

Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Fragen zur Prüfungsvorbereitung (10 ECTS)

- (1) Algebraische Kurven
 - (a) Was ist eine ebene affine Kurve?
 - (b) Singuläre Punkte, Tangenten, Wendepunkte, Schnitte mit Geraden, Schnittmultiplizitäten.
 - (c) Wie kann man sich die projektive Ebene \mathbb{P}^2 vorstellen? \mathbb{P}^2 als projektiver Abschluss von \mathbb{A}^2 . Überdeckung von \mathbb{P}^2 durch die affinen Mengen U_0, U_1, U_2 .
 - (d) Geraden im \mathbb{P}^2 .
 - (e) Was ist eine ebene projektive Kurve?
 - (f) Was ist der projektive Abschluss einer ebenen affinen Kurve? Wie berechnet man ihn?
 - (g) Was heißt, dass eine Kurve über einem Körper K definiert ist? Was sind K -rationale Punkte einer Kurve?
 - (h) Was ist der Funktionenkörper einer Kurve?
 - (i) Was ist der lokale Ring einer Kurve in einem Punkt?
 - (j) Welche Eigenschaft hat der lokale Ring eines nichtsingulären Punkts?
 - (k) Was ist eine rationale Abbildung? Was ist ein Morphismus?
- (2) Der Satz von Riemann-Roch
 - (a) Wie lautet der Satz von Riemann-Roch? Erkläre die darin auftretenden Begriffe bzw. Größen.
 - (b) Was ist ein Divisor? Was ist ein effektiver Divisor? Was ist ein Hauptdivisor? Was ist ein kanonischer Divisor?
 - (c) Was sind Differentialformen? Wie berechnet man den Divisor einer Differentialform?
 - (d) Was heißt lineare Äquivalenz?
 - (e) Was ist ein Hyperebenenchnitt?
 - (f) Konstruktion rationaler Abbildungen. Was ist ein sehr ampler Divisor?
 - (g) Riemann-Hurwitz-Formel. Verzweigungsindizes. Verzweigungsdivisor.
- (3) Kurven vom Geschlecht 0
 - (a) Nenne Beispiele von Kurven vom Geschlecht 0.
 - (b) Wie kann man sich Kurven vom Geschlecht 0 vorstellen?
 - (c) Welche Kurven vom Geschlecht 0 gibt es über einem endlichen Körper?
 - (d) Wie kann man die rationalen Punkte des Einheitskreises parametrisieren?
 - (e) Wie kann man entscheiden, ob eine nichtsinguläre, über K definierte ebene Quadrik einen K -rationalen Punkt besitzt - für $K = \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?
 - (f) Welche Typen von projektiven ebenen Quadriken gibt es über einem algebraisch abgeschlossenen Körper?
 - (g) Wie kann man die reduziblen Kurven eines Kegelschnittbüschels bestimmen?
- (4) Kurven vom Geschlecht 1
 - (a) Nenne Beispiele von Kurven vom Geschlecht 1.
 - (b) Was ist eine elliptische Kurve?
 - (c) Ist jede Kurve vom Geschlecht 1 eine elliptische Kurve?
 - (d) Beschreibe eine Normalform elliptischer Kurven.
 - (e) Wie erhält man eine Gruppenstruktur auf elliptischen Kurven?
 - (f) Was haben elliptische Kurven mit Kongruenzzahlen zu tun?
- (5) Hyperelliptische Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$
 - (a) Was ist eine hyperelliptische Kurve? Wie kann man sich eine hyperelliptische Kurve vorstellen?
 - (b) Gibt es zu jedem $g \geq 2$ hyperelliptische Kurven vom Geschlecht g ?
 - (c) Beschreibe die effektiven kanonischen Divisoren einer hyperelliptischen Kurven.
 - (d) Wie kann man die Divisorenklassengruppe $\text{Pic}^0(C)$ mit reduzierten Divisoren beschreiben?