A(M) \cong \mathbb{K}$.

Beweis:

Die \mathbb{K} -Vektorraumstruktur von M ist gegeben durch die abelsche Gruppenstruktur von M und die Strukturabbildung: $\lambda m = (\lambda 1_A) \triangleright m$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $m \in M$. Insbesondere folgt, dass alle A -Modulendomorphismen von M auch \mathbb{K} -lineare Abbildungen sind:

$$\phi(\lambda m) = \phi((\lambda 1_A) \triangleright m) = (\lambda 1_A) \triangleright \phi(m) = \lambda \phi(m) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, m \in M, \phi \in \text{End}_A(M).$$

Da M ein einfacher A -Modul ist, gilt $M \neq 0$. Ist $\dim_{\mathbb{K}} M < \infty$, so hat jeder Endomorphismus $\phi \in \text{End}_A(M)$ wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von \mathbb{K} mindestens

einen Eigenwert λ . Der zugehörige Eigenraum $E_\lambda = \ker(\phi - \lambda \text{id}_M) \neq 0$ und ist als Kern des A -Modulhomomorphismus $\phi - \lambda \text{id}_M$ ein Untermodul von M . Da M einfach ist, folgt $\ker(\phi - \lambda \text{id}_M) = M$ und $\phi = \lambda \text{id}_M$. \square

Beispiel 4.1.5: (Schurs Lemma für Darstellungen von Gruppen)

Das Lemma von Schur für Darstellungen von Gruppen (Satz 1.2.7) ergibt sich als Spezialfall des Schurschen Lemmas für Moduln, indem man $A = \mathbb{K}[G]$ für eine Gruppe G wählt.

Wir untersuchen nun die Erzeugendensysteme einfacher R -Moduln. Indem wir die von Elementen des Moduls erzeugten Untermoduln betrachten, können wir folgern, dass alle einfachen R -Moduln zyklisch sind und sich durch maximalen Ideale im Ring R charakterisieren lassen.

Lemma 4.1.6:

1. Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Dann ist M einfach genau dann, wenn jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ den Modul M erzeugt. Insbesondere sind einfache Moduln zyklisch.
2. Für jeden Erzeuger $m \in M$ eines zyklischen Moduls M ist der R -Modulhomomorphismus $\phi_m : R \rightarrow M, r \mapsto r \triangleright m$ surjektiv. Es gilt $M \cong R/\ker(\phi_m)$, und M ist einfach genau dann, wenn das Linksideal $\ker(\phi_m) \subset R$ maximal ist.

Beweis:

1. Ist M einfach, so ist für jedes Element $m \in M$ der von m erzeugte Untermodul $\langle m \rangle_M \subset M$ entweder ganz M oder 0 . Im ersten Fall erzeugt m den Modul, im zweiten gilt $m = 1 \triangleright m = 0$. Erzeugt umgekehrt jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ den ganzen Modul M , so kann er keine echten Untermoduln haben. Denn jedes Element $0 \neq u \in U$ eines Untermoduls $U \subset M$ wäre ein Erzeuger von M .

2. Ist $m \in M$ ein Erzeuger von M , so ist der R -Modulhomomorphismus $\phi_m : R \rightarrow M, r \mapsto r \triangleright m$ surjektiv, denn es gilt $M = R \triangleright m = R \triangleright \phi_m(1) = \phi_m(R \triangleright 1) = \phi_m(R)$. Der Kern $\ker(\phi_m) \subset R$ ist ein Untermodul von R als Linksmul über sich selbst, also ein Linksideal, und nach dem Isomorphiesatz gilt $M \cong R/\ker(\phi_m)$.

Ist M nicht einfach, so gibt es einen Untermodul $U \subset M$ mit $0 \neq U \subsetneq M$. Dann ist $\phi_m^{-1}(U)$ ein Ideal in R mit $\ker(\phi_m) \subsetneq \phi_m^{-1}(U) \subsetneq R$. Also ist $\ker(\phi_m)$ nicht maximal.

Ist M einfach, so ist für jedes Linksideal $I \subset R$ mit $\ker(\phi_m) \subsetneq I$ das Bild $\phi_m(I)$ ein Untermodul von M mit $0 \neq \phi_m(I)$ und somit $\phi_m(I) = M$. Also existiert ein $i \in I$ mit $\phi_m(i) = i \triangleright m = m$, und es folgt $i - 1 \in \ker(\phi_m) \subset I$. Daraus ergibt sich $1 \in I$ und $I = R$. Also ist $\ker(\phi_m)$ ein maximales Ideal in R . \square

Beispiel 4.1.7:

1. Eine abelsche Gruppe A ist ein einfacher \mathbb{Z} -Modul genau dann, wenn A eine zyklische Gruppe ohne echte Untergruppen ist. Damit ist A einfach genau dann, wenn $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p prim ist (siehe Beispiel 4.1.2, 6).
2. Jede einfache Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G über \mathbb{K} ist zyklisch, und für jedes Element $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\text{Span}_{\mathbb{K}}\{\rho(g)v \mid g \in G\} = V$.

Wir untersuchen nun die Struktur von Moduln, indem wir sie durch ihre einfachen Untermoduln beschreiben. Halbeinfache Moduln können wir per Definition als direkte Summen einfacher Moduln ausdrücken. Allerdings möchte man auch allgemeine Aussagen über Moduln machen, die nicht halbeinfach sind, wie beispielsweise die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim und $n > 1$ oder nicht-diagonalisierbare Endomorphismen endlich-dimensionaler komplexer Vektorräume, die nicht-halbeinfachen $\mathbb{C}[x]$ -Moduln entsprechen.

Allgemein können wir einen R -Modul M mit einem echten Untermoduln nur dann als direkte Summe von Untermoduln schreiben, wenn er zerlegbar ist. Auch für unzerlegbare Moduln M können wir aber den Quotientenmodul M/U bezüglich des Untermoduls U betrachten und versuchen M durch ineinander enthaltene Untermoduln zu beschreiben, so dass die Quotienten aufeinanderfolgender Untermoduln einfach sind. Dies führt auf das Konzept eines Moduls endlicher Länge und der Kompositionsreihe.

Definition 4.1.8: Sei R ein Ring und M ein R -Modul.

M heißt **Modul endlicher Länge** über R , wenn es eine endliche Kette von Untermoduln $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ gibt, so dass alle Quotientenmoduln M_i/M_{i-1} einfach sind.

Eine solche Kette heißt **Kompositionsreihe** von M und die Moduln M_i/M_{i-1} **Subquotienten** oder **Kompositionsfaktoren**.

Die **Länge** $l(M)$ des Moduls M ist die minimale Länge n einer Kompositionsreihe von M .

Beispiel 4.1.9:

1. Jede endliche direkte Summe einfacher Moduln ist ein Modul endlicher Länge. Denn ist $M = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ mit einfachen R -Moduln U_1, \dots, U_n und setzt man $M_k = \bigoplus_{i=1}^k U_i$, so definiert dies eine Kompositionsreihe von M

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

mit $M_i/M_{i-1} \cong U_i$. Diese ist eindeutig, bis auf die Reihenfolge der Subquotienten U_i .

2. Der \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist nach Beispiel 4.1.2, 7. nicht halbeinfach, aber ein Modul der Länge drei. Die Kompositionsreihen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind

$$0 \subset \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \quad 0 \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \quad 0 \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

3. Ist V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, so erhält man die Kompositionsreihe des zugehörigen $\mathbb{C}[x]$ -Moduls aus einer Jordan-Basis von ϕ . Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , bezüglich der die darstellende Matrix von ϕ in Jordan-Normalform ist, so ist $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = V$ mit $M_i = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_i\}$ eine Kompositionsreihe für (V, ϕ) .
4. Der Ring \mathbb{Z} als Linksmodul über sich selbst ist kein Modul endlicher Länge. Dann gäbe es eine endliche Kompositionsreihe $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = \mathbb{Z}$, so müsste $M_1 \cong M_1/M_0$ einfach sein, und damit nach Beispiel 4.1.7 eine zyklische Gruppe der Form $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim. Es gibt aber keine Untergruppe von \mathbb{Z} , die isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Anhand von Beispiel 4.1.9 wird deutlich, dass es sich bei der Darstellung eines Moduls endlicher Länge als Kompositionsreihe um eine Verallgemeinerung der Darstellung endlich erzeugter halbeinfacher Moduln als direkte Summen handelt. Da nicht jeder Modul endlicher Länge halbeinfach ist, ist dies eine echte Verallgemeinerung.

Aus Beispiel 4.1.9 ergibt sich außerdem, dass die Wahl von Kompositionsreihen für einen Modul nicht eindeutig ist. Allerdings haben in allen Beispielen die verschiedenen Kompositionsreihen stets die gleiche Länge, und im ersten Beispiel sind die Subquotienten eindeutig bestimmt bis auf deren Reihenfolge.

Ebenso fällt auf, dass in allen drei Kompositionsreihen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ jeweils zweimal der Subquotient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und einmal der Subquotient $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ auftreten. Analog könnte man zeigen, dass für den \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gerade die Moduln $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für die Primteiler p von n als Subquotienten auftreten, und zwar jeweils so oft wie sie in der Primfaktorzerlegung von n vorkommen (Übung). Der Satz von Jordan-Hölder zeigt, dass dies kein Zufall, sondern ein allgemeines Muster ist.

Satz 4.1.10: (Satz von Jordan-Hölder)

Sei M ein Modul endlicher Länge über R . Dann gilt:

1. Jeder Quotientenmodul und Untermodul von M ist ein Modul endlicher Länge über R mit $l(M/U) + l(U) = l(M)$ für jeden Untermodul $U \subset M$.
2. Alle Kompositionsreihen von M haben die gleiche Länge und bis auf die Reihenfolge isomorphe Subquotienten:

Sind $0 = M_0 \subset \dots \subset M_n = M$ und $0 = M'_0 \subset \dots \subset M'_k = M$ Kompositionsreihen von M , so folgt $k = n$, und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $M_i/M_{i-1} \cong M'_{\sigma(i)}/M'_{\sigma(i)-1}$.

Beweis:

1. Sei $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ eine Kompositionsreihe von M und $U \subset M$ ein Untermodul. Wir konstruieren aus dieser Kompositionsreihe von M Kompositionsreihen des Untermoduls $U \subset M$ und des Quotienten M/U , deren Längen sich zu n summieren. Sei dazu $\pi : M \rightarrow M/U$ die kanonische Surjektion und $U_i = M_i \cap U$. Wir zeigen, dass jeder Subquotient der Filtrierungen

$$0 = \pi(M_0) \subset \pi(M_1) \subset \dots \subset \pi(M_n) = M/U, \quad 0 = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n = U$$

entweder 0 oder einfach ist und konstruieren dann Kompositionsreihen, indem wir die Terme M_i und U_i mit $\pi(M_i)/\pi(M_{i-1}) = 0$ und $U_i/U_{i-1} = 0$ entfernen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} f_i : U_i/U_{i-1} &\rightarrow M_i/M_{i-1}, & u + U_{i-1} &\mapsto u + M_{i-1} \\ g_i : M_i/M_{i-1} &\rightarrow \pi(M_i)/\pi(M_{i-1}), & m + M_{i-1} &\mapsto \pi(m) + \pi(M_{i-1}). \end{aligned}$$

Der R -Modulhomomorphismus f_i ist injektiv, denn aus $f_i(u + U_{i-1}) = u + M_{i-1} = M_{i-1}$ folgt $u \in U_i \cap M_{i-1} = U_{i-1}$ und damit $u + U_{i-1} = U_{i-1}$. Der R -Modulhomomorphismus g_i ist surjektiv, da die Abbildungen $\pi_i : M_i \rightarrow \pi(M_i)$ und $\pi'_i : \pi(M_i) \rightarrow \pi(M_i)/\pi(M_{i-1})$ surjektiv sind und $g_i(m + M_{i-1}) = \pi'_i \circ \pi_i(m)$. Da M_i/M_{i-1} einfach ist, folgt mit Lemma 4.1.3 ausserdem, dass f_i surjektiv oder $f_i = 0$ und g_i injektiv oder $g_i = 0$. Damit ist $f_i = 0$ oder ein Isomorphismus und $g_i = 0$ oder ein Isomorphismus.

Außerdem gilt $\ker(g_i) = \text{im}(f_i)$, denn aus $u \in U_i$ folgt $g_i(u + M_{i-1}) = \pi(u) + \pi(M_{i-1}) = \pi(M_{i-1})$ und damit $\text{im}(f_i) \subset \ker(g_i)$. Ist umgekehrt $m + M_{i-1} \in \ker(g_i)$, so gibt es ein $m' \in M_{i-1}$ mit

$\pi(m - m') = 0$ und damit ein $u \in U_i = U \cap M_i$ mit $m - m' = u$. Es folgt $m + M_{i-1} = (u + m') + M_{i-1} = u + M_{i-1} \in \text{im}(f_i)$.

Setzt man diese Aussagen zusammen, so ergibt sich, dass entweder f_i bijektiv ist und $g_i = 0$ oder $f_i = 0$ und g_i bijektiv. Im ersten Fall hat man $\pi(M_i)/\pi(M_{i-1}) = 0$ und $U_i/U_{i-1} \cong M_i/M_{i-1}$, im zweiten $\pi(M_i)/\pi(M_{i-1}) \cong M_i/M_{i-1}$ und $U_i/U_{i-1} = \{0\}$.

Wir entfernen nun aus der Filtrierung $0 = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n = U$ alle Untermoduln U_i mit $U_i/U_{i-1} = 0$ und aus der Filtrierung $0 = \pi(M_0) \subset \pi(M_1) \subset \dots \subset \pi(M_n) = M/U$ alle Untermoduln $\pi(M_i)$ mit $\pi(M_i)/\pi(M_{i-1}) = 0$. Damit haben wir Kompositionsreihen von U und $\pi(M) = M/U$ konstruiert, deren Länge zusammen gerade die Länge der Kompositionsreihe von M ergeben. Damit folgt insbesondere, dass jeder Untermodul und Quotient eines Moduls endlicher Länge ein Modul endlicher Länge ist.

2. Wir zeigen per Induktion über die Länge des Moduls, dass zwei Kompositionsreihen eines Moduls die gleiche Länge haben und bis auf reihenfolge isomorphe Subquotienten.

$\ell(M) = 0$: Existiert eine Kompositionsreihe der Länge null, so ist $M = 0$ und jede Kompositionsreihen von M hat Länge null. Die Subfaktoren sind dann trivialerweise eindeutig.

$n - 1 \mapsto n$: Sei bereits gezeigt, dass für Moduln der Länge $\ell(M) \leq n - 1$ alle Kompositionsreihen des Moduls Länge $\ell(M)$ und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten. Sei M ein Modul der Länge n mit einer Kompositionsreihe $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ und $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \dots \subset M'_k = M$ eine weitere Kompositionsreihe von M . Dann erhält man durch Quotientenbildung mit dem Untermodul $M_1 \neq 0$ zwei Kompositionsreihen des Moduls M/M_1 . Nach 1. haben diese Länge $n - 1$ und $k - 1$, denn $0 \subset M_1$ ist eine Kompositionsreihe des Moduls M_1 der Länge eins. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun $n = k$.

Der Untermodul $M_1 \cong M_1/M_0$ ist ein einfacher Untermodul von M und somit gilt für alle Untermoduln $M_1 \cap M'_i \subset M_1$ entweder $M_1 \cap M'_i = 0$ oder $M_1 \cap M'_i = M_1$. Da außerdem $0 \subset M'_1/M_1 \subset \dots \subset M'_n/M_1 = M/M_1$, gibt es genau ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $M_1 \cap M'_k = 0$ für $k < i$ und $M_1 \cap M'_k = M_1$ für $k \geq i$, und daraus folgt $M'_i/M'_{i-1} \cong M_1$. Quotientenbildung und die kanonische Surjektion $\pi : M \rightarrow M/M_1$ liefern dann zwei Kompositionsreihen

$$\begin{aligned} 0 &\subset \pi(M_2) \subset \pi(M_3) \subset \dots \subset \pi(M_n) = M/M_1 \\ 0 &\subset \pi(M'_1) \subset \dots \subset \pi(M'_{i-1}) \subset \pi(M'_{i+1}) \subset \dots \subset \pi(M'_n) = M/M_1. \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{M}_j = \pi(M'_j)$ für $j \leq i - 1$ und $\tilde{M}_j = \pi(M'_{j+1})$ für $j \geq i$, so existiert per Induktionsvoraussetzung eine Permutation $\sigma \in S_{n-1}$ mit $\pi(M'_{j+1})/\pi(M_j) \cong \tilde{M}_{\sigma(j)}/\tilde{M}_{\sigma(j)-1}$. Die Permutation $\tau \in S_n$ mit $\tau(1) = i$, $\tau(j+1) = \sigma(j)$ für $\sigma(j) \leq i - 1$ und $\tau(j+1) = \sigma(j) + 1$ für $\sigma(j) \geq i$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} M_1/M_0 &\cong M_1 \cong M'_i/M'_{i-1} = M'_{\tau(1)}/M'_{\tau(1)-1} \\ M_{j+1}/M_j &\cong (M_{j+1}/M_1)/(M_j/M_1) = \pi(M_{j+1})/\pi(M_j) \cong \tilde{M}_{\sigma(j)}/\tilde{M}_{\sigma(j)-1} \cong M'_{\tau(j)}/M'_{\tau(j)-1} \quad j > 0, \end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen für Moduln der Länge $l(M) \leq n$. \square

Aus dem Satz von Jordan-Hölder lassen sich insbesondere Aussagen über Ringe herleiten, die Moduln endlicher Länge als Linksmoduln über sich selbst sind. In diesem Fall kann man zeigen, dass jeder einfache R -Modul als Quotient in einer Kompositionsreihe von R auftritt. Bezüglich der Kompositionsreihen spielt R als Modul über sich selbst also eine ähnliche Rolle wie die

reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe G bezüglich der direkten Summen: Jeder einfache Modul tritt als Subquotient in dieser Kompositionsreihe auf, genau wie jede einfache Darstellung einer endlichen Gruppe G als Summand in der regulären Darstellung enthalten ist.

Korollar 4.1.11: Sei R ein Ring, der als Linksmodul über sich selbst endliche Länge hat. Dann ist jeder einfache R -Modul isomorph zu einem Quotienten von R und tritt somit in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf.

Beweis:

Sei R ein Ring, der als Linksmodul über sich selbst endliche Länge hat, und M ein einfacher R -Modul. Dann ist nach Lemma 4.1.6 jedes Element $m \in M \setminus \{0\}$ ein Erzeuger von M , und wir erhalten einen surjektiven R -Modulhomomorphismus $\phi_m : R \rightarrow M, r \mapsto r \triangleright m$. Nach Lemma 2.2.6 ist $M \cong R/\ker(\phi_m)$. Als Untermodul von R ist auch $\ker(\phi_m)$ ein Modul endlicher Länge, und für jede Kompositionsreihe $0 = I_0 \subset \dots \subset I_k = \ker(\phi_m)$ von $\ker(\phi_m)$, ist $0 = I_0 \subset \dots \subset \ker(\phi_m) \subset R$ wegen der Einfachheit von $M \cong R/\ker(\phi_m)$ eine Kompositionsreihe von R . Da nach Satz 4.1.10 alle Kompositionsreihen von R die gleichen Subquotienten haben, tritt $M_{k+1} \cong R/\ker(\phi_m)$ in jeder Kompositionsreihe von R als Subquotient auf. \square

Insbesondere kann man den Satz dazu benutzen, um Aussagen über die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln zu gewinnen. Dazu betrachtet man Ringe wie etwa den Gruppenring $R = \mathbb{K}[G]$ oder den Endomorphismenring $R = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eines \mathbb{K} -Vektorraums, die einen Körper \mathbb{K} als Unterring enthalten. In diesem Fall ist jeder R -Modul auch ein Vektorraum über \mathbb{K} , insbesondere der Ring R als Linksmodul über sich selbst und jeder Subquotient in einer Kompositionsreihe. Die Dimension von R ist dann die Summe der Dimensionen der Subquotienten und beschränkt die Längen der Kompositionsreihen.

Korollar 4.1.12: Sei R ein Ring, der einen Körper \mathbb{K} als Unterring enthält. Dann ist R ein Vektorraum über \mathbb{K} , und falls $\dim_{\mathbb{K}} R < \infty$ gibt es maximal $\dim_{\mathbb{K}} R$ verschiedene Isomorphieklassen einfacher R -Moduln.

Beweis:

Da $\mathbb{K} \subset R$ ein Unterring ist, ist jeder R -Modul auch ein \mathbb{K} -Modul, also ein Vektorraum über \mathbb{K} . Insbesondere gilt das für R als Linksmodul über sich selbst, und jedes Ideal $I \subset R$ ist ein Untervektorraum von R . Jede Filtrierung von R durch Ideale $0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subset R$ ist in einer maximalen Filtrierung erhalten, die nicht mehr verfeinert werden kann. (Dies ergibt sich mit dem Zornschen Lemma). Da aus $I_k \subsetneq I_{k+1} \subset R$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} I_k < \dim_{\mathbb{K}} I_{k+1}$, ist diese maximale Filtrierung eine Kompositionsreihe endlicher Länge. Nach Korollar 4.1.11 tritt jeder einfache R -Modul M als ein Subquotient in jeder Kompositionsreihe $0 = I_0 \subset \dots \subset I_k = R$ von R auf und es folgt: $\dim_{\mathbb{K}} R = \dim_{\mathbb{K}}(I_1/I_0) + \dim_{\mathbb{K}}(I_2/I_1) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(R/I_{k-1}) \geq k$. Also kann es maximal $\dim_{\mathbb{K}} R$ Isomorphieklassen einfacher R -Moduln geben. \square

Als Spezialfall dieses Korollars für den Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ einer endlichen Gruppe G erhalten wir eine Abschätzung für die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über beliebigen Körpern \mathbb{K} . Denn nach Beispiel 2.1.7, 5. entsprechen die Darstellungen einer endlichen Gruppe gerade den $\mathbb{K}[G]$ -Moduln, und der Körper \mathbb{K} ist ein Unterring von $\mathbb{K}[G]$ mit $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G] = |G|$.

Korollar 4.1.13: Sei \mathbb{K} ein Körper und G eine endliche Gruppe. Dann gibt es maximal $|G|$ verschiedene Isomorphieklassen einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} .

4.2 Halbeinfache Moduln

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Struktur halbeinfacher Moduln und werden schließlich Resultate aus Kapitel 1 für die endlich-dimensionalen halbeinfachen Darstellungen endlicher Gruppen auf halbeinfache Moduln verallgemeinern. Dazu leiten wir zunächst eine äquivalente Charakterisierung halbeinfacher Moduln her und untersuchen wie sich Halbeinfachheit unter dem Übergang zu Untermoduln und Quotienten verhält.

Lemma 4.2.1: Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Dann sind äquivalent:

- (i) M ist halbeinfach.
- (ii) M ist die (nicht notwendigerweise direkte) Summe einfacher Untermoduln
- (iii) Jeder Untermodul $U \subset M$ besitzt ein Komplement, d. h. es existiert ein Untermodul $V \subset M$ mit $M = U \oplus V$.

Beweis:

Offensichtlich gilt (i) \Rightarrow (ii). Wir zeigen (ii) \Rightarrow (iii) und (iii) \Rightarrow (i).

(ii) \Rightarrow (iii): Sei $U \subset M$ ein Untermodul. Wir wählen eine maximale Menge $\{U_i \mid i \in I\}$ einfacher Untermoduln $U_i \subset M$ mit $U \cap (\sum_{i \in I} U_i) = 0$, setzen $V := \sum_{i \in I} U_i$ und zeigen, dass V ein Komplement von U ist.

Gäbe es ein Element $m \in M \setminus (U + V)$, so ließe sich m nach (ii) schreiben als endliche Summe $m = w_1 + \dots + w_m$ von Elementen $w_i \in W_i$ in einfachen Untermoduln $W_i \subset M$. Da für jeden einfachen Untermodul W_i entweder $W_i \cap (U + V) = 0$ oder $W_i \cap (U + V) = W_i$ und damit $W_i \subset U + V$ gilt, würde aus $m \in M \setminus (U + V)$ folgen, dass ein einfacher Untermodul $W_i \subset M$ mit $W_i \cap (U + V) = 0$ existiert, was $W_i \cap U = 0$ impliziert, im Widerspruch zur Maximalität. Also folgt $U + V = M$ und wegen $U \cap V = \{0\}$ auch $M = U \oplus V$.

(iii) \Rightarrow (i): Sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine maximale Menge einfacher Untermoduln $U_i \subset M$, so dass die Summe $\sum_{i \in I} U_i$ direkt ist. Wir zeigen, dass $M = \bigoplus_{i \in I} U_i$ gilt.

Ist $\bigoplus_{i \in I} U_i \neq M$, so existiert nach (iii) ein Untermodul $0 \neq V \subset M$ mit $M = V \oplus (\bigoplus_{i \in I} U_i)$. Enthält V einen einfachen Untermodul, so erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität der Menge $\{U_i \mid i \in I\}$, und die Aussage ist bewiesen.

Um einen einfachen Untermodul von V zu konstruieren, wählen wir ein Element $v \in V \setminus \{0\}$ und betrachten den davon erzeugten Untermodul $\langle v \rangle_M \subset V \subset M$ sowie die R -lineare Abbildung $\phi_v : R \rightarrow M$, $r \mapsto r \triangleright v$. Dann ist $\ker(\phi_v) \subsetneq R$ ein Ideal, und wir können ein maximales Ideal $I \subset R$ mit $\ker(\phi_v) \subset I \subsetneq R$ wählen. Dann ist $\phi_v(I) \subsetneq \langle v \rangle_M$ ein maximaler Untermodul von $\langle v \rangle_M$, denn für jeden Untermodul $N \subset \langle v \rangle_M$ ist $\phi_v^{-1}(N) \subset R$ ein Ideal und $N \subset N'$ impliziert $\phi_v^{-1}(N) \subset \phi_v^{-1}(N')$. Nach (iii) gibt es einen Untermodul $0 \neq W \subset M$ mit $M = W \oplus \phi_v(I)$. Der Untermodul $W \cap \langle v \rangle_M \subset V$ ist einfach. Denn aus $\phi_v(I) \subsetneq \langle v \rangle_M$ folgt $W \cap \langle v \rangle_M \neq 0$, und gäbe es einen echten Untermodul $0 \neq X \subsetneq (W \cap \langle v \rangle_M)$, so wäre $X \oplus \phi_v(I)$ ein echter Untermodul von $\langle v \rangle_M$ mit $\phi_v(I) \subsetneq X \oplus \phi_v(I)$, im Widerspruch zur Maximalität des Untermoduls $\phi_v(I) \subset \langle v \rangle_M$. \square

Korollar 4.2.2: Untermoduln und Quotienten halbeinfacher Moduln sind halbeinfach.

Beweis:

Sei M halbeinfach, $U \subset M$ ein Untermodul und $\pi : M \rightarrow M/U$ die kanonische Surjektion. Dann gibt es nach Lemma 4.2.1 (ii) einfache Untermoduln $N_i \subset M$ mit $M = \sum_{i \in I} N_i$. Für jeden einfachen Untermodul $N_i \subset M$ gilt entweder $\pi(N_i) = 0$ oder $\pi(N_i) \cong N_i$, denn die R -lineare Abbildung $\pi|_{N_i} : N_i \rightarrow M/U$ ist nach Lemma 4.1.3 entweder 0 oder injektiv. Daraus folgt $M/U = \pi(M) = \sum_{i \in I} \pi(N_i)$ mit $\pi(N_i)$ einfach oder null. Also nach Lemma 4.2.1 (ii) auch der Quotient M/U wieder halbeinfach. Nach Lemma 4.2.1 (iii) existiert außerdem zu jedem Untermodul $U \subset M$ ein Untermodul $V \subset M$ mit $M = U \oplus V$. Daraus folgt $U \cong M/V$, und nach dem ersten Beweisschritt ist M/V einfach. \square

Kennen wir eine Beschreibung eines halbeinfachen Moduls M als Summe einfacher Untermoduln, so können wir die Untermoduln und Quotienten von M noch expliziter beschreiben, indem wir sie in einfache Untermoduln zerlegen. Einfache Untermoduln und Quotienten von M sind dann isomorph zu einfachen Untermoduln in der Summe. Dies zeigt, dass jede Menge einfacher Untermoduln, die M erzeugt, alle einfachen Untermoduln und Quotienten von M enthält.

Lemma 4.2.3: Sei M ein halbeinfacher R -Modul und $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Menge einfacher Untermoduln $U_i \subset M$ mit $M = \sum_{i \in I} U_i$. Dann ist jeder einfache Untermodul von M und jeder einfache Quotient bezüglich eines Untermoduls von M isomorph zu einem der Moduln U_i .

Beweis:

1. Sei $V \subset M$ ein Untermodul von M , so dass M/V einfach ist und $\pi : M \rightarrow M/V$ die kanonische Surjektion. Dann existiert ein $i \in I$ mit $\pi(U_i) \neq 0$. Die Abbildung $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow M/V$ ist dann ein R -Modulhomomorphismus zwischen einfachen Moduln und wegen $\pi(U_i) \neq 0$ nach Lemma 4.1.3 ein Isomorphismus.

2. Sei nun $U \subset M$ ein einfacher Untermodul. Da M halbeinfach ist, gibt es nach Lemma 4.2.1 einen Untermodul $W \subset M$ mit $M = U \oplus W$. Also ist $M/W \cong U$ einfach, und nach 1. existiert ein $i \in I$ mit $U \cong M/W \cong U_i$. \square

Das Ziel ist es nun, die Aussagen aus Kapitel 1.2 zur Beschreibung von halbeinfachen Gruppendarstellungen durch ein Repräsentantensysteme von Isomorphieklassen einfacher Darstellungen entsprechend auf Moduln zu verallgemeinern. Insbesondere wurde in Korollar 1.2.11 gezeigt, dass sich jede endlich-dimensionale halbeinfache Darstellung einer endlichen Gruppe G eindeutig als direkte Summe der Darstellungen im Repräsentantensystem zerlegen lässt und vollständig durch die darin auftretenden Multiplizitäten charakterisiert ist.

Betrachtet man nun einen allgemeinen Modul M über einem Ring R , so muss dieser offensichtlich nicht halbeinfach sein. Ebenso ist nicht garantiert, dass ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln endlich ist oder dass es nur endlich viele Untermoduln von M gibt, die zu einem gegebenen einfachen R -Modul L isomorph sind.

Es liegt aber nahe, dass die einfachen Untermoduln von M einen halbeinfachen Untermodul von M erzeugen sollten, und dass dieser halbeinfache Untermodul die direkte Summe der Untermoduln sein sollte, die zu einem gegebenen einfachen Modul in einem Repräsentantensystem isomorph sind. Diese Aussagen setzen weder die Endlichkeit des Repräsentantensystems, noch die Halbeinfachheit von M voraus und motivieren die folgende Definition.

Definition 4.2.4: Sei R ein Ring, M ein R -Modul und L ein einfacher R -Modul.

1. Die **isotypische Komponente** von M vom Typ L ist die Summe

$$M_L = \sum_{L \cong U \subset M} U$$

2. Der **Sockel** von M ist die Summe aller einfachen Untermoduln von M

$$\text{Soc}(M) = \sum_{U \subset M \text{ einfach}} U.$$

Satz 4.2.5: (Isotypische Zerlegung)

1. Der Sockel eines R -Moduls M ist der größte halbeinfache Untermodul von M . Insbesondere ist M halbeinfach genau dann, wenn $M = \text{Soc}(M)$.
2. Ist $(L_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln, so gilt

$$\text{Soc}(M) \cong \bigoplus_{i \in I} M_{L_i}.$$

Beweis:

1. Sei M ein R -Modul. Nach Lemma 4.2.1 ist der Sockel von M ein halbeinfacher Untermodul von M . Gäbe es einen halbeinfachen Untermodul $N \subset M$ mit $\text{Soc}(M) \subsetneq N$, so gäbe es nach Lemma 4.2.1 einen Untermodul $N' \subset N$ mit $N = \text{Soc}(M) \oplus N'$ und nach Korollar 4.2.2 wäre N' halbeinfach. Damit hätte N' aber einfache Untermoduln, die nicht in $\text{Soc}(M)$ enthalten sind, im Widerspruch zur Definition des Sockels. Also ist der Sockel der größte halbeinfache Untermodul von M und jeder halbeinfache Modul gleich seinem Sockel.

2. Per Definition ist $\text{Soc}(M)$ die Summe der einfachen Untermoduln von M , und jeder einfache Untermodul $U \subset M$ ist isomorph zu genau einem Modul L_i . Also gilt $\text{Soc}(M) = \sum_{i \in I} M_{L_i}$. Zu zeigen ist, dass diese Summe direkt ist.

Angenommen es gibt ein $i \in I$ mit $M_{L_i} \cap (\sum_{j \in I \setminus \{i\}} M_{L_j}) \neq 0$. Dann ist auch der Modul $U = M_{L_i} \cap (\sum_{j \in I \setminus \{i\}} M_{L_j})$ halbeinfach als Untermodul des halbeinfachen Moduls $\text{Soc}(M)$ und hat somit einen einfachen Untermodul $V \subset U$. Daraus ergibt sich $V \subset M_{L_i}$ und $V \subset M_{L_j}$ für ein $j \neq i$. Mit Lemma 4.2.3 folgt daraus $V \cong L_i \cong L_j$, ein Widerspruch zur Definition des Repräsentandensystems. Es folgt $M_{L_i} \cap (\sum_{j \in I \setminus \{i\}} M_{L_j}) = 0$ und $\text{Soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} M_{L_i}$. \square

Beispiel 4.2.6:

1. Moduln über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$ entsprechen nach Beispiel 2.1.7, 6. Paaren (V, ϕ) aus einem komplexen Vektorraum V und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Ist $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, so sind die einfachen Untermoduln von $M = (V, \phi)$ nach Beispiel 4.1.2, 6. gerade die Unterräume $U = \mathbb{C}v$ mit Eigenvektoren v von ϕ . Zwei einfache Untermoduln $U = \mathbb{C}v$ und $U' = \mathbb{C}v'$ sind isomorph genau dann, wenn $v, v' \in V$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind. Damit sind die isotypischen Komponenten gerade die Eigenräume zu festen $\lambda \in \mathbb{C}$ und den Sockel ist die direkte Summe aller Eigenräume

$$V_\lambda = E_\lambda(\phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\} \quad \text{Soc}(V) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} E_\lambda(\phi)$$

2. Nach dem Klassifikationssatz ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe von der Form $A \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$ mit eindeutigem $n \in \mathbb{N}_0$ und Primpotenzen $q_i = p_i^{d_i} \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 4.1.2, 6. sind die einfachen \mathbb{Z} -Moduln genau die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim, und daraus ergibt sich für die isotypischen Komponenten und den Sockel

$$A_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s \text{ mit } s = |\{q_i \mid i \in \{1, \dots, r\}, p \mid q_i\}| \quad \text{Soc}(A) = \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}.$$

Im Gegensatz zu diesen Beispielen müssen sich die isotypischen Komponenten und Sockel allgemeiner R -Moduln nicht unbedingt als endliche direkte Summen einfacher Untermoduln schreiben lassen, sondern es können auch unendlich viele Isomorphieklassen einfacher Moduln auftreten. Das in den Beispielen beobachtete Muster verallgemeinert sich jedoch auf endlich erzeugte Moduln. Dort lässt sich nämlich jeder Erzeuger in einem endlichen Erzeugendensystem als endliche Summe von Elementen in den isotypischen Komponenten schreiben, und man kommt mit endlich vielen isotypischen Komponenten aus. Auch in halbeinfachen Moduln endlicher Länge ist die Zahl der isotypischen Komponenten beschränkt, da dort nur endlich viele einfache Untermoduln als Subquotienten auftreten. Sind die betrachteten Moduln zusätzlich noch halbeinfach, so erhält man eine direkte Verallgemeinerung von Korollar 1.2.11 über die Multiplizitäten von Gruppendarstellungen.

Korollar 4.2.7:

1. Jeder endlich erzeugte halbeinfache Modul M ist ein Modul endlicher Länge.
2. Jeder halbeinfache Modul M endlicher Länge ist von der Form $M \cong \bigoplus_{i=1}^r L_i^{\oplus n_i}$ mit einfachen R -Moduln L_i , $L_i \not\cong L_j$ für $i \neq j$ und $n_i \in \mathbb{N}$.

Beweis:

1. Sei $M = \bigoplus_{i \in I} L_i$ mit einfachen Moduln L_i und $\{m_1, \dots, m_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von M . Dann lässt sich jeder Erzeuger als endliche Summe $m_j = l_{1j} + \dots + l_{p_j j}$ mit $l_{kj} \in L_{i_k}$ schreiben. Damit gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $M = \bigoplus_{i \in J} L_i$. Nach Beispiel 4.1.9 ist M somit ein Modul endlicher Länge.

2. Sei $(L_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln und M ein halbeinfacher R -Modul. Dann gilt $M = \bigoplus_{i \in I} M_{L_i}$ nach Satz 4.2.5. Da M endliche Länge hat, muss diese Summe endlich sein, denn jeder Subquotient in einer Kompositionsreihe von M ist einfach, damit nach Lemma 4.2.3 isomorph zu genau einem Modul L_i und damit in genau einer isotypischen Komponente M_{L_i} enthalten. Also kann es nur endlich viele isotypische Komponenten geben. Jede isotypische Komponente ist von der Form $M_{L_i} \cong L_i^{\oplus n_i}$ mit $n_i \in \mathbb{N}_0$ und damit ist M von der angegebenen Form. □

Mit diesen Aussagen können wir nun auch den Endomorphismenring eines halbeinfachen Moduln endlicher Länge expliziter beschreiben, indem wir ihn auf die Endomorphismenringe der isotypischen Komponenten zurückführen. Nach Lemma 4.1.3 sind nämlich alle Modulhomomorphismen zwischen nicht isomorphen einfachen Moduln trivial, und die Endomorphismen der einfachen Untermoduln bilden zwar keinen Körper, aber immerhin einen Schiefkörper. Damit erhalten wir eine Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 1, die die Homomorphismen zwischen endlich-dimensionalen Darstellungen von Gruppen explizit durch die darin auftretenden einfachen Darstellungen und deren Multiplizitäten charakterisieren.

Satz 4.2.8: Sei M ein halbeinfacher Modul endlicher Länge über einem Ring R . Dann ist $M = \bigoplus_{i=1}^k L_i^{\oplus n_i}$ mit einfachen, paarweise nicht isomorphen R -Moduln L_i , und $\text{End}_R(M)$ ist isomorph zu einem endlichen Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern:

$$\text{End}_R(M) \cong \text{Mat}(n_1, R_1) \times \dots \times \text{Mat}(n_k, R_k) \quad \text{mit} \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad R_i = \text{End}_R(L_i).$$

Beweis:

Nach Korollar 4.2.7 ist ein halbeinfacher Modul endlicher Länge von der Form $M = \bigoplus_{i=1}^k L_i^{\oplus n_i}$ mit L_i einfach, $n_i \in \mathbb{N}$ und $L_i \not\cong L_j$ für $i \neq j$. Da $\text{Hom}_R(L_i, L_j) = 0$ für $i \neq j$ nach Lemma 4.1.3 gilt auch $\text{Hom}_R(L_i^{\oplus n_i}, L_j^{\oplus n_j}) = 0$. Außerdem ist nach Lemma 4.1.3 der Endomorphismenring $R_i = \text{End}_R(L_i)$ ein Schiefkörper, und aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe und des direkten Produkts von Moduln ergibt sich $\text{Hom}_R(L_i^{\oplus n_i}, L_i^{\oplus n_i}) \cong \text{Mat}(n_i, \text{End}_R(L_i))$ (siehe Aufgabe 56). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{End}_R(M) &= \bigoplus_{i,j=1}^k \text{Hom}_R(L_i^{n_i}, L_j^{n_j}) \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Hom}_R(L_i^{n_i}, L_i^{n_i}) \\ &\cong \text{Mat}(n_1, \text{End}_R(L_1)) \times \dots \times \text{Mat}(n_k, \text{End}_R(L_k)). \end{aligned}$$

□

Ist der Ring R in Satz 4.2.8 eine Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} , so gilt nach dem Schurschen Lemma für Moduln $\text{End}_R(L) \cong \mathbb{K}$ für jeden einfachen R -Modul L , und wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 4.2.9: Sei A eine Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} . Dann gilt für jeden halbeinfachen A -Modul M endlicher Länge

$$\text{End}_R(M) \cong \text{Mat}(n_1, \mathbb{K}) \times \dots \times \text{Mat}(n_k, \mathbb{K}) \quad \text{mit eindeutig bestimmten } n_i \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 4.2.10:

Ein $\mathbb{C}[x]$ -Modul $M = (V, \phi)$ mit $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ist nach Beispiel 4.1.2 halbeinfach genau dann, wenn ϕ diagonalisierbar ist. Nach Beispiel 4.2.6 sind die isotypischen Komponenten gerade die Eigenräume $E_{\lambda}(\phi)$, und die einfachen Untermoduln die von einem Eigenvektor aufgespannten Untervektorräume $L = \mathbb{C}e$ mit $\text{End}_{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}e) \cong \mathbb{C}$. Hat ϕ paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit Eigenräumen E_{λ_i} , so ergibt sich

$$\text{End}_{\mathbb{C}[x]}(V, \phi) \cong \text{Mat}(n_1, \mathbb{C}) \times \dots \times \text{Mat}(n_r, \mathbb{C}) \quad n_i = \dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_i}).$$

4.3 Strukturtheorie halbeinfacher Ringe

Wir möchten die Resultate über (halb)einfache Moduln nun insbesondere auf Ringe anwenden, die (halb)einfach als Modul über sich selbst sind, und anschließend die Moduln über solchen Ringen klassifizieren. Dabei ist zu beachten, dass ein Ring R sowohl eine kanonische R -Linksmodulstruktur als auch eine kanonische R -Rechtsmodul- oder R^{op} -Linksmodulstruktur und eine kanonische (R, R) -Bimodulstruktur oder $R \otimes R^{op}$ -Linksmodulstruktur besitzt. Wenn wir von halbeinfachen oder einfachen Ringen sprechen, müssen wir daher genau spezifizieren, auf welche dieser Modulstrukturen wir uns beziehen.

Definition 4.3.1: Ein Ring R heißt

- **links(halb)einfach**, wenn er (halb)einfach als Linksmodul über sich selbst ist,
- **rechts(halb)einfach**, wenn er (halb)einfach als Rechtsmodul über sich selbst ist,
- **einfach**, wenn er linkshalbeinfach und einfach als $R \otimes R^{op}$ -Modul ist.
- **halbeinfach**, wenn er linkshalbeinfach ist.

Bemerkung 4.3.2: Offensichtlich ist ein Ring linkseinfach (rechtseinfach), wenn er keine echten Linksideale (Rechtsideale) besitzt und einfach, wenn er keine echten zweiseitigen Ideale besitzt. Da zweiseitige Ideale auch Linksideale und Rechtsideale sind, sind linkseinfache oder rechtseinfache Ringe immer einfach. Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Ein Ring ohne echte zweiseitige Ideale, muss nicht einmal halbeinfach sein, weswegen man dies in der Definition eines einfachen Rings zusätzlich fordert.

Beispiel 4.3.3:

1. Der Ring \mathbb{Z} ist nach Beispiel 4.1.2 nicht halbeinfach.
2. Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist halbeinfach genau dann, wenn in der Primfaktorzerlegung von n jede Primzahl nur einmal auftritt, denn für $n = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $m_i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{m_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{m_s}\mathbb{Z}$$

als abelsche Gruppen, und die Untergruppen $\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Untermoduln. Die echten Ideale im Ring $\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z}$ sind genau die Ideale $\mathbb{Z}/p_i^k\mathbb{Z}$ mit $k \in \{1, \dots, m_i - 1\}$.

3. Der Ring $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in einem Körper \mathbb{K} ist einfach (siehe Aufgabe 74).
4. Jeder Schiefkörper R ist linkseinfach und rechtseinfach und damit einfach. Denn ist $U \subset R$ ein Linksideal oder Rechtsideal, so existiert zu jedem $u \in U \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses $u^{-1} \in R$ mit $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$. Also gilt entweder $U = \{0\}$ oder $1 \in U$, und letzteres impliziert $r = r \cdot 1 = 1 \cdot r \in U$ für alle $r \in R$, also $U = R$.
5. Für jeden Körper \mathbb{K} und jede endliche Gruppe G mit $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ ist der Gruppenring $\mathbb{K}[G]$ halbeinfach. Denn $\mathbb{K}[G]$ als Linksmodul über sich selbst entspricht gerade der regulären Darstellung von G . Diese ist nach dem Satz von Maschke (Satz 1.2.6) halbeinfach, und ihre Zerlegung als direkte Summe einfacher Darstellungen entspricht gerade der Zerlegung von $\mathbb{K}[G]$ in einfache Linksideale.

Die Halbeinfachheit eines Rings R hat direkte Auswirkungen auf seine gesamte Darstellungstheorie. Denn Halbeinfachheit ist eine Eigenschaft, die unter der Bildung von direkten Summen erhalten bleibt und sich damit auf freie Moduln über R überträgt. Da Quotienten von freien Moduln frei sind und sich jeder R -Modul als Quotient eines freien Moduls schreiben lässt, ist damit jeder Modul über einem halbeinfachen Ring automatisch halbeinfach.

Satz 4.3.4: Ist R ein halbeinfacher Ring, so ist auch jeder R -Modul halbeinfach.

Beweis:

Jeder R -Modul M ist nach Bemerkung 2.4.9, 7. ein Quotient $M \cong F/U$ eines freien R -Moduls F bezüglich eines Untermoduls $U \subset F$. Da der freie R -Modul F von der Form $F = \bigoplus_i R$ ist und R halbeinfach ist, ist auch F halbeinfach. Nach Lemma 4.2.1 sind damit auch der Untermodul $U \subset F$ und der Quotient $M \cong F/U$ halbeinfach. \square

Wir interessieren uns nun zunächst dafür, halbeinfache Ringe so weit wie möglich zu klassifizieren und wollen anschließend die Moduln über solchen halbeinfachen Ringen betrachten. Eine explizite Charakterisierung von halbeinfachen Ringen erhält man direkt aus den Ergebnissen des letzten Abschnitts. Kombiniert man Satz 4.2.8 mit dem Satz über die isotypische Zerlegung, so kann man den Endomorphismenring $\text{End}_R(R)$ eines halbeinfachen Rings R als Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern ausdrücken. Indem man ausnutzt, dass sich jeder Endomorphismus in $\text{End}_R(R)$ durch Rechtsmultiplikation mit einem geeigneten Element aus R ergibt, erhält man eine analoge Charakterisierung für R .

Satz 4.3.5: (Struktursatz von Wedderburn)

Sei R ein halbeinfacher Ring. Dann existieren Schiefkörper K_1, \dots, K_r und natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, jeweils eindeutig bis auf die Reihenfolge, so dass

$$R \cong \text{Mat}(n_1, K_1) \times \dots \times \text{Mat}(n_r, K_r).$$

Beweis:

Da R halbeinfach ist und als Linksmodul über sich selbst endlich erzeugt, ist R nach Korollar 4.2.7 ein Modul endlicher Länge als Linksmodul über sich selbst, und seine isotypische Zerlegung ist von der Form $R = \bigoplus_{i=1}^r L_i^{n_i}$ mit L_i einfach, $L_i \not\cong L_j$ für $i \neq j$ und $n_i \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.1.3 sind die Endomorphismenringe $\text{End}_R(L_i)$ Schiefkörper, und mit Satz 4.2.8 ergibt sich

$$\text{End}_R(R) \cong \text{Mat}(n_1, \text{End}_R(L_1)) \times \dots \times \text{Mat}(n_r, \text{End}_R(L_r)).$$

Die Abbildung $\Psi : R^{op} \rightarrow \text{End}_R(R)$, $r \mapsto \psi_r$ mit $\psi_r(s) = sr$ ist ein Ringhomomorphismus, denn

$$\psi_{r+r'}(s) = sr + sr' = \psi_r(s) + \psi_{r'}(s) \quad \psi_{rr'}(s) = srr' = \psi_{r'} \circ \psi_r(s) \quad \psi_1(s) = s1 = s$$

für alle $s \in R$. Sie ist injektiv, denn aus $\psi_r = \psi_{r'}$ folgt $r = \psi_r(1) = \psi_{r'}(1) = r'$, und surjektiv, da aus $\phi \in \text{End}_R(R)$ folgt $\phi(r) = \phi(r \cdot 1) = r \cdot \phi(1)$ für alle $r \in R$ und damit $\phi = \Psi(\phi(1))$. Also gilt $\text{End}_R(R) \cong R^{op}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} R &\cong (R^{op})^{op} \cong (\text{End}_R(R))^{op} = \text{Mat}(n_1, \text{End}_R(L_1))^{op} \times \dots \times \text{Mat}(n_r, \text{End}_R(L_r))^{op} \\ &\cong \text{Mat}(n_1, \text{End}_R(L_1))^{op} \times \dots \times \text{Mat}(n_r, \text{End}_R(L_r))^{op}, \end{aligned}$$

Der letzte Ringisomorphismus wird durch den Ringhomomorphismus

$$T : \text{Mat}(n, \text{End}_R(L_i))^{op} \rightarrow \text{Mat}(n, \text{End}_R(L_i))^{op}, (a_{ij}) \mapsto (a_{ji})$$

induziert, der eine Involution und damit ein Ringisomorphismus ist. Die Eindeutigkeit der Zahlen n_i und Schiefkörper $K_i = \text{End}_R(L_i)^{op}$ ergibt sich aus ihrer Eindeutigkeit in Satz 4.2.8. \square

Bemerkung 4.3.6: Aus dem Struktursatz von Wedderburn folgt insbesondere, dass (links)halbeinfache Ringe auch rechtshalbeinfach sind und umgekehrt (Aufgabe 77).

Alternativ können wir die Zerlegung eines halbeinfachen Rings R in Matrixringen über Schiefkörpern im Satz von Wedderburn auch abstrakt, mit Hilfe der isotypischen Komponenten von R formulieren. Dabei geht man von derselben Beschreibung des Rings R als direkte Summe einfacher Moduln aus und zeigt, dass die isotypischen Komponenten zweiseitige Ideale in R sind. Indem man das Element $1 \in R$ als Summe von Elementen in den isotypischen Komponenten schreibt, sieht man, dass diese auch unitalen Ringe sind.

Satz 4.3.7: Sei R ein halbeinfacher Ring. Dann gilt:

1. Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher R -Moduln.
2. Ist M ein einfacher R -Modul, so ist die isotypische Komponente $R_M \subset R$ ein zweiseitiges Ideal in R .
3. Ist L_1, \dots, L_n ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln mit zugehörigen isotypischen Komponenten $R_{L_i} \subset R$, so folgt

$$R \cong R_{L_1} \times \dots \times R_{L_n},$$

und die Elemente $e_i \in R_{L_i}$ mit $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ sind Idempotente mit $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$.

Beweis:

1. Da R ein halbeinfacher Ring ist und damit ein endlich erzeugter halbeinfacher Modul ist, gilt nach Korollar 4.2.7 $R \cong \bigoplus_{i=1}^n L_i^{\oplus n_i}$ mit einfachen R -Moduln L_i , $n_i \in \mathbb{N}$ und $L_i \not\cong L_j$ für $i \neq j$. Nach Korollar 4.1.11 tritt jeder einfache R -Modul als Subquotient in einer Kompositionsreihe von R auf und ist damit isomorph zu einem der Moduln L_i . Damit kann es nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher R -Moduln geben, die von L_1, \dots, L_n repräsentiert werden. .

2. Jede isotypische Komponente $R_{L_i} = L_i^{\oplus n_i} \subset R$ ist als Untermodul von R ein Linksideal in R . Wir zeigen, dass sie auch ein Rechtsideal ist. Da sich nach dem Satz über die isotypische Zerlegung jedes Element $r \in R$ als Summe $r = \sum_{i=1}^n r_i$ mit $r_i \in R_{L_i} = L_i^{\oplus n_i}$ schreiben lässt, reicht es dafür, zu zeigen, dass $U \cdot V = 0$ gilt für einfache Untermoduln $U, V \subset R$ mit $L_i \cong U$ und $L_j \cong V \subset R$ für $i \neq j$. Da $V \subset R$ ein Linksideal ist, ist $U \cdot V \subset V$, und da $U \subset R$ ein Linksideal ist, ist $U \cdot V \subset V$ ein Linksideal in V . Da V einfach ist, folgt $U \cdot V = 0$ oder $U \cdot V = V$. Für jedes $v \in V$ ist aber $\phi_v : U \rightarrow V$, $u \mapsto u \cdot v$ eine R -lineare Abbildung zwischen einfachen R -Moduln, also nach Lemma 4.1.3 entweder $\phi_v = 0$ oder ein Isomorphismus. Letzteres würde $L_i \cong U \cong V \cong L_j$ implizieren, ein Widerspruch. Also gilt $\phi_v = 0$ für alle $v \in V$ und damit $U \cdot V = 0$. Damit ist R_{L_i} ein zweiseitiges Ideal in R .

3. Wir zeigen zunächst, dass die Elemente $e_i \in R_{L_i}$ mit $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ aus dem ersten Beweisschritt Einselemente in R_{L_i} sind. Da $R_{L_i} \cdot R_{L_j} = 0$ für $i \neq j$, ergibt sich für alle $r \in R_{L_i}$

$$re_i = re_1 + \dots + re_n = r \cdot 1 = r = 1 \cdot r = e_1 r + \dots + e_n r = e_i r. \quad (5)$$

Damit ist jede isotypische Komponente R_{L_i} ein Ring mit Einselement $e_i \in R_{L_i}$, und das Element e_i ist als Einselement von R_{L_i} eindeutig. Da $R_{L_i} \cdot R_{L_j} = 0$ für $i \neq j$, erhalten wir einen Ringisomorphismus $\phi : R_{L_1} \times \dots \times R_{L_n} \rightarrow R$, $(r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i$ mit Inversem $\phi^{-1} : R \rightarrow R_{L_1} \times \dots \times R_{L_n}$, $r \mapsto (re_1, \dots, re_n)$. \square

Der Zusammenhang zwischen der Zerlegung in Satz 4.3.5 und in Satz 4.3.7 ergibt sich aus der Beobachtung, dass die Ringe $\text{Mat}(n_i, K_i)$ in Satz 4.3.5 als Linksmoduln über sich selbst halbeinfach sind, und ihre einfachen Untermoduln gerade den Spalten der Matrizen entsprechen (vgl. Aufgaben 72, 73 und 74). Damit ist die Anzahl der einfachen Untermoduln gleich den Multiplizitäten n_i in der Zerlegung $R = \bigoplus_{i=1}^n L_i^{\oplus n_i}$ und gleich der Anzahl der einfachen Untermoduln in den isotypischen Komponenten $R_{L_i} = L_i^{\oplus n_i}$. Nach Sätzen 4.3.5 und 4.3.7 gilt

$$R_{L_i} \cong \text{End}_{R_{L_i}}(R_{L_i})^{op} \cong \text{End}_R(R_{L_i})^{op} = \text{End}_R(L_i^{\oplus n_i})^{op} \cong \text{Mat}(n_i, \text{End}_R(L_i)^{op}) = \text{Mat}(n_i, K_i).$$

Die Idempotente e_i in Satz 4.3.7 entsprechen dabei gerade den Einheitsmatrizen im Ring $\text{Mat}(n_i, K_i)$ in Satz 4.3.5.

Mit Satz 4.3.5 und Satz 4.3.7 lassen sich auch direkt die isotypischen Komponenten beliebiger Moduln über einem halbeinfachen Ring bestimmen. Dazu drückt man das Einselement $1 \in R$ als Summe der Idempotente in Satz 4.3.7 bzw. der Einheitsmatrizen in den Ringen $\text{Mat}(n_i, K_i)$ in Satz 4.3.5 aus. Die Wirkung dieser Idempotente auf einen R -Modul M liefert dann Projektoren auf dessen isotypische Komponente vom Typ L_i .

Korollar 4.3.8: Sei R ein halbeinfacher Ring, L_1, \dots, L_n ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln. Dann ist für jeden R -Modul M die isotypische Komponente M_{L_i} gegeben durch $M_{L_i} = e_i \triangleright M$, wobei $e_i \in L_i$ mit $1 = \sum_{i=1}^n e_i$.

Beweis:

Die Untergruppe $e_i \triangleright M \subset M$ ist ein Untermodul von M , denn nach (5) gilt $e_i r = r e_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Daraus ergibt sich $r \triangleright (e_i \triangleright m) = (r e_i) \triangleright m = (e_i r) \triangleright m = e_i \triangleright (r \triangleright m) \in e_i \triangleright M$ für alle $m \in M$, und somit ist $e_i \triangleright M \subset M$ ein Untermodul. Jedes Element $m \in M$ läßt sich schreiben als $m = 1 \triangleright m = (\sum_{i=1}^n e_i) \triangleright m = \sum_{i=1}^n e_i \triangleright m$, und damit ist M die Summe der Untermoduln $M = \sum_{i=1}^n e_i \triangleright M$. Ist $m \in (e_i \triangleright M) \cap (e_j \triangleright M)$ so gibt es $m', m'' \in M$ mit $m = e_i \triangleright m' = e_j \triangleright m''$ und damit

$$m = e_i \triangleright m' = (e_i \cdot e_j) \triangleright m' = e_i \triangleright m = e_i \triangleright (e_j \triangleright m'') = (e_i e_j) \triangleright m'' = 0 \triangleright m'' = 0.$$

Also gilt $(e_i \triangleright M) \cap (e_j \triangleright M) = \{0\}$ und $M = \bigoplus_{i=1}^n e_i \triangleright M$. Für jedes Element $m \in e_i \triangleright M$ ist $\phi_m : R_{L_i} \rightarrow \langle m \rangle_M$, $r \mapsto r \triangleright m$ ein surjektiver R -Modulhomomorphismus und somit $\langle m \rangle_M \cong R_{L_i} / \ker(\phi_m)$. Nach Lemma 4.2.3 ist damit jeder einfache Untermodul $U \subset e_i \triangleright M$ isomorph zu L_i und $e_i \triangleright M \subset M_{L_i}$. Da $M \cong \bigoplus_{i=1}^n M_{L_i} \cong \bigoplus_{i=1}^n e_i \triangleright M$ folgt dann $e_i \triangleright M = M_{L_i}$. \square

Bemerkung 4.3.9: Insbesondere ergibt sich aus Satz 4.3.7 und Korollar 4.3.8, dass die Paare (n_i, K_i) von Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ und Schiefkörpern K_i im Struktursatz von Wedderburn (Satz 4.3.5) bis auf Permutationen eindeutig bestimmt sind. Beweis: Übung (Aufgabe 76).

Sowohl Satz 4.3.5 als auch Satz 4.3.7 können als Verallgemeinerungen der Aussagen über die Gruppenalgebra in Abschnitt 1.4 aufgefasst werden. Dabei betrachtet man die Gruppenalgebra $R = \mathbb{K}[G]$ als Linksmodul über sich selbst, also die reguläre Darstellung. Die Zerlegung der regulären Darstellung in einfache Darstellung liefert die Multiplizitäten n_i . Dieser Spezialfall ist auch unter dem Namen *Fouriertransformation für endliche Gruppen* bekannt.

Beispiel 4.3.10: (Fouriertransformation für endliche Gruppen)

Sei G eine endliche Gruppe, \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ und $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n)$ ein Repräsentantensystem einfacher Darstellungen von G über \mathbb{K} .

- Dann sind nach Korollar 1.3.12 die isotypischen Komponenten der Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$

$$\mathbb{K}[G] = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}[G]_{(\rho_i, V_i)} \quad \text{mit} \quad \mathbb{K}[G]_{(\rho_i, V_i)} = (\rho_i, V_i)^{\oplus \dim_{\mathbb{K}} V_i} \quad (6)$$

- Nach Satz 1.4.4 sind die Idempotente e_i Vielfache der Charakter der Darstellung (ρ_i, V_i)

$$1_{\mathbb{K}[G]} = \delta_e = \sum_{i=1}^n e_i \quad e_i \star e_j = \delta_{ij} e_i \quad \text{mit} \quad e_i = \frac{\dim_{\mathbb{K}} V_i}{|G|} \chi_{(\rho_i, V_i)}.$$

- Ein Ringisomorphismus, der die Isomorphie aus Satz 4.3.5 realisiert, ist

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}[G] &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_1) \times \dots \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V_n), \\ \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g &\mapsto (\sum_{g \in G} \lambda_g \rho_1(g), \dots, \sum_{g \in G} \lambda_g \rho_n(g)). \end{aligned} \quad (7)$$

Direktes Nachrechnen zeigt, dass dies ein Ringhomomorphismus ist und damit insbesondere eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Ist $a = \sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g \in \ker(\Phi)$, so ist wegen (6) auch die Linksmultiplikation mit a in $\mathbb{K}[G]$ die Nullabbildung und damit $a = a \star \delta_e = 0$. Damit ist Φ injektiv. Da nach Korollar 1.3.12

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[G]) = |G| \stackrel{1.3.12}{=} \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i)^2 = \dim_{\mathbb{K}}(\text{End}_{\mathbb{K}}(V_1) \times \dots \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V_n)),$$

ist Φ auch surjektiv und damit ein Ringisomorphismus.

Die Bezeichnung *Fouriertransformation* für den Ringisomorphismus in Beispiel 4.3.10 zweifach gerechtfertigt. Zunächst ist die Multiplikation im Gruppenring durch die Faltung von Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben, und die Ringmultiplikation in $\text{End}_{\mathbb{K}}(V_1) \times \dots \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V_n)$ ist die Komposition von Endomorphismen. Im Fall einer eindimensionalen Darstellung entspricht diese Komposition gerade der Multiplikation von Elementen im Körper \mathbb{K} . Dies verallgemeinert die Aussage, dass die Fouriertransformierten der Faltung zweier Funktionen das punktweise Produkt ihrer Fouriertransformierten ist. Der zweite Grund für die Bezeichnung ist, dass sich die übliche Fouriertransformierte auch als Ringhomomorphismus zwischen einer Verallgemeinerung des Gruppenrings und dem dem Produkt der Endomorphismenringe ihrer Darstellungsräume verstehen lässt. Dazu betrachten wir endliche zyklische Gruppen und die Gruppe S^1 .

Beispiel 4.3.11: Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$. Nach Korollar 1.2.9 sind die einfachen komplexen Darstellung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eindimensional und nach Beispiel 1.3.15 gibt es genau m einfache Darstellungen ρ_k

$$\rho_k : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \bar{l} \mapsto e^{2\pi i k l / m} \quad k \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Damit sind die zugehörigen Ringhomomorphismen $\Phi_k : \mathbb{C}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\Phi_k : \mathbb{C}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \sum_{l=0}^{m-1} f(\bar{l}) e^{2\pi i k l / m}$$

und der Ringisomorphismus aus Beispiel 4.3.10 hat die Form

$$\Phi : \mathbb{C}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}, \quad f \mapsto (\sum_{l=0}^{m-1} f(\bar{l}), \sum_{l=0}^{m-1} f(\bar{l}) e^{2\pi i l / m}, \dots, \sum_{l=0}^{m-1} f(\bar{l}) e^{2\pi i l (m-1) / m}).$$

Beispiel 4.3.12: Wir betrachten die Gruppe $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation in \mathbb{C} als Gruppenmultiplikation.

Da es sich um eine abelsche Gruppe handelt, sind nach Korollar 1.2.9 alle einfachen endlich-dimensionalen komplexen Darstellungen eindimensional und entsprechen somit Gruppenhomomorphismen $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Man kann zeigen, dass die *stetigen* einfachen endlich-dimensionalen komplexen Darstellungen genau den Gruppenhomomorphismen $\rho_n : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ entsprechen.

Verallgemeinert man den Gruppenring $\mathbb{C}[S^1]$, indem man stetige Funktionen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ zulässt und die endlichen Summen durch Integrale ersetzt, so erhält man

$$\Phi_n(f)c = \int_{S^1} f(z)\rho_n(z)c \, dz = \left(\int_{S^1} f(z)z^n \, dz \right) \cdot c = 2\pi \left(\int_0^1 f(e^{2\pi i x})e^{2\pi i n x} \, dx \right) \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{C}^\times.$$

Identifiziert man stetige Abbildungen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit \mathbb{Z} -periodischen stetigen Abbildungen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(e^{2\pi i x})$ so entspricht $\Phi_n(g)$ der Multiplikation mit den Fourierkoeffizienten

$$g_n = 2\pi \int_0^1 g(x)e^{2\pi i n x} \, dx.$$

Diese Verallgemeinerung des Ringisomorphismus aus Beispiel 4.3.10 ordnet einer periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(x + \mathbb{Z}) = g(x)$ also gerade ihre Fourierkoeffizienten zu.

Das zentrale Argument aus Satz 4.3.5, nämlich den Ring R mit dem Ring $\text{End}_R(R)$ der Modulendomorphismen von R als Linksmodul über sich selbst zu identifizieren, lässt sich in etwas allgemeinerer Form auch auf allgemeinere Moduln M über einem Ring R anwenden. Dabei betrachtet man einerseits den Endomorphismenring $\text{End}_R(M)$ des Moduls und andererseits die Gruppenhomomorphismen $f : M \rightarrow M$, die mit allen Modulendomorphismen kommutieren.

Diese wurden bereits in Beispiel 2.1.8 betrachtet, wo gezeigt wurde, dass für jeden R -Modul M die R -Modulendomorphismen von M einen Ring $\text{End}_R(M)$ bilden und die abelsche Gruppe M durch $\triangleright : \text{End}_R(M) \times M \rightarrow M, \phi \triangleright m = \phi(m)$ die Struktur eines $\text{End}_R(M)$ -Moduls erhält. Die $\text{End}_R(M)$ -Modulendomorphismen von M sind gerade die Gruppenhomomorphismen $\psi : M \rightarrow M$ mit $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ für alle $\phi \in \text{End}_R(M)$ und bilden den Endomorphismenring $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$. Die Strukturabbildung definiert einen kanonischen Ringhomomorphismus

$$\Phi_M : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M), r \mapsto \phi_r \quad \text{mit} \quad \phi_r(m) = r \triangleright m \quad (8)$$

Dieser spielt in vielen weiterführenden Konstruktionen mit Moduln eine Rolle, die wir allerdings in dieser Vorlesung nicht alle behandeln können. Da es sich hierbei um einen kanonischen Ringhomomorphismus handelt, der für jeden Ring R und jeden R -Modul M definiert ist, drängt sich aber die Frage nach der Injektivität und Surjektivität dieses Ringhomomorphismus auf. Diese untersuchen wir zunächst für einige Beispiele.

Beispiel 4.3.13:

1. Ist $R = \mathbb{C}$ und V ein \mathbb{C} -Vektorraum, so ist $\text{End}_{\text{End}_{\mathbb{C}}(V)}(V) \cong \mathbb{C}$.

Denn der Ringhomomorphismus $\Phi_V : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_{\text{End}_{\mathbb{C}}(V)}(V), \lambda \mapsto \lambda \text{id}_V$ ist injektiv. Der Ring $\text{End}_{\text{End}_{\mathbb{C}}(V)}(V)$ enthält die Gruppenendomorphismen von V , die mit allen Vektorraumendomorphismen kommutieren. Insbesondere müssen solche Gruppenhomomorphismen

\mathbb{K} -linear sein, denn $\lambda \text{id}_V \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Jedes Element aus $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, das mit allen Element aus $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ kommutiert, ist nach einem Ergebnis aus der Linearen Algebra ein Vielfaches der Identitätsabbildung. Damit ist Φ_V auch surjektiv.

2. Für jeden kommutativen Ring R und jeden R -Modul M gilt $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M) \subset \text{End}_R(M)$.
Denn wegen der Kommutativität von R ist für jedes Element $r \in R$ ist $\phi_r : M \rightarrow M$, $m \mapsto r \triangleright m$ ein R -Modulhomomorphismus. Ist $\psi : M \rightarrow M$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ für alle $\phi \in \text{End}_R(M)$, so folgt $\psi(r \triangleright m) = \psi \circ \phi_r(m) = \phi_r \circ \psi(m) = r \triangleright \psi(m)$ für alle $r \in R$, $m \in M$. Damit ist $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M) \subset \text{End}_R(M)$.
3. Ist R ein Schiefkörper, so ist $\Phi_M : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$, $r \mapsto \phi_r$ injektiv, denn aus $\phi_r = \phi_{r'}$ für $r, r' \in R$ ergibt sich $(r - r') \triangleright m = 0$ für alle $m \in M$ und somit $r = r'$. Wir werden später zeigen, dass Φ_M in diesem Fall auch surjektiv ist.
4. Für \mathbb{Z} als Linksmodul über sich selbst ist $\Phi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z})$, $z \mapsto \phi_z$ bijektiv. Denn da jeder Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ von der Form $\psi(z) = \psi(1) \cdot z$ ist, gilt $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.
5. Für $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $m \mapsto \phi_m$ nicht injektiv, denn $\phi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{z} \mapsto n \triangleright \bar{z} = 0$ ist die Nullabbildung. Allerdings ist $\Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ surjektiv, denn jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist von der Form $\phi_r : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{z} \mapsto r \triangleright \bar{z} = \bar{r}\bar{z}$.

Offensichtlich enthält der Ringhomomorphismus $\Phi_M : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$, $r \mapsto \phi_r$ wichtige Informationen über den Ring R und den R -Modul M . Insbesondere suggerieren die Beispiele, dass die Surjektivität des Ringhomomorphismus Φ etwas mit der Frage zu tun haben könnte, ob der Modul M halbeinfach ist. Wir zeigen dazu zunächst dass das Bild des Ringhomomorphismus Φ_M für halbeinfache R -Moduln M in einem gewissen Sinn dicht in $\text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ ist.

Satz 4.3.14: (Dichtesatz von Jacobson)

Sei M ein halbeinfacher R -Modul. Dann existiert zu jedem $\psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ und zu beliebigen Elementen $m_1, \dots, m_n \in M$ stets ein $r \in R$ mit $\psi(m_i) = r \triangleright m_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis:

1. Sei zunächst $n = 1$. Dann besitzt nach Lemma 4.2.1 für jedes $m \in M$ der Untermodul $\langle m \rangle_M \subset M$ des halbeinfachen Moduls M ein Komplement, also einen Untermodul $U \subset M$ mit $M = \langle m \rangle_M \oplus U$. Die Abbildung $\phi : M \rightarrow M$, $r \triangleright m + u \mapsto r \triangleright m$ ist R -linear und kommutiert somit mit jedem $\psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$. Daraus folgt $\psi(m) = \psi \circ \phi(m) = \phi \circ \psi(m) \in \langle m \rangle_M$, und es gibt ein $r \in R$ mit $\psi(m) = r \triangleright m$.

2. Die Aussage für $n > 1$ folgt aus 1., indem wir zu vorgegebenen $m_1, \dots, m_n \in M$ und $\psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ den R -Modul $M' = M^{\oplus n} = M \oplus \dots \oplus M$ betrachten, der als direkte Summe halbeinfacher R -Moduln wieder halbeinfach ist, den $\text{End}_R(M')$ -Modulhomomorphismus $\psi' = \psi^{\oplus n} = (\psi, \dots, \psi) : M^{\oplus n} \rightarrow M^{\oplus n}$ und das Element $m' = (m_1, \dots, m_n)$. \square

Der Dichtesatz von Jacobson besagt, dass sich für halbeinfache Moduln M die Gruppenhomomorphismen $\psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ zumindest durch einen Gruppenhomomorphismus der Form $\phi_r : m \mapsto r \triangleright m$ approximieren lassen. Ist der $\text{End}_R(M)$ -Modul M endlich erzeugt, so können

wir ψ auf den Erzeugern des Moduls durch einen Gruppenhomomorphismus ϕ_r beschreiben, und damit auf dem ganzen Modul.

Korollar 4.3.15: Sei M ein halbeinfacher R -Modul, so dass M als $\text{End}_R(M)$ -Modul endlich erzeugt ist. Dann ist der Ringhomomorphismus $\Phi_M : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$, $r \mapsto \phi_r$ surjektiv.

Beweis:

Dann existiert nach dem Dichtesatz von Jacobson zu jedem $\psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ ein $r \in R$ mit $\psi(m_i) = r \triangleright m_i$. Ist $\{m_1, \dots, m_n\}$ ein Erzeugendensystem des $\text{End}_R(M)$ -Moduls M , so gibt es zu jedem $m \in M$ Endomorphismen $\psi_1, \dots, \psi_n \in \text{End}_R(M)$ mit $m = \sum_{i=1}^n \psi_i(m_i)$. Daraus folgt

$$\psi(m) = \psi(\sum_{i=1}^n \psi_i(m_i)) = \sum_{i=1}^n \psi \circ \psi_i(m_i) = \sum_{i=1}^n \psi_i \circ \psi(m_i) = \sum_{i=1}^n \psi_i \circ \phi_r(m_i) = \phi_r(m)$$

und somit $\psi = \phi_r$. □

Im Fall eines Schiefkörpers R kann man sogar zeigen, dass für jeden nichttrivialen R -Modul M der zugehörige $\text{End}_R(M)$ -Modul M einfach ist, und zusammen mit Beispiel 4.3.13, 3. impliziert das, dass ϕ_M ein Isomorphismus ist.

Satz 4.3.16: Ist M ein Modul über einem Schiefkörper R , so ist $\Phi_M : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$, $r \mapsto \phi_r$ mit $\phi_r(m) = r \triangleright m$ ein Ringisomorphismus.

Beweis:

Nach Beispiel 4.3.13, 3. ist Φ_M injektiv. Nach Beispiel 4.3.3 ist der Schiefkörper R linkseinfach, und nach Satz 4.3.4 ist damit der R -Modul M halbeinfach. Es reicht nun zu zeigen, dass M als $\text{End}_R(M)$ -modul zyklisch ist, denn daraus folgt mit Korollar 4.3.15 die Surjektivität von ϕ_M .

Für jedes $m \in M \setminus \{0\}$ gilt $\langle m \rangle_M \cong R/\ker(\phi_m)$ für den surjektiven R -Modulhomomorphismus $\phi_m : R \rightarrow \langle m \rangle_M$, $r \mapsto r \triangleright m$. Da R linkseinfach ist und $m \neq 0$, folgt $\ker(\phi_m) = 0$ und ϕ_m ist ein Isomorphismus. Da M halbeinfach ist, hat der R -Untermodule $\langle m \rangle_M \subset M$ ein Komplement $U \subset M$. Zu jedem Element $m' \in M$ erhält man damit einen R -Modulendomorphismus $f : M \rightarrow M$, $v + u \mapsto \phi_m^{-1}(v) \triangleright m'$ für alle $v \in \langle m \rangle_M$ und $u \in U$, also mit $f \triangleright m = f(m) = m'$. Damit ist M ein zyklischer $\text{End}_R(M)$ -Modul, der von jedem Element $m \in M \setminus \{0\}$ erzeugt wird, also nach Lemma 4.1.6 sogar einfach. □

Betrachten wir Ringe, die Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} sind, so können wir umgekehrt folgern, dass jeder Unterring $R \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ für den M ein einfacher R -Modul ist, bereits der ganze Endomorphismenring ist.

Korollar 4.3.17: (Satz von Wedderburn)

Sei \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $R \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Unteralgebra, so dass V ein einfacher R -Modul ist. Dann gilt $R \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Beweis:

Nach dem Lemma von Schur für Moduln (Korollar 4.1.4) gilt $\text{End}_R(V) \cong \mathbb{K}$. Da $\phi_\chi(m) = \chi(m)$ für alle $\chi \in R$ ist der Ringhomomorphismus $\Phi_V : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(V)}(V) = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $r \mapsto \phi_r$ die kanonische Inklusion, also insbesondere injektiv. Da V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum

ist, ist V schon als \mathbb{K} -Modul und damit auch als R -Modul endlich erzeugt, und nach Korollar 4.3.15 ist Φ_V damit auch surjektiv. \square

Mit Hilfe des Satzes von Wedderburn können wir nun insbesondere folgern, dass für jede einfache Darstellung (ρ, V) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} der Ringhomomorphismus $\Phi_{(\rho, V)} : \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \rho(g)$ surjektiv ist. Wir können also jedes Element des Endomorphismenrings $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ als Linearkombination der Automorphismen $\rho(g) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ für $g \in G$ schreiben.

Korollar 4.3.18: Sei \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen und (ρ, V) eine endlich-dimensionale einfache Darstellung einer Gruppe G über \mathbb{K} . Dann ist $\Phi_{(\rho, V)} : \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\sum_{g \in G} \lambda_g \delta_g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \rho(g)$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Beweis:

Offensichtlich ist das Bild $R = \text{Im}(\Phi_{(\rho, V)}) \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ des Ringhomomorphismus $\Phi_{(\rho, V)}$ eine Unteralgebra der Endomorphismenalgebra $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Der endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorraum V ist ein einfacher R -Modul, denn es gilt $\phi_f \triangleright v = \phi_f(v) = f \triangleright v = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)v$ für alle $v \in V$ und $f \in \mathbb{K}[G]$, und die Darstellung (ρ, V) ist ein einfacher $\mathbb{K}[G]$ -Modul. Mit dem Satz von Wedderburn folgt dann $R = \text{Im}(\Phi_{(\rho, V)}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und der Ringhomomorphismus $\Phi_{(\rho, V)} : \mathbb{K}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ist surjektiv. \square

Ring R	R -Modul M				
	allgemein	endlich erzeugt	endliche Länge	halbeinfach	einfach
allgemein	<ul style="list-style-type: none"> isotypische Zerlegung des Sockels $\text{Soc}(M) \cong \bigoplus_{L \in \text{irr}} M_L$ Sockel ist der größte halbeinfache Untermodul 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong R^n / N$ mit $n \in \mathbb{N}$ $N \subset R^n$ Untermodul 	<ul style="list-style-type: none"> Kompositionsreihen $0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ M_i / M_{i-1} einfach halbeinfach + endl. Länge $\Rightarrow \text{End}_R(M)$ endliches Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern 	<ul style="list-style-type: none"> Untermoduln haben Komplemente isotypische Zerlegung $M \cong \bigoplus_{L \in \text{irr}} M_L$ Untermoduln, Quotienten auch halbeinfach zu $\Psi \in \text{End}_{\text{End}_R(M)}(M)$ und $m_1, \dots, m_n \exists r \in R$ mit $\Psi(m_i) = r \triangleright m_i$ 	<ul style="list-style-type: none"> zyklisch, jd. Element $\neq 0$ Erzeuger $\text{End}_R(M)$ ist Schiefkörper M, M' einfach $\phi : M \rightarrow M' \Rightarrow \phi = 0$ oder $\phi : M \cong M'$
halbeinfach	<ul style="list-style-type: none"> jd. R-Modul ist halbeinfach 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong \bigoplus_{i=1}^n L_i^{n_i}, L_i$ einfach, Modul endlicher Länge 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong \bigoplus_{i=1}^n L_i^{n_i}, L_i$ einfach 	<ul style="list-style-type: none"> isotypische Zerlegung $M \cong \bigoplus_{i=1}^n e_{L_i} \triangleright M$ mit $1 = \sum_{i=1}^n e_{L_i}$ 	<ul style="list-style-type: none"> nur endlich viele bis auf Isomorphie isotyp. Komponenten $R_{L_i} \subset R$ beidseit. Ideale $R \cong R_{L_1} \times \dots \times R_{L_k}$ für Repräsentanten L_i
einfach	<ul style="list-style-type: none"> jd. R-Modul ist halbeinfach 	<ul style="list-style-type: none"> siehe oben 	<ul style="list-style-type: none"> siehe oben 	<ul style="list-style-type: none"> siehe oben 	<ul style="list-style-type: none"> siehe oben R hat nur eine isotyp. Komponente
<ul style="list-style-type: none"> Bsp: $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ - (Schief)körper 	<ul style="list-style-type: none"> Untermoduln freier Moduln sind frei 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong R^n \times R / q_1 R \times \dots \times R / q_s R$ q_i Primpotenzen, $n \in \mathbb{N}_0$ 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong R / q_1 R \times \dots \times R / q_s R$ q_i Primpotenzen 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong R / p_1 R \times \dots \times R / p_s R$ p_i prim 	<ul style="list-style-type: none"> $M \cong R / pR, p$ prim
<ul style="list-style-type: none"> Bsp: \mathbb{Z} - abelsche Gruppen $\mathbb{K}[X], \mathbb{C}[X]$ - Jordan-NF 					

Abbildung 2: Übersicht: Klassifikation und Eigenschaften von Moduln

4.4 Übungen zu Kapitel 4

Aufgabe 61: Beweisen Sie, dass der \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halbeinfach ist genau dann, wenn jeder Primfaktor in einer Primfaktorzerlegung von n höchstens einmal auftritt, also $n = p_1 \cdots p_m$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 62: Zeigen Sie, dass der \mathbb{Z} -Modul \mathbb{Q} weder einfache noch maximale Untermoduln besitzt. (Erinnerung: Ein maximaler Untermodul eines R -Moduls M ist ein Untermodul $N \subsetneq M$, so dass kein Untermodul $N' \subset M$ mit $N \subsetneq N' \subsetneq M$ existiert.)

Aufgabe 63: Geben Sie einen Ring R , einen R -Modul M und einen Untermodul $N \subset M$ an, so dass N und M/N halbeinfach sind, aber M nicht.

Aufgabe 64: Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass der zugehörige $\mathbb{C}[x]$ -Modul V halbeinfach ist, genau dann, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von ϕ besitzt. Gilt eine analoge Aussage für Vektorräume V über beliebigen Körpern? Beweisen Sie dies, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 65: Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist M ein zyklischer R -Modul mit Erzeuger $m \in M$, so gilt $M \cong R/\text{Ann}(m)$.
- (b) Ein zyklischer R -Modul M mit Erzeuger $m \in M$ ist einfach genau dann, wenn $\text{Ann}(m)$ ein maximales Linksideal in R ist.
- (c) Ist $I \subset R$ ein zweiseitiges Ideal in R , so gilt $\text{Ann}(R/I) = I$.
- (d) Ist R kommutativ, dann induziert die Zuordnung $I \rightarrow R/I$ eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Linksideale in R und den Isomorphieklassen einfacher R -Moduln.

Aufgabe 66: Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Ist R ein Schiefkörper, so ist jeder einfache R -Modul isomorph zu R .

Aufgabe 67: Geben Sie alle Kompositionsreihen des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 68: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und $\phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich einer bestimmten Basis von V durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben ist. Geben Sie eine Kompositionsreihe für V als $\mathbb{K}[X]$ -Modul an.

Aufgabe 69: Wahr oder falsch? Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie durch Gegenbeispiele.

Sei R ein Ring, M ein R -Modul, \mathbb{K} ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

- (a) Ein Untermodul $U \subsetneq M$ ist maximal (d. h. es gibt keinen Untermodul $V \subsetneq M$ mit $U \subsetneq V \subsetneq M$) genau dann, wenn M/U einfach ist.
- (b) Ist $R = \mathbb{C}[G]$ für eine endliche Gruppe G , so ist M ein Modul endlicher Länge.
- (c) Ist R eine Algebra über \mathbb{K} mit $\dim_{\mathbb{K}} R < \infty$ und M zyklisch, so ist M ein Modul endlicher Länge.
- (d) Der $\mathbb{K}[x]$ -Modul (V, ϕ) hat endliche Länge genau dann, wenn ϕ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 70: Sei \mathbb{K} ein Körper. Wir betrachten den Ring

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

mit der Matrixmultiplikation und -addition als Linksmodul über sich selbst. Bestimmen Sie:

- (a) alle einfachen und alle maximalen Untermoduln von R .
- (b) alle Kompositionsreihen von R .
- (c) den Sockel von R .
- (d) ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher R -Moduln.

Aufgabe 71: Sei I eine Indexmenge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Ringen. Das **kartesische Produkt** der Ringe R_i ist die Menge $\prod_{i \in I} R_i$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I} \quad (x_i)_{i \in I} \cdot (y_i)_{i \in I} = (x_i \cdot y_i)_{i \in I}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} R_i$ der Ringe R_i ein Ring ist.
- (b) Sei nun \mathbb{K} ein Körper und $S = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $U_j = \{(\lambda \delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ für $j \in \mathbb{N}$ ein einfacher Untermodul von S als Linksmodul über sich selbst ist und die Summe der Untermoduln U_j direkt ist.
- (c) Zeigen Sie, dass der Ring S nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 72: Sei S ein Ring und $R = \text{Mat}(n, S)$ der Ring der $(n \times n)$ -Matrizen mit Einträgen in S . Zeigen Sie:

- (a) Ist M ein S -Modul, so ist $M^{\oplus n}$ mit der Strukturabbildung

$$\triangleright : R \times M^{\oplus n} \rightarrow M^{\oplus n}, \quad A \triangleright (m_1, \dots, m_n) = (\sum_{j=1}^n a_{1j} \triangleright m_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} \triangleright m_j),$$

ein R -Modul, und für jeden S -Untermodul $L \subset M$ ist $L^{\oplus n} \subset M^{\oplus n}$ ein R -Untermodul.

- (b) Jeder R -Unterm modul von $M^{\oplus n}$ ist von der Form $L^{\oplus n}$ für einen S -Unterm modul $L \subset M$.
- (c) Ist M ein einfacher S -Modul, so ist $M^{\oplus n}$ ein einfacher R -Modul.
- (d) Sind L_1, L_2 zwei S -Moduln und $\phi : L_1 \rightarrow L_2$ ein S -Modulhomomorphismus, dann ist die Abbildung
- $$\phi^{\oplus n} : L_1^{\oplus n} \rightarrow L_2^{\oplus n}, \quad (l_1, \dots, l_n) \mapsto (\phi(l_1), \dots, \phi(l_n))$$
- ein R -Modulhomomorphismus.
- (e) Die Abbildung $\psi : \text{End}_S(L) \rightarrow \text{End}_R(L^{\oplus n}), \phi \mapsto \phi^{\oplus n}$ ist ein Ringhomomorphismus.
- (f) Ist S ein Schiefkörper, so ist $S^{\oplus n}$ ein einfacher R -Modul.

Aufgabe 73: Sei S ein Schiefkörper und $R \subset \text{Mat}(n, S)$ ein Unterring des Rings $\text{Mat}(n, S)$. Zeigen Sie: Ist S^n ein halbeinfacher R -Modul (mit der R -Modulstruktur aus Aufgabe 72), dann ist R halbeinfach.

Aufgabe 74: Wir betrachten den Ring $\text{Mat}(n, R)$ der $(n \times n)$ -Matrizen mit Einträgen in einem Ring R .

- (a) Zeigen Sie, dass alle zweiseitigen Ideale in $\text{Mat}(n, R)$ von der Form $I = \text{Mat}(n, J)$ mit einem zweiseitigen Ideal $J \subset R$ sind.
- (b) Folgern Sie, dass der Ring $\text{Mat}(n, R)$ für einen Schiefkörper R einfach ist.

Hinweis: Arbeiten Sie mit den Elementarmatrizen E^{ij} , die in der i ten Zeile und j ten Spalte den Eintrag 1 und ansonsten nur Nullen enthalten.

Aufgabe 75: Geben Sie einen Ring R und einen R -Modul M an, so dass M nicht einfach ist, aber $\text{End}_R(M)$ ein Schiefkörper ist.

Aufgabe 76: Zeigen Sie, dass die Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ und die Schiefkörper K_i im Struktursatz von Wedderburn (Satz 4.3.5) bis auf Permutationen eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 77: Zeigen Sie mit Hilfe des Struktursatzes von Wedderburn, dass linkshalbeinfache Ringe auch rechtshalbeinfach sind und umgekehrt.

Aufgabe 78: Zeigen Sie: Ist R ein einfacher Ring und $L \subset R$ ein einfaches Linksideal, so ist der Ringhomomorphismus

$$\Phi : R \rightarrow \text{End}_{\text{End}_R(L)}(L), \quad r \mapsto \phi_r \quad \text{mit} \quad \phi_r(l) = r \triangleright l$$

ein Ringisomorphismus.

5 Kategorien und Funktoren

5.1 Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen

Kategorien und Funktoren spielen überall dort in der Mathematik eine Rolle, wo Beziehungen oder Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen mathematischen Strukturen untersucht werden sollen. Beispielsweise werden in der algebraischen Topologie topologische Räume mit Hilfe von algebraischen Strukturen wie Gruppen, abelschen Gruppen und Vektorräumen beschrieben. Dabei stellt sich die Frage, was ein sinnvolles mathematisches Konzept ist, um solche Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Strukturen zu beschreiben.

Das Konzept der Abbildung eignet sich schon deswegen nicht, weil die betrachteten Strukturen keine Menge bilden müssen. Außerdem greift es zu kurz, wenn die mathematischen Strukturen jeweils nur bis auf Isomorphie betrachtet werden sollen, was fast immer der Fall ist. In diesem Fall benötigt man nicht nur eine Zuordnung zwischen den betrachteten mathematischen Strukturen sondern auch zwischen den strukturerehaltenden Abbildungen dazwischen, die jeweils Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet. Man kann dabei also nicht die mathematischen Strukturen isoliert betrachten, sondern muss immer die strukturerehaltenden Abbildungen mitberücksichtigen. Kombiniert man mathematische Strukturen und die zugehörigen strukturerehaltenden Abbildungen, so erhält man das Konzept der *Kategorie*. Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien werden durch *Funktoren* charakterisiert. Sie beinhalten jeweils Zuordnungen zwischen den betrachteten mathematischen Strukturen und zwischen den strukturerehaltenden Abbildungen.

Die Definition der Kategorie beschreibt die Systematik in der Untersuchung mathematischer Strukturen, die sich bereits in den Grundvorlesungen abgezeichnet hat. So folgt beispielsweise auf die Definition der Menge der Begriff der Abbildung, auf die Definition einer Gruppe, eines Rings und einer Algebra der Begriff des Gruppen-, Ring- und Algebromorphismus, auf den Begriff des topologischen Raums der Begriff der stetigen Abbildung und auf den Begriff des R -Moduls der Begriff der R -linearen Abbildung. Dabei wurde jeweils eine mathematische Struktur definiert (Menge, Gruppe, Ring, Algebra, topologischer Raum, R -Modul) und anschließend die Abbildungen zwischen solchen Strukturen untersucht, die die Strukturmerkmale erhalten, also mit den entsprechenden Strukturabbildungen oder Verknüpfungen vertauschen. In all diesen Fällen ergibt die Verkettung zweier strukturerehaltender Abbildungen wieder eine strukturerehaltende Abbildung, die Verkettung ist assoziativ, und die Identitätsabbildung ist strukturerehaltend. Dies sind genau die Bedingungen, die in einer Kategorie gefordert werden. Allerdings nimmt man dort nicht mehr auf Abbildungen Bezug, sondern gibt diese Bedingungen abstrakt vor.

Definition 5.1.1: Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus:

- einer Klasse $\text{Ob } \mathcal{C}$ von **Objekten**
- für je zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen**
- für je drei Objekte X, Y, Z einer **Kompositionsabbildung**

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (K1) Die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sind paarweise disjunkt.
- (K2) Die Komposition ist assoziativ: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für alle Objekte W, X, Y, Z und Morphismen $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$
- (K3) Für jedes Objekt X gibt es einen Morphismus $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, der **Identitätsmorphismus** auf X , mit $1_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Statt $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ schreibt man auch $f : X \rightarrow Y$. Das Objekt X heißt dann **Quelle** und das Objekt Y **Ziel** des Morphismus f .

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$ gibt. Zwei Objekte X und Y heißen **isomorph**, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert, und man schreibt dann $X \simeq Y$.

Man beachte, dass in der Definition einer Kategorie zwar gefordert wird, dass die *Morphismen* zwischen zwei gegebenen Objekten X, Y eine Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ bilden, nicht jedoch, dass die *Objekte* eine Menge bilden. Eine Kategorie, in der auch die Objekte eine Menge bilden, heißt **kleine Kategorie**.

Zu fordern, dass die Morphismen Mengen bilden, ist oft notwendig, um eine vernünftige Definition zu erhalten, mit der man in der Praxis arbeiten kann. In der Literatur zu Kategorien wird diese Bedingung manchmal gelockert. Dort heißen die Kategorien, für die das der Fall ist, *lokal kleine Kategorien*.

Der Grund, warum man dies bei Objekten nicht fordert, ist, dass man so ein wichtiges Beispiel einer Kategorie verlieren würde, nämlich die Kategorie **Set**, deren Objekte Mengen und deren Morphismen Abbildungen sind. Würde man fordern, dass die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, so müsste man die Menge aller Mengen betrachten, die nicht existiert, da sie zum Russellschen Paradox führt.

Beispiel 5.1.2:

1. Die Kategorie **Set** der Mengen: die Objekte sind Mengen, die Morphismen Abbildungen, und die Isomorphismen Bijektionen.
2. Die Kategorie **Set*** der punktierten Mengen: die Objekte sind Paare einer Menge M und eines Elements $m \in M$, die Morphismen $f : (m, M) \rightarrow (n, N)$ Abbildungen $f : M \rightarrow N$ mit $f(m) = n$. Die Isomorphismen sind die Bijektionen mit dieser Eigenschaft.
3. Die Kategorie **Top** der topologischen Räume (Objekte: topologische Räume, Morphismen: stetige Abbildungen, Isomorphismen: Homöomorphismen).
4. Die Kategorie **Top*** der punktierten topologischen Räume, deren Objekte Paare aus einem topologischen Raum X und einem ausgezeichneten Basispunkt $x \in X$ und deren Morphismen $f : (x, X) \rightarrow (y, Y)$ basispunkterhaltende stetige Abbildungen sind, also stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$.
5. Die Kategorie **Vect $_{\mathbb{K}}$** der Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} : die Objekte sind \mathbb{K} -Vektorräume, die Morphismen \mathbb{K} -lineare Abbildungen, und die Isomorphismen \mathbb{K} -lineare Isomorphismen.

Kategorie	Objekte	Morphismen	Isomorphismen
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektionen
Set*	punktierte Mengen	basispunkterhaltende Abbildungen	basispunkterhaltende Bijektionen
Grp	Gruppen	Gruppenhomomorphismen	Gruppenisomorphismen
Ab	abelsche Gruppen	Gruppenhomomorphismen	Gruppenisomorphismen
Ring	Ringe	Ringhomomorphismen	Ringisomorphismen
Field	Körper	Körperhomomorphismen	Körperisomorphismen
Vect $_{\mathbb{K}}$	\mathbb{K} -Vektorräume	\mathbb{K} -lineare Abbildungen	Vektorraumisomorphismen
\mathbb{K} -Alg	Algebren über \mathbb{K}	Algebrahomomorphismen	Algebraisomorphismen
R -Mod	R -Moduln	R -Modulhomomorphismen	R -Modulisomorphismen
Mod- R	R -Rechtsmoduln	R -Modulhomomorphismen	R -Modulisomorphismen
Rep $_{\mathbb{K}}(G)$	Darstellungen der Gruppe G über \mathbb{K}	Homomorphismen von Darstellungen	Isomorphismen von Darstellungen
Top	topologische Räume	stetige Abbildungen	Homöomorphismen
Top*	punktierte topologische Räume	basispunkterhaltende stetige Abbildungen	basispunkterhaltende Homöomorphismen
hTop	topologische Räume	Homotopieklassen stetiger Abbildungen	Homotopieäquivalenzen

Abbildung 3: Beispiele von Kategorien

6. Die Kategorie **$R\text{-Mod}$** der Moduln über einem Ring R : die Objekte sind R -Moduln, die Morphismen R -lineare Abbildungen, und die Isomorphismen R -Modulisomorphismen.
7. Die Kategorie **\mathbf{Grp}** der Gruppen (Objekte: Gruppen, Morphismen: Gruppenhomomorphismen, Isomorphismen: Gruppenisomorphismen), die Kategorie **\mathbf{Ring}** der Ringe (Objekte: Ringe, Morphismen: Ringhomomorphismen, Isomorphismen: Ringisomorphismen), die Kategorie **$\mathbb{K}\text{-Alg}$** der Algebren über \mathbb{K} (Objekte: \mathbb{K} -Algebren, Morphismen: Algebrehomomorphismen, Isomorphismen: Algebrasomorphismen).
8. Eine Kategorie mit nur einem Objekt ist nichts anderes als ein **Monoid**.
9. Eine kleine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt **Gruppoid**. Für jedes Objekt X in einem Gruppoid \mathcal{G} ist $(\text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X), \circ)$ eine Gruppe mit der Verkettung von Morphismen als Gruppenmultiplikation und dem Identitätsmorphismus 1_X als neutralem Element.
10. Jede Gruppe G definiert eine Kategorie BG mit einem einzigen Objekt, Elementen von G als Morphismen und der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen.

Diese und noch einige weitere Beispiele sind in Abbildung 3 zusammengefasst.

In allen konkreten Beispielen in Beispiel 5.1.2 sind die Objekte Mengen mit gewissen zusätzlichen Strukturen und die Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen, die mit den zusätzlichen Strukturen kompatibel sind. Solche Kategorien bezeichnet man als **konkrete Kategorien**. Es gibt jedoch auch viele wichtige Kategorien, die nicht konkret sind.

Beispiel 5.1.3:

1. Die Kategorie **Rel** der Mengen und **Relationen**:

Die Objekte von Rel sind Mengen und die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{Rel}}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ bestehen aus **Relationen** von X nach Y , also aus Teilmengen von $X \times Y$. Die Verkettung von Relationen $R \subset X \times Y$ und $S \subset Y \times Z$ ist gegeben durch

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

Die Identitätsmorphismen sind $1_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ und die Isomorphismen die bijektiven Abbildungen (Aufgabe 80).

2. Eine **partiell geordnete Menge** ist ein Paar (\mathcal{M}, \preceq) aus einer Menge M und einer Relation \preceq auf M , die die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - Reflexivität: $m \preceq m$ für alle $m \in M$,
 - Antisymmetrie: aus $m \preceq m'$ und $m' \preceq m$ folgt $m = m'$,
 - Transitivität: aus $m \preceq m'$ und $m' \preceq m''$ folgt $m \preceq m''$.

Jede partiell geordnete Menge (M, \preceq) bildet eine Kategorie \mathcal{C} mit $\text{Ob } \mathcal{C} = \mathcal{M}$ und Morphismenmengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, m') = \emptyset$ falls $m \not\preceq m'$ und $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, m')$ einelementig, falls $m \preceq m'$. Die Komposition von Morphismen ergibt sich aus der Transitivität von \preceq .

Wie auch für andere mathematischen Strukturen gibt es für Kategorien einige naheliegende Konstruktionen, mit denen man aus gegebenen Kategorien neue Kategorien konstruieren kann. Man kann die Verknüpfung von Morphismen in einer Kategorie umdrehen, man kann Produkte verschiedener Kategorien betrachten und Unterkategorien konstruieren, indem man Objekte und Morphismen aus einer Kategorie entfernt. Auch das Bilden von Quotienten ist möglich.

Definition 5.1.4: Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien.

1. Die zu \mathcal{C} **opponierte Kategorie** \mathcal{C}^{op} ist die Kategorie mit $\text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C}$, mit $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ für alle Objekte X, Y und Komposition $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$.
2. Das **kartesische Produkt** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ hat als Objekte Paare (X, Y) von Objekten $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ und als Morphismenmengen die kartesischen Produkte der entsprechenden Morphismenmengen in \mathcal{C} und \mathcal{D} , die komponentenweise verknüpft werden:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((U, V), (X, Y)) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(V, Y) \\ (f', g') \circ_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} (f, g) &= (f' \circ_{\mathcal{C}} f, g' \circ_{\mathcal{D}} g). \end{aligned}$$

3. Eine **Unterkategorie** von \mathcal{C} ist eine Kategorie \mathcal{U} mit $\text{Ob } \mathcal{U} \subset \text{Ob } \mathcal{C}$, mit $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{U}$ und der Verknüpfungen von Morphismen aus \mathcal{C} . Die Unterkategorie \mathcal{U} heißt **voll**, wenn $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{U}$.
4. Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Äquivalenzrelationen $\sim_{X, Y}$ auf jeder Morphismenmenge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, die kompatibel mit der Verkettung von Morphismen sind:

$$f \sim_{X, Y} f' \text{ und } g \sim_{Y, Z} g' \Rightarrow g \circ f \sim_{X, Z} g' \circ f',$$

Dann erhält man die **Quotientenkategorie** \mathcal{C}_{\sim} mit $\text{Ob } \mathcal{C}_{\sim} = \text{Ob } \mathcal{C}$ und Äquivalenzklassen von Morphismen in \mathcal{C} als Morphismen: $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\sim}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \sim_{X, Y}$ (Aufgabe 86).

Beispiel 5.1.5:

1. Die Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{fin}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume über \mathbb{K} ist eine volle Unterkategorie der Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$.
2. Die Kategorie Ab der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie der Kategorie Grp.
3. Die Kategorie Field der Körper ist eine volle Unterkategorie der Kategorie Ring.
4. Die Homotopiekategorie **hTop** topologischer Räume ist eine Quotientenkategorie der Kategorie Top. Die Äquivalenzrelation $\sim_{X, Y}$ auf der Menge $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ ist gegeben durch

$$f \sim_{X, Y} g \Leftrightarrow f, g \text{ homotop.}$$

Die Objekte von hTop sind also topologische Räume und die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{hTop}}(X, Y)$ die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Die Isomorphismen in hTop sind genau die Homotopieäquivalenzen (siehe Aufgabe 88).

Aus den Beispielen wird deutlich, dass es sich bei Kategorien um eine sehr flexible und allgemeine Struktur handelt, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik auftritt. Die Frage ist nun, wie man Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien charakterisiert. Anhand der Definition der Kategorie ist es naheliegend, dass die entsprechende mathematische Struktur, nicht nur die Objekte in den zwei Kategorien in Verbindung bringen muss, sondern auch ihre Morphismen, und zwar auf eine Art und Weise die kompatibel ist mit deren Quellen- und Zielobjekten, den Identitätsmorphismen und der Verkettung von Morphismen. Dies führt auf die Definition des Funktors.

Definition 5.1.6: Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Ein **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$ zuordnet,
- für je zwei Objekte X, Y in \mathcal{C} einer Abbildung

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f),$$

die kompatibel mit der Komposition und den Identitätsmorphismen sind:

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) & \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \\ F(1_X) &= 1_{F(X)} & \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ wird oft als **Endofunktor** bezeichnet. Ein **kontravarianter Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Die **Verkettung** zweier Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ist der Funktor $FG : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ mit $X \mapsto FG(X)$ für alle Objekte $X \in \text{Ob } \mathcal{B}$ und den Abbildungen

$$FG = F \circ G : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(X), FG(Y)), \quad f \mapsto F(G(f)).$$

Beispiel 5.1.7:

1. Für jede Kategorie \mathcal{C} ist der **Identitätsfunktor** $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, der jedes Objekt und jeden Morphismus auf sich selbst abbildet, ein Endofunktor.
2. **Vergissfunktoren:** Der Funktor $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$, der einem R -Modul M die zugrundeliegende abelsche Gruppe M zuordnet und jeder R -linearen Abbildung die entsprechende Abbildung heißt Vergissfunktor.

Analog erhält man Vergissfunktoren $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$, $\mathbb{K}\text{-Alg} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ und $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$, die einer Gruppe, einem Ring, einer Algebra, einem topologischen Raum und einem R -Modul die zugrundeliegende Menge zuordnen und jedem Morphismus auf die zugehörige Abbildung.

3. **Freie Erzeugung von Moduln:**

Jeder Ring R definiert einen Funktor $F : \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}$, der einer Menge A den von A erzeugten freien R -Modul $\langle A \rangle_R$ zuordnet und einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ den zugehörigen R -Modulhomomorphismus $\langle f \rangle_R : \langle A \rangle_R \rightarrow \langle B \rangle_R$ aus Bemerkung 2.4.9.

4. **Dualraum:**

Der Funktor $*$: $\text{Vect}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{K})^{op}$, der jedem \mathbb{K} -Vektorraum V seinen Dualraum V^* und jeder \mathbb{K} -linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ die dazu duale Abbildung $f^* : W^* \rightarrow V^*$, $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ für alle $\alpha \in W^*$ zuordnet.

5. **Gruppendarstellungen:** Sei G eine Gruppe und BG die Kategorie mit einem Objekt und Elementen $g \in G$ als Morphismen. Dann entsprechen

- Funktoren $F : BG \rightarrow \text{Set}$ Gruppenwirkung von G auf Mengen
- Funktoren $F : BG \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ Darstellungen von G über \mathbb{K}
- Funktoren $F : BG \rightarrow BH$ Gruppenhomomorphismen von G nach H

6. Die **Hom-Funktoren:** Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so erhält man für jedes Objekt $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ einen Funktor $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, der einem Objekt Y in \mathcal{C} die Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ zuordnet und einem Morphismus $f : Y \rightarrow Z$ in \mathcal{C} die Abbildung

$$\text{Hom}(X, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Ebenso erhält man einen Funktor $\text{Hom}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$, der einem Objekt W in \mathcal{C} die Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ zuordnet und einem Morphismus $f : V \rightarrow W$ in \mathcal{C} die Abbildung

$$\text{Hom}(f, X) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, X), \quad g \mapsto g \circ f.$$

7. **Tensorprodukte:** Der Funktor $\otimes_R : R^{op}\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ ordnet einem Paar (M, N) aus einem R^{op} -Modul M und einem R -Modul N das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ zu und einem Paar (f, g) von Modulhomomorphismen $f : M \rightarrow M'$ und $g : N \rightarrow N'$ den Gruppenhomomorphismus $f \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ aus Satz 2.5.6.

Fixiert man eines der beiden Argumente, so erhält man Funktoren $M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ und $- \otimes_R N : R^{op}\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ für jeden R -Rechtsmodul M und R -Linksmodul N .

Ist R kommutativ, so definiert dies einen Funktor $\otimes_R : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ sowie Funktoren $M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ und $- \otimes_R N : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$.

8. **Pullback:**

Ein Ringhomomorphismus $\phi : R \rightarrow S$ definiert einen Funktor $F : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, der einem S -Modul (M, \triangleright) den R -Modul $(M, \triangleright_{\phi})$ mit $r \triangleright_{\phi} m = \phi(r) \triangleright m$ zuordnet und einem S -Modulhomomorphismus $\psi : (M, \triangleright) \rightarrow (M', \triangleright')$, $m \mapsto \psi(m)$ den R -Modulhomomorphismus $\psi : (M, \triangleright_{\phi}) \rightarrow (M', \triangleright'_{\phi})$, $m \mapsto \psi(m)$.

9. **Induktion von Darstellungen:**

Ein Ringhomomorphismus $\phi : R \rightarrow S$ definiert einen Funktor $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$, der einem R -Modul (M, \triangleright) den S -Modul $S \otimes_R M$ aus Beispiel 2.5.9 zuordnet, wobei das Tensorprodukt bezüglich der R -Rechtsmodulstruktur $s \triangleleft r = s\phi(r)$ auf S gebildet wird und die S -Modulstruktur auf $S \otimes_R M$ gegeben ist durch $s \triangleright (s' \otimes m) = (ss') \otimes m$. Er bildet einen R -Modulhomomorphismus $f : (M, \triangleright) \rightarrow (M', \triangleright')$ ab auf den S -Modulhomomorphismus $F(f) = (\text{id}_S \otimes f) : S \otimes_R M \rightarrow S \otimes_R M'$, $s \otimes m \mapsto s \otimes f(m)$.

Ist $\phi = \iota : \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[G]$, $\delta_h \mapsto \delta_h$ für eine Untergruppe $H \subset G$ so spricht man von induzierten Darstellungen (vgl. Beispiel 2.5.9).

Interessante Beziehungen zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik nehmen häufig die Form von Funktoren an. Beispiele solcher Funktoren finden sich beispielsweise in der algebraischen Topologie, wo sie die Kategorie Top der topologischen Räume, die Kategorie Top^* der punktierten topologischen Räume und deren Homotopiekategorien hTop , hTop^* mit Kategorien aus dem Bereich der Algebra in Verbindung bringen wie der Kategorie der Gruppen, der abelschen Gruppen oder der Moduln über einem Ring. Wichtige Beispiele sind die Homotopiegruppen $\pi_n : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ und $\pi_n : \text{hTop}^* \rightarrow \text{Grp}$.

Da wir mit dem Begriff des Funktors Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien herstellen können, stellt sich insbesondere die Frage, wann wir zwei Kategorien als *im wesentlichen gleich*, *äquivalent* oder *isomorph* betrachten wollen. Eine mögliche Definition ergibt sich, indem man den Begriff der Isomorphie von Abbildungen auf Funktoren verallgemeinert, also einen Isomorphismus als einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definiert, zu dem es einen inversen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt mit $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$. Diese Definition ist jedoch zu naiv und liefert wenig interessante Beispiele. Um ein sinnvolles Konzept zu liefern, muss diese Forderung aufgelockert werden. Der tiefere Grund dafür ist, dass es eine weitere Ebene von Struktur gibt, die verschiedene Funktoren in Beziehung bringt, nämlich die *natürlichen Transformationen*.

Definition 5.1.8: Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\eta : F \rightarrow G$ ist eine Zuordnung eines Morphismus $\eta_C : F(C) \rightarrow G(C)$ zu jedem Objekt C in \mathcal{C} , so dass für jeden Morphismus $f : C \rightarrow C'$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\eta_C} & G(C) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(C') & \xrightarrow{\eta_{C'}} & G(C'). \end{array}$$

Die Morphismen $\eta_C : F(C) \rightarrow G(C)$ heißen **Komponentenmorphismen** der natürlichen Transformation η . Sind alle Komponentenmorphismen $\eta_C : F(C) \rightarrow G(C)$ Isomorphismen, so nennt man $\eta : F \rightarrow G$ einen **natürlichen Isomorphismus** und schreibt $F \simeq G$.

Bemerkung 5.1.9:

1. Für jede *kleine* Kategorie \mathcal{C} und jede Kategorie \mathcal{D} bilden die Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren eine Kategorie, die als **Funktorkategorie** und mit $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bezeichnet wird (siehe Aufgabe 85).
2. Natürliche Transformationen können mit Funktoren verkettet werden.
Ist $\eta : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, so erhält man für beliebige Funktoren $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ natürliche Transformationen $H\eta : HF \rightarrow HG$ und $\eta K : FK \rightarrow GK$ mit Komponentenmorphismen

$$(H\eta)_C = H(\eta_C) : HF(C) \rightarrow HG(C) \qquad (\eta K)_B = \eta_{K(B)} : FK(B) \rightarrow GK(B).$$

Beispiel 5.1.10:

1. Für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist $\text{id}_F : F \rightarrow F$ mit $(\text{id}_F)_C = 1_C : C \rightarrow C$ ein natürlicher Isomorphismus.
2. In der Kategorie $\mathcal{C} = \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ existiert zwischen den Funktoren $\text{id} : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ und $** : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ eine kanonische natürliche Transformation $\text{can} : \text{id} \rightarrow **$. Ihre Komponentenmorphismen $\text{can}_V : V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto f_v$ bilden einen Vektor $v \in V$ auf das Element $f_v \in V^{**} = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K})$ mit $f_v(\alpha) = \alpha(v)$ für alle $\alpha \in V^*$ ab.
3. Ist G eine Gruppe und $g \in G$ ein fest gewähltes Element, so erhält man einen Gruppenisomorphismus $C_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$ und nach Beispiel 5.1.7, 8. einen Pullbackfunktor

$F_g : \mathbb{K}[G]\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{K}[G]\text{-Mod}$, der eine Darstellung (ρ, V) auf die Darstellung (ρ_g, V) mit $\rho_g(h) = \rho(g \cdot h \cdot g^{-1})$ abbildet und jeden Morphismus von Darstellungen auf sich selbst.

Die \mathbb{K} -linearen Isomorphismen $\eta_{(\rho, V)} = \rho(g) : V \rightarrow V$ mit Inversen $(\eta_{(\rho, V)})^{-1} = \rho(g^{-1})$ definieren dann einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{id}_{\mathbb{K}[G]\text{-Mod}} \rightarrow F_g$. Denn sie sind Homomorphismen von Darstellungen von (ρ, V) nach (ρ_g, V) :

$$\rho_g(h) \circ \eta_{(\rho, V)} = \rho(g \cdot h \cdot g^{-1}) \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \rho(h) = \eta_{(\rho, V)} \circ \rho(h) \quad \forall h \in G,$$

und für jeden Homomorphismus von Darstellungen $f : (\rho, V) \rightarrow (\rho', V')$ gilt

$$f \circ \eta_{(\rho, V)} = f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f = \eta_{(\rho', V')} \circ f.$$

4. Wir betrachten die Kategorie CRing der kommutativen Ringe, die Kategorie Grp der Gruppen und die folgenden Funktoren

- Der Einheitenfunctor $\times : \text{CRing} \rightarrow \text{Grp}$, der einem kommutativen Ring R seine Einheitengruppe R^\times zuordnet und einem Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ den induzierten Gruppenhomomorphismus $f^\times : R^\times \rightarrow S^\times$, $r \mapsto f(r)$.
- Der Funktor $\text{GL}_n : \text{CRing} \rightarrow \text{Grp}$, der einem kommutativen Ring R die Gruppe $\text{GL}_n(R)$ der invertierbaren Matrizen mit Einträgen in R zuordnet und einem Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ den zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\text{GL}_n(f) : \text{GL}_n(R) \rightarrow \text{GL}_n(S)$, $(r_{ij}) \mapsto (f(r_{ij}))$ der durch Anwendung von f auf alle Einträge der Matrizen entsteht.

Die Determinante definiert eine natürliche Transformation $\det : \text{GL}_n \rightarrow \times$ mit Komponentenmorphisms $\det_R : \text{GL}_n(R) \rightarrow R^\times$, denn für jeden Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}_n(R) & \xrightarrow{\det_R} & R^\times \\ \text{GL}_n(f) \downarrow & & \downarrow f^\times \\ \text{GL}_n(S) & \xrightarrow{\det_S} & S^\times. \end{array}$$

Mit Hilfe natürlicher Transformation können wir nun die naive Bedingung für die Isomorphie zweier Kategorien abschwächen. Statt zu fordern, dass Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$ existieren, fordern wir nur noch, dass Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ existieren, so dass $FG : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ und $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ *natürlich isomorph* zu den Identitätsfunktoren $\text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\text{id}_{\mathcal{C}}$ sind.

Definition 5.1.11: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ von einer Kategorie \mathcal{C} nach \mathcal{D} heißt **Äquivalenz von Kategorien**, wenn ein Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ existieren. Die Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} heißen **äquivalent**, wenn eine Äquivalenz von Kategorien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ existiert.

Diese Definition ist konzeptionell und einleuchtend, aber in der Praxis oft schwer zu handhaben, da sie dazu zwingt, die natürlichen Isomorphismen explizit zu konstruieren. Schon im Fall von Abbildungen ist es oft viel einfacher, zu zeigen, dass eine Abbildung surjektiv und injektiv ist, als ihre Umkehrabbildung zu finden. Wir suchen also nach einem Kriterium, mit dem man feststellen kann, ob ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, ohne einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ und $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ explizit anzugeben. Dieses Kriterium ist die wesentliche Surjektivität und Volltreue des Funktors.

Definition 5.1.12: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt

- **treu (volltreu)**, wenn die Abbildung $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ injektiv (bijektiv) ist für alle Objekte $C, C' \in \text{Ob } \mathcal{C}$,
- **wesentlich surjektiv**, wenn es zu jedem Objekt $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ gibt mit $D \cong F(C)$.

Satz 5.1.13: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn er volltreu und wesentlich surjektiv ist.

Beweis:

1. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Dann gibt es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$. Zu jedem Objekt D in \mathcal{D} gibt es damit einen Isomorphismus $\epsilon_D : FG(D) \rightarrow D$, und F ist wesentlich surjektiv.

Sind $f, f' : C \rightarrow C'$ Morphismen in \mathcal{C} mit $F(f) = F(f')$, so kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} GF(C) & \xleftarrow{\eta_C} & C \\ GF(f) \downarrow & & \downarrow f \\ GF(C') & \xleftarrow{\eta_{C'}} & C' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} GF(C) & \xleftarrow{\eta_C} & C \\ GF(f') \downarrow & & \downarrow f' \\ GF(C') & \xleftarrow{\eta_{C'}} & C' \end{array} \quad (9)$$

und daraus folgt $f \stackrel{(9)}{=} \eta_{C'}^{-1} \circ GF(f) \circ \eta_C = \eta_{C'}^{-1} \circ GF(f') \circ \eta_C \stackrel{(9)}{=} f'$. Damit ist F treu, und analog zeigt man, dass auch G treu ist.

Zu einem Morphismus $g : F(C) \rightarrow F(C')$ ist $f = \eta_{C'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_C : C \rightarrow C'$ ein Morphismus mit $g = F(f)$, denn aus den kommutierenden Diagrammen (9) folgt

$$\eta_{C'}^{-1} \circ GF(f) \circ \eta_C \stackrel{(9)}{=} f = \eta_{C'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_C.$$

Da η_C und $\eta_{C'}$ Isomorphismen sind, impliziert das $GF(f) = G(g)$, und da G treu ist, $F(f) = g$. Damit ist gezeigt, dass F volltreu ist.

2. Sei nun $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein wesentlich surjektiver und volltreuer Funktor. Dann wählen wir zu jedem Objekt D in \mathcal{D} ein Objekt C_D in \mathcal{C} mit $F(C_D) \cong D$ und einen Isomorphismus $\epsilon_D : F(C_D) \rightarrow D$. Wir definieren einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, indem wir $G(D) := C_D$ für alle Objekte $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ setzen und einem Morphismus $g : D \rightarrow D'$ den wegen der wesentlichen Surjektivität und Volltreue von F existierenden und eindeutigen Morphismus $G(g) : G(D) \rightarrow G(D')$ mit $F(G(g)) = \epsilon_{D'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_D : FG(D) \rightarrow FG(D')$ zuordnen.

Dann gilt $G(1_D) = 1_{C_D}$, denn der Morphismus 1_{C_D} erfüllt $F(1_{C_D}) = 1_{F(C_D)} = \epsilon_D^{-1} \circ 1_D \circ \epsilon_D$. Für $g : D \rightarrow D'$ und $h : D' \rightarrow D''$ erhält man

$$F(G(h) \circ G(g)) = FG(h) \circ FG(g) = \epsilon_{D''}^{-1} \circ h \circ \epsilon_{D'} \circ \epsilon_{D'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_D = \epsilon_{D''}^{-1} \circ (h \circ g) \circ \epsilon_D = FG(h \circ g)$$

Damit gilt $G(1_D) = 1_{G(D)}$ und $G(h \circ g) = G(h) \circ G(g)$, und G ist ein Funktor. Die Gleichung $FG(g) = \epsilon_{D'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_D$ bedeutet genau, dass die Morphismen $\epsilon_D : FG(D) \rightarrow D$ einen natürlichen Isomorphismus $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ bilden.

Um den natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ konstruieren, definieren wir den Komponentenmorphismus $\eta_C : C \rightarrow GF(C)$ für ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ als den wegen der wesentlichen Surjektivität und Volltreue von F existierenden und eindeutigen Morphismus mit

$$F(\eta_C) = \epsilon_{F(C)}^{-1} : F(C) \rightarrow FGF(C).$$

Dann ist das Inverse von η_C der wegen der wesentlichen Surjektivität und Volltreue von F existierenden und eindeutigen Morphismus mit $F(\eta_C^{-1}) = \epsilon_{F(C)}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} F(\eta_C^{-1} \circ \eta_C) &= F(\eta_C^{-1}) \circ F(\eta_C) = \epsilon_{F(C)} \circ \epsilon_{F(C)}^{-1} = 1_{F(C)} = F(1_C) \\ F(\eta_C \circ \eta_C^{-1}) &= F(\eta_C) \circ F(\eta_C^{-1}) = \epsilon_{F(C)}^{-1} \circ \epsilon_{F(C)} = 1_{FGF(C)} = F(1_{GF(C)}) \end{aligned}$$

und mit der Volltreue von F folgt $\eta_C^{-1} \circ \eta_C = 1_C$ und $\eta_C \circ \eta_C^{-1} = 1_{GF(C)}$. Wegen der Natürlichkeit von ϵ gilt für jeden Morphismus $g : C \rightarrow C'$

$$F(GF(g) \circ \eta_C) = FGF(g) \circ F(\eta_C) = FGF(g) \circ \epsilon_{F(C)}^{-1} = \epsilon_{F(C')}^{-1} \circ F(g) = F(\eta_{C'}) \circ F(g) = F(\eta_{C'} \circ g)$$

und da F volltreu ist, auch $GF(g) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ g$. Damit ist η ein natürlicher Isomorphismus und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. \square

Bemerkung 5.1.14: Der Beweis von Satz 5.1.13 zeigt außerdem, dass die natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ für alle Objekte X in \mathcal{C} und W in \mathcal{D} die Beziehungen

$$\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = 1_{F(X)} \quad G(\epsilon_W) \circ \eta_{G(W)} = 1_{G(W)}$$

erfüllen. Eine Äquivalenz von Kategorien, bei der für die natürlichen Isomorphismen solche Beziehungen gelten, bezeichnet man auch als **adjungierte Äquivalenz**.

Wir werden nun noch einige wichtige Beispiele für Äquivalenzen von Kategorien betrachten, die zeigen, dass dieser Begriff ergiebiger und interessanter ist als die Forderung nach der Existenz eines inversen Funktors. Es zeigt sich außerdem, dass dieser Begriff sehr gut zu Klassifikationsproblemen passt.

Beispiel 5.1.15:

1. Die Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}$ der endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräume ist äquivalent zu der Kategorie \mathcal{C} deren Objekte Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und deren Morphismen $f : n \rightarrow m$ Matrizen $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ sind, mit der Matrixmultiplikation als Komposition von Morphismen.

Eine Äquivalenz von Kategorien erhält man, indem für jeden Vektorraum eine Basis wählt. Ordnet man dann jedem Vektorraum seine Dimension und jeder linearen Abbildung die beschreibende Matrix bezüglich der gewählten Basen, so definiert dies einen Funktor, denn die Verkettung von linearen Abbildung entspricht gerade der Multiplikation der beschreibenden Matrizen, und die beschreibende Matrix der Identitätsabbildung bezüglich jeder fest gewählten Basis ist eine Einheitsmatrix.

Dieser Funktor ist wesentlich surjektiv und volltreu, denn jede natürliche Zahl tritt als Dimension eines Vektorraums auf und die Wahl zweier Basen definiert eine Bijektion zwischen den linearen Abbildungen $g : V \rightarrow W$ und ihren beschreibenden Matrizen in $\text{Mat}(\dim(W) \times \dim(V), \mathbb{K})$.

2. Ein **Skelett** einer Kategorie \mathcal{C} ist eine volle Unterkategorie \mathcal{S} von \mathcal{C} , so dass jedes Objekt von \mathcal{C} isomorph ist in \mathcal{C} zu genau einem Objekt von \mathcal{S} . Für jedes Skelett \mathcal{S} von \mathcal{C} ist der Inklusionsfunctor $\iota : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Denn per Definition ist jedes Objekt von \mathcal{C} isomorph zu genau einem Objekt $\iota(S)$, $S \in \text{Ob}\mathcal{S}$ und da \mathcal{S} eine volle Unterkategorie ist, gilt außerdem per Definition $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\iota(S), \iota(S')) = \text{Hom}_{\mathcal{S}}(S, S')$.

Offensichtlich ist das erste Beispiel ein Spezialfall dieser Konstruktion. Allgemeiner ist das Angeben eines Skeletts für eine gegebene Kategorie \mathcal{C} äquivalent zur Klassifikation ihrer Objekte bis auf Isomorphie. Man kann zeigen (Aufgabe 92), dass zwei Kategorien mit Skeletten äquivalent sind genau dann, wenn ihre Skelette isomorph sind.

3. Die Kategorie der *endlichen* Mengen hat als Skelett die Kategorie der endlichen Ordinalzahlen mit Objekten $\underline{0} = \emptyset$, $\underline{1} = \{0\}$, ..., $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ und als Morphismen $f : \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ die Abbildungen $f : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$. Somit ist die Kategorie der endlichen Mengen äquivalent zur Kategorie der endlichen Ordinalzahlen, die eine kleine Kategorie ist.

5.2 Universelle Eigenschaften und adjungierte Funktoren

Nachdem wir uns mit den grundlegenden Begriffen in Kategorien befasst haben, untersuchen wir nun, wie sich auf universellen Eigenschaften beruhende Konstruktionen im Rahmen von Kategorien realisieren lassen. Die zentrale Idee bei der Verallgemeinerung solcher Konstruktionen auf Kategorien ist es, die universellen Eigenschaften als *Bedingungen an die Morphismen* zu interpretieren, genauer gesagt als eine Bijektion zwischen gewissen Morphismenmengen. Kann man ein Konzept durch eine solche universelle Eigenschaft charakterisieren, ohne dabei auf Mengen Bezug zu nehmen, so lässt es sich direkt auf Kategorien verallgemeinern.

Wir präzisieren dies am Beispiel der direkten Summe und des direkten Produkts von R -Moduln, deren universelle Eigenschaften in Satz 2.3.2 hergeleitet wurden. Betrachtet man für einen gegebenen Ring R die Kategorie $R\text{-Mod}$ der Moduln über R , so sind die direkte Summe und das direkte Produkt einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ R -Moduln offensichtlich wieder Objekte in $R\text{-Mod}$, zusammen mit Familien von Morphismen, respektive die Inklusionsabbildungen $\iota_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ und die Projektionsabbildungen $\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$.

Die universelle Eigenschaft der direkten Summe in Satz 2.3.2 besagt, dass zu jeder Familie $(f_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $f_i : M_i \rightarrow N$ eine eindeutig bestimmter R -lineare Abbildung $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$ existiert mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle $i \in I$. Die universelle Eigenschaft des Produkts in Satz 2.3.2 besagt, dass zu jeder Familie $(g_i)_{i \in I}$ von R -Modulhomomorphismen $g_i : L \rightarrow M_i$ eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung $g : L \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ existiert mit $\pi_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$. Diese Forderungen lassen sich direkt auf Kategorien verallgemeinern und liefern dann die folgende Definition.

Definition 5.2.1: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten in \mathcal{C} .

1. Ein **Produkt** der Objekte C_i ist ein Objekt $\prod_{i \in I} C_i$ in \mathcal{C} zusammen mit einer Familie $(\pi_i)_{i \in I}$ von Morphismen $\pi_i : \prod_{j \in I} C_j \rightarrow C_i$, so dass für jede Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen $f_i : D \rightarrow C_i$ in \mathcal{C} ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : D \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ existiert, so dass

für alle $i \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} C_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & C_i \end{array}$$

Dies wird als die **universelle Eigenschaft** des Produkts bezeichnet.

2. Ein **Koprodukt** der Objekte C_i ist ein Objekt $\coprod_{i \in I} C_i$ in \mathcal{C} zusammen mit einer Familie $(\iota_i)_{i \in I}$ von Morphismen $\iota_i : C_i \rightarrow \coprod_{j \in I} C_j$, so dass zu jeder Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Morphismen $g_i : C_i \rightarrow D$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : \coprod_{i \in I} C_i \rightarrow D$ existiert, so dass für alle $i \in I$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{\exists! g} & \coprod_{i \in I} C_i \\ & \swarrow g_i & \uparrow \iota_i \\ & & C_i \end{array}$$

Dies wird als die **universelle Eigenschaft** des Koprodukts bezeichnet.

Im Allgemeinen müssen in einer Kategorie \mathcal{C} Produkte oder Koprodukte nicht für alle Familien von Objekten existieren. Wenn sie aber existieren, so sind sie *eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie*. Es sind also nicht nur alle Produkte oder Koprodukte isomorph, sondern es gibt *genau einen* Isomorphismus zwischen zwei Koprodukten oder zwischen zwei Produkten.

Dass *Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie* eine viel stärkere Forderung ist als *Isomorphie* sieht man am Beispiel der Vektorräume. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind n -dimensionale Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} *eindeutig bis auf Isomorphie*: zwischen zwei einelementigen \mathbb{K} -Vektorräumen gibt es immer mindestens einen Vektorraumisomorphismus. Nulldimensionale Vektorräume sind dagegen *eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie*, d. h. zwischen zwei 0-dimensionalen Vektorräumen über \mathbb{K} gibt es *genau einen* Vektorraumisomorphismus. Deswegen spricht man von *einem* n -dimensionalen Vektorraum aber von *dem* Nullvektorraum.

Die *Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie* gilt auch für alle anderen Strukturen in Kategorien, die über universelle Eigenschaften definiert werden. Auch der Beweis dieser Eindeutigkeitsaussagen hat immer die gleiche Struktur und verläuft immer wie im folgenden Satz.

Satz 5.2.2: Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann sind Produkte und Koprodukte in \mathcal{C} **eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie**:

1. Sind $(\prod_{i \in I} C_i, (\pi_i)_{i \in I})$ und $(\prod'_{i \in I} C_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ Produkte einer Familie von Objekten $(C_i)_{i \in I}$ so gibt es genau einen Morphismus $\pi' : \prod'_{i \in I} C_i \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ mit $\pi_i \circ \pi' = \pi'_i$ für alle $i \in I$, und dieser ist ein Isomorphismus.
2. Sind $(\coprod_{i \in I} C_i, (\iota_i)_{i \in I})$ und $(\coprod'_{i \in I} C_i, (\iota'_i)_{i \in I})$ Koprodukte einer Familie von Objekten $(C_i)_{i \in I}$ so gibt es genau einen Morphismus $\iota' : \coprod_{i \in I} C_i \rightarrow \coprod'_{i \in I} C_i$ mit $\iota' \circ \iota_i = \iota'_i$ für alle $i \in I$, und dieser ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage für Produkte. Der Beweis für Koprodukte ist analog. Sind

$(\prod_{i \in I} C_i, (\pi_i)_{i \in I})$ und $(\prod'_{i \in I} C_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ zwei Produkte einer Familie von Objekten $(C_i)_{i \in I}$, so gibt es nach der universellen Eigenschaft des Produkts $(\prod_{i \in I} C_i, (\pi_i)_{i \in I})$ genau einen Morphismus $\pi' : \prod'_{i \in I} C_i \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ mit $\pi_i \circ \pi' = \pi'_i$ und nach der universellen Eigenschaft des Produkts $(\prod'_{i \in I} C_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ genau einen Morphismus $\pi : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow \prod'_{i \in I} C_i$ mit $\pi'_i \circ \pi = \pi_i$ für alle $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} \prod'_{i \in I} C_i & \xrightarrow{\exists! \pi'} & \prod_{i \in I} C_i \\ & \searrow \pi'_i & \downarrow \pi_i \\ & & C_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} C_i & \xrightarrow{\exists! \pi} & \prod'_{i \in I} C_i \\ & \searrow \pi_i & \downarrow \pi'_i \\ & & C_i \end{array}$$

Dann gilt für die Morphismen $\pi \circ \pi' : \prod'_{i \in I} C_i \rightarrow \prod'_{i \in I} C_i$ und $\pi' \circ \pi : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$

$$\pi'_i \circ \pi \circ \pi' = \pi_i \circ \pi' = \pi'_i = \pi'_i \circ 1_{\prod'_{i \in I} C_i}, \quad \pi_i \circ \pi' \circ \pi = \pi'_i \circ \pi = \pi_i = \pi_i \circ 1_{\prod_{i \in I} C_i} \quad \forall i \in I.$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_{\prod'_{i \in I} C_i}} & \\ \prod'_{i \in I} C_i & \xrightarrow{\pi'} \prod_{i \in I} C_i \xrightarrow{\pi} \prod'_{i \in I} C_i & \\ & \searrow \pi'_i \quad \downarrow \pi_i \quad \swarrow \pi'_i & \\ & C_i & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_{\prod_{i \in I} C_i}} & \\ \prod_{i \in I} C_i & \xrightarrow{\pi} \prod'_{i \in I} C_i \xrightarrow{\pi'} \prod_{i \in I} C_i & \\ & \searrow \pi_i \quad \downarrow \pi'_i \quad \swarrow \pi_i & \\ & C_i & \end{array}$$

Mit der universellen Eigenschaft der Produkte $(\prod_{i \in I} C_i, (\pi_i)_{i \in I})$, $(\prod'_{i \in I} C_i, (\pi'_i)_{i \in I})$ folgt daraus $\pi \circ \pi' = 1_{\prod'_{i \in I} C_i}$ und $\pi' \circ \pi = 1_{\prod_{i \in I} C_i}$, und damit ist π' ein Isomorphismus mit $\pi'^{-1} = \pi$. \square

Wichtige Spezialfälle von Produkten und Koprodukten ergeben sich, wenn man leere Indexmengen, also leere Familien von Objekten betrachtet. Existiert das leere Produkt in einer Kategorie \mathcal{C} , so besteht es aus einem Objekt $C = \prod_{i \in \emptyset} X_i$ und für jedes Objekt D in \mathcal{C} genau einem Morphismus $f_D : D \rightarrow C$. Denn die Familien $(\pi_i)_{i \in I}$, $(f_i)_{i \in I}$ aus Definition 5.2.1 sind leer. Die Bedingung an den Morphismus $f : D \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ reduziert sich dann auf die Existenz *genau eines* Morphismus $f_D : D \rightarrow C$.

Existiert das leere Koprodukt in einer Kategorie \mathcal{C} , so besteht es aus einem Objekt $C = \prod_{i \in \emptyset} C_i$ und für jedes Objekt D in \mathcal{C} genau einem Morphismus $g_D : C \rightarrow D$. Denn die Familien $(\iota_i)_{i \in I}$, $(g_i)_{i \in I}$ aus Definition 5.2.1 sind leer. Die Bedingung an den Morphismus $g : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow D$ reduziert sich dann auf die Existenz *genau eines* Morphismus $g_D : C \rightarrow D$.

Definition 5.2.3: Ein Objekt C in einer Kategorie \mathcal{C} heißt:

1. **final** oder **terminal**, wenn es zu jedem Objekt D in \mathcal{C} genau einen Morphismus $f_D : D \rightarrow C$ gibt,
2. **kofinal** oder **initial**, wenn es zu jedem Objekt D in \mathcal{C} genau einen Morphismus $g_D : C \rightarrow D$ gibt,
3. **Nullobjekt**, wenn es initial und terminal ist.

Aus der Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten bis auf eindeutige Isomorphie in Satz 5.2.2 ergibt sich direkt, dass terminale, initiale und Nullobjekte, wenn sie existieren, eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie sind: Sind C und C' zwei initiale, terminale oder Nullobjekte Objekte in \mathcal{C} , so gibt es genau einen Morphismus $f : C \rightarrow C'$, und er ist ein Isomorphismus.

Beispiel 5.2.4:

1. Die direkte Summe von Moduln ist ein kategorielles Koprodukt und das direkte Produkt von Moduln ein kategorielles Produkt in der Kategorie $R\text{-Mod}$, und der Nullmodul ist ein Nullobjekt in $R\text{-Mod}$. In $R\text{-Mod}$ existieren Produkte und Koprodukte für alle Familien von Objekten.
2. Das kartesische Produkt von Mengen ist ein Produkt und die disjunkte Vereinigung von Mengen ist ein Koprodukt in der Kategorie Set . Die leere Menge ist ein initiales und jede einelementige Menge ein terminales Objekt in Set . In der Kategorie Set existieren also Produkte und Koprodukte für beliebige Familien von Objekten.
3. Das Produkt und die Summe topologischer Räume sind ein Produkt und ein Koprodukt in der Kategorie Top . Der leere topologische Raum ist ein initiales und der Einpunktraum ein terminales Objekt in Top .
4. Das **kartesische Produkt** $\times_{i \in I} G_i$ einer Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Gruppen ist das kartesische Produkt der Mengen G_i mit der Gruppenmultiplikation $(g_i)_{i \in I} \cdot (h_i)_{i \in I} = (g_i \cdot h_i)_{i \in I}$. Es ist ein Produkt in der Kategorie Grp , denn die Projektionen $\pi_k : (g_i)_{i \in I} \rightarrow g_k$ sind Gruppenhomomorphismen, und zu jeder Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Gruppenhomomorphismen $f_i : H \rightarrow G_i$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $f : H \rightarrow \times_{i \in I} G_i$, der die Bedingung $\pi_k \circ f(h) = f_k(h)$ erfüllt, nämlich $f : h \mapsto (f_i(h))_{i \in I}$. Die triviale Gruppe ist ein Nullobjekt in Grp .
5. Analog definiert man für eine Familie $(R_i)_{i \in I}$ von Ringen das **kartesische Produkt** als das kartesische Produkt der Mengen R_i mit der Ringstruktur

$$(r_i)_{i \in I} + (s_i)_{i \in I} = (r_i + s_i)_{i \in I} \quad (r_i)_{i \in I} \cdot (s_i)_{i \in I} = (r_i \cdot s_i)_{i \in I}.$$

Dies definiert ein Produkt in der Kategorie Ring . Der Nullring ist ein terminales Objekt in Ring , und der Ring \mathbb{Z} ein initiales Objekt in Ring .

Auf eine ähnliche Weise wie Produkte und Koprodukte können wir alle durch universelle Eigenschaften definierten Konzepte in entsprechende Konzepte für Kategorien übersetzen. Es gibt aber noch eine elegantere und konzeptionellere Weise, universelle Eigenschaften in Kategorien zu erfassen. Diese erhält man, wenn man die Morphismen noch stärker in den Vordergrund stellt, also Morphismen zwischen den durch universellen Eigenschaften definierten Objekten betrachtet, und die entsprechenden Konstruktionen als *Funktoren* interpretiert. Wir illustrieren dies am Beispiel des Produkts.

Beispiel 5.2.5: Sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der Produkte für alle durch eine gegebene Indexmenge I indizierten Familien $(C_i)_{i \in I}$ von Objekten existieren.

- Wir betrachten die Kategorie \mathcal{C}_I , deren Objekte und Morphismen durch I indizierte Familien von Objekten $(C_i)_{i \in I}$ und Morphismen $(f_i)_{i \in I}$ in \mathcal{C} sind, die komponentenweise verkettet werden.
- Das Produkt definiert einen Funktor $\Pi_I : \mathcal{C}_I \rightarrow \mathcal{C}$, der einer Familie $(C_i)_{i \in I}$ von Objekten ihr Produkt $\Pi_{i \in I} C_i$ und einer Familie $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen $f_i : C_i \rightarrow C'_i$ den durch die universelle Eigenschaft des Produkts eindeutig bestimmten Morphismus $\Pi_I((f_i)_{i \in I}) : \Pi_{i \in I} C_i \rightarrow \Pi_{i \in I} C'_i$ mit $\pi'_i \circ \Pi_I((f_i)_{i \in I}) = f_i \circ \pi_i$ für alle $i \in I$ zuordnet.

- Ebenso erhalten wir einen Diagonalenfunktor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_I$, der einem Objekt C in \mathcal{C} die Familie $(C)_{i \in I}$ und einem Morphismus $f : C \rightarrow C'$ die Familie $(f)_{i \in I}$ zuordnet.

- Die universelle Eigenschaft des Produkts besagt dann, dass man für alle Objekte $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $(C_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{C}_I$ eine Bijektion erhält

$$\phi_{C, (C_i)_{i \in I}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Pi_{i \in I} C_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_I}(\Delta(C), (C_i)_{i \in I}), \quad h \mapsto (\pi_i \circ h)_{i \in I}. \quad (10)$$

- Die Bijektionen $\phi_{C, (C_i)_{i \in I}}$ sind mit der Verkettung von Morphismen in \mathcal{C} und \mathcal{C}_I verträglich. Für alle Morphismen $f : B \rightarrow C$ in \mathcal{C} und Morphismenfamilien $(g_i : C_i \rightarrow D_i)_{i \in I}$ gilt

$$\begin{aligned} \phi_{B, (C_i)_{i \in I}}(h \circ f) &= (\pi_i \circ h \circ f)_{i \in I} = (\pi_i \circ h)_{i \in I} \circ (f)_{i \in I} = \phi_{C, (C_i)_{i \in I}}(h) \circ \Delta(f) \\ (g_i)_{i \in I} \circ \phi_{C, (C_i)_{i \in I}}(h) &= (g_i \circ \pi_i \circ h)_{i \in I} = (\pi_i \circ \Pi_I((g_i)_{i \in I}) \circ h) = \phi_{C, (D_i)_{i \in I}}(\Pi_I((g_i)_{i \in I}) \circ h). \end{aligned} \quad (11)$$

Ersetzen wir die Kategorie \mathcal{C}_I in Beispiel 5.2.5 durch eine beliebige Kategorie \mathcal{D} und den Produktfunktoren $\Pi_I : \mathcal{C}_I \rightarrow \mathcal{C}$ und Diagonalenfunktor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_I$ durch Funktoren $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, so können wir den Zusammenhang zwischen Produkt- und Diagonalenfunktor in (10) und die Bedingungen (11), die die universelle Eigenschaft des Produkts erfassen, verallgemeinern.

Wir fordern dann die Existenz von Bijektionen $\phi_{C, D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$ mit $\phi_{C', D}(h \circ f) = \phi_{C, D}(h) \circ F(f)$ und $g \circ \phi_{C, D}(h) = \phi_{C, D'}(G(g) \circ h)$ für alle Morphismen $h : C \rightarrow G(D)$, $f : C' \rightarrow C$ und $g : D \rightarrow D'$. Die Beziehung zwischen den Funktoren F und G erinnert dabei an adjungierte Abbildungen in unitären Vektorräumen, wobei die Ausdrücke $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(,)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(,)$ die Rolle des Skalarprodukts einnehmen und die Bijektionen $\phi_{C, D}$ das Gleichheitszeichen ersetzen. Deswegen spricht man von adjungierten Funktoren.

Definition 5.2.6: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **linksadjungiert** zu einem Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und G **rechtsadjungiert** zu F , wenn zu allen Objekten $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ eine Bijektion

$$\phi_{C, D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$$

existiert, so dass für alle Morphismen $f : C' \rightarrow C$ in \mathcal{C} und $g : D \rightarrow D'$ in \mathcal{D} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) & \xrightarrow[\text{h} \mapsto G(g) \circ \text{h} \circ f]{\text{Hom}(f, G(g))} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', G(D')) \\ \downarrow \phi_{C, D} & & \downarrow \phi_{C', D'} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) & \xrightarrow[\text{h} \mapsto g \circ \text{h} \circ F(f)]{\text{Hom}(F(f), g)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C'), D') \end{array}$$

kommutiert. Dies bezeichnet man als die **Natürlichkeit** der Bijektionen $\phi_{C, D}$. Sie bedeutet gerade, dass die Bijektionen $\phi_{X, Y}$ einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren $\text{Hom}(F(-), -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Hom}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ definieren.

Indem wir Beispiele von adjungierten Funktoren betrachten, erkennen wir, dass dies ein sehr allgemeines und nützliches Konzept ist, das viele bekannte Konstruktionen mit universellen Eigenschaften enthält und auch unerwartete Zusammenhänge zwischen bekannten Konstruktionen liefert.

Beispiel 5.2.7:

1. Produkte, Koprodukte und Diagonalfunktoren:

Nach Beispiel 5.2.5 ist der Produktfunktork $\Pi_I : \mathcal{C}_I \rightarrow \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zum Diagonalfunktork $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_I$. Analog zeigt man (Übung), dass das Koprodukt in einer Kategorie \mathcal{C} einen Funktork $\Pi_I : \mathcal{C}_I \rightarrow \mathcal{C}$ definiert, der linksadjungiert zum Diagonalfunktork ist.

2. Vergissfunktoren und freie Erzeugung von Moduln:

Sei R ein Ring. Wir betrachten

- den Vergissfunktork $G : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$.
- den Funktork $F : \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}$, der einer Menge A den von A erzeugten freien R -Modul $F(A) = \langle A \rangle_R$ und einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ den R -Modulhomomorphismus $F(f) : \langle A \rangle_R \rightarrow \langle B \rangle_R$ mit $F(f) \circ \iota_A = \iota_B \circ f$ zuordnet.

Dann ist F linksadjungiert zu G . Denn nach Bemerkung 2.4.9, 2. gibt es zu jeder Abbildung $f : A \rightarrow M$ in einen R -Modul M genau eine R -lineare Abbildung $\langle f \rangle_R : \langle A \rangle_R \rightarrow M$ mit $\langle f \rangle_R \circ \iota_A = f$, also eine Bijektion

$$\phi_{A,M} : \text{Hom}_{\text{Set}}(A, G(M)) \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(F(A), M), \quad f \mapsto \langle f \rangle_R.$$

Für alle Abbildungen $f : A' \rightarrow A$, $h : A \rightarrow M$ und R -linearen Abbildungen $g : M \rightarrow M'$ gilt dann per Definition

$$g \circ \langle h \rangle_R \circ F(f) \circ \iota_{A'} = g \circ \langle h \rangle_R \circ \iota_A \circ f = g \circ h \circ f = \langle g \circ h \circ f \rangle_R \circ \iota_{A'},$$

und mit der universellen Eigenschaft des frei erzeugten Moduls folgt

$$\langle g \circ h \circ f \rangle_R = g \circ \langle h \rangle_R \circ F(f).$$

Also gilt die Natürlichkeitsbedingung in Definition 5.2.6, und F ist linksadjungiert zu G .

3. Vergissfunktoren ohne Links- und Rechtsadjungierte:

Der Vergissfunktork $V : \text{Field} \rightarrow \text{Set}$ hat keinen links- oder rechtsadjungierten Funktork.

Denn gäbe es einen zu V linksadjungierten Funktork $F : \text{Set} \rightarrow \text{Field}$, so gäbe es zur leeren Menge \emptyset und zu jedem Körper \mathbb{K} Bijektionen

$$\Phi_{\emptyset, \mathbb{K}} : \text{Hom}_{\text{Set}}(\emptyset, V(\mathbb{K})) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Field}}(F(\emptyset), \mathbb{K}).$$

Da es zu jeder Menge B genau eine Abbildung $f_B : \emptyset \rightarrow B$ gibt, würde dies bedeuten, dass $F(\emptyset)$ ein Körper sein müßte, so dass zu jedem anderen Körper \mathbb{K} genau ein Körperhomomorphismus $g : F(\emptyset) \rightarrow \mathbb{K}$ existiert. Da Körperhomomorphismen injektiv sind, wäre $F(\emptyset)$ damit Teilkörper jedes Körpers \mathbb{K} . Ein solcher Körper existiert nicht, da dann $\text{char}(\mathbb{K}) = \text{char}(F(\emptyset))$ für alle Körper \mathbb{K} gelten müßte.

Hätte F einen rechtsadjungierten Funktork $G : \text{Set} \rightarrow \text{Field}$, so gäbe es zu jedem Körper \mathbb{K} eine Bijektion

$$\Phi_{\mathbb{K}, \{p\}} : \text{Hom}_{\text{Field}}(\mathbb{K}, G(\{p\})) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(V(\mathbb{K}), \{p\})$$

Da es zu jeder Menge M genau eine Abbildung $f : M \rightarrow \{p\}$ gibt, gäbe es dann zu jedem Körper \mathbb{K} einen Körperhomomorphismus $f' : \mathbb{K} \rightarrow G(\{p\})$. Damit wäre jeder Körper \mathbb{K} ein Teilkörper des Körpers $G(\{p\})$ und $\text{char}(\mathbb{K}) = \text{char}(G(\{p\}))$ für alle Körper \mathbb{K} , ein Widerspruch.

4. Diskrete und indiskrete Topologie:

Wir betrachten

- den Vergissfunktork $V : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$,
- den Funktor $D : \text{Set} \rightarrow \text{Top}$, der einer Menge X den topologischen Raum X mit der diskreten Topologie zuordnet und einer Abbildung $f : X \rightarrow X'$ die stetige Abbildung $f : X \rightarrow X'$ zwischen den zugehörigen diskreten topologischen Räumen,
- den Funktor $I : \text{Set} \rightarrow \text{Top}$, der einer Menge X den topologischen Raum X mit der indiskreten Topologie zuordnet und einer Abbildung $f : X \rightarrow X'$ die stetige Abbildung $f : X \rightarrow X'$ zwischen den zugehörigen indiskreten topologischen Räumen.

Dann ist D linksadjungiert zu V und I rechtsadjungiert zu V . Denn die diskrete Topologie auf X macht jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in einen topologischen Raum Y stetig, und die indiskrete Topologie auf X macht jede Abbildung $f : Y \rightarrow X$ aus einem topologischen Raum Y stetig. Damit gilt

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, V(Y)) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}(D(X), Y) \quad \text{Hom}_{\text{Top}}(Y, I(X)) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(V(Y), X).$$

Da alle beteiligten Funktoren jede Abbildung auf sich selbst abbilden und sie nur als Morphismus in verschiedenen Kategorien interpretieren, ist die Natürlichkeitsbedingung trivialerweise erfüllt.

5. Inklusionsfunktork für abelsche Gruppen und Abelisierung:

Den Inklusionsfunktork $G : \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ ist rechtsadjungiert zum Abelisierungsfunktork $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$, der einer Gruppe G die abelsche Gruppe $G/[G, G]$ und einem Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ den zugehörigen Homomorphismus von abelschen Gruppen $\tilde{f} : G/[G, G] \rightarrow H/[H, H]$, $g + [G, G] \mapsto f(g) + [H, H]$ zuordnet (Übung).

6. Gruppenalgebra und Einheitengruppe:

Wir betrachten:

- den Funktor $F : \text{Grp} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Alg}$, der einer Gruppe H ihre Gruppenalgebra $\mathbb{K}[H]$ und einem Gruppenhomomorphismus $f : H \rightarrow H'$ den induzierten Algebrahomomorphismus $F(f) : \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[H']$, $\delta_h \mapsto \delta_{f(h)}$ zuordnet,
- den Funktor $G : \mathbb{K}\text{-Alg} \rightarrow \text{Grp}$, der einer Algebra A ihre Einheitengruppe A^\times und einem Algebrahomomorphismus $f : A \rightarrow B$ den induzierten Gruppenhomomorphismus $G(f) : A^\times \rightarrow B^\times$, $a \mapsto f(a)$ zuordnet.

Dann ist F linksadjungiert zu G . Denn nach der universellen Eigenschaft der Gruppenalgebra (Satz 1.4.2) gibt es zu jedem Gruppenhomomorphismus $f : H \rightarrow A^\times$ genau einen Algebrahomomorphismus $f' : \mathbb{K}[H] \rightarrow A$ mit $f' \circ \iota_H = \iota_A \circ f$, wobei $\iota_H : H \rightarrow \mathbb{K}[H]$, $h \mapsto \delta_h$ und $\iota_A : A^\times \rightarrow A$ die Inklusionen bezeichnen. Dies definiert Bijektionen

$$\phi_{H,A} : \text{Hom}_{\text{Grp}}(H, A^\times) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Alg}}(\mathbb{K}[H], A), \quad f \mapsto f'$$

die die Natürlichkeitsbedingung in Definition 5.2.6 erfüllen.

7. Tensorprodukte und Hom-Funktoren:

Sei R ein Ring und M ein R -Rechtsmodul. Wir betrachten:

- den Funktor $F_M = M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$, der einem R -Linksmodul L die abelsche Gruppe $M \otimes_R L$ und einem R -Modulhomomorphismus $f : L \rightarrow L'$ den Gruppenhomomorphismus $F_M(f) = \text{id}_M \otimes f : M \otimes_R L \rightarrow M \otimes_R L'$ aus Satz 2.5.6 zuordnet.
- den Funktor $G_M = \text{Hom}(M, -) : \text{Ab} \rightarrow R\text{-Mod}$, der einer abelschen Gruppe A die abelsche Gruppe $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$ mit der durch $(r \triangleright \psi)(m) = \psi(m \triangleleft r)$ definierten R -Linksmodulstruktur zuordnet und einem Gruppenhomomorphismus $f : A \rightarrow A'$ den R -Modulhomomorphismus $\text{Hom}(M, f) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A')$, $\psi \mapsto f \circ \psi$.

Der Funktor F_M ist linksadjungiert zu G_M . Denn für alle abelschen Gruppen A und R -Linksmoduln L erhält man eine Bijektion

$$\phi_{L,A} : \text{Hom}_R(L, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L, A),$$

die einem R -Modulhomomorphismus $\psi : L \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$, $l \mapsto \psi_l$ die Abbildung $\psi' : M \times L \rightarrow A$, $(m, l) \mapsto \psi_l(m)$ zuordnet. Da $\psi : L \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$ R -linear ist, gilt $\psi_{r \triangleright l}(m) = (r \triangleright \psi_l)(m) = \psi_l(m \triangleleft r)$. Also ist ψ' R -bilinear und induziert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\phi_{L,A}(\psi) : M \otimes_R L \rightarrow A$ mit $\phi_{L,A}(\psi) \circ \otimes = \psi'$.

Das Inverse der Bijektion $\phi_{L,A}$ ordnet einem Gruppenhomomorphismus $\chi : M \otimes_R L \rightarrow A$ den Gruppenhomomorphismus $\phi_{L,A}^{-1}(\chi) : L \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$, $l \mapsto \psi_l$ mit $\psi_l(m) = \chi(m \otimes l)$ zu, der die Bedingung $\psi_{r \triangleright l}(m) = \chi(m \otimes (r \triangleright l)) = \chi((m \triangleleft r) \otimes l) = \psi_l(m \triangleleft r)$ erfüllt und somit ein R -Modulhomomorphismus ist.

Ist $f : L' \rightarrow L$ eine R -lineare Abbildung und $g : A \rightarrow A'$ ein Gruppenhomomorphismus, so zeigt eine kurze Rechnung, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(L, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)) & \xrightarrow{h \mapsto \text{Hom}(M, g) \circ h \circ f} & \text{Hom}_R(L', \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A')) \\ \downarrow \Phi_{L,A} & & \downarrow \Phi_{L',A'} \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L, A) & \xrightarrow{k \mapsto g \circ k \circ (\text{id}_M \otimes_R f)} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R L', A') \end{array}$$

Also ist $F_M = M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ linksadjungiert zu $G_M = \text{Hom}(M, -) : \text{Ab} \rightarrow R\text{-Mod}$.

Analog zeigt man, dass der Funktor $F'_M = - \otimes_R M : R^{op}\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ linksadjungiert zum Funktor $\text{Hom}(-, M) : \text{Ab} \rightarrow R^{op}\text{-Mod}$ ist für jeden R -Linksmodul M .

Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel für adjungierte Funktoren ergibt sich aus dem Pullback von Modulstrukturen. Ist $\phi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so erhält nach Beispiel 2.1.3, 9. jeder S -Modul (M, \triangleright) die Struktur eines R -Moduls $(M, \triangleright_{\phi})$ mit $r \triangleright_{\phi} m = \phi(r) \triangleright m$ und jede S -lineare Abbildung $f : (M, \triangleright) \rightarrow (M', \triangleright')$ ist auch R -linear bezüglich \triangleright_{ϕ} und \triangleright'_{ϕ} . Nach Beispiel 5.1.7, 8. definiert dies einen Funktor $S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$. Wir zeigen nun, dass dieser Funktor sowohl einen links- also auch einen rechtsadjungierten Funktor besitzt.

Satz 5.2.8: Seien R, S Ringe, $\phi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und $P : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ der **Pullbackfunkt**or aus Beispiel 5.1.7. Dann gilt:

1. Der **Induktionsfunkt**or $F = S \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ aus Beispiel 5.1.7, 9. mit $F(M) = S \otimes_R M$ und $F(f) = \text{id}_S \otimes f$ für alle R -Moduln M und R -Modulhomomorphismen $f : M \rightarrow N$ ist linksadjungiert zu P .

2. Der **Koinduktionsfunktork** $G = \text{Hom}(S, -) : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ mit $G(M) = \text{Hom}_R(S, M)$ und $G(f) : \text{Hom}_R(S, M) \rightarrow \text{Hom}_R(S, N)$, $g \mapsto f \circ g$ für alle R -Moduln M und R -Modulhomomorphismen $f : M \rightarrow N$ ist rechtsadjungiert zu P .

Beweis:

1. Wir versehen den Ring S mit der durch $\phi : R \rightarrow S$ und durch die Multiplikation in S definierten (S, R) -Bimodulstruktur: $s \triangleright s' \triangleleft r = s \cdot s' \cdot \phi(r)$ für alle $r \in R$, $s, s' \in S$, wodurch die abelsche Gruppe $S \otimes_R M$ die Struktur eines S -Linksmoduls mit $s \triangleright (s' \otimes m) = (ss') \otimes m$ erhält.

Nach Beispiel 5.1.7, 9. ordnet F einem R -Linksmodul M den S -Linksmodul $F(M) = S \otimes_R M$ zu und einem R -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ den S -Modulhomomorphismus $\text{id}_S \otimes f$. Um zu zeigen, dass F linksadjungiert zu P ist betrachten wir die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \Phi_{M,N} : \text{Hom}_R(M, P(N)) &\rightarrow \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N), & f &\mapsto \phi_{M,N}(f) : s \otimes m \mapsto s \triangleright f(m) \\ \Psi_{M,N} : \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, P(N)), & g &\mapsto \psi_{M,N}(g) : m \mapsto g(1 \otimes m). \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass diese zueinander invers und somit Isomorphismen von abelschen Gruppen sind. Die Natürlichkeitseigenschaft beweist man durch direktes Nachrechnen: Zu zeigen ist, dass alle R -Modulhomomorphismen $f : M' \rightarrow M$, S -Modulhomomorphismen $g : N \rightarrow N'$ und R -Modulhomomorphismen $h : M \rightarrow N$ die Bedingung

$$\Phi_{M',N'}(g \circ h \circ f) = g \circ \Phi_{M,N}(h) \circ (\text{id}_S \otimes f)$$

erfüllen. Der Morphismus auf der linken Seite ist gegeben durch

$$\Phi_{M',N'}(g \circ h \circ f)(s \otimes m') = s \triangleright g(h(f(m')))) \quad \forall s \in S, m' \in M',$$

und der Morphismus auf der rechten Seite durch

$$g \circ \Phi_{M,N}(h) \circ (\text{id}_S \otimes f)(s \otimes m') = g(s \triangleright h(f(m'))) = s \triangleright g(h(f(m'))),$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass g ein S -Modulhomomorphismus ist. Also ist die Natürlichkeitsbedingung erfüllt und F ist linksadjungiert zu P .

2. Wir versehen S mit der R -Linksmodulstruktur $r \triangleright s = \phi(r) \cdot s$ und die abelsche Gruppe $\text{Hom}_R(S, M)$ mit der durch $(s \triangleright f)(s') := f(s' \cdot s)$ definierten S -Linksmodulstruktur. Der Funktor G ordnet einem R -Linksmodul M den S -Linksmodul $\text{Hom}_R(S, M)$ zu und einem R -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ den S -Modulhomomorphismus

$$G(f) = \text{Hom}(S, f) : \text{Hom}_R(S, M) \rightarrow \text{Hom}_R(S, N), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Die Zuordnung ist verträglich mit den Identitätsmorphismen und der Komposition und definiert daher einen Funktor $G : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$. Um zu zeigen, dass G rechtsadjungiert zu P ist, betrachten wir die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(P(N), M) &\rightarrow \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) & \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) &\rightarrow \text{Hom}_R(P(N), M) \\ f &\mapsto (n \mapsto (s \mapsto f(s \triangleright n))) & g &\mapsto (n \mapsto g(n)(1)). \end{aligned}$$

Wie im ersten Beweisschritt kann man zeigen, dass diese zueinander invers sind und die natürliche Eigenschaft besitzen. Also ist G rechtsadjungiert zu P . \square

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich, wenn man man Darstellungen einer Gruppe G und einer Untergruppe $H \subset G$ über einem Körper \mathbb{K} betrachtet und die Inklusion $\phi : \mathbb{K}[H] \rightarrow \mathbb{K}[G]$, $\delta_h \rightarrow \delta_h$ als Ringhomomorphismus wählt. In diesem Fall entspricht der Pullbackfunktork P der Restriktion von Darstellungen und der Induktionsfunktork liefert die induzierte Darstellung aus Beispiel 2.5.9. Die Aussage, dass der Induktionsfunktork linksadjungiert zum Pullbackfunktork ist, entspricht gerade der Frobenius-Reziprozität in Beispiel 2.5.9.

Der Koinduktionsfunktork liefert eine alternative Methode, eine Darstellung der Gruppe G aus einer Darstellung (ρ, V) von H zu konstruieren. Für eine gegebene Darstellung (ρ, V) von H erhält man dann eine Darstellung (ρ', V') von G mit

$$V' = \{f : G \rightarrow V \mid f(hg) = \rho(h)f(g) \forall h \in H, g \in G\} \quad (\rho'(g)f)(g') = f(g'g).$$

Nachdem wir genügend Beispiele von adjungierten Funktoren kennengelernt haben, beschäftigen wir uns nun mit deren Eigenschaften. Eine offensichtliche Frage ist hier die Existenz und Eindeutigkeit, wobei Beispiel 5.2.7, 3. bereits zeigt, dass nicht jeder Funktork links- oder rechtsadjungierte Funktoren besitzen muss.

Die Frage der Eindeutigkeit lässt sich aber sowohl für links- als auch für rechtsadjungierte Funktoren bejahen. Hierzu bietet es sich an, zunächst eine alternative Charakterisierung von links- und rechtsadjungierten Funktoren durch die Existenz gewisser natürlicher Transformationen zum Identitätsfunktork zu entwickeln. Diese macht auch den Zusammenhang und die Unterschiede zwischen adjungierten Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien deutlich. Wir benötigen dazu die Verkettung von natürlichen Transformationen mit natürlichen Transformationen und mit Funktoren aus Bemerkung 5.1.9.

Satz 5.2.9: Ein Funktork $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist linksadjungiert zu einem Funktork $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ genau dann, wenn es natürliche Transformationen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ gibt, so dass

$$(G\epsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G \quad (\epsilon F) \circ (F\eta) = \text{id}_F.$$

Ein Paar adjungierter Funktoren definiert genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ natürliche Isomorphismen sind.

Beweis:

1. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Dann gibt es für alle Objekte D in \mathcal{D} und alle Objekte C in \mathcal{C} Bijektionen

$$\begin{aligned} \phi_{G(D),D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D), G(D)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(D), D) \\ \phi_{C,GF(C)}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GF(C)). \end{aligned}$$

Wir betrachten $\epsilon_D = \phi_{G(D),D}(1_{G(D)}) : FG(D) \rightarrow D$ und $\eta_C = \phi_{C,GF(C)}^{-1}(1_{F(C)}) : C \rightarrow GF(C)$ und zeigen, dass sie natürliche Transformationen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ definieren. Aus dem kommutierenden Diagramm in Definition 5.2.6 erhält man für die Morphismen $f : D \rightarrow D'$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{D'} \circ FG(f) &= \phi_{G(D'),D'}(1_{G(D')}) \circ FG(f) = \phi_{G(D),D'}(1_{G(D')} \circ G(f)) \\ &= \phi_{G(D),D'}(G(f) \circ 1_{G(D)}) = f \circ \phi_{G(D),D}(1_{G(D)}) = f \circ \epsilon_D. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Morphismen ϵ_D eine natürliche Transformation $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ definieren. Ebenso ergibt sich aus dem kommutierenden Diagramm in Definition 5.2.6

$$\begin{aligned} \epsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) &= \phi_{GF(C),F(C)}(1_{GF(C)}) \circ F(\phi_{C,GF(C)}^{-1}(1_{F(C)})) = \phi_{C,F(C)}(1_{GF(C)} \circ \phi_{C,GF(C)}^{-1}(1_{F(C)})) \\ &= \phi_{C,F(C)} \circ \phi_{C,GF(C)}^{-1}(1_{F(C)}) = 1_{F(C)}, \end{aligned}$$

und damit gilt $(\epsilon F) \circ (F\eta) = \text{id}_F$. Der Beweis, dass die Morphismen $\eta_C : C \rightarrow GF(C)$ eine natürliche Transformation $\eta : \text{id}_C \rightarrow GF$ definieren und dass $(G\epsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G$ ist analog.

2. Seien nun $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren, für die natürliche Transformationen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_D$ und $\eta : \text{id}_C \rightarrow GF$ mit $(\epsilon F) \circ (F\eta) = \text{id}_F$ und $(G\epsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G$ existieren. Dann erhält man für alle Objekte $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ Abbildungen

$$\begin{aligned}\phi_{C,D} &: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D), & f &\mapsto \epsilon_D \circ F(f) \\ \psi_{C,D} &: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)), & g &\mapsto G(g) \circ \eta_C\end{aligned}$$

Nun gilt für alle Morphismen $f : C \rightarrow G(D)$ und $g : F(C) \rightarrow D$

$$\begin{aligned}\psi_{C,D} \circ \phi_{C,D}(f) &= G(\epsilon_D) \circ GF(f) \circ \eta_C = G(\epsilon_D) \circ \eta_{G(D)} \circ f = f \\ \phi_{C,D} \circ \psi_{C,D}(g) &= \epsilon_D \circ FG(g) \circ F(\eta_C) = g \circ \epsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) = g,\end{aligned}$$

wobei die Natürlichkeit von ϵ und η und die Identitäten aus Satz 5.2.9 benutzt wurden. Dies zeigt, dass die Abbildung $\phi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$ bijektiv ist.

Zu zeigen ist noch die Natürlichkeitseigenschaft aus Definition 5.2.6. Seien dazu $f : C' \rightarrow C$, $h : C \rightarrow G(D)$ Morphismen in \mathcal{C} und $g : D \rightarrow D'$ ein Morphismus in \mathcal{D} . Einsetzen der Definition von $\phi_{X,Y}$ und Ausnutzen der Natürlichkeit von ϵ ergibt dann

$$\phi_{C',D'}(G(g) \circ h \circ f) = \epsilon_{D'} \circ FG(g) \circ F(h) \circ F(f) = g \circ \epsilon_D \circ F(h) \circ F(f) = g \circ \phi_{C,D}(h) \circ F(f).$$

3. Sind $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Paar adjungierter Funktoren, so dass die natürlichen Transformationen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_D$ und $\eta : \text{id}_C \rightarrow GF$ Isomorphismen sind, so sind nach Definition 5.1.11 F und G Äquivalenzen von Kategorien. Bilden umgekehrt $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so folgt aus dem Beweis von Satz 5.1.13 (siehe Bemerkung 5.1.14), dass diese auch zueinander adjungiert sind mit natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_D$ und $\eta : \text{id}_C \rightarrow GF$. \square

Satz 5.2.10: Adjungierte Funktoren sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

1. Sind $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\kappa : F \rightarrow F'$.
2. Sind $G, G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zu $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\kappa : G \rightarrow G'$.

Beweis:

Wir beweisen die erste Aussage. Der Beweis der zweiten Aussage ist analog (Übung).

Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu G mit natürlichen Transformationen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_D$ und $\eta : \text{id}_C \rightarrow GF$, die die Bedingungen $(G\epsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G$ und $(\epsilon F) \circ (F\eta) = \text{id}_F$ aus Satz 5.2.9 erfüllen. Sei $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ebenfalls linksadjungiert zu G mit entsprechenden natürlichen Transformationen $\epsilon' : F'G \rightarrow \text{id}_D$ und $\eta' : \text{id}_C \rightarrow GF'$.

Wir betrachten dazu die natürliche Transformationen $\kappa = (\epsilon F') \circ (F\eta') : F \rightarrow F'$ und $\kappa' = (\epsilon' F) \circ (F'\eta) : F' \rightarrow F$ mit Komponentenmorphismen $\kappa_C = \epsilon_{F'(C)} \circ F(\eta'_C) : F(C) \rightarrow F'(C)$

und $\kappa'_C = \epsilon'_{F(C)} \circ F'(\eta_C) : F'(C) \rightarrow F(C)$ (vgl. Bemerkung 5.1.9) und zeigen, dass sie natürliche Isomorphismen sind. Die Morphismen κ_C und κ'_C sind zueinander invers, da

$$\begin{aligned} \kappa_C \circ \kappa'_C &= \epsilon_{F'(C)} \circ F(\eta'_C) \circ \kappa'_C \stackrel{\text{nat } \kappa'}{=} \epsilon_{F'(C)} \circ \kappa'_{GF'(C)} \circ F'(\eta'_C) \\ &\stackrel{\text{def } \kappa'}{=} \epsilon_{F'(C)} \circ \epsilon'_{FGF'(C)} \circ F'(\eta_{GF'(C)}) \circ F'(\eta'_C) \stackrel{\text{nat } \epsilon'}{=} \epsilon'_{F'(C)} \circ F'G(\epsilon_{F'(C)}) \circ F'(\eta_{GF'(C)}) \circ F'(\eta'_C) \\ &= \epsilon'_{F'(C)} \circ F'(G(\epsilon_{F'(C)}) \circ \eta_{GF'(C)}) \circ F'(\eta'_C) = \epsilon'_{F'(C)} \circ F'(\eta'_C) = 1_{F'(C)}, \end{aligned}$$

wobei in den letzten beiden Schritten die Identitäten $(G\epsilon) \circ (\eta G) = \text{id}_G$ und $(\epsilon' F') \circ (F' \eta') = \text{id}_{F'}$ angewendet wurden. Eine analoge Rechnung, bei der F mit F' und κ mit κ' vertauscht wird, liefert $\kappa'_C \circ \kappa_C = 1_{F(C)}$. Damit gilt $\kappa_C^{-1} = \kappa'_C$ und κ und κ' sind natürliche Isomorphismen. \square

5.3 Darstellbare Funktoren und das Yoneda-Lemma

Zum Abschluss des Kapitels Kategorien befassen wir uns noch etwas genauer mit den Hom-Funktoren. Für jedes Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ erhalten wir zwei Funktoren $\text{Hom}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Hom}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$, die einem Objekt D in \mathcal{C} die Morphismenmengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C)$ zuordnen und einem Morphismus $f : D \rightarrow D'$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D'), & \text{Hom}(f, C) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D', C) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C), \\ g &\mapsto f \circ g & g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Neben den Identitätsfunktoren und konstanten Funktoren sind dies die einzigen Funktoren, die für alle Kategorien definiert sind und sich intrinsisch aus der Definition einer Kategorie ergeben. Sie haben damit eine Sondstellung und spielen in vielen Anwendungen und Konstruktionen eine besonders wichtige Rolle, insbesondere im Zusammenhang mit adjungierten Funktoren.

Dabei stellt sich die Frage, welche Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ oder $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ sich durch die Hom-Funktoren beschreiben lassen, also natürlich isomorph zu Funktoren $\text{Hom}(C, -)$ oder $\text{Hom}(-, C)$ für ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sind. Offensichtliche Kandidaten sind dabei die Vergissfunktoren $V : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ in konkreten Kategorien.

Definition 5.3.1: Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ heißt **darstellbar**, wenn es ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ gibt. Das Objekt C heißt dann **darstellendes Objekt** von F .
2. Ein Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ heißt **darstellbar**, wenn es ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(-, C) \rightarrow F$ gibt. Das Objekt C heißt dann **darstellendes Objekt** von F .

Beispiel 5.3.2:

1. Der Identitätsfunktor $\text{id}_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ ist darstellbar mit der einelementigen Menge $\{m\}$ als darstellendem Objekt.

Denn Abbildungen $g : \{m\} \rightarrow X$ stehen in Bijektion mit Elementen $x \in X$. Die Abbildungen $\eta_X : \text{Hom}_{\text{Set}}(\{m\}, X) \rightarrow X$, $f \mapsto f(m)$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(\{m\}, -) \rightarrow \text{id}_{\text{Set}}$, denn für alle Abbildungen $g : X \rightarrow X'$ gilt $g \circ \eta_{X'}(f) = g(f(m)) = \eta_{X'}(g \circ f) = \eta_{X'}(\text{Hom}(\{m\}, g)(f)) = \eta_{X'} \circ \text{Hom}(\{m\}, g)(f)$ und damit kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Set}}(\{m\}, X) & \xrightarrow{\eta_X: f \mapsto f(m)} & X \\ \text{Hom}(\{m\}, f): g \mapsto f \circ g \downarrow & & \downarrow g \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(\{m\}, X') & \xrightarrow{\eta_{X'}: f \mapsto f(m)} & X'. \end{array}$$

2. Der Vergissfunktorkomplex $V : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ ist darstellbar mit dem Einpunktraum $\{m\}$ als darstellendem Objekt.

Denn stetige Abbildungen $g : \{m\} \rightarrow X$ stehen in Bijektion mit Punkten $x \in X$. Die Abbildungen $\eta_X : \text{Hom}_{\text{Top}}(\{m\}, X) \rightarrow X$, $f \mapsto f(m)$ definieren in diesem Fall einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(\{m\}, -) \rightarrow V$.

3. Der Vergissfunktorkomplex $V : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$ ist darstellbar mit dem Ring R als Linksmodul über sich selbst als darstellendem Objekt.

Denn R -lineare Abbildungen $f : R \rightarrow M$ sind wegen $f(r) = f(r \triangleright 1) = r \triangleright f(1)$ durch das Element $f(1) \in M$ eindeutig bestimmt. Die Abbildungen $\eta_M : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M$, $f \mapsto f(1)$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R, -) \rightarrow V$, denn für alle R -linearen Abbildungen $g : M \rightarrow M'$ gilt

$$\eta_{M'} \circ \text{Hom}(R, f)(g) = \eta_M(f \circ g) = f(g(1)) = f(\eta_M(g)) = f \circ \eta_M(g)$$

und damit kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R, M) & \xrightarrow{\eta_M: f \mapsto f(1)} & M \\ \text{Hom}(R, f): g \mapsto f \circ g \downarrow & & \downarrow g \\ \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R, M') & \xrightarrow{\eta_{M'}: f \mapsto f(1)} & M'. \end{array}$$

4. Der Vergissfunktorkomplex $V : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ ist darstellbar mit darstellendem Objekt \mathbb{Z} .

Denn jeder Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ist eindeutig bestimmt durch $f(1)$ und damit stehen Gruppenhomomorphismen $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ in Bijektion mit Elementen von G . Die Abbildungen $\eta_G : \text{Hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow G$, $f \mapsto f(1)$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(\mathbb{Z}, -) \rightarrow V$.

5. Analog zeigt man, dass der $V : \text{URing} \rightarrow \text{Set}$ darstellbar ist mit dem Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ als darstellendem Objekt.

Aus der Definition eines darstellbaren Funktors $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ergibt sich sofort die Frage nach der Eindeutigkeit des darstellenden Objekts C und des zugehörigen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$. Wir werden sehen, dass sich erstere aus letzterem ergibt und befassen uns daher zuerst mit der Eindeutigkeit des natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ für ein festes darstellendes Objekt C . Dazu betrachten wir das kommutierende Diagramm für die Natürlichkeit von η für ein besonders einfaches Objekt, nämlich das darstellende Objekt C und den Identitätsmorphimus auf C .

Lemma 5.3.3: (Yoneda-Lemma)

Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ein Funktor und C ein Objekt in \mathcal{C} . Dann bilden die natürlichen Transformationen $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ eine Menge $M_{C,F} = \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})}(\text{Hom}(C, -), F)$ und die **Yoneda-Abbildung** $Y : M_{C,F} \rightarrow F(C)$, $\eta \mapsto \eta_C(1_C)$ ist eine Bijektion.

Beweis:

1. **Injektivität der Yoneda-Abbildung:** Eine natürliche Transformation $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ definiert für jedes Objekt C' in \mathcal{C} eine Abbildung $\eta_{C'} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow F(C')$, so dass für jeden Morphismus $f : C' \rightarrow C''$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') & \xrightarrow{\eta_{C'}} & F(C') \\ g \mapsto f \circ g \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'') & \xrightarrow{\eta_{C''}} & F(C''). \end{array}$$

Setzt man $C = C'$ und $g = 1_C \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$, so erhält man

$$\eta_{C'}(f) = F(f) \circ \eta_C(1_C) \quad \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C').$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $\eta_{C'} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow F(C')$ durch F und $\eta_C(1_C)$ eindeutig bestimmt ist. Somit ist die Yoneda-Abbildung $Y : M_{C,F} \rightarrow F(C)$ injektiv.

2. **Surjektivität der Yoneda-Abbildung:** Um zu zeigen, dass die Yoneda-Abbildung surjektiv ist, konstruieren wir zu jedem Element $c \in F(C)$ eine natürliche Transformation $\tau : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ mit $\tau_C(1_C) = c$. Dazu betrachten wir für gegebenes $c \in F(C)$ die Abbildung

$$\tau_C : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow F(C'), \quad h \mapsto F(h)(c)$$

Offensichtlich gilt dann $\tau_C(1_C) = F(1_C)(c) = 1_{F(C)}(c) = \text{id}_{F(C)}(c) = c$. Dass die Morphismen $\tau_{C'} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow F(C')$ eine natürliche Transformation definieren ist dann äquivalent zur Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') & \xrightarrow{\tau_{C'}:h \mapsto F(h)(c)} & F(C') \\ h \mapsto f \circ h \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'') & \xrightarrow{\tau_{C''}:h \mapsto F(h)(c)} & F(C'') \end{array}$$

für alle Morphismen $f : C' \rightarrow C''$. Diese ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

$$F(f)(F(h)(c)) = (F(f) \circ F(h))(c) = F(f \circ h)(c).$$

Die Morphismen $\tau_C : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \rightarrow F(D)$ definieren also eine natürliche Transformation $\tau : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ mit $\tau_C(1_C) = c$, und die Yoneda-Abbildung ist surjektiv. \square

Aus dem Yoneda-Lemma ergibt sich nun auch direkt die Eindeutigkeit der darstellenden Objekten bis auf Isomorphie.

Korollar 5.3.4: In jeder Kategorie \mathcal{C} gilt:

1. Die Funktoren $\text{Hom}(C, -), \text{Hom}(C', -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ für zwei Objekte C, C' in \mathcal{C} sind genau dann natürlich isomorph, wenn die Objekte C und C' isomorph sind.

2. Ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ darstellbar, so ist das darstellende Objekt eindeutig bis auf Isomorphie.
3. Analoge Aussagen gelten für die Funktoren $\text{Hom}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ und für Funktoren $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$.

Beweis:

1. Existiert ein Isomorphismus $\epsilon : C \rightarrow C'$, so definiert man für jedes Objekt D in \mathcal{C} die Bijektionen

$$\eta_D : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', D), \quad g \mapsto g \circ \epsilon^{-1} \qquad \eta_D^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D), \quad g \mapsto g \circ \epsilon,$$

einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow \text{Hom}(C', -)$. Denn für alle Morphismen $f : D \rightarrow D'$ kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) & \xrightarrow{\eta_D: g \mapsto g \circ \epsilon^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', D) \\ \text{Hom}(C, f): \downarrow g \mapsto f \circ g & & \text{Hom}(C', f): \downarrow g \mapsto f \circ g \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D') & \xrightarrow{\eta_{D'}: g \mapsto g \circ \epsilon^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', D'). \end{array}$$

Existiert umgekehrt ein natürlicher Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(C, -) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(C', -)$, so erhält man einen Morphismus $f = \eta_{C'}^{-1}(1_{C'}) : C \rightarrow C'$ mit Inversem $f^{-1} = \eta_C(1_C) : C' \rightarrow C$. Denn wegen der Natürlichkeit von η kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) & \xrightarrow{\eta_C} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C') & \xrightarrow{\eta_{C'}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \\ \text{Hom}(C, f): \downarrow g \mapsto f \circ g & & \text{Hom}(C', f): \downarrow g \mapsto f \circ g & & g \mapsto \eta_C(1_C) \circ g \downarrow & & \downarrow g \mapsto \eta_C(1_C) \circ g \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') & \xrightarrow{\eta_{C'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C') & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C) & \xrightarrow{\eta_C^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C). \end{array}$$

Wertet man das linke Diagramm auf dem Element $1_C \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ aus und das rechte auf $1_{C'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C')$, so erhält man

$$\begin{aligned} f \circ \eta_C(1_C) &= \eta_{C'}(f \circ 1_C) = \eta_{C'}(f) = 1_{C'} \\ \eta_C(1_C) \circ f &= \eta_C(1_C) \circ \eta_{C'}^{-1}(1_{C'}) = \eta_C^{-1}(\eta_C(1_C) \circ 1_{C'}) = \eta_C^{-1}(\eta_C(1_C)) = 1_C \end{aligned}$$

Also ist $f : C \rightarrow C'$ ein Isomorphismus mit Inversem $f^{-1} = \eta_C(1_C) : C' \rightarrow C$.

2. Sind C, C' zwei darstellende Objekte von $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, so gibt es natürliche Isomorphismen $\eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow F$ und $\eta' : \text{Hom}(C', -) \rightarrow F'$. Diese definieren einen natürlichen Isomorphismus $\eta'^{-1} \circ \eta : \text{Hom}(C, -) \rightarrow \text{Hom}(C', -)$, und mit 1. folgt $C \cong C'$. □

Dieses Korollar und das Yoneda-Lemma sind deswegen so hilfreich, weil sich damit Aussagen über Funktoren und natürliche Transformationen in Aussagen über die Isomorphie von Morphismenmengen übersetzen lassen. Insbesondere lassen sich diese Ergebnisse leicht auf Funktoren anwenden, die gerade über Beziehungen zwischen Morphismenmengen charakterisiert sind, wie links- oder rechtsadjungierten Funktoren. So liefert das Yoneda-Lemma einen alternativen Beweis für die Eindeutigkeit links- und rechtsadjungierter Funktoren.

Korollar 5.3.5: Besitzt ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ einen linksadjungierten oder einen rechtsadjungierten Funktor, so ist dieser eindeutig bestimmt bis auf natürliche Isomorphie.

Beweis:

Seien $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit Bijektionen

$$\Phi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \quad \Phi'_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C), D)$$

wie in Definition 5.2.6 für alle Objekte $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ und $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Dann erhalten wir Bijektionen

$$\eta_D^{(C)} = \phi'_{C,D} \circ \phi_{C,D}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C), D).$$

Da die Isomorphismen $\phi_{C,D}$ und $\phi'_{C,D}$ die Natürlichkeitsbedingung aus Definition 5.2.6 erfüllen, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_D^{(C)} & & \\ & \searrow & \text{---} & \searrow & \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) & \xrightarrow{\Phi_{C,D}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) & \xrightarrow{\Phi'_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C), D) & \\ \text{Hom}(F(C), f) : g \rightarrow f \circ g \downarrow & & & g \rightarrow G(f) \circ g \downarrow & & & \text{Hom}(F'(C), f) : g \rightarrow f \circ g \downarrow & \\ & \searrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D') & \xrightarrow{\Phi_{C,D'}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D')) & \xrightarrow{\Phi'_{C,D'}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C), D') & \\ & & \eta_{D'}^{(C)} & & \end{array}$$

für alle Morphismen $f : D \rightarrow D'$ in \mathcal{D} . Damit definieren die Morphismen $\eta_D^{(C)}$ für jedes Objekt C in \mathcal{C} einen natürlichen Isomorphismus

$$\eta_D^{(C)} : \text{Hom}(F(C), -) \rightarrow \text{Hom}(F'(C), -), \quad \eta_D^{(C)} = \phi'_{C,D} \circ \phi_{C,D}^{-1}$$

Nach dem Beweis von Korollar 5.3.4 sind $\tau_C = \eta_{F(C)}^{(C)}(1_{F(C)}) : F'(C) \rightarrow F(C)$ Isomorphismen, und mit der Natürlichkeitsbedingung aus Definition 5.2.6 folgt, dass das folgende Diagramm für alle Morphismen $f : C' \rightarrow C$ kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_D^{(C)} & & \\ & \searrow & \text{---} & \searrow & \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) & \xrightarrow{\Phi_{C,D}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) & \xrightarrow{\Phi'_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C), D) & \\ g \rightarrow g \circ F(f) \downarrow & & & g \rightarrow g \circ f \downarrow & & & g \rightarrow g \circ F'(f) \downarrow & \\ & \searrow & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C'), D) & \xrightarrow{\Phi_{C',D}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', G(D)) & \xrightarrow{\Phi'_{C',D}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F'(C'), D) & \\ & & \eta_D^{(C')} & & \end{array}$$

Setzt man darin $D = F(C)$ und $g = 1_{F(C)}$, so erhält man

$$\tau_C \circ F'(f) = \eta_{F(C)}^{(C)}(1_{F(C)} \circ F(f)) = \eta_{F(C)}^{(C)}(F(f) \circ 1_{F(C')}) = F(f) \circ \eta_{F(C')}^{(C)}(1_{F(C')}) = F(f) \circ \tau_{C'},$$

wobei wieder die Natürlichkeitseigenschaft in Definition 5.2.6 benutzt wurde. Also bilden die Isomorphismen $\tau_C : F'(C) \rightarrow F(C)$ einen natürlichen Isomorphismus $\tau : F' \rightarrow F$. \square

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir nun auch die Beziehung zwischen adjungierten Funktoren und den Produkten und Koprodukten in einer Kategorie klären. Die Definition eines links- und eines rechtsadjungierten Funktors ergab sich ja gerade als Verallgemeinerung der Beziehung zwischen den durch Produkte und Koprodukte definierten Funktoren und dem Diagonalenfunktor. Wir zeigen nun, dass rechts- bzw. linksadjungierte Funktoren mit Produkten und Koprodukten in den zugrundeliegenden Kategorien kompatibel sind, d. h. bis auf Isomorphie Produkte und Koprodukte erhalten.

Satz 5.3.6: Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Dann vertauscht G mit Produkten und F mit Koprodukten:

$$G(\prod_{i \in I} D_i) \cong \prod_{i \in I} G(D_i) \quad F(\prod_{i \in I} C_i) \cong \prod_{i \in I} F(C_i).$$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage für Produkte. Der Beweis der Aussage für Koprodukte ist analog. Sei $\prod_{i \in I} D_i$ ein Produkt in \mathcal{D} und C ein beliebiges Objekt in \mathcal{C} . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(\prod_{i \in I} D_i)) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), \prod_{i \in I} D_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D_i) \\ &\cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D_i)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \prod_{i \in I} G(D_i)). \end{aligned}$$

wobei in beiden Zeilen zunächst benutzt wurde, dass F linksadjungiert zu G ist und anschließend die universelle Eigenschaft des Produkts. Dies definiert einen natürlichen Isomorphismus $\eta : \text{Hom}(-, G(\prod_{i \in I} D_i)) \rightarrow \text{Hom}(-, \prod_{i \in I} G(D_i))$, denn indem man die universelle Eigenschaft der Produkte sowie die kommutierenden Diagramme in Definition 5.2.6 benutzt, sieht man, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(\prod_{i \in I} D_i)) & \xrightarrow{\eta_C} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \prod_{i \in I} G(D_i)) \\ \downarrow g \rightarrow g \circ f & & \downarrow g \rightarrow g \circ f \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', G(\prod_{i \in I} D_i)) & \xrightarrow{\eta'_C} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', \prod_{i \in I} G(D_i)) \end{array}$$

für alle Morphismen $f : C' \rightarrow C$ kommutiert. Mit Korollar 5.3.4 folgt nun, dass die Objekte $G(\prod_{i \in I} D_i)$ und $\prod_{i \in I} G(D_i)$ isomorph sind. \square

5.4 Übungen zu Kapitel 5

Aufgabe 79: Zeigen Sie:

- (a) Identitätsmorphisme in einer Kategorie \mathcal{C} sind eindeutig:
Sind $1_X, 1'_X : X \rightarrow X$ zwei Morphisme in \mathcal{C} mit $1_X \circ f = 1'_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g \circ 1'_X = g$ für alle Morphisme $f : W \rightarrow X$ und $g : X \rightarrow Y$, so gilt $1_X = 1'_X$.
- (b) Inverse Morphisme in einer Kategorie \mathcal{C} sind eindeutig:
Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} und $g, g' : Y \rightarrow X$ zwei Morphisme mit $g \circ f = g' \circ f = 1_X$ und $f \circ g = f \circ g' = 1_Y$, so folgt $g = g'$.
- (c) Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und $f : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus in \mathcal{C} , so ist $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ ein Isomorphismus in \mathcal{D} .

Aufgabe 80:

- Eine **Relation** zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.
- Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **Abbildung** von A nach B , wenn es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$.
- Die Verknüpfung von zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ ist die Relation

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\} \subseteq A \times C.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Mengen und Relationen eine Kategorie **Rel** mit Mengen als Objekten und Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{Rel}}(A, B) = \mathcal{P}(A \times B)$ bilden.
- (b) Bestimmen Sie die Isomorphismen in der Kategorie **Rel**.

Aufgabe 81: Für eine Gruppe G sei BG die Kategorie mit einem Objekt \bullet und mit Gruppenelementen $g \in G$ als Morphismen.

- (a) Zeigen Sie, dass Funktoren $F : BG \rightarrow \text{Set}$ genau den G -Mengen entsprechen und natürliche Transformationen $\eta : F \rightarrow G$ zwischen solchen Funktoren Morphismen von G -Mengen.
- (b) Zeigen Sie: für jede G -Menge (X, \triangleright) erhält man ein Gruppoid $X//G$ mit $\text{Ob}(X//G) = X$, mit $\text{Hom}_{X//G}(x, y) = \{(x, g) \mid g \in G \text{ mit } g \triangleright x = y\}$, wobei $(y, h) \circ (x, g) = (x, hg)$ für alle $g, h \in G, x, y \in X$ mit $g \triangleright x = y$. Morphismen von G -Mengen $f : (X, \triangleright) \rightarrow (X', \triangleright')$ induzieren Funktoren $F_f : X//G \rightarrow X'//G$.
- (c) Bestimmen Sie die Gruppe $\text{Hom}_{X//G}(x, x)$ für $x \in X$ sowie ein Skelett von $X//G$.
- (d) Zeigen Sie: (a) und (b) definieren einen Funktor $F : \text{Fun}(BG, \text{Set}) \rightarrow \text{Grpd}$.
- (e) Wir betrachten den Funktor $\text{Hom}(\bullet, -) : BG \rightarrow \text{Set}$ und für jedes Gruppenelement $g \in G$ die natürliche Transformation $\text{Hom}(g, -) : \text{Hom}(\bullet, -) \rightarrow \text{Hom}(\bullet, -), \phi \mapsto \phi \circ g$. Bestimmen Sie die Gruppenwirkung zu $\text{Hom}(\bullet, -)$ und den Morphismus von G -Mengen zu $\text{Hom}(g, -)$ sowie das zugehörige Wirkungsgruppoid und Funktor von Wirkungsgruppoiden.

Hinweis: Eine G -Menge ist Paar (X, \triangleright) aus einer Menge X und einer Gruppenwirkung \triangleright von G auf X , also einer Abbildung $\triangleright : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \triangleright x$ mit $g \triangleright (g' \triangleright x) = (gg') \triangleright x$ und $e \triangleright x = x$ für alle $g, g' \in G, x \in X$. Ein Morphismus von G -Mengen von (X, \triangleright) nach (X', \triangleright') ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ mit $g \triangleright' f(x) = f(g \triangleright x)$ für alle $x \in X$ und $g \in G$.

Aufgabe 82: Sei (G, \circ) eine Gruppe, die wir als Kategorie BG mit einem Objekt X , mit $\text{Hom}_{BG}(X, X) = G$ und mit der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen interpretieren. Zeigen Sie:

- (a) Ist (H, \circ) eine weitere Gruppe, die wir ebenfalls als Kategorie BH mit einem Objekt interpretieren, so stehen Funktoren $F : BG \rightarrow BH$ in Bijektion mit Gruppenhomomorphismen $\phi : G \rightarrow H$.
- (b) Funktoren $F : BG \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ stehen in Bijektion mit Darstellungen von G über \mathbb{F} , d. h. Paaren (V, ϕ) aus einem \mathbb{F} -Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}}(V)$.
- (c) Funktoren $F : BG \rightarrow \text{Top}$ stehen in Bijektion mit G -Räumen, also topologischen Gruppenwirkungen $\triangleright : G \times Y \rightarrow Y$ auf topologischen Räumen (Y, \mathcal{O}_Y) , wobei G mit der diskreten Topologie ausgestattet wird.
- (d) Charakterisieren Sie für (a) bis (c) jeweils die natürlichen Transformationen zwischen zwei solchen Funktoren $F, G : BG \rightarrow \mathcal{D}$ für die angegebenen Kategorien \mathcal{D} .

Aufgabe 83: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und X ein Objekt von \mathcal{C} .

- (a) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ erhält, wenn man jedem Objekt Y in \mathcal{C} die Morphismenmenge $F(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und einem Morphismus $f : Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{C} die Abbildung $F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$, $g \mapsto f \circ g$ zuordnet.
- (b) Zeigen Sie, dass man einen Funktor $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ erhält, wenn man einem Objekt Y in \mathcal{C}^{op} die Morphismenmenge $G(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ und einem Morphismus $f : Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{C} die Abbildung $G(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $g \mapsto g \circ f$ zuordnet.

Hinweis: Man benutzt häufig die Notation $\text{Hom}(X, -) = F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Hom}(-, X) = G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ und bezeichnet diese Funktoren als **Hom-Funktoren**.

Aufgabe 84: Für eine Gruppe G ist die **Kommutatorgruppe** $[G, G]$ die von Elementen $[g, h] := g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe:

$$[G, G] = \{[g_n, h_n] \cdot [g_{n-1}, h_{n-1}] \cdots [g_1, h_1] : n \in \mathbb{N}, g_i, h_i \in G \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $[G, G] \subseteq G$ eine normale Untergruppe und die **Faktorgruppe** $G/[G, G]$ eine abelsche Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie: Ist $\phi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi_{\sim} : G/[G, G] \rightarrow H/[H, H]$ mit $\phi_{\sim} \circ \pi_G = \pi_H \circ \phi$, wobei $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ und $\pi_H : H \rightarrow H/[H, H]$ die kanonischen Surjektionen bezeichnen.
- (c) Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $G \rightarrow G/[G, G]$, $\phi \rightarrow \phi_{\sim}$ Funktoren $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ und $F' : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ definieren.
- (d) Folgern Sie, dass die kanonischen Surjektionen $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätsfunktor $\text{id}_{\text{Grp}} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ und dem Funktor $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ definieren.

Aufgabe 85: Seien \mathcal{D}, \mathcal{E} Kategorien und \mathcal{B}, \mathcal{C} kleine Kategorien.

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktoren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren eine Kategorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bilden.
- (b) Zeigen Sie, dass jeder Funktor $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ einen Funktor $H^* : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ induziert und jeder Funktor $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ einen Funktor $K_* : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Aufgabe 86: Wir betrachten die Kategorie Grp und auf $\text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H)$ die Äquivalenzrelation $\phi \sim_{G,H} \phi' \Leftrightarrow \exists h \in H : \phi'(g) = h \cdot \phi(g) \cdot h^{-1}$ für alle $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen $\phi, \phi' : G \rightarrow H$. Zeigen Sie, dass diese Äquivalenzrelationen mit der Verkettung von Morphismen verträglich sind, und bestimmen Sie die zugehörige Quotientenkategorie.

Aufgabe 87: Sei \mathcal{G} ein Gruppoid. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes Objekt X in \mathcal{G} ist $\text{End}_{\mathcal{G}}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, X)$ mit der Verkettung von Morphismen eine Gruppe.
- (b) Sind X, Y Objekte in \mathcal{G} , so dass es einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt, so sind die Gruppen $(\text{End}_{\mathcal{G}}(X), \circ)$ und $(\text{End}_{\mathcal{G}}(Y), \circ)$ isomorph.

Aufgabe 88: Seien X, Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, $f \sim g$, wenn eine stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$ existiert.

- (a) Zeigen Sie, dass die Homotopie von Abbildungen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y definiert.
- (b) Zeigen Sie, dass für topologische Räume X, Y, Z und stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$, $h, k : Y \rightarrow Z$ aus $f \sim g$ und $h \sim k$ folgt $h \circ f \sim k \circ g$.
- (c) Zeigen Sie, dass die topologischen Räume und die Homotopieäquivalenzklassen stetiger Abbildungen eine Kategorie hTop bilden und bestimmen Sie die Isomorphismen in dieser Kategorie.
- (d) Zeigen Sie, dass dies einen Funktor $\pi : \text{Top} \rightarrow \text{hTop}$ definiert, der wesentlich surjektiv, aber nicht volltreu ist.

Aufgabe 89: Sei X ein topologischer Raum. Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$. Die Verkettung zweier Wege $c, d : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(1) = d(0)$ ist der Weg $c \star d : [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$d \star c(t) = \begin{cases} c(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ d(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zwei Wege $c, c' : [0, 1] \rightarrow X$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten $c(0) = c'(0)$, $c(1) = c'(1)$ heißen **homotop**, $c \sim c'$, wenn eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $h(t, 0) = c(t)$, $h(t, 1) = c'(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $h(0, s) = c(0)$, $h(1, s) = c(1)$ für alle $s \in [0, 1]$ existiert.

- (a) Untersuchen Sie, ob die Verkettung von Wegen assoziativ ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $c(0) = x_0, c(1) = x_1$ definiert.
- (c) Zeigen Sie: Sind $c, c', d, d' : [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $c(0) = c'(0), c(1) = c'(1) = d(0) = d'(0)$ und $d(1) = d'(1)$, so dass gilt $c \sim c', d \sim d'$, dann folgt $d \star c \sim d' \star c'$.
- (d) Zeigen Sie, dass man eine Kategorie erhält, deren Objekte Punkte des topologischen Raums X und deren Morphismen Homotopieäquivalenzklassen von Wegen in X sind. Überlegen Sie sich, dass das nicht der Fall ist, wenn man versucht, als Morphismen Wege in X zu wählen.
- (e) Zeigen Sie, dass die Kategorie aus Aufgabenteil (d) ein Gruppoid ist. Sie wird als **Fundamentalgruppoid** des topologischen Raums X bezeichnet.
- (f) Zeigen Sie: Ist eine Kategorie \mathcal{C} ein Gruppoid, so bilden für jedes Objekt X in \mathcal{C} die Morphismen $f : X \rightarrow X$ eine Gruppe. Folgern Sie, dass für jeden fest gewählten Punkt $x \in X$ die Homotopieäquivalenzklassen von Wegen $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = c(1) = x$ eine Gruppe bilden. Diese wird als **Fundamentalgruppe** des topologischen Raums X mit **Basispunkt** x und mit $\pi_1(x, X)$ bezeichnet.

Aufgabe 90: Seien X, Y, Z topologische Räume mit ausgewählten Punkten $x \in X, y \in Y, z \in Z$ und $\pi_1(x, X), \pi_1(y, Y), \pi_1(z, Z)$ die zugehörigen Fundamentalgruppen. Für Wege $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = c(1) = x$ bezeichnen wir mit $[c]_X$ die entsprechende Homotopieäquivalenzklasse in $\pi_1(x, X)$ und analog für Y und Z . Zeigen Sie:

- (a) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x) = y$, dann erhält man durch $\pi_1(f)([c]) := [f \circ c]$ einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(x, X) \rightarrow \pi_1(y, Y)$.
- (b) Es gilt $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(x, X)}$ und für alle stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ mit $f(x) = y, g(y) = z$ folgt $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.
- (c) Die Zuordnungen $(x, X) \rightarrow \pi_1(x, X)$ und $f \rightarrow \pi_1(f)$ definieren einen Funktor $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ von der Kategorie Top^* der punktierten topologischen Räume in die Kategorie Grp der Gruppen.

Aufgabe 91: Zeigen Sie, dass die Kategorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}$ der endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräume mit \mathbb{K} -linearen Abbildungen als Morphismen äquivalent ist zur Kategorie \mathcal{C} der nichtnegativen ganzen Zahlen mit $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, n) = \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$, indem Sie Funktoren $F : \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}} \rightarrow \mathcal{C}$ und $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}$ und natürliche Isomorphismen $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}, \eta : \text{id}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}} \rightarrow GF$ angeben.

Aufgabe 92: Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ ein Skelett von \mathcal{C} und $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ ein Skelett von \mathcal{D} . Zeigen Sie, dass die Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} äquivalent sind genau dann, wenn die Kategorien $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ isomorph sind.

Aufgabe 93: Betrachten Sie den Beweis der Aussage, dass ein Funktor genau dann eine Äquivalenz von Kategorien ist, wenn er wesentlich surjektiv und volltreu ist, und ergänzen Sie alle Schritte, die dort nicht genau ausgeführt sind. Zeigen Sie, dass die in diesem Beweis definierten natürlichen Isomorphismen $\epsilon : FG \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ die Bedingungen

$$\epsilon_{F(X) \circ F(\eta_X)} = 1_{F(X)} \quad G(\epsilon_W) \circ \eta_{G(W)} = 1_{G(W)}$$

erfüllen und somit die Funktoren F, G eine adjungierte Äquivalenz bilden.

Aufgabe 94: Seien G_1, G_2 Gruppen mit neutralen Elementen e_1 und e_2 und $G_1 \cap G_2 = \emptyset^4$. Dann ist das **freie Produkt** $G_1 \star G_2$ definiert als die Menge der **freien Wörter** in G_1 und G_2

$$G_1 \star G_2 = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) : n \in \mathbb{N}_0, g_j \in (G_1 \setminus \{e_1\}) \cup (G_2 \setminus \{e_2\}), g_i \in G_1 \Leftrightarrow g_{i+1} \in G_2\},$$

mit der Verknüpfung

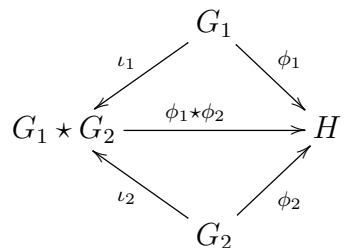
$$(g_1, \dots, g_n) \cdot (h_1, \dots, h_m) = \begin{cases} (g_1, \dots, g_{n-k-1}, g_{n-k} \cdot h_{k+1}, \dots, h_m) & \text{falls } g_{n-s} \cdot h_{1+s} = e_{i_s} \text{ für } 0 \leq s < k \\ & \text{und } g_{n-k}, h_{k+1} \in G_{i_k} \text{ mit} \\ & g_{n-k} \cdot h_{k+1} \neq e_{i_k} \\ (g_1, \dots, g_{n-k}, h_{k+1}, \dots, h_m) & \text{falls } g_{n-s} \cdot h_{1+s} = e_{i_s} \text{ für } 0 \leq s < k \\ & \text{und } g_{n-k} \in G_i, h_{k+1} \in G_j \text{ mit } i \neq j \end{cases}$$

Die **Inklusionsabbildungen** $\iota_i : G_i \rightarrow G_1 \star G_2$ sind definiert durch

$$\iota_i(g) = \begin{cases} (g) & g \neq e_i \\ () & g = e_i. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- Die Menge $G_1 \star G_2$ mit dieser Verknüpfung bildet eine Gruppe mit dem leeren Wort $()$ als neutralem Element und Inversen $(g_1, \dots, g_n)^{-1} = (g_n^{-1}, \dots, g_1^{-1})$.
- Ist H eine Gruppe und $\phi_1 : G_1 \rightarrow H, \phi_2 : G_2 \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi_1 \star \phi_2 : G_1 \star G_2 \rightarrow H$, so dass das folgende Diagramm kommutiert



Dies nennt man die **universelle Eigenschaft des freien Produktes von Gruppen**.

- Das freie Produkt von Gruppen ist assoziativ.
- Sind G_1, \dots, G_n Gruppen mit $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist das freie Produkt $G_1 \star G_2 \star \dots \star G_n$ ein Koproduct der Objekte G_1, \dots, G_n in der Kategorie Grp.

⁴Diese Voraussetzung beschränkt die Allgemeinheit der Aussage nicht - man kann ansonsten eine der beiden Gruppen durch eine dazu isomorphe Gruppe ersetzen

Aufgabe 95: Wir betrachten die Kategorie Rel mit Mengen als Objekten, mit Morphismenmengen $\text{Hom}_{\text{Rel}}(M, N) = \mathcal{P}(M \times N)$ und der Verkettung von Relationen

$$S \circ R = \{(l, n) \in L \times N \mid \exists m \in M : (l, m) \in R, (m, n) \in S\} \subset L \times N$$

für $S \subset M \times N$ und $R \subset L \times M$. Zeigen Sie, dass die disjunkte Vereinigung von Mengen ein Produkt und ein Koprodukt in der Kategorie Rel definiert.

Aufgabe 96: Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie, \mathcal{D} eine Kategorie, in der Produkte (Koprodukte) für beliebige Objektfamilien $(D_i)_{i \in I}$ existieren. Zeigen Sie, dass dann auch in der Kategorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ Produkte (Koprodukte) für beliebige Familien $(F_i)_{i \in I}$ von Funktoren $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ existieren.

Aufgabe 97: Wir betrachten die Körper \mathbb{R} und \mathbb{C} und den durch die Inklusionsabbildung definierten Ringhomomorphismus $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Zeigen Sie, dass der durch Restriktion von Skalaren definierte Funktor $\Phi : \mathbb{C}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$ gerade die kanonischen Struktur eines reellen Vektorraums für jeden komplexen Vektorraum V angibt. Überlegen Sie, sich, wie man aus einer Basis des komplexen Vektorraums V eine Basis des reellen Vektorraums $\Phi(V)$ erhält.
- (b) Zeigen Sie, dass der dazu linksadjungierte Funktor $F : \mathbb{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Mod}$ mit $F(V) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und $F(f) = \text{id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} f$ gerade der Komplexifizierung von Vektorräumen entspricht. Geben Sie für eine gegebene Basis B des reellen Vektorraums V eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ an.
- (c) Untersuchen Sie den zu Φ rechtsadjungierten Funktor $G : \mathbb{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{C}\text{-Mod}$, der einem reellen Vektorraum V den komplexen Vektorraum $G(V) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$ der \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow V$ zuordnet und einer \mathbb{R} -linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ die \mathbb{C} -lineare Abbildung $G(f) : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, W)$, $g \mapsto f \circ g$. Konstruieren Sie zu einer gegebenen Basis B von V eine Basis des komplexen Vektorraums $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$.
- (d) Zeigen Sie, dass die komplexen Vektorräume $F(V) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und $G(V) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, V)$ stets isomorph sind.

Aufgabe 98: Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren.

- (a) Zeigen Sie, dass eine Kategorie $F \downarrow G$ existiert, die als Objekte Tripel (C, E, f) aus Objekten $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $E \in \text{Ob } \mathcal{E}$ und einem Morphismus $f : F(C) \rightarrow G(E)$ in \mathcal{D} hat, und als Morphismen von (C, E, f) nach (C', E', f') Paare (h, k) von Morphismen $h : C \rightarrow C'$ und $k : E \rightarrow E'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{f} & G(E) \\ F(h) \downarrow & & \downarrow G(k) \\ F(C') & \xrightarrow{f'} & G(E'). \end{array}$$

- (b) Konstruieren Sie Projektionsfunktoren $F \downarrow G \rightarrow \mathcal{C}$ und $F \downarrow G \rightarrow \mathcal{E}$.
- (c) Zeigen Sie, dass zu jedem Objekt $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ eine Kategorie \mathcal{D}/D existiert, die als Objekte Morphismen $f : D \rightarrow X$ in \mathcal{D} und als Morphismen von $f : D \rightarrow X$ nach $g : D \rightarrow Y$ Morphismen $u : X \rightarrow Y$ in \mathcal{D} mit $u \circ f = g$ hat.
- (d) Zeigen Sie, dass die Kategorien in (c) ein Spezialfall der Konstruktion in (a) sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Projektionsfunktoren.

Aufgabe 99: Wir betrachten den Funktor $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$, der einer Gruppe G die abelsche Gruppe $G/[G, G]$ und einem Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow H$ den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $F(f) : G/[G, G] \rightarrow H/[H, H]$ mit $F(f) \circ \pi_G = \pi_H \circ f$ zuordnet, wobei $\pi_G : G \rightarrow G/[G, G]$ die kanonische Surjektion bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieser Funktor linksadjungiert zum Inklusionsfunktor $I : \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ ist.

Aufgabe 100: Der **Quotientenkörper** eines Integritätsbereichs R ist die Menge

$$Q(R) = \{(r, s) \mid r, s \in R, s \neq 0\} / \sim \quad \text{mit} \quad (r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' = sr'$$

mit den Verknüpfungen $+, \cdot : Q(R) \times Q(R) \rightarrow Q(R)$

$$[(r, s)] + [(r', s')] = [(rs' + sr', ss')] \quad [(r, s)] \cdot [(r', s')] = [(rr', ss')].$$

- (a) Überzeugen Sie sich, dass der Quotientenkörper ein Körper ist und die folgende universelle Eigenschaft besitzt:

Die Inklusionsabbildung $\iota_R : R \rightarrow Q(R)$, $r \mapsto [(r, 1)]$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus, und zu jedem injektiven Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow \mathbb{K}$ in einen Körper \mathbb{K} gibt es genau einen Körperhomomorphismus $f' : Q(R) \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f' \circ \iota_R = f$.

- (b) Wir betrachten die Kategorie Int mit Integritätsbereichen als Objekten und

$$\text{Hom}_{\text{Int}}(R, S) = \{f : R \rightarrow S \mid f \text{ injektiver Ringhomomorphismus}\}.$$

Zeigen Sie, dass der Inklusionsfunktor $I : \text{Field} \rightarrow \text{Int}$ einen linksadjungierten Funktor hat, der jedem Integritätsbereich seinen Quotientenkörper zuordnet.

Aufgabe 101:

- (a) Zeigen Sie, dass der Vergissfunktor $V : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ darstellbar ist mit dem Ring \mathbb{Z} als darstellendem Objekt.
- (b) Zeigen Sie, dass der Vergissfunktor $V : \text{URing} \rightarrow \text{Set}$ darstellbar ist mit dem Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ als darstellendem Objekt.

Aufgabe 102: Sei R ein Ring, M ein R -Rechtsmodul und N ein R -Linksmodul. Zeigen Sie:

- (a) Man erhält einen Funktor $F_{M,N} : \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$, indem man einer abelschen Gruppe A die Menge $F_{M,N}(A)$ der R -bilinearen Abbildungen $\phi : M \times N \rightarrow A$ zuordnet und einem Gruppenhomomorphismus $f : A \rightarrow A'$ die Abbildung $F_{M,N}(f) : F(A) \rightarrow F(A')$, $\phi \mapsto f \circ \phi$.
- (b) Der Funktor $F_{M,N}$ ist darstellbar.

Aufgabe 103: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $F_\bullet : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und $F^\bullet : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ die konstanten Funktoren, die jedes Objekt C in \mathcal{C} auf eine einelementige Menge $F_\bullet(C) = F^\bullet(C) = \{\bullet\}$ und jeden Morphismus f in \mathcal{C} auf die Abbildung $F_\bullet(f) = F^\bullet(f) = \text{id}_{\{\bullet\}} : \{\bullet\} \rightarrow \{\bullet\}$ abbilden. Beweisen Sie:

- (a) Ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist initial genau dann, wenn der Funktor $\text{Hom}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ natürlich isomorph zu F_\bullet ist.
- (b) Ein Objekt $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ist terminal genau dann, wenn der Funktor $\text{Hom}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ natürlich isomorph zu F^\bullet ist.
- (c) Der Funktor F_\bullet (F^\bullet) ist darstellbar genau dann, wenn \mathcal{C} ein initiales (terminales) Objekt besitzt.

Aufgabe 104: Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie. Wir betrachten die Funktorkategorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$, deren Objekte Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und deren Morphismen natürliche Transformationen $\eta : F \rightarrow G$ sind.

- (a) Zeigen sie, dass für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} die zugehörigen Abbildungen $\text{Hom}(f, Z) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \mapsto g \circ f$ eine natürliche Transformation $\text{Hom}(f, -) : \text{Hom}(Y, -) \rightarrow \text{Hom}(X, -)$ zwischen den Funktoren $\text{Hom}(Y, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ definieren.
- (b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $X \rightarrow \text{Hom}(X, -)$ für jedes Objekt X in \mathcal{C} und $f \rightarrow \text{Hom}(f, -)$ für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} einen Funktor $\iota : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$ definiert. Er heißt **kontravariante Yoneda-Einbettung**.
- (c) Zeigen Sie, dass das Yoneda-Lemma bedeutet, dass der Funktor $\iota : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$ aus (b) volltreu ist. Folgern Sie, dass die Kategorie \mathcal{C}^{op} isomorph zu einer vollen Unterkategorie von $\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$ ist.

Aufgabe 105: Sei G eine Gruppe. Wir betrachten die Kategorie BG mit einem Objekt \bullet , mit $\text{Hom}_{BG}(\bullet, \bullet) = G$ und mit der Gruppenmultiplikation als Verkettung von Morphismen.

- (a) Bestimmen Sie für einen Funktor $F : BG \rightarrow \text{Set}$ alle natürlichen Transformationen $\eta : \text{Hom}(\bullet, -) \rightarrow F$ sowie die Yoneda-Abbildung. Formulieren Sie Ihre Ergebnisse in der Sprache von G -Mengen und Homomorphismen von G -Mengen.
- (b) Zeigen Sie, dass ein Funktor $F : BG \rightarrow \text{Set}$ darstellbar ist genau dann, wenn die zugehörige Gruppenwirkung $\triangleright : G \times X \rightarrow X$ transitiv und frei ist, d. h. nur eine Bahn besitzt und $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \triangleright x = x\} = \{e\}$ für alle $x \in X$ gilt.

Literatur

- [AB] J. L. Alperin, Rowen B. Bell: Groups and Representations, Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [Ar] Michael Artin: Algebra, Birkhäuser.
- [L] Serge Lang: Algebra, Addison-Wesley.
- [JS] Jens Carsten Jantzen, Joachim Schwermer: Algebra, Springer.
- [ML] Saunders MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [R] Emily Riehl, Category Theory in Context, Category Theory in Context, Aurora Dover Modern Math Originals. <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>
- [S] Jean-Pierre Serre, Lineare Darstellungen endlicher Gruppen, Springer.
- [Sa] Bruce E. Sagan, The Symmetric Group - Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [SS] G. Scheja, U. Storch, Lehrbuch der Algebra, Teil 3, Teubner Verlag, Stuttgart, 1981

Index

- R*-bilineare Abbildung, 65
- R*-lineare Abbildung, 48
- Äquivalenz
 - adjungierte, 121
 - von Kategorien, 119
- äquivalent
 - Kategorien, 119
- adjungierte Äquivalenz, 121
- Annulator, 55
- Automorphismus
 - von Darstellungen, 10
 - von Moduln, 48
- Basis, 59
- Bimodul, 49
- Charakter, 19
- Charaktergruppe, 40
- charakteristische Eigenschaft
 - Quotientenmodul, 53
- Charaktertafel, 28
- darstellbarer Funktor, 133
- darstellendes Objekt, 133
- Darstellung, 7
 - duale, 8
 - einfache, 14
 - endlich-dimensionale, 7
 - halbeinfache, 14
 - irreduzible, 14
 - komplexe, 7
 - reelle, 7
 - reguläre, 10
 - treue, 56
 - triviale, 7
 - unzerlegbare, 14
- Dichtesatz von Jacobson, 104
- Dimension
 - von Darstellung, 7
- direkte Summe
 - Darstellungen, 8
 - innere, 63
 - Moduln, 57
- direktes Produkt
 - Moduln, 57
- Divisionsring, 46
- eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, 123
- einfach
 - Darstellung von Gruppe, 14
 - Modul, 86
 - Ring, 98
- Einheit, 46
- Einschränkung von Darstellung, 8
- Elementarteilersatz, 78
- Emmy Noether, 54
- endlich erzeugter Modul, 59
- endlich-dimensional
 - Darstellung von Gruppe, 7
- Endofunktor, 116
- Endomorphismenring
 - abelsche Gruppe, 47
- Endomorphismus
 - von Darstellungen, 10
 - von Moduln, 48
- Endomorphismenring, 50
- Erzeugendensystem, 59
- Erzeuger, 62
- Faktorgruppe, 40, 140
- Faktormodul, 53
- Faltung, 30
- finale Objekt, 124
- Fouriertransformation
 - endliche Gruppen, 101
- freie Wörter, 143
- freier Modul, 59, 62
- Frobenius-Reziprozität, 68
- Funktor, 116
 - darstellbarer, 133
 - treuer, 120
 - volltreuer, 120
 - wesentlich surjektiver, 120
- Funktorkategorie, 118
- Gaußsche Zahlen, 69
- größter gemeinsamer Teiler, 77
- Gruppenalgebra, 30
- Gruppenring, 48
- Gruppenwirkung, 9
- Gruppoid, 114
- halbeinfach
 - Darstellung von Gruppe, 14

- Modul, 86
- Ring, 98
- Hauptideal, 46, 77
- Hauptidealring, 46
- Hom-Funktoren, 117, 140
- Homomorphismus
 - von Bimoduln, 49
 - von Darstellungen, 10
 - von Moduln, 48
 - von Rechtsmoduln, 49
 - von Ringen, 47
 - von unitalen Ringen, 47
- Ideal, 46
- Identitätsfunktork, 116
- Identitätsmorphimus, 112
- Induktionsfunktork, 129
- initialer Ring, 47
- initiales Objekt, 124
- Inklusionsabbildung
 - freies Produkt von Gruppen, 143
- innere direkte Summe, 63
- Integritätsbereich, 46
- Integritätsring, 46
- irreduzibel
 - Darstellung von Gruppe, 14
 - Modul, 86
- isomorph
 - Objekte in Kategorie, 112
 - Darstellungen, 10
 - Moduln, 48
- Isomorphismus
 - Kategorie, 112
 - von Darstellungen, 10
 - von Moduln, 48
- isotypische Komponente, 95
- isotypische Zerlegung, 95
- kartesisches Produkt
 - Gruppen, 125
 - Kategorien, 115
 - Ringe, 125
- Kategorie, 111
 - R -Mod, 114
 - \mathbb{K} -Alg, 114
 - $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, 112
 - Set^* , 112
 - Grp, 114
 - hTop , 115
 - kleine, 112
 - konkrete, 114
 - Rel, 114
 - Ring, 114
 - Set, 112
 - Top, 112
 - Top^* , 112
- Klassenfunktionen, 20
- kleine Kategorie, 112
- kofinales Objekt, 124
- Koinduktionsfunktork, 130
- kommutativer Ring, 46
- Kommutatorgruppe, 140
- komplexe Darstellung, 7
- Komponentenmorphimus, 118
- Kompositionsabbildung, 111
- Kompositionsfaktoren, 89
- Kompositionsreihe, 89
- konkrete Kategorie, 114
- kontravarianter Funktork, 116
- Koprodukt, 123
- Länge, Modul, 89
- Lemma von Schur
 - Darstellungen von Gruppen, 16
 - Moduln, 87
- linksadjungierter Funktork, 126
- linkseinfach, 98
- linkshalbeinfach, 98
- Linksideal, 46
- Linksmodul, 48
- Matrixkoeffizienten, 19
- maximale Unterdarstellung, 14
- Modul, 48
 - einfacher, 86
 - endlich erzeugter, 59
 - endlicher Länge, 89
 - freier, 59
 - halbeinfacher, 86
 - torsionsfreier, 55
 - treuer, 55
 - unzerlegbarer, 86
 - von Menge frei erzeugter, 62
 - zyklischer, 59
- Modulendomorphismus, 48
- Modulautomorphismus, 48
- Modulhomomorphismus, 48
- Modulisomorphismus, 48
- Monoid, 114
- Morphimus, Kategorie, 111

- Multiplizitäten, 18
- natürliche Transformation, 118
- natürlicher Isomorphismus, 118
- Nebenklassen, 40
- Noethersche Homomorphiesätze, 54
- Nullobjekt, 124
- Objekt, Kategorie, 111
- opponierte Kategorie, 115
- opponierter Ring, 47
- Orthogonalitätsrelationen
 - Charakter, 23
 - Matrixkoeffizienten, 22
- partiell geordnete Menge, 114
- Partition, 33
- Permutationsmatrizen, 7
- Polytabloid, 35
- Präsentation, Modul, 62
- Primelement, 77
- Produkt
 - Kategorie, 122
 - Moduln, 57
- Pullback
 - Darstellung, 8
 - Modul, 50
- Pullbackfunktorkomplex, 129
- Quelle, Morphismus, 112
- Quotientenkörper, 145
- Quotientenkategorie, 115
- Quotientenmodul, 53
- Rang, Modul, 60
- rechtsadjungierter Funktor, 126
- rechtseinfach, 98
- rechtshalbeinfach, 98
- Rechtsideal, 46
- reelle Darstellung, 7
- reguläre Darstellung, 10
- Relation, 114, 139
- Relationen, 62, 114
- Restriktion
 - der Skalare, 50
 - Darstellungen, 8
- Ring, 46
 - einfacher, 98
 - halbeinfacher, 98
 - kommutativer, 46
 - linkseinfacher, 98
 - linkshalbeinfacher, 98
 - nullteilerfreier, 46
 - rechtseinfacher, 98
 - rechtshalbeinfacher, 98
 - unitaler, 46
- Ringhomomorphismus, 47
 - unitaler, 47
- Satz von Jordan-Hölder, 90
- Satz von Maschke, 15
- Satz von Wedderburn, 105
- Schiefkörper, 46
- Skelett, 122
- Sockel, 95
- spalten, 61
- Spaltenstabilisator, 35
- Specht-Modul, 36
- Standardtableau, 36
- Struktursatz von Wedderburn, 99
- Subquotienten, 89
- Summe von Untermoduln, 63
- Teiler, 77
- Teilring, 46
- Tensorprodukt
 - Gruppendarstellungen, 8
 - Modulhomomorphismen, 66
 - Moduln, 63
- terminaler Ring, 47
- terminales Objekt, 124
- Torsionselement, 55
- torsionsfreier Modul, 55
- treue Darstellung, 56
- treuer Funktor, 120
- treuer Modul, 55
- triviale Darstellung, 7
- unitaler Ring, 46
- unitaler Unterring, 46
- universelle Eigenschaft
 - direktes Produkt von Moduln, 57
 - direkte Summe von Moduln, 57
 - frei erzeugter Modul, 62
 - freies Produkt von Gruppen, 143
 - Gruppenalgebra, 31
 - Koprodukt in Kategorie, 123
 - Produkt in Kategorie, 123
 - Tensorprodukt, 65
- Unterdarstellung, 13
 - echte, 13

- maximale, 14
- Unterkategorie, 115
 - volle, 115
- Untermodul, 51
 - echter, 51
- Unterring, 46
 - unitaler, 46
- unzerlegbar
 - Darstellung, 14
 - Modul, 86
- Vektorraum
 - erzeugt von Menge, 9
- Vergissfunktork, 116
- Verkettung
 - Funktork mit natürlischer Transformation, 118
 - von Funktoren, 116
- Vielfachheiten, 18
- volle Unterkategorie, 115
- volltreuer Funktork, 120

- wesentlich surjektiver Funktork, 120

- Yoneda-Abbildung, 135
- Yoneda-Lemma, 135
- Young-Diagramm, 33
- Young-Tableau, 33
- Young-Tabloid, 34

- zeilenäquivalent, 34
- Zentralisator, 20
- Zentrum, 30
- Ziel, Morphismus, 112
- zweiseitiges Ideal, 46
- Zykel, 32
- Zykelzerlegung, 33
- zyklischer Modul, 59