Funktionentheorie II

Karl-Hermann Neeb

February 13, 2017

Contents

1 Einleitung—Wiederholung

Zur Einstimmung wiederholen wir kurz einige zentrale Definitionen und Ergebnisse aus dem ersten Teil der Vorlesung. Im Zentrum der Betrachtungen stehen *holomorphe Funktionen*

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C},$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist. Hierbei heißt eine Funktion f, die auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ definiert ist, holomorph, wenn in jedem Punkt $p \in \Omega$ der Differenzialquotient

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert.

Viele zentrale Eigenschaften holomorpher Funktionen lassen sich durch Kurvenintegrale ausdrücken. Hierzu erinnern wir uns daran, dass eine stetige Kurze $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein *Integrationsweg* heißt, wenn γ stückweise stetig differenzierbar ist, d.h., es existiert eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, so daß die Kurven $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ jeweils stetig differenzierbar sind. Für eine komplex-wertige Funktion f, die auf $\gamma([a,b])$ definiert ist, definiert man das *komplexe Kurvenintegral* durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Ist der Weg γ geschlossen, d.h., $\gamma(a) = \gamma(b)$, so schreiben wir auch

$$\oint_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Man nennt zwei steige Kurven $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten *homotop in* Ω, wenn es eine stetige Abbildung $H\colon [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ gibt, so dass

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t), \qquad H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \qquad H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

für alle $t \in [a,b], s \in [0,1]$ gilt. Für geschlossene Wege betrachtet man die *freie Homotopie*, die durch die Bedingungen

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t), \qquad H(s,a) = H(s,b) \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b], s \in [0,1]$$

spezifiziert wird. Hierbei bleiben zwar die Anfangs- und Endpunkte nicht fest, aber alle Kurven $H_s(t) = H(s,t)$ sind geschlossen. Ein geschlossener Weg, der zu einem konstanten Weg homotop ist, heißt *nullhomotop* oder *zusammenziehbar*. Man zeigt nun, dass homotope Integrationswege für holomorphe Funktionen zu den gleichen Integralen führen ([Fi16, Satz 4.2] für feste Endpunkte und Aufg. 5.1 der FT1 für freie Homotopie geschlossener Wege). Für zusammenziehbare Kurven führt dies insbesondere auf *Cauchys Integralsatz*:

Satz 1.1. ([Fi16, Satz 4.1]) *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ ein geschlossener und zusammenziehbarer Integrationsweg. Dann gilt*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Wir erinnern uns an die Notation für offene Kreisscheiben um einen Punkt $p \in \mathbb{C}$

$$K_r(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - p| < r\} \quad \text{für} \quad p \in \mathbb{C}, r > 0$$

und führen zusätzlich die Schreibweisen

$$K_{0,r}(p) = K_r(p) \setminus \{p\} \quad \text{und} \quad K_{\leq r}(p) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - p| \leq r\}$$

für punktierte und abgeschlossene Kreisscheiben ein.

Ein weiterer zentraler Begriff ist der der *isolierten Singularität*. Ist $f \colon K_{0,r}(p) \to \mathbb{C}$ holomorph, so nennt man p eine isolierte Singularität von f. Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - p)^n$$

für die *Laurentreihe von f in p*, von der wir wissen, dass sie auf $K_{0,r}(p)$ lokal gleichmässig gegen f konvergiert ([Fi16, Satz 6.3]). Isolierte Singularitäten lassen sich in 3 Typen klassifizieren, die man jeweils an der Laurentreihe bzw. an dem Grenzwertverhalten für $z \to p$ erkennt:

- *wesentliche Singularitäten*: Eine wesentliche Singularität liegt vor, wenn es unendlich viele negative n mit $a_n \neq 0$ gibt. Nach dem Satz von Casorati–Weierstraß [Fi16, Satz 6.3] ist dann $f(K_{0,r}(p))$ dicht in $\mathbb{C}$ für alle $r > 0$ mit $K_r(p) \subseteq \Omega$. Insbesondere nimmt $|f|$ nahe bei p auch beliebig kleine Werte an, so dass $\lim_{z \to p} |f(z)|$ nicht existiert.

Wir nehmen nun an, dass dieser Fall nicht vorliegt und f nicht konstant 0 ist. Dann existiert ein minimales $n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq 0$. Die Zahl

$$\operatorname{ord}(f, p) := n.$$

heißt dann *Ordnung von f in p*. Verschwindet f auf $K_r(p)$, so setzt man auch

$$\operatorname{ord}(f, p) = \infty.$$

In allen Fällen gilt also

$$\operatorname{ord}(f, p) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \colon a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Wir erhalten dann eine Faktorisierung

$$f(z) = (z - p)^n g(z) \quad \text{für alle} \quad z \in K_{0,r}(p), \tag{1}$$

wobei

$$g(z) := a_n + a_{n+1}(z - p) + a_{n+2}(z - p)^2 + \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - p)^{k-n}$$

eine holomorphe Funktion auf $K_r(p)$ ist, die in p wegen $g(p) = a_n \neq 0$ nicht verschwindet. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Faktorisierung (1) mit einer auf $K_r(p)$ holomorphen Funktion g, die in p nicht verschwindet, dass die Laurentreihe von f in p die Gestalt $\sum_{k \geq n} a_k (z - p)^k$ mit $a_n \neq 0$ besitzt. Wir unterscheiden nun zwei Typen von unwesentlichen Singularitäten:

- *hebbare Singularitäten*: Das ist der Fall $\operatorname{ord}(f,p) \geq 0$. In diesem Fall ist die Laurentreihe

  $$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-p)^n$$

  eine Potenzreihe, alle a_n, $n < 0$, verschwinden und

  $$a_0 = \lim_{z \to p} f(z)$$

  existiert. Insbesondere erhalten wir durch $\widetilde{f}(p) := a_0$ eine auf $K_r(p)$ holomorphe Funktion, die f fortsetzt. In diesem Sinn sind hebbare Singularitäten gar keine echten Singularitäten. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz [Fi16, Satz 6.1] liegt genau dann eine hebbare Singularität vor, wenn eine Umgebung $U \subseteq K_r(p)$ von p existiert, so dass $f|_{U \setminus \{p\}}$ beschränkt ist (f is lokal um p beschränkt). Damit ist die Hebbarkeit einer Singularität äquivalent zur Existenz des Grenzwerts $\lim_{z \to p} f(z)$.

- *Polstellen*: Das ist der Fall $\operatorname{ord}(f,p) < 0$. Für $m := -\operatorname{ord}(f,p)$ erhalten wir dann eine Faktorisierung

  $$f(z) = (z-p)^{-m} g(z)$$

  mit einer auf $K_r(p)$ holomorphen Funktion g, die in p nicht verschwindet. Wir nennen p eine *Polstelle der Ordnung m*. In diesem Fall folgt aus $g(p) \neq 0$ insbesondere

  $$\lim_{z \to p} |f(z)| = |g(p)| \lim_{z \to p} |z-p|^{-m} = \infty. \tag{2}$$

Da wir an dieser Stelle aufsetzen wollen, erwähnen wir auch noch eines der Hauptergebnisse der Funktionentheorie, den Residuensatz. Um ihn formulieren zu könenn, benötigen wir den Begriff der Umlaufzahl: Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und $w \notin \gamma([a,b])$, so ist die *Umlaufzahl von γ um w* definiert durch

$$\operatorname{Um}(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-w} dz.$$

Zunächst ist gar nicht klar, dass diese Zahlen immer ganz, also Elemente von $\mathbb{Z}$ sind. Hierzu ist es instruktiv, sich die komplexe Logarithmus-Funktion etwas genauer anzuschauen, was wir in Kapitel 2 tun werden. Insbesondere werden wir die Ganzzahligkeit der Umlaufzahl zeigen (Satz 2.8).

Um den Residuensatz formulieren zu können, definieren wir das *Residuum* einer holomorphen Funktion f in einer isolierten Singulariät p, für die f auf $K_{0,r}(p)$ definiert ist, durch

$$\operatorname{Res}_p(f) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-p|=\varepsilon} f(z)\, dz, \quad 0 < \varepsilon < r,$$

wobei wir hierunter das Wegintegral für den Weg

$$\gamma_{\varepsilon,p}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{\varepsilon,p}(t) := p + \varepsilon e^{it}$$

verstehen wollen. Ist

$$f(z) = \sum_n a_n (z-p)^n$$

die Laurentreihe von f in p, so ist

$$\operatorname{Res}_p(f) = a_{-1}.$$

Satz 1.2. (Residuensatz) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $P \subset \Omega$ eine endliche Teilmenge und $f : \Omega \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist γ ein geschlossener Weg in $\Omega \setminus P$, der in Ω zusammenziehbar ist, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{p \in P} \mathrm{Um}(\gamma, p) \operatorname{Res}_p f.$$

Das Bemerkenswerte an diesem Satz ist, dass er das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ auf lokale Daten reduziert, die sich auf die endlich vielen Punkte p beziehen lassen und oft relativ direkt auszuwerten sind. Soviel zur Wiederholung des ersten Teils der Vorlesung.

2 Komplexe Logarithmus-Funktionen

In diesem Kapitel diskutieren wir komplexe Logarithmus-Funktionen. Die Problematik hierbei ist, dass die Existenz solcher Funktionen zunächst nur auf einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{C}$ gewährleistet ist (vgl. Definition 2.5). Ein natürliches maximales Gebiet ist daher die rechts-geschlitze Ebene $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ (Aufgabe 2.1).

Bevor wir Logarithmus-Funktionen diskutieren, erinnern wir uns an die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und einige ihrer Eigenschaften. Zunächst einmal erhält man durch eine einfach Cauchy–Produktrechnung die Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z w^w \quad \text{für} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Also definiert die Exponentialfunktion einen Gruppenhomomorphismus

$$\exp \colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot).$$

Aus der *Eulerschen Formel*

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

liest man nun sofort ab, dass

$$\ker(\exp) = \{z \in \mathbb{C} \colon e^z = 1\} = 2\pi i \mathbb{Z}$$

gilt und dass $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ ist (Polarkoordinaten in der Ebene).

Definition 2.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $L \colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Logarithmus-Funktion*, wenn $\exp \circ L = \mathrm{id}_\Omega$ gilt, also $e^{L(z)} = z$ für all $z \in \Omega$.

Beispiel 2.2. Aus der Funktionentheorie I schon bekannt ist die Logarithmus-Funktion, die man durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

auf der offenen Kreisscheibe $K_1(1)$ erhält ([Fi16, Übung 5.7]). Insbesondere ist $\log(1) = 0$.

Lemma 2.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $L \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) *L ist eine Logarithmus-Funktion.*

(ii) *Es existiert ein $z_0 \in \Omega$ mit $e^{L(z_0)} = z_0$ und $L'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \Omega$, d.h., L ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.*

(iii) *Es existiert ein $z_0 \in \Omega$ mit $e^{L(z_0)} = z_0$ und*

$$L(z) = L(z_0) + \int_\gamma \frac{dz}{z} \tag{3}$$

für jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $z_0 \in \Omega$. Dann gilt insbesondere $e^{L(z_0)} = z_0$. Durch Ableiten der Relation $z = e^{L(z)}$ erhalten wir $1 = e^{L(z)}L'(z) = zL'(z)$ und daher $L'(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir dürfen annehmen, dass γ stetig differenzierbar ist. Dann ist

$$\begin{aligned} L(z) - L(z_0) = L(\gamma(b)) - L(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} L(\gamma(t))\, dt = \int_a^b L'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \int_\gamma \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $|h| < \varepsilon$ und $\overline{K_\varepsilon(z)} \subseteq \Omega$, so dass $z + th \in \Omega$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Wir fixieren einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ von z_0 nach z und betrachten den Weg $\widetilde{\gamma}\colon [a, b+1] \to \Omega$ von z_0 nach $z+h$, der durch

$$\widetilde{\gamma}(b+t) = z_0 + th, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

definiert ist. Aus (3) erhalten wir dann

$$L(z+h) - L(z) = L(z_0) + \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{dz}{z} - \Big(L(z_0) + \int_\gamma \frac{dz}{z}\Big) = \int_{\widetilde{\gamma}|_{[b,b+1]}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{h}{z+th}\, dt.$$

Da der Integrand eine stetige Funktion auf $[0,1] \times \overline{K_\varepsilon(0)}$ definiert und daher für $h \to 0$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt (Aufgabe 2.2), ergibt sich hieraus

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(z+h) - L(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 \frac{1}{z+th}\, dt = \frac{1}{z}.$$

Etwas direkter kann man auch für $|h| < \frac{|z|}{2}$ die folgende Abschätzung verwenden

$$\Big|\frac{1}{z+th} - \frac{1}{z}\Big| = \Big|\frac{th}{(z+th)z}\Big| \leq |h| \frac{2}{|z|},$$

aus der die gleichmäßige Konvergenz der Integranden direkt folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Da Ω ein Gebiet ist, existiert zu jedem $z \in \Omega$ ein Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z$. Dann gilt für jedes t in dem γ differenzierbar ist (die Unterteilungspunkte muss man ausnehmen)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(\gamma(t)e^{-L(\gamma(t))}\big) &= \gamma'(t)e^{-L(\gamma(t))} + \gamma(t)e^{-L(\gamma(t))}\big(-L'(\gamma(t))\big)\gamma'(t) \\ &= e^{-L(\gamma(t))}\gamma'(t)\Big(1 - \gamma(t)L'(\gamma(t))\Big) = 0. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$ze^{-L(z)} = \gamma(b)e^{-L(\gamma(b))} = \gamma(a)e^{-L(\gamma(a))} = z_0 e^{-L(z_0)} = 1$$

und somit $z = e^{L(z)}$. Daher ist L eine Logarithmus-Funktion. $\square$

Bemerkung 2.4. Damit haben wir Logarithmusfunktionen im wesentlichen als Stammfunktionen der Funktion $\frac{1}{z}$ charakterisiert. Da für jede Stammfunktion L auch die Summe $L + c$ eine Stammfunktion ist, können wir für jedes $z_0 \in \Omega$ die Konstante c immer so wählen, dass $e^c = z_0 e^{-L(z_0)}$ und damit $e^{L(z_0)+c} = e^{L(z_0)}e^c = z_0$ gilt.

Die Existenz einer Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ hat also die Existenz einer Logarithmus-Funktion zur Folge. Sei L eine solche Stammfunktion. Da Ω zusammenhängend ist, haben alle anderen Stammfunktionen die Gesalt $L + c$, $c \in \mathbb{C}$. Gilt zusätzlich $e^{L(z_0)} = z_0$, so gilt diese Beziehung genau dann für $L + c$, wenn $c \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ist.

Ist L_0 eine Logarithmus-Funktion auf dem Gebiet Ω, so erhalten wir durch

$$L_k := L_0 + 2\pi ik, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

also alle Logarithmus-Funktionen.

Mit diesen allgemeinen Vorüberlegungen können wir nun auch etwas zur Existenz sagen. Auf der links geschlitzen Ebene $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ ist das schon aus Aufgabe 5.2 der FT1 bekannt. Eine hinreichende Bedingung an das Gebiet ist der einfache Zusammenhang:

Definition 2.5. Wir nennen eine Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *einfach zusammenhängend*[1] wenn alle geschlossenen Wege in Ω zusammenziehbar sind.

Satz 2.6. *Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Logarithmusfunktion L. Für je zwei Logarithmusfunktionen L_1, L_2 existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $L_1 - L_2 = 2\pi ik$ konstant ist.*

Beweis. Aus [Fi16, Kor. 4.4] folgt auf Ω die Existenz einer Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$, so dass der Rest aus Bemerkung 2.4 folgt. $\square$

Bemerkung 2.7. (a) Das Gebiet $\mathbb{C}^\times = \exp(\mathbb{C})$ ist leider nicht einfach zusammenhängend und da es geschlossene Wege γ in $\mathbb{C}^\times$ gibt, für die $\int_\gamma \frac{dz}{z} \neq 0$ ist, gibt es auf $\mathbb{C}^\times$ keine Logarithmusfunktion, da $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ keine Stammfunktion besitzt.

(b) Allerdings ist $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ sternförmig bzgl. 1 und daher insbesondere einfach zusammenhängend (Nachweis!). Auf diesem Gebiet lässt sich eine Logarithmus-Funktion $L\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $L(1) = 0$ leicht durch Integration bestimmen. Wir erhalten in Polarkoordinaten

$$L(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad \text{für} \quad r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Man nennt diese Funktion den *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* (Aufgabe 2.5).

[1] In [Fi16] werden diese Gebiete zusammenziehbar genannt, aber das kollidiert zunächst mit der entsprechenden Terminologie in der Topologie, in der ein topologischer Raum X *zusammenziehbar* genannt wird, wenn ein $x_0 \in X$ und eine stetige Funktion $F\colon [0,1] \times X \to X$ so existiert, dass

$$F(0, x) = x, \qquad F(1, x) = x_0 \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Allerdings werden wir später durch den Riemannschen Abbildungssatz sehen, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$ auch in diesem Sinne zusammenziehbar ist.

Wir wenden uns nun der Ganzzahligkeit der Umlaufzahl zu. Hat der Weg γ die Gestalt

$$\gamma = \gamma_{r,k} \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}, \quad \gamma(t) = w + re^{2\pi ikt}, k \in \mathbb{Z},$$

so berechnet man sofort

$$\mathrm{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{r2\pi ike^{2\pi ikt}}{re^{2\pi ikt}}\, dt = \int_0^1 k\, dt = k \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits wissen wir auch schon, dass homotope Wege die gleiche Umlaufzahl liefern ([Fi16, Satz 4.2]), aber noch nicht, dass alle Wege zu einem Weg der Gestalt $\gamma_{r,k}$ homotop sind. Diese Lücke werden wir jetzt schließen.

Satz 2.8. *Für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ ist $\mathrm{Um}(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.*

Sind $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ zwei geschlossene Integrationswege, mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, so sind sie genau dann homotop, wenn ihre Umlaufzahlen übereinstimmen.

Beweis. Sei dazu $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{w\}$ ein geschlossener Integrationweg und $\gamma(a) = z_0$. Für

$$\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C}, \quad \eta(t) := \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z-w} = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}\, ds$$

gilt dann $\eta'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}$ für jedes t, in dem γ differenzierbar ist (die Unterteilungspunkte muss man ausnehmen). Hieraus erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t)-w)e^{-\eta(t)}\big) = \gamma'(t)e^{-\eta(t)} + (\gamma(t)-w)e^{-\eta(t)}\big(-\eta'(t)\big) = \gamma'(t)e^{-\eta(t)} - \gamma'(t)e^{-\eta(t)} = 0.$$

Dies führt wegen $\eta(a) = 0$ auf

$$(\gamma(t)-w)e^{-\eta(t)} = (\gamma(a)-w)e^{-\eta(a)} = \gamma(a) - w = z_0 - w,$$

so dass

$$\gamma(t) = w + e^{\eta(t)}(z_0 - w) \quad \text{für} \quad a \le t \le b$$

gilt. Für $t = b$ erhalten wir insbesondere aus $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$ die Beziehung $e^{\eta(b)} = 1$. Nun ist aber $\eta(b) = 2\pi i\, \mathrm{Um}(\gamma, w)$ und somit

$$\mathrm{Um}(\gamma, w) \in \mathbb{Z}.$$

Seien nun $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ geschlossene Integrationswege mit dem gleichen Anfangspunkt z_0. Wir definieren $\eta_j \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ für $j = 0,1$ wie oben. Dies sind stückweise stetig differenzierbare Kurven mit

$$\eta_0(a) = \eta_1(a) = 0 \quad \text{und} \quad \eta_0(b) = 2\pi i\, \mathrm{Um}(\gamma_1, w) = 2\pi i\, \mathrm{Um}(\gamma_2, w) = \eta_1(b).$$

Nun ist $h(s,t) := s\eta_1(t) + (1-s)\eta_0(t)$ eine Homotopie von η_0 nach η_1 mit festen Endpunkten. Also ist

$$H(s,t) := w + e^{h(s,t)}(z_0 - w)$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 mit festen Endpunkten. □

Da wir nun wissen, dass die Umlaufzahl ganzzahlig ist, können wir eine weitere Folgerung ableiten:

Korollar 2.9. (Die Umlaufzahl als Funktion) *Sei* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein geschlossener Weg. Dann ist* $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ *offen und*

$$\mathrm{Um}_\gamma\colon \Omega \to \mathbb{Z}, \qquad z \mapsto \mathrm{Um}(\gamma, z)$$

ist eine stetige Funktion, insbesondere konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω*. Es existiert eine* $R > 0$*, so dass* $K_{>R}(0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > R\} \subseteq \Omega$ *ist und auf diesem Gebiet verschwindet* Um_γ*.*

Beweis. Aus der Formel

$$\mathrm{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}\, dt$$

und aus der Stetigkeit des Integranden als Funktion von (t, w) in der Menge $[a,b] \times \Omega$ folgt die Stetigkeit der Funktion Um_γ. Da sie Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist sie auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant.

Da $\mathrm{im}(\gamma)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, ist sie insbesondere beschränkt und es existiert daher ein $R > 0$ mit $\mathrm{im}(\gamma) \cap K_{>R}(0) = \emptyset$. Da $K_{>R}(0)$ zusammenhängend ist, ist Um_γ darauf konstant. Andererseits gilt für die Länge $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ die Abschätzung

$$\Big| \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}\, dt \Big| \le \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - w|}\, dt \le \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|w| - R}\, dt = \frac{1}{|w| - R} L(\gamma).$$

Hieraus folgt $\lim_{w\to\infty} \mathrm{Um}(\gamma, w) = 0$, also $\mathrm{Um}(\gamma, w) = 0$ für alle w mit $|w| > R$. □

Bemerkung 2.10. Mit einer Logarithmus-Funktion $L\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kann man natürlich auch beliebige *Potenzfunktionen* definieren. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$z^\alpha := e^{\alpha L(z)} \quad \text{für} \quad z \in \Omega.$$

Dann gelten die Potenzregeln:

$$z^0 = 1, \quad z^1 = z \quad \text{und} \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Sind $z, w \in \Omega$, so dass auch $zw \in \Omega$ ist, so erhalten wir weiter

$$z^\alpha w^\alpha = e^{\alpha(L(z)+L(w))} \quad \text{und} \quad (zw)^\alpha = e^{\alpha L(zw)}.$$

Diese beiden komplexen Zahlen sind aber im Allgemeinen verschieden. Aus $e^{L(z)}e^{L(w)} = zw = e^{L(zw)}$ folgt

$$L(zw) - L(z) - L(w) \in 2\pi i \mathbb{Z},$$

aber diese Zahl muß nicht verschwinden.

Für den Hauptzweig des Logarithmus haben z.B. für $z = w = e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$ mit $z^2 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ und daher

$$L(z^2) = -\frac{\pi}{2} i \neq 2L(z) = 2 \cdot \frac{3}{4}\pi i = \frac{3}{2}\pi i.$$

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1. (Maximalität von Logarithmusfunktionen) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die linksgeschlitzte Ebene $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ echt enthält. Zeigen Sie, dass auf Ω keine Logarithmus-Funktion existiert.

Aufgabe 2.2. Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f\colon [0,1] \times Y \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir erhalten so eine Familie von Funktionen

$$f^y\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad f^y(t) := f(t,y) \quad \text{für} \quad y \in Y.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$I(f)\colon Y \to \mathbb{C}, \quad I(f)(y) := \int_0^1 f(t,y)\,dt$$

stetig ist.
Hinweis: f is gleichmäßig stetig, woraus man schließen kann, dass für $y_n \to y$ die Funktionenfolge f^{y_n} gleichmäßig gegen f^y konvergiert.
Verallgemeinerung: Zeigen Sie, dass diese Behauptung auch für beliebige metrische Räume Y gilt.

Aufgabe 2.3. Sei Ω ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion von* f, wenn $F' = f$ gilt. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\times$ äquivalent sind:

(a) Die Funktion $q(z) = \frac{1}{z}$ besitzt auf Ω eine Stammfunktion.
(b) Auf Ω existiert eine Logarithmusfunktion.
(c) Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω gilt $\mathrm{Um}(\gamma, 0) = 0$.

Hinweis: [Fi16, Prop. 3.14].

Aufgabe 2.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $1 \in \Omega$ sowie $L\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Logarithmus-Funktion mit $L(1) = 0$. Weiter sei $\Omega_1 \subseteq \Omega$ ein Teilgebiet mit $1 \in \Omega_1$ und

$$\Omega_1 \cdot \Omega_1 \subseteq \Omega, \quad \text{d.h.} \quad zw \in \Omega \quad \text{für} \quad z, w \in \Omega_1.$$

Zeigen Sie

$$L(zw) = L(z) + L(w) \quad \text{für alle} \quad z, w \in \Omega_1.$$

Aufgabe 2.5. (Hauptzweig des komplexen Logarithmus) Zeigen Sie, dass auf der linksgeschlitzten komplexen Ebene $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ durch

$$L(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad \text{für} \quad r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[$$

eine holomorphe Logarithmus-Funktion mit $L(1) = 0$ gegeben ist und das diese eindeutig ist.
Hinweis: Verwenden Sie Lemma 2.3, wobei Sie den Weg γ von 1 zu $z = re^{i\theta}$ so wählen, dass er zuerst zu r und von dort auf einem Kreisbogen zu z läuft.

Aufgabe 2.6. Sei $w \in \mathbb{C}$, $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und

$$\gamma(t) = w + e^{2\pi i \eta(t)}. \tag{4}$$

Zeigen Sie:

(i) γ is genau dann geschlossen, wenn $\eta(b) - \eta(a) \in \mathbb{Z}$ ist.
(ii) Ist γ geschlossen, so ist $\mathrm{Um}(\gamma, w) = \eta(b) - \eta(a)$.
(iii) Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ lässt sich wie in (4) darstellen.

Aufgabe 2.7. Sei $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{w\}$ zwei geschlossene Integrationswege. Zeigen Sie, dass γ_0 und γ_1 genau dann homotop sind (ohne feste Endpunkte), wenn ihre Umlaufzahlen übereinstimmen.
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung aus Aufgabe 2.6, um eine Homotopie der Gestalt $H(s,t) = w + e^{h(s,t)}$ zu konstruieren, für die alle Kurven $H_s(t) := H(s,t)$ geschlossen sind.

3 Null- und Polstellen zählende Integrale

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie wir mit einem geeigneten Kurvenintegral zählen können, wieviele Null- und Polstellen eine Funktion in dem von der Kurve umlaufenen Gebiet besitzt. Im Hintergrund steht hier natürlich der Residuensatz, den man in geeigneter Weise anwendet. Als Anwendung diskutieren wir eine Charakterisierung der rationalen Funktionen als meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$, die im Unendlichen keine wesentliche Singularität besitzen.

3.1 Der verallgemeinerte Residuensatz

Zuerst werden wir den Residuensatz etwas verallgemeinern, um die unnatürliche Annahme der Endlichkeit der dort auftretenden Singularitätenmenge P loszuwerden.

Definition 3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $D \subseteq \Omega$ heißt *diskret in* Ω, wenn sie in Ω keinen *Häufungspunkt* besitzt, d.h., für jeden Punkt $z \in \Omega$ existiert eine ε-Umgebung $K_\varepsilon(z)$, die nur endlich viele Punkte von D enthält.[2]

Ist $D \subseteq \Omega$ eine diskrete Teilmenge, so heißt eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \setminus D \to \mathbb{C}$ *meromorph auf* Ω, wenn die Elemente von D keine wesentlichen Singularitäten sind, also entweder hebbar oder Polstellen.[3]

Beispiel 3.2. Ist Ω ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion und $w \in \mathbb{C}$, so ist die Teilmenge $f^{-1}(w)$ aller w-Stellen von f in Ω nach dem Identitätssatz ([Fi16, Satz 5.3]) diskret.

Im Folgenden benötigen wir eine etwas allgemeinere Fassung des Residuensatzes, die nicht mehr die Endlichkeit der Menge P voraussetzt.

Satz 3.3. (Verallgemeinerter Residuensatz) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $D \subset \Omega$ eine diskrete Teilmenge und $f\colon \Omega \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\gamma\colon [a,b] \to \Omega \setminus D$ ein geschlossener Integrationsweg, der in Ω zusammenziehbar ist. Dann ist*

$$P := \{w \in D\colon \operatorname{Um}(\gamma, w) \neq 0\}$$

endlich und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{p\in P} \operatorname{Um}(\gamma,p)\operatorname{Res}_p f = \sum_{p\in D} \operatorname{Um}(\gamma,p)\operatorname{Res}_p f.$$

Beweis. Der Residuensatz 1.2 behandelt den Fall, dass D endlich ist. Wir führen den allgemeinen Fall darauf zurück. Sei dazu $H\colon [0,1]\times[a,b] \to \Omega$ eine Homotopie von γ auf einen konstanten Weg. Dann ist $\operatorname{im}(H) \subseteq \Omega$ als stetiges Bild eines kompakten Raums selbst wieder kompakt und trifft daher D nur in einer endlichen Teilmenge F (Aufgabe 3.5). Der Weg γ ist also auch in dem Gebiet

$$\widetilde{\Omega} := \Omega \setminus (D \setminus F) = (\Omega \setminus D) \cup F$$

[2] Wenn das so ist, dann kann man natürlich durch Verkleinern von ε erreichen, dass $K_\varepsilon(z)$ entweder gar keinen oder nur einen Punkt von D (und zwar z selbst) enthält.

[3] Meromorph kommt von "bruchförmig", was insbesondere durch Korollar 3.18 gerechtfertigt wird, aber lokal bei einem Pol auch durch die Faktorisierung $f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^n}$ mit einer holomorphen Funktion g.

(siehe Aufgabe 3.6) zusammenziehbar und f ist holomorph auf

$$\Omega \setminus D = \widetilde{\Omega} \setminus F.$$

Für $d \in D \setminus F$ ist nun $\mathrm{Um}(\gamma, d) = 0$, da γ in $\Omega \setminus \{d\}$ zusammenziehbar ist und homotope Wege die gleiche Windungszahl besitzen ([Fi16, Satz 4.2]). Wenden wir nun den Residuensatz auf die Einschränkung $f|_{\widetilde{\Omega} \setminus F}$ an, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = \sum_{p \in F} \mathrm{Um}(\gamma, p) \operatorname{Res}_p f = \sum_{p \in P} \mathrm{Um}(\gamma, p) \operatorname{Res}_p f,$$

wobei in der letzten Summe ggf. unendlich viele 0-Summanden auftreten. $\square$

3.2 Das Null- und Polstellen zählende Integral

Nachdem uns nun eine geeignete Form des Residuensatzes zur Verfügung steht, können wir ein wichtiges Werkzeug der Funktionentheorie einführen: das Null- und Polstellen zählende Integral.

Definition 3.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir betrachten einen geschlossenen Integrationsweg $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$. Wir sagen, dass γ die offene Teilmenge B *in* Ω *berandet*, wenn gilt:

(i) $B \subseteq \Omega \setminus \mathrm{im}(\gamma)$.

(ii) $\mathrm{Um}(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in B \\ 0 & \text{für } z \in \Omega \setminus (B \cup \mathrm{im}(\gamma)). \end{cases}$

(iii) γ ist in Ω zusammenziehbar.

Beachte, dass (iii) auf jeden Fall immer dann erfüllt ist, wenn $\Omega = \mathbb{C}$ ist, oder wenn Ω sternförmig ist.

Bemerkung 3.5. (a) Ist γ in Ω zusammenziehbar, so erhalten wir für jeden Randpunkt $z \in \partial\Omega$, dass $\mathrm{Um}_\gamma(z) = 0$, denn Ω ist in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ zusammenziehbar.

(b) Wir haben schon gesehen, dass für jeden geschlossenen Weg γ in Ω die Umlaufzahl eine Funktion

$$\mathrm{Um}_\gamma \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{Z}$$

definiert, die auf jeder Zusammenhangskomponente der offenen Menge $\Omega \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ konstant ist. Dass ein in Ω zusammenziehbarer Weg γ die Teilmenge B berandet, bedeutet, dass $\mathrm{im}(\mathrm{Um}_\gamma) \subseteq \{0, 1\}$ ist (auf dem Komplement von Ω verschwindet die Umlaufzahl ohnehin) und

$$B = \{z \in \Omega \colon \mathrm{Um}_\gamma(z) = 1\}$$

gilt. Insbesondere ist B damit eindeutig durch γ festgelegt und wir sehen, dass die Bedingung $\mathrm{im}(\mathrm{Um}_\gamma) \subseteq \{0, 1\}$ auch sofort eine offene Teilmenge $B \subseteq \Omega$ liefert, die die beiden Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 3.4 erfüllt. Es kann durchaus passieren, dass $\mathrm{im}(\mathrm{Um}_\gamma) = \{0\}$ ist. Dann berandet γ die leere Menge $B = \emptyset$.

Beispiel 3.6. Der Weg

$$\gamma_{p,r}(t) = p + re^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

berandet in $\mathbb{C}$ die Teilmenge

$$B = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - p| < r\} = K_r(p),$$

aber nicht in $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, da $\gamma_{p,r}$ in $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ nicht zusammenziehbar ist.

Lemma 3.7. *Wird B von einem geschlossenen Weg γ berandet, so ist B beschränkt und $\partial B \subseteq \operatorname{im}(\gamma)$.*

Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit (Aufgabe 3.1).

Beweis. Aus Korollar 2.9 wissen wir, dass γ keine Punkte beliebig großen Betrags umläuft. Daher ist B beschränkt. Sei nun $b \in \partial B$ ein Randpunkt und $b_n \to b$ mit $b_n \in B$. Ist $b \notin \operatorname{im}(\gamma)$, so folgt aus der Stetigkeit der Umlaufzahl (Korollar 2.9) $1 = \operatorname{Um}(\gamma, b_n) \to \operatorname{Um}(\gamma, b)$, also $\operatorname{Um}(\gamma, b) = 1$. Aus Bemerkung 3.5(b) folgt dann zunächst $b \notin \partial\Omega$, also $b \in \Omega$. Daher steht $\operatorname{Um}(\gamma, b) = 1$ im Widerspruch zu $b \notin B$. $\square$

Satz 3.8. (Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral) *Auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ betrachten wir eine meromorphe Funktion $0 \neq f \colon \Omega \setminus D \to \mathbb{C}$ und einen geschlossenen Weg γ, der den Bereich B in Ω berandet und keinen Punkt aus der Singularitätenmenge D oder der Nullstellenmenge Z von f trifft. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

wobei N die Zahl der Nullstellen und P die Zahl der Polstellen von f in B ist, jeweils mit Vielfachheiten gezählt.

Beweis. Nach dem Identitätssatz [Fi16, Satz 5.3] ist die Menge Z der Nullstellen von f eine diskrete Teilmenge von Ω (Beispiel 3.2), so dass auch $Z \cup D$ in Ω diskret ist. Wegen Lemma 3.7 ist $\overline{B}$ eine kompakte Teilmenge, die ganz in Ω enthalten ist. Also ist $\overline{B} \cap (D \cup Z)$ endlich (Aufgabe 3.5) und daher enthält B nur endlich viele Null- und Polstellen von f. Die Singularitäten der Funktion $h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$, die auf $\Omega \setminus (D \cup Z)$ holomorph ist, bilden also eine diskrete Menge, die B in einer endlichen Menge schneidet.

Ist p eine Null- oder Polstelle von f mit $\operatorname{ord}(f, p) = n$, so ist $f(z) = (z - p)^n g(z)$, wobei g in einer Umgebung von p holomorph ist und $g(p) \neq 0$ gilt. Dann ist

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-p)^{n-1}g(z) + (z-p)^n g'(z)}{(z-p)^n g(z)} = \frac{n}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und daher

$$\operatorname{Res}_p h = n = \operatorname{ord}(f, p).$$

Ist p eine Nullstelle von f, so ist also $\operatorname{Res}_p h$ ihre Ordnung. Ist p eine Polstelle von f, so ist $-\operatorname{Res}_p h$ ihre Ordnung. Wir haben also

$$N = \sum_{p \in B, \operatorname{ord}(f,p) > 0} \operatorname{Res}_p h, \qquad P = -\sum_{p \in B, \operatorname{ord}(f,p) < 0} \operatorname{Res}_p h$$

und somit

$$N - P = \sum_{p \in B, \operatorname{ord}(f,p) \neq 0} \operatorname{Res}_p h = \sum_{p \in B} \operatorname{Res}_p h.$$

Da γ in Ω zusammenziehbar ist, können wir nun den verallgemeinerten Residuensatz auf h anwenden und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma h(z) dz = \sum_{p \in D \cup Z} \operatorname{Um}(\gamma, p) \operatorname{Res}_p h = \sum_{p \in B} \operatorname{Res}_p h = N - P,$$

denn für $p \in D \cup Z$ is $\operatorname{Um}(\gamma, p) = 1$ für $p \in B$ und 0 sonst. □

Bemerkung 3.9. Obiger Beweis zeigt, dass die Summe der Residuen von $\frac{f'}{f}$ in B mit der Summe der Ordnungen von f in B übereinstimmt, was ja gerade die Zahl $N - P$ ist.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ein geschlossener Integrationsweg in Ω, der die Menge Z der Nullstellen von f nicht trifft. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f(\gamma(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'}{f} dz = \operatorname{Um}(f \circ \gamma, 0). \tag{5}$$

Das Null- und Polstellen zählende Integral aus Satz 3.8 stimmt also mit der Windungszahl der geschlossenen Kurve $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^\times$ um 0 überein. Da die Windungszahl einer Kurve sich unter Homotopien nicht ändert ([Fi16, Satz 4.2]), hängt also die Zahl $N - P$ nur von der Homotopieklasse des Weges $f \circ \gamma$ in $\mathbb{C}^\times$ ab. Wir halten also fest:

Satz 3.10. (Das Argument-Prinzip) *Erfüllen f_j, γ_j, B_j, $j = 1, 2$, die Voraussetzungen von* Satz 3.8 *und sind die geschlossenen Kurven $f_j \circ \gamma_j$ in $\mathbb{C}^\times$ homotop, so gilt*

$$N(f_1) - P(f_1) = N(f_2) - P(f_2)$$

für die Anzahlen der Null- und Polstellen von f_j in B_j.

Beispiel 3.11. (a) Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $f(z) = z^k$ und den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^\times, \gamma(t) = e^{it}$, der die offene Kreisscheibe $K_1(0)$ berandet. Dann ist $(f \circ \gamma)(t) = e^{ikt}$ und dieser Weg umläuft die 0 genau k mal, also

$$\operatorname{Um}(f \circ \gamma, 0) = k = \operatorname{ord}(f, 0).$$

Hierbei werden Nullstellen positiv gezählt, da sie zu einem Weg führen, der die 0 gegen den Uhrzeigersinn umläuft und Polstellen negativ, da sie zu einem Weg führen, der die 0 im Uhrzeigersinn durchläuft. Das Null- und Polstellen zählende Integral misst also die Gesamtänderung des "Arguments", also des Winkels θ in Polarkoordinaten $z = re^{2\pi i\theta}$.

(b) Das Bemerkenswerte an Satz 3.10 ist, dass sich die Beiträge der verschiedenen Null- und Polstellen einfach aufaddieren. Damit können wir umgekehrt auch Umlaufzahlen für komplizierte Wege berechnen. Für die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, \quad B = K_2(0),$$

erhalten wir so

$$\operatorname{Um}(f \circ \gamma, 0) = \operatorname{ord}(f, 1) + \operatorname{ord}(f, i) + \operatorname{ord}(f, -i) = -1 + 1 + 1 = 1.$$

Aus den obigen Überlegungen können wir nun leicht den folgenden Satz gewinnen:

Satz 3.12. (Satz von Rouché) *Sei* $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ *ein geschlossener Weg in dem Gebiet* Ω*, der* $B \subseteq \Omega$ *berandet, und seien* f *und* g *holomorph auf* Ω *mit*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathrm{im}(\gamma).$$

Dann haben f *und* $f+g$ *gleich viele Nullstellen in* B*.*

Beweis. Die stetige Funktion

$$H\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad H(s,t) := (f+sg)(\gamma(t))$$

nimmt nur Werte in $\mathbb{C}^\times$ an, da

$$|(f+sg)(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))| - |g(\gamma(t))| > 0 \quad \text{für} \quad a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1.$$

Daher ist H eine Homotopie des Weges $f \circ \gamma$ in $\mathbb{C}^\times$ zu dem Weg $(f+g)\circ\gamma$. Beide haben also die gleiche Windungszahl. Da sowohl f als auch $f+g$ in Ω keine Sigularitäten besitzen und keine Nullstellen auf γ liegen, folgt aus Satz 3.10 die Gleichheit der Nullstellenzahl $N(f)$ von f und $N(f+g)$ von $f+g$ in B. $\square$

Beispiel 3.13. Wir fragen uns, wieviele Nullstellen das Polynom

$$h(z) = z^3 + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2}$$

in der offenen Kreisscheibe $K_1(0)$ besitzt.

Da h ein Polynom vom Grad 3 ist, kann man das nicht direkt ausrechnen. Mit den Satz von Rouché lässt sich aber folgende Überlegung anstellen. Wir schreiben

$$h = f+g \quad \text{mit} \quad f(z) = z^3 \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2}$$

(wir denken uns h als "Störung" des Monoms z^3). Auf der Einheitskreislinie $|z| = 1$ haben wir die Abschätzung

$$|g(z)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1 = |f(z)|.$$

Da der Weg $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ die Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ berandet, liefert der Satz von Rouché sofort, dass f und $h = f+g$ in $K_1(0)$ gleichviele Nullstellen besitzen. Da für f eine dreifache Nullstelle in 0 vorliegt, besitzt h also in $K_1(0)$ genau 3 Nullstellen. Da h ein Polynom vom Grad 3 ist, besitzt es keine weiteren. Der Satz von Rouché liefert uns also eine Methode die Nullstellen von Polynomen höheren Grades in der komplexen Ebene zu lokalisieren, auch wenn sie sich nicht explizit berechnen lassen.

Mit dem Satz von Rouché ergibt sich auch ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Man kann die gleiche Idee, wie in dem obigen Beispiel verfolgen.

Bemerkung 3.14. (Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit dem Satz von Rouché) Sei

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = a_0 + \cdots + a_k z^k$$

ein nicht konstantes Polynom mit $a_k \neq 0$. Wir betrachten das Polynom

$$g(z) := -(a_0 + \cdots + a_{k-1}z^{k-1}).$$

Aus

$$f(z) = z^k(a_k + \cdots + a_0 z^{-k})$$

folgt $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$. Also existiert ein $r > 0$, so dass alle Nullstellen von f in der Kreisscheibe $K_r(0)$ liegen. Wegen $\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$ dürfen wir sogar annehmen, dass $|g(z)| < |f(z)|$ für $|z| = r$ gilt. Nach dem Satz von Rouché haben $f(z)$ und $(f+g)(z) = a_k z^k$ dann gleich viele Nullstellen in $K_r(0)$. Also hat f genau k Nullstellen.

3.3 Pole im Unendlichen und rationale Funktionen

Der obige Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra lässt sich so ausbauen, dass man sogar eine Aussage für rationale Funktionen erhält, die den Fundamentalsatz verallgemeinert. Um diesen Satz formulieren zu können, zuerst eine Vorbetrachtung zur Meromorphie im Unendlichen.

Definition 3.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge deren Komplement $\Omega^c := \mathbb{C}\backslash\Omega$ beschränkt ist und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann enthält Ω also ein Gebiet der Form

$$K_{>r}(0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > r\}.$$

Auf $K_{0,\frac{1}{r}} = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < \frac{1}{r}\}$ erhalten wir daher durch

$$\widetilde{f}(z) := f\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in 0.

Wir sagen nun:

- f *ist holomorph im Unendlichen*, wenn $\widetilde{f}$ in 0 eine hebbare Singularität besitzt, also wenn die Laurentreihe von f auf $K_{>r}(0)$ die Gestalt $f(z) = \sum_{n\leq 0} a_n z^n$ besitzt.

- f *hat eine Polstelle im Unendlichen*, wenn $\widetilde{f}$ in 0 eine Polstelle besitzt, also wenn die Laurentreihe von f auf $K_{>r}(0)$ die Gestalt $f(z) = \sum_{n\leq m} a_n z^n$ für ein $m > 0$ mit $a_m \neq 0$ besitzt. In diesem Fall sprechen wir von einem Pol der Ordnung m.

- f *besitzt eine wesentliche Singularität im Unendlichen*, wenn $\widetilde{f}$ in 0 eine wesentliche Singularität besitzt.

Liegt keine wesentliche Singularität vor und verschwindet f nicht identisch auf $K_{>r}(0)$, so definieren wir entsprechend

$$\mathrm{ord}(f,\infty) := \mathrm{ord}(\widetilde{f}, 0) = -\max\{n \in \mathbb{Z}\colon a_n \neq 0\} \quad \text{für} \quad f(z) = \sum_n a_n z^n, \quad |z| > r.$$

Beispiel 3.16. (a) Ist $f(z) = a_0 + \cdots + a_k z^k$ ein Polynom der Ordnung k, so hat f einen Pol der Ordnung k im Unendlichen:

$$\widetilde{f}(z) = z^{-k}(a_0 z^k + \cdots + a_k) \quad \text{und} \quad \mathrm{ord}(f,\infty) = -k.$$

(b) Wir betrachten eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit} \quad a_k, b_m \neq 0.$$

Hierbei sind p und q also Polynome der Grade k bzw. m. Dann ist

$$\widetilde{f}(z) = f(z^{-1}) = z^{m-k} \cdot \frac{a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m} \tag{6}$$

Also ist

$$\mathrm{ord}(f, \infty) = m - k = \mathrm{ord}(\widetilde{f}, 0). \tag{7}$$

Es liegt also im Unendlichen ein Pol vor, wenn der Zählergrad k echt größer als der Nennergrad m ist und andernfalls eine hebbare Singularität, für $m > k$ sogar eine Nullstelle.

(c) Ist $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, also z.B. die Exponentialfunktion oder der Sinus, so liegt im Unendlichen eine wesentliche Singularität vor. Eine ganze Funktion besitzt also im Unendlichen genau dann eine unwesentliche Singularität, wenn sie ein Polynom ist.

(d) Ist $0 \neq f \colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion und die Singularität im Unendlichen unwesentlich, so können sich weder Polstellen noch Nullstellen von $\widetilde{f}$ in 0 häufen. Also dürfen wir nach Elimination der hebbaren Singularitäten annehmen, dass D beschränkt und damit endlich ist. Das gleiche Argument zeigt, dass die Nullstellenmenge von f endlich ist. Typische Beispiele solcher Funktionen sind rationale Funktionen (siehe (b)).

Satz 3.17. *Ist f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die im Unendlichen keine wesentliche Singularität besitzt, so gilt*

$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \infty} \mathrm{ord}(f, z) = 0,$$

wobei die Summe so zu verstehen ist, dass nur endlich viele Summanden von 0 *verschieden sind.*

Beweis. Aus Beispiel 3.16(d) wissen wir schon, dass wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass die Singularitätenmenge D von f auf $\mathbb{C}$ endlich ist, und die Nullstellenmenge von f ist ebenfalls endlich. Daher existiert ein $r > 0$, so dass der Kreis $\{|z| = r\}$ weder Null- noch Polstellen von f enthält. Im Beweis von Satz 3.8 haben wir gesehen, dass

$$\mathrm{Res}_z(f'/f) = \mathrm{ord}(f, z)$$

für Null- und Polstellen von f gilt. Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{|z|<r} \mathrm{ord}(f, z). \tag{8}$$

Die Null- und Polstellen in $K_{>r}(0)$ entsprechen, mit ihrer Ordnung, den Null- und Polstellen der Funktion $\widetilde{f}(z) = f(z^{-1})$ im Kreis $K_{1/r}(0)$, denn für $z_0 \neq 0$ ergibt sich aus $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$ die Relation

$$\widetilde{f}(z) = (z^{-1} - z_0)^n g(z^{-1}) = (z_0^{-1} - z)^n z_0^n z^{-n} g(z^{-1}).$$

Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ord}(f,\infty) + \sum_{|z|>r} \operatorname{ord}(f,z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{|z|<\frac{1}{r}} \operatorname{ord}(\widetilde{f},z) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{\widetilde{f}'(z)}{\widetilde{f}(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{f'(z^{-1})}{f(z^{-1})}(-z^{-2})\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{-it})}{f(re^{-it})}(-r^2 e^{-2it}) r^{-1} i e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{-it})}{f(re^{-it})}(-ire^{-it})\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}(ire^{it})\, dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-2\pi}^0 \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}(ire^{it})\, dt = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Konventionen für die Integralgrenzen von Riemann-Integralen beachten müssen. Addition des Integrals (8) ergibt nun die Behauptung. □

Wir halten einige interessante Folgerungen aus diesem Satz fest:

Korollar 3.18. *Ist f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die im Unendlichen keine wesentliche Singularität besitzt, so ist f eine rationale Funktion.*

Beweis. Wir haben schon in Beispiel 3.16(d) gesehen, dass die Menge der Pol- und Nullstellen von f endlich ist. Seien $z_1, \ldots, z_k$ die Nullstellen von f mit der jeweiligen Vielfachheit α_j und $w_1, \ldots, w_m$ die Polstellen von f mit der jeweiligen Ordnung β_j. Wir betrachten die rationale Funktion

$$
h(z) := \frac{\prod_{j=1}^k (z - z_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^m (z - w_j)^{\beta_j}},
$$

die auf $\mathbb{C}$ genau dieselben Null- und Polstellen mit derselben Ordnung besitzt. Der Quotient $q(z) := \frac{f(z)}{h(z)}$ ist dann ebenfalls auf $\mathbb{C}$ meromorph und besitzt im Unendlichen keine wesentliche Singularität. Darüber hinaus besitzt q auf ganz $\mathbb{C}$ weder eine Nullstelle noch einen Pol. Satz 3.17 zeigt uns jetzt, dass

$$
\operatorname{ord}(q,\infty) = -\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}(q,z) = 0
$$

ist. Also können wir q als ganze Funktion $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auffassen, für die $\lim_{|z|\to\infty} q(z)$ existiert. Insbesondere ist q beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Daher ist $f = qh$ eine rationale Funktion. □

Bemerkung 3.19. Für eine rationale Funktion

$$
f(z) := \frac{\prod_{j=1}^k (z - z_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^m (z - w_j)^{\beta_j}}
$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen z_j und Polstellen w_j erhalten wir sofort

$$
\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{ord}(f,z) = \sum_j \alpha_j - \sum_j \beta_j.
$$

Aus Beispiel 3.16(b) wissen wir andererseits, dass

$$\operatorname{ord}(f,\infty) = \sum_j \beta_j - \sum_j \alpha_j$$

ist. Addition liefert also sofort die Aussage aus Satz 3.17: $\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \operatorname{ord}(f,z) = 0$.

Definition 3.20. Im Folgenden nennen wir ∞ eine w-Stelle von f, wenn $\widetilde{f}(z) = f(z^{-1})$ in 0 eine durch den Wert $\widetilde{f}(0) = w$ hebbare Singularität besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = w.$$

Korollar 3.21. *Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine nicht konstante rationale Funktion auf $\mathbb{C}$. Für $w \in \mathbb{C}$ hängt die Anzahl der w-Stellen von f auf $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ nicht von w ab und stimmt mit der Summe der Grade der Polstellen auf $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ überein.*

Beweis. Da die Funktionen f und $f - w$ genau die gleichen Polstellen besitzen, reicht es aus zu zeigen, dass $f - w$ auf $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ gleich viele Null- und Polstellen besitzt, denn die Zahl der Polstellen hängt nicht von w ab. Aus dem Beweis von Satz 3.17 wissen wir, dass die Differenz der Zahl N der Nullstellen und der Zahl P der Polstellen (jeweils mit Vielfachheit bzw. Ordnung gezählt) gegeben ist durch

$$N - P = \sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \operatorname{ord}(f - w, z) = 0.$$

Da diese Zahl verschwindet, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.22. Für ein Polynom $f(z) = a_0 + \cdots + a_k z^k$ vom Grad k haben wir auf $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ lediglich einen Pol der Ordnung k in ∞. Korollar 3.21 liefert also insbesondere den Fundamentalsatz der Algebra, dass f in $\mathbb{C}$ genau k Nullstellen (mit Vielfachheiten) besitzt. Wir können Korollar 3.21 daher als eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf rationale Funktionen betrachten.

Beispiel 3.23. Wir betrachten einen gebrochen lineare Funktion

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Diese Funktion ist genau dann nicht konstant, wenn $ab - bc \neq 0$ ist (Nachweis?) Ist dies der Fall, so sind die Nullstelle $-\frac{b}{a}$ des Zählers und die Nullstelle $-\frac{d}{c}$ des Nenners verschieden. Ist $a = 0$ oder $c = 0$, so liegt in ∞ eine Nullstelle bzw. eine Polstelle vor. Auf jeden Fall ist die Summe der Polordnungen genau 1 und damit wird jeder Wert $w \in \mathbb{C}$ genau einmal angenommen. Daher definiert f eine bijektive Abbildung $\widehat{f}\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ (Möbiustransformationen).

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1. Finden Sie ein Beispiel für eine offene Menge B und einen geschlossenen Weg γ, der zwar B berandet, für den aber $\partial B \neq \operatorname{im}(\gamma)$ gilt.

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie: Eine Teilmenge D einer offenen Teilmgen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann diskret, wenn jede in Ω konvergente Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die aus Elementen von D besteht, schließlich konstant ist, d.h., es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_n = d_{n_0}$ für $n \geq n_0$.

Aufgabe 3.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $D_1, \ldots, D_k \subseteq \Omega$ diskret in Ω. Zeigen Sie, dass dann auch $D_1 \cup \cdots \cup D_k$ diskret in Ω ist.

Aufgabe 3.4. (Der Körper der meromorphen Funktionen) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der auf Ω meromorphen Funktionen, also $f\colon \Omega \setminus D_f \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei $D_f \subseteq \Omega$ eine diskrete Teilmenge ist in der echte Polstellen von f vorliegen. Wir definieren nun eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathcal{M}(\Omega)$ wie folgt:

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z) \quad \text{und} \quad (fg)(z) := f(z)g(z), \qquad \text{für} \quad z \notin D_f \cup D_g.$$

(Beachte, dass $D_f \cup D_g$ auch diskret ist; Aufgabe 3.3). Für $p \in D_f \cap D_g$ kann es vorkommen, dass die Singulärität von fg in p hebbar ist. In diesem Fall setzen wir fg entsprechend durch

$$(fg)(p) = \lim_{z \to p} f(z)g(z)$$

fort. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $D \subseteq \Omega$ eine in Ω diskrete Teilmenge. Zeigen Sie: Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, so ist $K \cap D$ endlich.

Aufgabe 3.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $D \subseteq \Omega$ eine in Ω diskrete Teilmenge. Zeigen Sie, dass $\Omega \setminus D$ ebenfalls ein Gebiet ist.
Hinweis: Da D in Ω abgeschlossen ist (Aufg. 3.1) ist $\Omega' := \Omega \setminus D$ in Ω (und damit auch in $\mathbb{C}$) offen. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ ein Weg in Ω dessen Endpunkte nicht in D liegen. Dann ist $\mathrm{im}(\gamma) \cap D$ endlich und durch eine geeignete Modifikation von γ findet man einen Weg in $\Omega \setminus D$, der $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ verbindet.

Aufgabe 3.7. Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen auf der offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und betrachten $\frac{f}{g}$ als meromorphe Funktion auf $\Omega \setminus g^{-1}(0)$. Zeigen Sie: Ist $p \in \Omega$ eine nicht wesentliche Singularität von f und g, so auch für die Funktionen

$$f \pm g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g}$$

und es gilt

(i) $\mathrm{ord}(f \pm g, p) \geq \min(\mathrm{ord}(f,p), \mathrm{ord}(g,p))$.

(ii) $\mathrm{ord}(f \cdot g, p) = \mathrm{ord}(f,p) + \mathrm{ord}(g,p)$.

(iii) $\mathrm{ord}(f/g, p) = \mathrm{ord}(f,p) - \mathrm{ord}(g,p)$.

Aufgabe 3.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und f eine meromorphe Funktion auf Ω sowie $D \subseteq \Omega$ ihre Singularitätenmenge. Ist γ ein geschlossener Integrationsweg in $\Omega \setminus D$, der in Ω zusammenziehbar ist, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'}{f}\, dz = \sum_{p \in D} \mathrm{Um}(\gamma, p)\, \mathrm{ord}(f, p).$$

Aufgabe 3.9. (Die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$) Zeigen Sie, dass durch die stereographische Projektion

$$\psi\colon \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad \psi(z) = \begin{cases} \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}, \frac{2z}{1+|z|^2}\right) & \text{für } z \in \mathbb{C} \\ (1,0,0) & \text{für } \ z = \infty \end{cases}$$

eine Bijektion definiert wird. Sehen Sie was diese Abbildung geometrisch bewirkt? (Skizze!)

Aufgabe 3.10. (Holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}_\infty$) Wir identizieren $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (die Riemannsche Zahlenkugel). Sei $r\colon \mathbb{C} \setminus P \to \mathbb{C}$ eine rationale Funktion mit Polstellenmenge P. Finden Sie eine stetige Funktion $\widehat{r}\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, die r fortsetzt.

Aufgabe 3.11. Sei $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ *holomorph*, wenn $f|_\mathbb{C}$ holomorph ist und die Funktion

$$\widetilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{f}(z) := f(z^{-1}), \quad (0^{-1} = \infty)$$

ebenfall holomorph ist. Ist $D \subseteq \mathbb{C}_\infty$ endlich, so nennen wir $f\colon \mathbb{C}_\infty \setminus D \to \mathbb{C}$ *meromorph*, wenn sowohl f als auch $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{C}$ meromorph sind. Zeigen Sie:

(a) Jede auf $\mathbb{C}_\infty$ holomorphe Funktion ist konstant.

(b) Jede auf $\mathbb{C}_\infty$ meromorphe Funktion ist rational.

(c) Jede rationale Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert eine auf $\mathbb{C}_\infty$ meromorphe Funktion.

Aufgabe 3.12. Welche der folgenden Teilmengen $D \subseteq \Omega$ sind diskret?

(a) $D = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \subseteq \Omega = \mathbb{C}$.

(b) $D = e^{\mathbb{Z}} + ie^{\mathbb{Z}} \subseteq \Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

(c) $D = \{z \in \mathbb{C}^\times : f(z^{-1}) = 0\}$ in $\Omega \in \{\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times\}$ für eine ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 3.13. Wir betrachten auf $\mathbb{C}$ das Polynom

$$f(z) = z^6 + z^4 + 4z^3 + 3z + 1.$$

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von f in dem Kreis $K_2(0)$ liegen.

Aufgabe 3.14. Wir betrachten auf $\mathbb{C}$ das Polynom

$$f(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2.$$

Wieviele Nullstellen von f liegen in der offenen Einheitskreisscheibe?

Aufgabe 3.15. Bestimme die Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in den Kreisscheiben $K_1(0)$ und $K_2(0)$.

Aufgabe 3.16. Bestimme die Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$2z^5 - 6z^2 + z + 1$$

in dem Ringgebiet $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 3.17. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant sowie $\overline{K_1(0)} \subseteq \Omega$ und $|f(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Zeigen Sie

$$f(K_1(0)) = K_1(0).$$

Hinweis: Maximumprinzip und Satz von Rouché.

Aufgabe 3.18. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant sowie $\overline{K_1(0)} \subseteq \Omega$ und $|f(z)| \geq 1$ für $|z| = 1$. Zeigen Sie: Existiert ein $z_0 \in K_1(0)$ mit $|f(z_0)| < 1$, so gilt

$$f(K_1(0)) \supseteq K_1(0).$$

Hinweis: Satz von Rouché.

Aufgabe 3.19. Für die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^7 + 64z^4 + 1}$$

bestimme man die Anzahle der 5-Stellen, wobei wir mehrfache 5-Stellen jeweils mit ihrer Vielfachheit zählen.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass Zähler und Nenner keine Nullstellen gemeinsam haben.

Aufgabe 3.20. Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{5z^2 + 4z + 1}{z^2 + z + 1}$$

als Abbildung von $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C} \colon z^2 + z + 1 \neq 0\}$ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ genau zweimal angenommen wird (mit Vielfachheiten).
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass Zähler und Nenner keine Nullstellen gemeinsam haben.

Aufgabe 3.21. Let $\lambda > 1$ und $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in Ω genau eine Lösung z_0 besitzt und dass diese Lösung reell ist.

Aufgabe 3.22. Wir betrachten auf $\mathbb{C}^\times$ die rationale Funktion

$$g(z) := \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big).$$

Zeigen Sie:

(i) $g(z) = g(-z^{-1})$ für $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Jeder Wert $w \in \mathbb{C}$ wird von g genau zweimal (mit Vielfachheiten) angenommen. In welchen Punkten liegen doppelte w-Stellen vor? Was sind die Werte von g in diesen Punkten?

(iii) $g(i\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iv) Die rechte Halbebene $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ wird durch g bijektiv auf $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \colon |t| \geq 1\}$ abgebildet.

(v) $\Omega_2 := \{w \in \mathbb{C} \colon 1 - w^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\}$ und die Umkehrfunktion von g ist auf Ω_2 durch die holomorphe Funktion $g^{-1}(w) := iw + (1 - w^2)^{1/2}$ gegeben, wobei $z \mapsto z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z}$ durch den Hauptzweig log des komplexen Logarithmus definiert ist.

(vi) g bildet die Halbkreise $\gamma_r(t) = re^{it}$ auf Ellipsenbögen mit den Halbachsen $\frac{1}{2}\big(r \pm \frac{1}{r}\big)$ ab und die Brennpunkte all dieser Ellipsen liegen in ± 1.

4 Folgen holomorpher Funktionen

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass rationale Funktionen, also meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, bis auf eine Konstante durch ihre Null- und Polstellen bestimmt sind. Andererseits sieht man leicht, dass man zu jeder beliebigen Vorgabe von endlich vielen Null- und Polstellen auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine rationale Funktion findet. Betrachtet man stattdessen ganze Funktionen $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so wird die Situation komplizierter. Aber hier stellt sich die Frage, ob man zu jeder Vorgabe von Null- und Polstellen bzw. jeder Vorgabe von Hauptteilen der Laurententwicklung eine ganze Funktion finden kann. Es ist klar, dass man solche Funktionen nur durch geeignete Grenzprozesse konstruieren kann. Um solche Fragen beantworten zu können, müssen wir daher zuerst einige feinere Werkzeuge entwickeln, die die Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen betreffen.

4.1 Wiederholung

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Bereits im ersten Teil der Vorlesung hat sich der folgende Konvergenzbegriff als sehr natürlich herausgestellt.

Definition 4.1. Die Folge (f_n) *konvergiert lokal gleichmäßig* gegen f, falls es für jeden Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung V von z gibt, so dass die Folge $(f_n|_V)$ gleichmäßig gegen $f|_V$ konvergiert, also

$$\|f - f_n\|_V \to 0, \qquad \text{wobei} \qquad \|h\|_V := \sup_{w \in V} |h(w)|.$$

Wir sprechen dann auch von einer *kompakt konvergenten Folge*, da die lokal gleichmässige Konvergenz äquivalent ist zur gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen (Aufgabe 4.2).

Aus [Fi16, Prop. 5.3] wissen wir:

Satz 4.2. (Weierstraßscher Konvergenzsatz) *Ist $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f holomorph und die Folge der Ableitungen f_n' konvergiert ebenfalls lokal gleichmäßig gegen f'.*

4.2 Werte von Grenzfunktionen

Der folgende Satz zeigt, dass die Grenzfunktion keinen Wert häufiger annimmt als die Elemente der Funktionenfolge. Er ist eine überraschende Anwendung des Null- und Polstellen zählenden Integrals.

Satz 4.3. *Sei $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet Ω, die lokal gleichmäßig gegen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Jede Funktion f_n habe maximal m w-Stellen (mit Vielfachheiten) Dann ist f entweder konstant w oder hat auch maximal m w-Stellen.*

Beweis. Nachdem wir alle f_n durch $f_n - w$ ersetzt haben, dürfen wir o.B.d.A. $w = 0$ annehmen. Wir nehmen an, dass die Grenzfunktion f nicht identisch 0 ist und mindestens $m+1$ Nullstellen (mit Vielfachheiten) besitzt. Sei $S = \{z_1, \ldots, z_r\}$ die Menge dieser Nullstellen, wobei die z_j paarweise verschieden seien. Da $f^{-1}(0)$ diskret ist (Beispiel 3.2), gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die abgeschlossenen Kreisscheiben

$$K_j := \overline{K_\varepsilon(z_j)} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_j| \leq \varepsilon\}$$

jeweils ganz in Ω liegen, paarweise disjunkt sind und keine weitere Nullstelle von f enthalten. Insbesondere liegt keine Nullstelle auf dem Rand ∂K_j. Da f auf der kompakten Teilmenge $C := \bigcup_{j=1}^r \partial K_j$ keine Nullstelle besitzt und stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(z)| \geq \delta \qquad \text{für alle} \quad z \in C.$$

Da die Folge auf der kompakten Teilmenge C von Ω gleichmäßig gegen f konvergiert (Aufgabe 4.2), existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z) - f_n(z)| < \delta \qquad \text{für} \quad z \in C.$$

Wir wenden nun den Satz von Rouché auf die Kreisscheibe K_j und die Funktion $g := f_n - f$ an. Er liefert uns, dass f und $f + g = f_n$ in K_j jeweils gleich viele Nullstellen haben. Also besitzt f_n in K_j genau $\operatorname{ord}(f, z_j)$ viele Nullstellen. Da die Kreisscheiben K_j paarweise disjunkt sind, erhalten wir so den Widerspruch, dass f_n mindestens $m + 1 = \sum_{j=1}^r \operatorname{ord}(f, z_j)$ Nullstellen besitzt. $\square$

Bemerkung 4.4. (Relle Situation) Das Analogon für Satz 4.3 wird im Rellen falsch. Z.B. konvergiert auf dem Intervall $(-1, 1)$ die Folge $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ gleichmässig gegen die Funktion $f(x) = x^2$. Keine der Funktionen f_n hat in $(-1, 1)$ eine Nullstelle, aber f besitzt in 0 eine doppelte Nullstelle.

Im Komplexen tritt dieser Defekt nicht auf, da die Funktionen f_n die Nullstellen $\pm \frac{i}{\sqrt{n}}$ besitzen.

Bemerkung 4.5. Injektive holomorphe Funktionen nennt man auch *schlichte* Funktionen. Aus Satz 4.3 folgt insbesondere, dass der Grenzwert einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen entweder konstant oder schlicht ist. Diese Beobachtung werden wir beim Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes benötigen.

4.3 Lokal beschränkte Folgen holomorpher Funktionen

Im $\mathbb{R}^n$ spielen konvergente Teilfolgen und deren Existenz für beschränkte Folgen (Satz von Bolzano–Weierstraß) eine zentrale Rolle. In diesem Abschnitt werden wir entsprechende Kriterien für Folgen holomorpher Funktionen in Form von drei Konvergenzsätzen kennenlernen. Wir folgen dieser Analogie und führen zuerst einen geeigneten Beschränktheitsbegriff ein.

Definition 4.6. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *lokal beschränkt*, wenn zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung U und ein $C > 0$ existiert, so dass

$$|f_n(z)| \leq C \quad \text{für alle} \quad z \in U, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Etwas kürzer können wir diese Bedingungen auch als

$$\|f_n\|_U \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

schreiben.

Wir bereiten die Konvergenzsätze mit folgendem Kriterium vor:

Satz 4.7. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folgen von auf der offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen, die auf einer dichten Teilmenge $D \subseteq \Omega$ punktweise konvergiert. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt auf Ω.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die folgende Cauchy-Bedingung: Zu jedem $z_0 \in \Omega$ existiert ein $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subseteq \Omega$ und

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)(\forall z \in K_r(z_0)) \quad |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Wir wollen hierbei die punktweise Konvergenz auf D ausnutzen. Für $a \in D$ wollen wir also die Ungleichung der Form

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(z)| \tag{9}$$

verwenden. Fixiere nun $z_0 \in \Omega$. Zuerst finden wir wegen der lokalen Beschränktheit ein $C > 0$ und ein $r' > 0$, so dass

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in K_{\leq r'}(z_0)) \quad |f_n(z)| \leq C.$$

Für $0 < r < r'/2$ ist die Folge (f_n) dann auf $K_{\le r}(z_0)$ in folgendem Sinne gleichgradig stetig: Für $z, z' \in K_{\le r}(z_0)$ ist

$$f_n(z) - f_n(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z'} \, d\zeta = (z - z') \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r'} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} \, d\zeta$$

und daher wegen $|\zeta - z|, |\zeta - z'| \ge \frac{r'}{2}$:

$$|f_n(z) - f_n(z')| \le |z - z'| \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r' \frac{C}{(r'/2)^2} \le |z - z'| \frac{4C}{r'}. \tag{10}$$

Damit kontrollieren wir den ersten und den dritten Term in (9).

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r'}{4C}$. Da die Menge D in Ω dicht ist, wird die Kreisscheibe $K_{\le r}(z_0)$ von den offenen Kreisscheiben $K_\delta(d)$, $d \in D$, überdeckt. Wegen der Kompaktheit von $K_{\le r}(z_0)$ existieren also $d_1, \dots, d_k$ mit

$$K_{\le r}(z_0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_\delta(d_j).$$

Wir wählen nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_n(d_j) - f_m(d_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, k; n, m \ge n_0.$$

Für $z \in K_r(z_0)$ finden wir nun ein j mit $|z - d_j| < \delta$ und erhalten mit (10)

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |f_n(z) - f_n(d_j)| + |f_n(d_j) - f_m(d_j)| + |f_m(d_j) - f_m(z)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Hieraus folgt zunächst, dass jede Folge $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist, also konvergiert. Für die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n \to \infty} f_n(z)$$

gilt nun

$$|f(z) - f_n(z)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(z) - f_n(z)| \le \varepsilon \quad \text{für} \quad z \in K_r(z_0), n \ge n_0.$$

Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $K_r(z_0)$ gleichmäßig gegen f. $\square$

Mit Satz 4.7 können wir nun die Konvergenzsätze beweisen.

Satz 4.8. (Satz von Montel) *Jede lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wegen Satz 4.7 müssen wir nur eine dichte Teilmenge $D \subseteq \Omega$ finden, auf der die Folge f_n punktweise konvergiert. Sei dazu $D := \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von Ω, wie zum Beispiel $D = \Omega \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$. Wegen der lokalen Beschränktheit der Folge (f_n) existiert eine Teilfolge $(f_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$, für die die Folge $(f_{1n}(d_1))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (Satz von Bolzano–Weierstraß). Aus dem gleichen Grund existiert eine Teilfolge $(f_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(f_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$, die auch in d_2 konvergiert. Induktiv erhalten wir so Teilfolgen $(f_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$, die jeweils in $d_1, \dots, d_k$ punktweise konvergieren. Dann konvergiert die Diagonalfolge $(f_{nn})_{n \in \mathbb{N}}$ in allen d_i. $\square$

Satz 4.9. (Häufungspunktkriterium für lokal beschränkte Folgen) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, deren Konvergenzmenge*

$$S := \{z \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existiert}\}$$

einen Häufungspunkt in Ω besitzt. Dann konvergiert die Folge (f_n) lokal gleichmäßig.

Beweis. Wegen Satz 4.7 müssen wir nur die punktweise Konvergenz zeigen. Mit dem Satz von Montel 4.8 finden wir eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei f deren Grenzwert.

Angenommen, es existiert ein $z \in \Omega$, so dass die Folge $f_n(z)$ nicht gegen $f(z)$ konvergiert. Wegen der Beschränktheit der Folge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in z gegen eine andere Zahl $w \neq f(z)$ konvergiert. Nach dem Satz von Montel besitzt diese Folge wiederum eine Teilfolge, die gegen eine holomorphe Funktion $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Wir erhalten so zwei holomorphe Funktionen $f, h\colon \Omega \to \mathbb{C}$, die auf der Teilmenge S übereinstimmen. Aus dem Identitätssatz ([Fi16, Satz 5.3]) folgt nun $f = h$, im Widerspruch zu $h(z) = w \neq f(z)$. □

Satz 4.10. (Ableitungskriterium für lokalbeschränkte Folgen) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$. An einem Punkt $z_0 \in \Omega$ konvergiere für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(f_n^{(k)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ der k-ten Ableitungen. Dann konvergiert die Folge (f_n) lokal gleichmäßig.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.9 sehen wir, dass die Nichtkonvergenz der Folge (f_n) dazu führt, dass zwei verschiedene holomorphe Funktionen $f, h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ existieren, die jeweils Grenzwerte von lokal gleichmäßig konvergenten Teilfolgen sind. Aus unsrer Annahme und Satz 4.2 folgt aber

$$f^{(k)}(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z_0) = h^{(k)}(z_0) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ist $r > 0$ so gewählt, dass die Taylorrreihen von f und h in z_0 auf $K_r(z_0)$ konvergieren, so erhalten wir für alle $z \in K_r(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = h(z).$$

Der Identitätssatz ([Fi16, Satz 5.3]) liefert nun den Widerspruch $f = h$. □

4.4 Konvergenz von Kompositionen

Satz 4.11. (Konvergenz von Kompositionen) *Seien $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmässig konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit der Grenzfunktion f. Es gelte $f_n(\Omega) \subseteq \Omega'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $f(\Omega) \subseteq \Omega'$. Ist $h\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ holomorph, so konvergiert die Folge $(h \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen auf Ω lokal gleichmäßig gegen $h \circ f$.*

Beweis. Da die Funktion h stetig ist, folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ die punktweise Konvergenz der Folge $h \circ f_n$ gegen die Funktion $h \circ f$.

Wir zeigen jetzt, dass die Folge $h \circ f_n$ lokal beschränkt ist. Sei dazu $z_0 \in \Omega$ und $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Umgebung von z_0, so dass die Folge $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert. Nun ist $f(K) \subseteq \Omega'$ eine kompakte Teilmenge. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$K' := U_{\leq\varepsilon}(f(K)) := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{dist}(z, f(K)) \leq \varepsilon\}.$$

Das ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, die für ausreichend kleine ε in Ω' enthalten ist (Aufgabe 4.6). Wegen der Kompaktheit von K' ist $h|_{K'}$ beschränkt:

$$C := \sup\{|h(w)| : w \in K'\} < \infty.$$

Da $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert, existiert eine $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in K$ die Beziehung $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ gilt. Dann ist $f_n(K) \subseteq U_{\leq \varepsilon}(f(K)) = K'$ und daher $|h(f_n(z))| \leq C$ für alle $z \in K$. Also ist die Folge $(h \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal beschränkt. Aus Satz 4.7 folgt nun die lokal gleichmäßige Konvergenz $h \circ f_n \to h \circ f$. □

Im Beweis von Satz 4.11 kann man Satz 4.7 auch umgehen, denn man benötigt in der Tat nur die Stetigkeit von h auf der kompakten Menge K', die die gleichmäßige Stetigkeit von $h|_{K'}$ zur Folge hat. Aus der erhält man wiederum sehr leicht, dass $h \circ f_n$ auf K gleichmäßig gegen $h \circ f$ konvergiert.

4.5 Normale Konvergenz

In diesem letzten Abschnitt über Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen lernen wir einen Begriff kennen, der ein Kriterium dafür zur Verfügung stellt, dass man die Summation von Reihen mit lokal gleichmäßigen Grenzwertbildungen vertauschen kann. Dieses Kriterium wird insbesondere bei der Diskussion unendlicher Produkte nützlich sein.

Definition 4.12. (a) Seien $a_k^{(n)}$, $k, n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen. Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k^{(n)}$ *normal konvergiert*, wenn eine Folge $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass

(NK1) $|a_k^{(n)}| \leq M_k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

(NK2) $\sum_k M_k < \infty$.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_k^{(n)} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k^{(n)}$ *lokal normal konvergiert*, wenn jeder Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung U besitzt, für die eine Folge $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass

(NK1) $|f_k^{(n)}(z)| \leq M_k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $z \in U$ gilt.

(NK2) $\sum_k M_k < \infty$.

Bemerkung 4.13. Aus den Bedingungen (NK1/2) folgt sofort, dass die Reihen $\sum_k f_k^{(n)}$ für alle n auf U gleichmäßig konvergieren, denn

$$\Big\| \sum_{k \geq k_0} f_k^{(n)} \Big\|_U \leq \sum_{k \geq k_0} \|f_k^{(n)}\|_U \leq \sum_{k \geq k_0} M_k$$

ist beliebig klein, wenn k_0 ausreichend groß ist.

Der wesentliche Punkt der normalen Konvergenz ist, dass er uns erlaubt die Summation der Reihe und Grenzübergänge $n \to \infty$ zu vertauschen.

Satz 4.14. (Satz über die normale Konvergenz) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_k^{(n)} \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}$ lokal normal konvergiert. Weiter seien die Folgen $(f_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen die Funktionen f_k. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tag{11}$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz.

Beweis. Sei U wie in Definition 4.12. Es reicht zu zeigen, dass (11) gleichmäßig auf U gilt. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ und $\sum_{k>k_0} M_k \le \frac{\varepsilon}{4}$. In dem wir U ggf. verkleinern, finden wir wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Folgen $(f_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_k^{(n)} - f_k\|_U \le \frac{\varepsilon}{2k_0} \qquad \text{für} \qquad 1 \le k \le k_0, n \ge n_0$$

gilt. Wegen der punktweisen Konvergenz $f_k^{(n)} \to f_k$ auf U, gilt auch $|f_k(z)| \le M_k$ für $z \in U$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big\|_U \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^{(n)} - f_k\|_U \\ \le &\sum_{k\le k_0} \|f_k^{(n)} - f_k\|_U + \sum_{k>k_0} \|f_k^{(n)} - f_k\|_U \le \sum_{k\le k_0} \frac{\varepsilon}{2k_0} + \sum_{k>k_0} 2M_k \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Hier ist ein interessantes Beispiel, dass recht gut zeigt, welche Situation man mit dem Satz über die normale Konvergenz im Auge hat.

Beispiel 4.15. (Eulers Zugang zur Exponentialfunktion) Wir betrachten die Folge $f_n(z) := \big(1 + \frac{z}{n}\big)^n$ von Polynomen, die bekanntlich gegen $f(z) = e^z$ konvergiert. Wir möchten daraus die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ableiten. Die Problematik liegt darin, dass auch die Koeffizienten der Polynome f_n von n abhängen:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{z}{n}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} z^k = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{z^k}{k!}.$$

Wir setzen

$$f_k^{(n)} := \begin{cases} 1 \cdot \big(1 - \frac{1}{n}\big) \cdots \big(1 - \frac{k-1}{n}\big) \frac{z^k}{k!} & \text{für } k \le n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und erhalten die von n unabhängige Abschätzung für $|z| \le r$:

$$|f_k^{(n)}(z)| \le \frac{r^k}{k!}.$$

Wegen $\sum_k \frac{r^k}{k!} = e^r < \infty$, liegt also lokal normale Konvergenz der Reihen vor. Aus $\lim_{n\to\infty} f_k^{(n)}(z) = \frac{z^k}{k!}$ erhalten wir daher lokal gleichmäßig:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Wir werden später im Kontext von Produktentwicklungen noch weitere interessante Beispiele sehen, die auch z.T. auf Euler zurückgehen.

Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1. (Die Riemannsche Zeta-Funktion) Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $a^z := e^{z \log a}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

auf $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 1\}$ eine holomorphe Funktion definiert wird. Geben Sie eine Reihendarstellung der Ableitung ζ' an.

Aufgabe 4.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Eine Folge von Funktionen $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ die Folge der Einschränkungen $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.
Hinweis: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 4.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass kompakte Teilmengen $K_n \subseteq \Omega$ so existieren, dass

(i) $K_n \subseteq K_{n+1}^0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$.

Eine solche Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Ausschöpfung von* Ω.
Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $K_n := \{z \in \Omega \colon |z| \leq n, \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$ und verwenden Sie, dass die Abstandsfunktion

$$\operatorname{dist}_{\Omega^c} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \inf\{|z - w| \colon w \in \Omega^c\}$$

des Komplements $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ stetig ist (sogar Lipschitz-stetig mit $L = 1$).

Aufgabe 4.4. Ist $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω, so konvergiert einen Funktionenfolge $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann lokal gleichmäßig, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n|_{K_m})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig konvergiert.

Aufgabe 4.5. Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung der offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $\operatorname{Hol}(\Omega)$ der Vektorraum der holomorphen Funktionen $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir für holomorphe Funktionen $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$:

$$d_n(f, g) := \|f - g\|_{K_n} = \max\{|f(z) - g(z)| \colon z \in K_n\}.$$

Zeigen Sie:

(i) d_n ist eine Halbmetrik: $d_n(f, g) = d_n(g, f) \geq 0$ und $d_n(f, h) \leq d_n(f, g) + d_n(g, h)$. Ist Ω ein Gebiet und $K_n^0 \neq eset$, so ist d_n sogar eine Metrik.

(ii) $\widetilde{d}_n(f, g) := \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$ ist ebenfalls eine Halbmetrik auf $\operatorname{Hol}(\Omega)$. [4]

(iii) $d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{d}_n(f,g)}{2^n}$ definiert eine Metrik auf $\operatorname{Hol}(\Omega)$.

(iv) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann bzgl. der Metrik d, wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert.

(v) Der metrische Raum $(\operatorname{Hol}(\Omega), d)$ ist vollständig.

Aufgabe 4.6. Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge und

$$d_A(x) := \operatorname{dist}(A, x) := \inf\{a \in A \colon d(a, x)\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $d_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion (sogar Lipschitz-stetig mit $L \leq 1$) mit $\overline{A} = d_A^{-1}(0)$.

[4] Alternativ kann man hier auch mit $\widetilde{d}_n(f, g) := \min(1, d_n(f, g))$ arbeiten.

(ii) Für jedes $r \geq 0$ ist die Menge

$$U_{\leq r}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) \leq r\}$$

abgeschlossen.

(iii) Ist A kompakt, so gilt:

(a) Die Mengen $U_{\leq r}(A)$ sind kompakt.

(b) Ist $\Omega \supseteq A$ offen, so existiert ein $r > 0$ mit $U_{\leq r}(A) \subseteq \Omega$.
Hinweis: Die Funktion d_{Ω^c} nimmt auf A einen minimalen Wert an.

Aufgabe 4.7. Seien $f_n, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergente Folgen mit $f_n \to f$ und $g_n \to g$. Zeigen Sie, dass das Produkt $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f \cdot g$ konvergiert.

Aufgabe 4.8. Zeigen Sie, dass jede lokal gleichmäßig konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ lokal beschränkt ist.

5 Partialbruchentwicklung und der Satz von Mittag–Leffler

In diesem Abschnitt lernen wir die erste von drei wichtigen Anwendungen der Konvergenzsätze für holomorphe Funktion kennen: den Satz von Mittag–Leffler über das Verhältnis meromorpher Funktionen zu ihren Hauptteilen. Im nächsten Abschnitt werden wir im Weierstraßschen Produktsatz eine multiplikative Variante davon kennenlernen, die sich mit der Konstruktion ganzer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen befasst.

5.1 Der Satz von Mittag–Leffler

Ist z_0 eine Polstelle der Funktion f und

$$f(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihe von f in z_0, so nennen wir

$$h(z) := a_k (z - z_0)^k + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1}$$

den *Hauptteil von f in z_0*. Der Hauptteil ist eine rationale Funktion mit der einzigen Polstelle z_0 vom Grad $-k$. Wir erhalten so die additive Zerlegung

$$f(z) = h(z) + r(z),$$

wobei $r(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist. Das ist ein additives Gegenstück zur multiplikativen Zerlegung $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, wobei g holomorph mit $g(z_0) \neq 0$ ist.

Definition 5.1. (Partialbruchzerlegung) Ist $f(z)$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$ mit den Polstellen $z_1, \ldots, z_k$ und den zugehörigen Hauptteilen $h_1, \ldots, h_k$, so ist

$$p(z) := f(z) - h_1(z) - \cdots - h_k(z) \tag{12}$$

eine rationale Funktion ohne Polstellen, also ein Polynom. Wir nennen

$$f = h_1 + \cdots + h_k + p$$

daher die *Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion f*.

Der Satz von Mittag–Leffler besagt im wesentlichen, dass zu jeder Vorgabe von Hauptteilen auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen existieren. Hierbei darf man die Hauptteile natürlich nur so vorgeben, dass die Menge der Pole in $\mathbb{C}$ diskret ist, also jede Kreisscheibe nur endlich viele enthält.

Theorem 5.2. (Satz von Mittag–Leffler) *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{C}$, die keinen Häufungspunkt besitzt,*[5] *und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen positiven Grads ohne konstanten Term. Dann existiert eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, die genau an den Stellen z_n Pole mit den Hauptteilen $p_n((z-z_n)^{-1})$ besitzt.*

Beweis. Wir setzen $h_n(z) := p_n((z-z_n)^{-1})$. Da wir nicht erwarten können, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty h_n(z)$ für jedes $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert, führen wir konvergenzverbessernde Summanden ein, die die Hauptteile nicht ändern. Da die Taylorreihe der Funktion $h_n(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $K_{|z_n|/2}(0)$ gleichmäßig konvergiert, existiert ein Polynom T_n mit

$$|h_n(z) - T_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für} \quad |z| \leq \frac{|z_n|}{2}.$$

Da die Folge (z_n) keinen Häufungspunkt besitzt, gilt $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Wir finden daher zu jedem $r > 0$ ein $n_r \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| > 2r$ für $n \geq n_r$. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=n_r}^\infty (h_n - T_n)$$

gleichmäßig auf $K_r(0)$ gegen eine holomorphe Funktion. Insbesondere konvergiert die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^\infty h_n(z) - T_n(z)$$

auf Ω lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f.

Da jeder Punkt z_n in einer Kreisscheibe $K_r(0)$ liegt, besitzt f dort einen Pol mit dem Hauptteil $h_n(z)$. Da jede Polstellen von f in einer Kreisscheibe $K_r(0)$ liegt, ist sie eine der z_n. □

Bemerkung 5.3. Der Satz von Mittag–Leffler gilt entsprechend für beliebige offene Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, aber der Beweis für den allgemeinen Fall ist wesentlich aufwändiger als für $\Omega = \mathbb{C}$ (siehe [FL83, Kap. VIII]).

5.2 Partialbruchentwicklung trigonometrischer Funktionen

Da sie in vielen Anwendungen eine Rolle spielen, diskutieren wir in den folgenden Sätzen einige Beispiele, die zeigen, wie man durch den Mittag–Leffler-Ansatz zu Partialbruchzerlegungen wichtiger meromorpher Funktionen kommt.

[5] Das heißt die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret in $\mathbb{C}$.

Satz 5.4. *Die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ besitzt die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergente Partialbruchzerlegung*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Beweis. Die Polstellen von $f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ liegen allesamt in $\mathbb{Z}$ und der Hauptteil in $z_0 = 0$ ist $h_0(z) = \frac{1}{z^2}$. In der Tat hat die Funktion

$$z^2 f(z) = \frac{\pi^2 z^2}{\sin^2(\pi z)}$$

in 0 eine hebbare Singularität mit dem Funktionswert 1. Daher liegt ein Pol zweiter Ordnung vor und da die Funktion gerade ist, treten in der Laurententwicklung nur Summanden mit geradem Exponenten auf. Folglich stimmt h_0 mit dem Hauptteil von f in 0 überein. Aus der 1-Periodizität von f folgt daher

$$h_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Schritt: Wir zeigen zuerst, dass die Reihe

$$F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmßig konvergiert. Sie definiert dort eine meromorphe Funktion mit den Hauptteilen h_n in $n \in \mathbb{Z}$. Sei $r > 0$ und $n \geq 2r$. Für $|z| < r$ haben wir die Abschätzung

$$|z-n| \geq n - r \geq \frac{n}{2}$$

und daher

$$\sum_{n \geq 2r} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n \geq 2r} \frac{4}{n^2} < \infty.$$

2. Schritt: Wir zeigen jetzt, dass $F = f$ gilt.

Aus der Konstruktion von F folgt, dass die Differenz $g := f - F$ eine ganze Funktion ist und $g(z+1) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Um einzusehen, dass g beschränkt ist, reicht es daher $z = x + iy$ mit $x \in [0,1]$ anzunehmen. Aus

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y})$$

folgt für $y > 0$ durch Erweiterung des Bruches mit e^{-y}

$$\frac{1}{|\sin z|} = \frac{2}{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|} = \frac{2e^{-y}}{|e^{2ix}e^{-2y} - 1|} \leq \frac{2e^{-y}}{1 - e^{-2y}}$$

und damit $\lim_{y \to \infty} f(x+iy) = 0$, gleichmäßig in x. Analog sieht man, dass auch

$$\lim_{y \to -\infty} f(x+iy) = 0$$

gleichmäßig in x gilt. Also ist f insbesondere auf der Menge

$$S := \{z = x + iy\colon 0 \leq x \leq 1, |y| > 1\}$$

beschränkt.

Wir zeigen nun das gleiche von der Funktion F. Für $z = x+iy \in S$ haben wir für $|n| \geq 2$:

$$|z-n|^2 = (x-n)^2+y^2 = x^2-2nx+n^2+y^2 \geq -2|n|+n^2+y^2 = (|n|-1)^2+y^2-1 \geq \frac{1}{2}(|y|+|n|-1),$$

da für $a, b \geq 1$ gilt

$$a^2 - \frac{a}{2} + b^2 - \frac{b}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Damit erhalten wir für $|y| > 1$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z+1|^2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(|y|+n-1)^2} \leq \frac{3}{y^2} + 4\sum_{n\geq|y|} \frac{1}{n^2},$$

und dieser Ausdruck geht für $|y| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0.

Hieraus folgt, dass die 1-periodische ganze Funktion $F - f$ auf dem Streifen $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$ beschränkt ist. Also ist $F - f$ beschränkt und damit nach dem Satz von Liouville konstant. Da der Grenzwert für $|y| \to \infty$ auf dem Streifen $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$ verschwindet, ergibt sich also $F - f = 0$, d.h., $F = f$. $\square$

Satz 5.5. *Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ haben wir die lokal gleichmäßige konvergente Partialbruchentwicklung*

$$\pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big). \tag{13}$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ist

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)},$$

so dass wir für $|z| < r < \frac{n}{2}$ die Abschätzung

$$\Big|\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big| \leq \frac{r}{n\frac{n}{2}} = \frac{2r}{n^2}$$

erhalten. Hieraus ergibt sich die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (13) gegen eine auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ holomorphe Funktion, die in jedem $n \in \mathbb{Z}$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 besitzt.

Wir betrachten nun die Differenz

$$h(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big) - \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Wegen $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1$ gilt

$$\lim_{z\to 0}\pi z\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = 1,$$

so dass die Funktion $\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ in 0 einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 besitzt. Wegen der $\mathbb{Z}$-Periodizität gilt dies für alle $n \in \mathbb{Z}$. Daher besitzt h keine Polstellen, definiert also eine ganze Funktion.

Für die Ableitung von h erhalten wir mit dem Weierstraßschen Konvergenzsatz 4.2

$$h'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)},$$

was wegen Satz 5.4 verschwindet. Also ist h konstant. Da h eine ungerade Funktion ist, also $h(-z) = -h(z)$ gilt (Begründung?), erhalten wir $h(0) = 0$ und daher $h = 0$. $\square$

5.3 Bernoulli-Zahlen und Zetawerte

Definition 5.6. Wir definieren die *Bernoulli-Zahlen* $(B_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \quad \text{für} \quad 0 < |z| < 2\pi \quad \text{bzw.} \quad B_k := g^{(k)}(0).$$

Beachte: Da die Polstellen mit dem kleinsten Betrag $\pm 2\pi i$ sind, konvergiert die Reihe auf der Kreisscheibe $K_{2\pi}(0)$ ([Fi16, Satz 5.1]).

Bemerkung 5.7. Zunächste finden wir sofort

$$B_0 = g(0) = 1$$

und

$$B_1 = g'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{z}{e^z - 1} - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Da die Funktion

$$g(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\Big(1 + \frac{2}{e^z - 1}\Big) = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}}{e^{z/2}}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2} \cdot \frac{\cosh(z/2)}{\sinh(z/2)} \tag{14}$$

gerade ist, erhalten wir weiter

$$B_{2k+1} = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

und damit

$$g(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \tag{15}$$

Aus der Relation $g(z)(e^z - 1) = z$ lassen sich die Bernoulli-Zahlen rekursiv berechnen. Man sieht auf diese Weise sofort ein, dass sie rational sind. Z.B. ist

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Darüber hinaus ergibt sich aus der Endlichkeit des Konvergenzradius der Taylorreihe von g, dass die Folge $(B_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Wir erinnern uns an die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

(Aufgabe 4.1), die durch die obige Reihe auf der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 1\}$ definiert ist.

Satz 5.8. (Euler, 1737) *Die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion in den geraden natürlichen Zahlen sind gegeben durch*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Damit sehen wir insbesondere, dass die Bernoulli-Zahlen B_{2k} alternierende Vorzeichen haben. Konkret erhält man für kleine k:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Über die ungeraden Zeta-Werte $\zeta(2k+1)$ ist ausgesprochen wenig bekannt. Man weiß lediglich, dass $\zeta(3)$ irrational ist ([Ap78]) und dass unendlich viele der Zahlen $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, irrational sind ([Ri00]).

Beweis. Aus (14) erhalten wir mit (15) die Laurent-Entwicklung der Kotangens-Funktion in 0:

$$z\cot(z) = z\frac{\cos(z)}{\sin(z)} = iz\frac{\cosh(iz)}{\sinh(iz)} = g(2iz) + iz = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k}$$

und damit

$$\pi z\cot(\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k} \quad \text{für} \quad |z| < 1. \tag{16}$$

Aus der Partialbruchentwicklung des Kotangens (Satz 5.5) erhalten wir andererseits

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 + z\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = 1 + z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = 1 + z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2},$$

wobei wir die Summanden zu n und $-n$ zusammengefasst haben. Für $|z| < 1$ erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{z^2-n^2} = -\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}} = -\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^k$$

und daher

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^k.$$

Wegen der absoluten Konvergenz dürfen wir die Summationsreihenfolge vertauschen und erhalten so

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{n^2}\right)^{k+1} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k}.$$

Die Behauptung folgt nun durch Vergleich mit (16). □

Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1. Eine meromorphe Funktion h auf $\mathbb{C}$ ist genau dann Hauptteil einer meromorphen Funktion f in einem Pol z_0, wenn Sie die Gestalt

$$h(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^n}, \quad n > 0$$

mit einem Polynom p vom Grad $< n$ besitzt.

Aufgabe 5.2. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) := \frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

(a) Berechnen Sie zuerst die Hauptteile h_1, h_2 in der Polstellen und bestimmen Sie $p := f - h_1 - h_2$.

(b) Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{C}$ und ein Polynom p mit

$$f(z) = \frac{az+b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-2} + p(z) \quad \text{für} \quad z \neq 1, 2.$$

(c) Welche Methode ist besser?

Aufgabe 5.3. (Allgemeine Partialbruchzerlegung) Sei f eine rationale Funktion, die in den Punkten $z_1, \ldots, z_k$ jeweils Polstellen der Ordnungen $m_1, \ldots, m_k$ besitzt. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome $p_1, \ldots, p_k$ mit $\deg(p_j) < m_j$ gibt, so dass

$$f(z) - \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j(z)}{(z-z_j)^{m_j}}$$

ein Polynom ist.

Aufgabe 5.4. (Mehrdeutigkeit der Funktionen mit vorgegebenen Hauptteilen) Seien f und g meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: f und g haben genau dann die gleichen Hauptteile in allen Polstellen, wenn $f - g$ holomorph ist, bzw. nur hebbare Singularitäten besitzt.

Aufgabe 5.5. Seien f und g meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit den gleichen Hauptteilen in allen Polstellen. Zeigen Sie: Existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = g(z_0)$ und ist $f - g$ beschränkt, so ist $f = g$.

Aufgabe 5.6. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergent und definiert eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit der Polstellenmenge $\mathbb{Z}$ und den Hauptteilen $h_n(z) = \frac{1}{z-n}$. Diese Funktion ist 1-periodisch, d.h., es gilt $f(z+1) = f(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
Hinweis: Auf $K_r(0)$ erhalten wir für $|n| > 2r$ gleichmäßige Konvergenz der Restreihe.

Aufgabe 5.7. (Konvergenz ohne konvergenzerzeugende Summanden) Zeigen Sie: Die Reihe

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n^2}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{n^2 \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ lokal gleichmäßig konvergent und definiert dort eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f.

Aufgabe 5.8. Seien $z_1, \ldots, z_n$ verschiedene komplexe Zahlen. Bestimmen Sie explizit die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z-z_n}.$$

6 Unendliche Produkte und der Satz von Weierstraß

In Abschnit 5 haben wir gesehen wie man auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen konstruiert und wie man für konkrete Funktionen ihre Partialbruchzerlegungen findet. In diesem Abschnitt stellen wir uns die analoge Frage für Nullstellen: Existiert zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Nullstellen eine ganze Funktion f, so dass die a_n genau die Nullstellen von f sind? Wieder muß man natürlich annehmen, dass die Folge a_n in einer diskreten Menge liegt und jeder Wert höchstens endlich oft angenommen wird, also dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ gilt (Aufgabe 6.10). Dann tritt jede Zahl höchstens endlich oft in der Folge auf, was zu Vielfachheiten der Nullstellen führt.

Für eine endliche Menge $a_1, \ldots, a_n$ von Nullstellen führt der Ansatz

$$f(z) := \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

natürlich sofort zu einer polynomialen Lösung des Problems. Man ist also versucht einen Ansatz der Art

$$f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} (z - a_k)$$

zu versuchen. Hierzu müssen wir zuerst klären, was wir genau unter solchen unendlichen Produkten verstehen möchten. Danach werden wir sehen, dass wir zur Konstruktion ganzer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen, ähnlich wie bei dem Satz von Mittag-Leffler, wieder konvergenz-erzeugende Faktoren einbauen müssen. Diese Faktoren haben keine Nullstellen und ändern daher das Nullstellenverhalten nicht.

6.1 Unendliche Produkte

Zunächst kann man ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} w_n$ komplexer Zahlen einfach über die Konvergenz der Folge der endlichen Teilprodukte $\prod_{n=1}^{N} w_n$ definieren. Dies führt aber zu einem recht schwachen Konvergenzkonzept, da die Existenz eines einzigen Faktors $w_n = 0$ schon die Konvergenz des unendlichen Produktes gegen 0 bewirkt. Daher verwenden wir das etwas einschränkendere folgende Konzept:

Definition 6.1. Wir nennen ein unendliches Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ komplexer Zahlen w_k *konvergent*, wenn höchstens endlich viele w_k Null sind und die Folge der übrigen Faktoren einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzt. In diesem Fall schreiben wir

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} w_k$$

und beachten, dass der Grenzwert existiert und den Wert 0 besitzt sofern eines der $w_k = 0$ ist.

Lemma 6.2. *Ist $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ konvergent, so ist $w_k \to 1$.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass alle w_n von 0 verschieden sind. Dann konvergiert die Folge $W_n := \prod_{k=1}^{n} w_k$ gegen ein $w \neq 0$. Wir erhalten also

$$w_n = \frac{W_n}{W_{n-1}} \to \frac{w}{w} = 1. \qquad \square$$

Lemma 6.3. (Logarithmus-Kriterium für die Konvergenz unendlicher Produkte) *Sei* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in der linksgeschlitzten Ebene* $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *und*

$$\log\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad \textit{für} \quad r > 0, -\pi < \theta < \pi$$

der Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Dann konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^\infty w_n$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \log w_n$ *konvergiert.*

Beweis. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \log w_k$ gegen z, so erhalten wir durch Anwenden der Exponentialfunktion

$$e^z = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^n \log w_k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n e^{\log w_k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n w_k.$$

Sei nun das unendliche Produkt konvergent, also $p_n \to p \neq 0$ für $p_n := \prod_{k=1}^n w_k$. Wir können nicht einfach log auf die p_n anwenden, da nicht klar ist, ob sie alle in Ω liegen und ob die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion für die entsprechenden Produkte gilt. Aus Aufgabe 2.4 folgt, dass

$$\log(zw) = \log z + \log w \quad \text{für} \quad z, w \in \Omega_1 := \{\zeta \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\zeta > 0\} \tag{17}$$

gilt.

Es reicht zu zeigen, dass für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=n_0}^\infty \log(w_n)$ konvergiert. Wegen $p_n \to p \neq 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| < 1 \quad \text{für} \quad n, m \geq n_0,$$

denn es gilt

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| \leq |p_n|\left|\frac{1}{p_m} - 1\right| + |p_n - 1|.$$

Dann liegen all die Produkte $\prod_{k=n}^m w_k$ für $m > n > n_0$ in $K_1(1)$. Insbesondere ist $|w_n - 1| < 1$ für $n > n_0$. Aus (17) und $K_1(1) \subseteq \Omega_1$ folgt daher induktiv mit (17)

$$\log\Big(\prod_{k=n+1}^m w_k\Big) = \sum_{k=n+1}^m \log(w_k) \quad \text{für} \quad m > n \geq n_0.$$

Die Konvergenz des Produkts $\prod_{k=n}^m w_k$ für $m \to \infty$ gegen ein Element von $\mathbb{C}^\times \cap \overline{K_1(1)} \subseteq \Omega$ und die Stetigkeit der Logarithmusfunktion auf Ω liefern nun die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=n_0}^\infty \log(w_k)$. □

Definition 6.4. Aus der Konvergenz des Produkts $\prod_{k=1}^\infty w_k$ folgt $w_k \to 1$, so dass $\log w_k$ für alle ausreichend großen k definiert ist. Das konvergente Produkt $\prod_{k=1}^\infty w_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{k\geq n_0} \log w_k$ absolut konvergiert.

Lemma 6.5. (Logarithmus-Kriterium für die absolute Konvergenz unendlicher Produkte) *Ein unendliches Produkt* $\prod_{k=1}^\infty (1 + a_k)$ *konvergiert genau dann absolut, wenn* $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty$ *gilt, also wenn die Reihe* $\sum_k a_k$ *absolut konvergiert.*

Beweis. Wegen $\log(1) = 0$ und $\log'(0) = 1$ gilt

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1.$$

Es existiert also ein $r \in (0,1)$, so dass

$$\frac{1}{2} < \Big| \frac{\log(1+z)}{z} \Big| < \frac{3}{2} \quad \text{für} \quad |z| < r \tag{18}$$

gilt.

Konvergiert das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ oder die Reihe $\sum_k a_k$, so gilt $a_k \to 0$ (Lemma 6.2). Wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, dass $|a_n| < r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt

$$\frac{1}{2}|a_n| < |\log(1+a_n)| < \frac{3}{2}|a_n| \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

Das Logarithmus-Kriterium liefert ein Kriterium für die Konvergenz unendlicher Produkte durch die Konvergenz einer Reihe, was sehr viel zugänglicher ist. Wir übertragen dieses Kriterium sogleich auf Produkte holomorpher Funktionen.

Satz 6.6. (Logarithmus-Kriterium für die absolute Konvergenz unendlicher Produkte holomorpher Funktionen) *Sei $f_k \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen. Wir nehmen an, dass die Reihe $\sum_k 1 - f_k$ lokal gleichmäßig absolut auf Ω konvergiert, d.h.,*

$$\sum_k \|1 - f_k\|_K < \infty \quad \textit{für jede kompakte Teilmenge} \quad K \subseteq \Omega.$$

Dann gilt:

(a) *Das Produkt $\prod_k f_k$ konvergiert lokal gleichmäßig auf Ω gegen eine holomorphe Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$.*

(b) *Ist $\Omega^\times \subseteq \Omega$ eine offene Teilmenge, die keine Nullstelle einer Funktion f_k enthält, so konvergiert die Reihe der logarithmischen Ableitungen lokal gleichmäßig auf $\Omega^\times$:*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k}.$$

(c) *Seien $f_k^{(n)} \colon \Omega \to \mathbb{C}, k, n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen, so dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und jedes k Konstanten $C_k \geq 0$ mit $\sum_k C_k < \infty$ und $\|1 - f_k^{(n)}\|_K \leq C_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren. Konvergieren die Folgen $(f_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen die Funktionen f_k, so konvergiert das Produkt der f_k lokal gleichmäßig und es gilt*

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}.$$

Beweis. (a) Sei $r \in (0,1)$ wie in (18) und $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Für $C_k := \|1 - f_k\|_K$ ist dann $\sum_k C_k < \infty$ und wir finden ein k_0 mit $\sum_{k \geq k_0} C_k < r$. Aus (18) folgt dann die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k \geq k_0} \log(f_k) = \sum_{k \geq k_0} \log(1 - (1 - f_k))$ auf K. Also konvergiert $\prod_{k \geq k_0} f_k = \exp\Big(\sum_{k \geq k_0} \log(f_k)\Big)$ lokal gleichmäßig auf dem Inneren K^0 (Satz 4.11). Hieraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz des Produkts $f := \prod_k f_k$ auf Ω.

(b) Sei nun $K \subseteq \Omega^\times$ beliebig kompakt. Dann haben wir auf K

$$f = \prod_{k<k_0} f_k \cdot \prod_{k \geq k_0} f_k = \prod_{k<k_0} f_k \cdot \prod_{k \geq k_0} e^{\log(f_k)} = \underbrace{\prod_{k<k_0} f_k}_{g:=} \cdot \underbrace{e^{\sum_{k \geq k_0} \log(f_k)}}_{h:=}$$

und damit wegen dem Weierstraßschen Konvergenzsatz 4.2

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h} = \sum_{k<k_0} \frac{f_k'}{f_k} + \Big(\sum_{k \geq k_0} \log(f_k)\Big)' \\ &= \sum_{k<k_0} \frac{f_k'}{f_k} + \sum_{k \geq k_0} \log(f_k)' = \sum_{k<k_0} \frac{f_k'}{f_k} + \sum_{k \geq k_0} \frac{f_k'}{f_k} = \sum_k \frac{f_k'}{f_k}, \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz auf $\Omega^\times$ lokal gleichmäßig ist, denn K war beliebig.

(c) Da $f_k = \lim_{n\to\infty} f_k^{(n)}$ punktweise gilt, ist auch $\|1 - f_k\|_K \leq C_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wie in (a) wählen wir zu $r \in (0,1)$ wie in (18) den Index $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{k \geq k_0} C_k < r$ gilt. Auf K^0 folgt dann für $k \geq k_0$ aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz $f_k^{(n)} \to f_k$ auch $\log(f_k^{(n)}) \to \log(f_k)$ (Satz 4.11). Aus dem Satz über die normale Konvergenz 4.14 folgt damit zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k \geq k_0} \log(f_k^{(n)}) = \sum_{k \geq k_0} \log(f_k)$$

und damit wegen Aufgabe 4.7 (über die Konvergenz von Produkten) und Satz 4.11 (über die Konvergenz von Kompositionen)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)} &= f_1 \cdots f_k \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k \geq k_0} f_k^{(n)} = f_1 \cdots f_k \cdot \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\sum_{k \geq k_0} \log(f_k^{(n)})\Big) \\ &= f_1 \cdots f_k \cdot \exp\Big(\sum_{k \geq k_0} \log(f_k)\Big) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k, \end{aligned}$$

wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig auf K^0 ist. □

6.2 Der Weierstraß–Produktsatz

In diesem Abschnitt lernen wir den Produktsatz von Weierstraß kennen, der zu jeder Vorgabe von Nullstellen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ die Existenz einer ganzen Funktion f mit genau diesen Nullstellen (entsprechend ihrer Vielfachheit in der Folge) liefert. Die Grundidee des Beweises ist es (für $a_n \neq 0$), den Ansatz $f(z) = \prod_n (1 - \frac{z}{a_n})$ durch multiplikative Faktoren ohne Nullstellen so zu modifizieren, dass wir ein lokal gleichmäßig konvergentes Produkt erhalten.

Für $a_n \neq 0$ wird das dadurch bewerkstelligt, dass man statt eines Faktors $z-a$ Funktionen der Gestalt $E_k\big(\frac{z}{a}\big)$ betrachtet, wobei der *Euler-Faktor* E_k definiert ist durch

$$E_k(z) := (1-z)e^{p_k(z)}, \qquad p_k(z) := z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{k-1}.$$

If $|z| < 1$, so ist $\mathrm{Re}(1-z) > 0$ und daher ist

$$\log(E_k(z)) := \log(1-z) + p_k(z) = \log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{k-1} \tag{19}$$

definiert. Dies ist eine Funktion, die in 0 eine Nullstelle der Ordnung k besitzt, denn p_k ist das Taylorpolynom der Ordnung $k-1$ von $-\log(1-z)$ in 0. Daher hat $E_k\big(\frac{z}{a}\big)$ zwar genauso wie $z-a$ eine einfache Nullstelle in a, aber Logarithmieren liefert sehr viel kleinere Werte, was die Konvergenz von Produkten der Art $\prod_n E_{k_n}\big(\frac{z}{a_n}\big)$ verbessert.

Für die späteren Anwendungen halten wir die folgende Abschätzung fest, die sich sofort aus (19) ergibt:

$$|\log(E_k(z))| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \leq |z|^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2|z|^k \quad \text{für} \quad |z| \leq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Theorem 6.7. (Weierstraßscher Produktsatz) *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, so existiert eine ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau in den a_n verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit, mit der a_n in der Folge vorkommt.*

Sind zusätzlich alle $a_n \neq 0$, so existieren ganze Zahlen $m_n \in \mathbb{N}_0$, so dass f durch das folgende lokal gleichmäßig konvergente unendliche Produkt gegeben ist:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\Big(\frac{z}{a_n}\Big) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)e^{p_{m_n}(\frac{z}{a_n})}. \tag{21}$$

Hierbei sind die ganzen Zahlen m_n so gewählt, dass für jedes $r > 0$ gilt:

$$\sum_{|a_n|>2r} \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{m_n} < \infty. \tag{22}$$

Im allgemeinen Fall, wo die 0 genau m mal unter den a_n vorkommt, multipliziert man das Produkt (21) mit z^m:

$$f(z) = z^m \prod_{a_n \neq 0} E_{m_n}\Big(\frac{z}{a_n}\Big).$$

Beweis. Zu $r > 0$ wählen wir $n_r \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| > 2r$ für $n \geq n_r$ gilt. Für $|z| < r$ ist dann $\big|\frac{z}{a_n}\big| < \frac{1}{2}$, so dass aus (20) die Abschätzung

$$\Big|\log\Big(E_n\Big(\frac{z}{a_n}\Big)\Big)\Big| \leq 2\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

folgt. Für $m_n := n$ erhalten wir also die Konvergenz der Reihe (22).

Wir nehmen nun an, dass die m_n so gewählt sind, dass die Reihe (22) konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\geq n_r} \log\Big(E_{m_n}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)\Big)$$

auf $K_r(0)$ gleichmäßig wegen

$$\sum_{|a_n|\geq 2r} \left|\log\left(E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)\right| \leq 2 \sum_{|a_n|\geq 2r} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{m_n} < \infty$$

und definiert dort eine holomorphe Funktion $g(z)$. Daher konvergiert auch das Produkt

$$\prod_{n\geq n_r} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

wegen Satz 4.11 auf $K_r(0)$ lokal gleichmäßig gegen die holomorphe Funktion $e^{g(z)}$, die auf $K_r(0)$ keine Nullstellen besitzt. Also konvergiert

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

auf ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f.

Die Nullstellen von f in $K_r(0)$ sind genau die Nullstellen des endlichen Produkts

$$\prod_{n<n_r} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

also genau die a_n, $n < n_r$, mit der entsprechenden Vielfachheit. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 6.8. Genau wie der Satz von Mittag–Leffler gilt auch der Weierstraßsche Produktsatz für beliebige Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, aber der Beweis ist wesentlich aufwändiger als für den Fall $\Omega = \mathbb{C}$ ([FL83, Kap. VIII]).

Folgerung 6.9. *Jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist Quotient zweier ganzer Funktionen $f = \frac{g}{h}$. Der Körper $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen ist also der Quotientenkörper des nullteilerfreien Rings* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ *der auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen.*

Beweis. Zu der Folge (a_n) der Polstellen von f, die wir entsprechend ihrer Vielfachheit in die Folge aufnehmen, finden wir mit dem Weierstraßschen Produktsatz eine ganze Funktion h, die genau an den a_n Nullstellen besitzt. Dann ist das Produkt hf eine meromorphe Funktion ohne Polstellen, also holomorph (nachdem die hebbaren Singularitäten eliminiert wurden). $\square$

Der nächste Satz beschreibt die Mehrdeutigkeit im Weierstraßschen Produktsatz. Wir schicken ein nützliches Lemma vorweg.

Lemma 6.10. *Für eine ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *f hat keine Nullstellen, d.h. $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^\times$.*

(ii) *Es existiert eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f = e^h$.*

Beweis. Es ist klar, dass (i) aus (ii) folgt. Um die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, dass die ganze Funktion f keine Nullstellen besitzt. Dann ist $\frac{f'}{f}$ ebenfalls eine ganze Funktion und besitzt wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion h

([Fi16, Kor. 4.4]). Da wir zu h eine beliebige Konstante addieren dürfen, können wir $e^{h(0)} = f(0)$ annehmen. Für die Funktion $F := fe^{-h}$ erhalten wir dann $F(0) = 1$ und

$$\frac{F'}{F} = \frac{f'}{f} - h' = 0.$$

Also ist $F \equiv 1$ und somit $f = e^h$. □

Satz 6.11. (Mehrdeutigkeit ganzer Funktionen zu gegebenen Nullstellen) *Für zwei ganze Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *f_1 und f_2 besitzen die gleichen Nullstellen mit den gleichen Vielfachheiten.*

(ii) *Es existiert eine holomorphe Funktion $h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_2 = f_1 e^h$.*

Beweis. (i) ist äquivalent dazu, dass die meromorphe Funktion $f := \frac{f_2}{f_1}$ holomorph ist (nach Elimination der hebbaren Singularitäten) und keine Nullstellen besitzt. Die Behauptung folgt daher sofort aus Lemma 6.10. □

Bemerkung 6.12. Die Mehrdeutigkeit bei Weierstraß-Produkten (Satz 6.11) ist durch einen multiplikativen Faktor gegeben. Bei dem Satz von Mittag–Leffler ist die Mehrdeutigkeit additiv (Aufgabe 5.4), aber in beiden Fällen ist sie durch den Raum $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ der ganzen Funktion beschrieben.

Wir diskutieren nun ein wichtiges Beispiel einer Produktentwicklung: die Sinusfunktion.

Satz 6.13. (Produktentwicklung der Sinusfunktion) *Die Sinusfunktion besitzt die lokal gleichmäßige Produktentwicklung*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big)\Big(1 + \frac{z}{n}\Big).$$

Beweis. Für $a_n := n$ und $m_n = 2$ konvergiert die Reihe (22)

$$\sum_{|a_n| > 2r} \Big(\frac{r}{n}\Big)^2 \le r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

so dass

$$f(z) := \pi z \prod_{n>0} E_2\Big(\frac{z}{n}\Big) \prod_{n<0} E_2\Big(\frac{z}{n}\Big) = \pi z \prod_{n \neq 0} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{z/n} \tag{23}$$

eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in $\mathbb{Z}$ definiert. Wegen $e^{z/n} e^{-z/n} = 1$ haben wir dann sogar

$$f(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big)\Big(1 + \frac{z}{n}\Big).$$

Wir zeigen nun, dass diese Funktion mit $\sin(\pi z)$ übereinstimmt. Mit Satz 6.6 und (23) erhalten wir für die logarithmische Ableitunge von f auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \Big(\frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{z}{n}} + \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \Big(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\Big).$$

Andererseits erhalten wir mit der Partialbruchentwicklung der Kotangensfunktion (Satz 5.5) und (23)

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big) = \pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\frac{d}{dz}\sin(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Aus der Gleichheit der logarithmischen Ableitungen folgt nun die Existenz einer Konstanten $c > 0$ mit

$$f(z) = c\sin(\pi z)$$

(Aufgabe 6.1). Wegen

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

ist $c = 1$. $\square$

Bemerkung 6.14. (Die Wallische Produktdarstellung von π) Aus der Produktentwicklung der Sinusfunktion lässt sich insbesondere eine Produktentwicklung von π ableiten. Für $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$1 = \sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}$$

und damit

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = 2\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots.$$

Bemerkung 6.15. (Eulers Zugang zur Produktdartstellung der Sinusfunktion)
Aus $e^z = \lim_{n\to\infty}(1 + z/n)^n$ (vgl. Beispiel 4.15) erhalten wir

$$\frac{\sinh(z)}{z} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+z/n)^n - (1-z/n)^n}{2z}.$$

Wir betrachten nun die Polynome

$$q_n(z) := \frac{(1+z/n)^n - (1-z/n)^n}{2z}.$$

Für $n = 2p+1$ haben wir für $z \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{2\pi ik/n}) = (z-1)\prod_{k=1}^{p}(z - e^{2\pi ik/n})(z - e^{-2\pi ik/n}) \\ &= (z-1)\prod_{k=1}^{p}\Big(z^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)z + 1\Big). \end{aligned}$$

Für $w \neq 0$, erhalten wir hieraus durch einsetzen von z/w und anschließender Multiplikation mit w^n:

$$z^n - w^n = (z-w)\prod_{k=1}^{p}\Big(z^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)zw + w^2\Big).$$

Hiermit können wir das Polynom q_n wie folgt faktorisieren

$$\begin{aligned}
q_n(z) &= \frac{1}{2z}\frac{2z}{n}\prod_{k=1}^{p}\Big((1+z/n)^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)(1+z/n)(1-z/n) + (1-z/n)^2\Big)\\
&= \frac{2^p}{n}\prod_{k=1}^{p}\Big(\Big(1+\frac{z^2}{n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)\Big)\\
&= \frac{2^p}{n}\prod_{k=1}^{p}\Big(\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big) + \Big(1+\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big)\frac{z^2}{n^2}\Big)\\
&= \frac{2^p}{n}\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big)\cdot\prod_{k=1}^{p}\Big(1+\frac{1+\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}{1-\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}\cdot\frac{z^2}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Aus der Binomischen Formel ergibt sich sofort $q_n(0) = 1$ und damit

$$\frac{2^p}{n}\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big) = 1.$$

Damit erhalten wir

$$q_n(z) = \prod_{k=1}^{p}\Big(1+\frac{1+\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}{1-\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}\cdot\frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Damit wir hier einen Grenzübergang für $p \to \infty$ bzw. $n \to \infty$ rechtfertigen können, zeigen wir zuerst, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}{1-\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)} \le C \quad \text{für} \quad 2k \le n$$

gilt. Mit

$$\alpha := \min\Big\{\frac{1-\cos(x)}{x^2} : 0 \le x \le \pi\Big\} > 0$$

erhalten wir

$$n^2\Big(1-\cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big) \ge \alpha\cdot(2\pi k)^2 \ge 4\pi^2\alpha$$

und damit gilt die gewünschte Ungleichung für $C := \frac{2}{4\pi^2\alpha} = \frac{1}{2\pi^2\alpha}$. Damit hat jedes Polynom q_n die Struktur

$$q_n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k^{(n)}) \quad \text{mit} \quad |a_k^{(n)}(z)| \le C|z|^2.$$

Also ist die Reihe $\sum_k a_k^{(n)}$ auf $K_1(0)$ normal konvergent. Wir erhalten daher für

$$a_k(z) := \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}{1-\cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big)}\cdot\frac{z^2}{n^2} = \frac{2}{(2\pi k)^2/2}z^2 = \frac{z^2}{\pi^2k^2}$$

mit Satz 6.6 erhalten wir auf $K_1(0)$ die Grenzfunktion

$$\frac{\sinh(z)}{z} = \lim_{n\to\infty} q_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k(z)) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z^2}{\pi^2k^2}\Big).$$

Da beide Seiten holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ definieren, folgt die Gleichheit für alle $z \in \mathbb{C}$ aus dem Identitätssatz ([Fi16, Satz 5.3]).

Hieraus ergibt sich insbesondere

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \frac{\sinh(i\pi z)}{i\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big).$$

Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1. (Mehrdeutigkeit der Lösungen logarithmischer Ableitungen) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_1, f_2 \colon \Omega \to \mathbb{C}^\times$ holomorph mit

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}.$$

Dann existiert ein $c > 0$ mit $f_2 = c \cdot f_1$.

Aufgabe 6.2. Finden Sie eine auf ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergente Produktdarstellung der Kosinusfunktion $\cos(z)$.
Hinweis: $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$.

Aufgabe 6.3. Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Eine ganze Funktion $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g^n = f$ existiert genau dann, wenn alle Ordnungen $\mathrm{ord}(f, z)$, $z \in \mathbb{C}$, durch n teilbar sind.
Hinweis: Satz 6.11.

Aufgabe 6.4. (Hauptideale im Ring der ganzen Funktionen) Wir betrachten den Ring $R := \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Einheitengruppe ist $R^\times = \mathrm{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times) = \{e^f : f \in R\}$.

(b) Für zwei Elemente $f, g \in R$ existiert genau dann eine Einheit h mit $g = fh$, wenn $\mathrm{ord}(f, z) = \mathrm{ord}(g, z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(c) Für das von f erzeuge Hauptideal $(f) := Rf$ gilt

$$(f) = \{g \in R \colon (\forall z \in \mathbb{C})\ \mathrm{ord}(g, z) \geq \mathrm{ord}(f, z)\}.$$

(d) $(g) \subseteq (f) \Longleftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\ \mathrm{ord}(f, z) \leq \mathrm{ord}(g, z)$.

Aufgabe 6.5. Sei g eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion. Zeigen Sie, dass eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit $g = \frac{f'}{f}$ genau dann existiert, wenn g keine Polstellen der Ordnung ≥ 2 besitzt und alle Residuen von g ganzzahlig sind.
Hinweis: Beweis von Satz 3.8 für eine Richtung; für die andere betrachte man einen Ansatz $f = f_1 f_2^{-1} f_3$, wobei $f_{1/2}$ mit dem Weierstraßschen Produktsatz so konstruiert ist, dass die Nullstellen von f_1 die positiven Residuen liefern und die Nullstellen von f_2 die negativen.

Aufgabe 6.6. Seien $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. Zeigen Sie, dass ganze Funktionen A, B existieren, so dass $Af + Bg = 1$ gilt.
Hinweis: Finde mit dem Satz von Mittag–Leffler eine meromorphe Funktion M deren Hauptteile zu den Nullstellen z_n von g mit den Hauptteilen von $\frac{1}{fg}$ übereinstimmen und setze $A := Mg$.

Aufgabe 6.7. (ggT ganzer Funktionen) Seien $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ ganze Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine ganze Funktion h und ganze Funktionen f_1, g_1 mit $f = f_1 h$ und $g = g_1 h$, so dass f_1 und g_1 keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

(b) Es existieren ganze Funktionen A, B mit $h = Af + Bg$.

Aufgabe 6.8. (Endlich erzeugte Ideale ganzer Funktionen sind Hauptideale) Seien $f_1, \ldots, f_m$ ganze Funktionen und $J := \sum_{j=1}^m f_j R$ das von den f_j im Ring $R := \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion $h \in R$ mit $J = hR$ existiert.
Hinweis: Für $m = 2$ verwende man Aufgabe 6.7.

Aufgabe 6.9. Seien h_n ganze Funktionen mit der Nullstellenmenge $\{n, n+1, \ldots\}$ und einfachen Nullstellen. Zeigen Sie: Für die von den h_n im Ring $R = \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ erzeugten Hauptideale gilt dann $(h_n) \subset (h_{n+1})$ (echte Inklusionen). Schließen Sie daraus, dass es in R echte Ideale gibt, die nicht endlich erzeugt sind.

Aufgabe 6.10. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ genau dann, wenn die Menge $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{C}$ diskret ist und jede Zahl höchstens endlich oft in der Folge vorkommt.

Aufgabe 6.11. (Logarithmische Produktregel) Zeigen Sie: Sind $f_1, \ldots, f_n$ holomorphe Funktionen auf Ω ohne Nullstellen und $f := f_1 \cdots f_n$, so gilt für die logarithmische Ableitung

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n}.$$

7 Der Riemannsche Abbildungssatz

Nach dem Satz von Mittag–Leffler und dem Weierstraßschen Produktsatz wenden wir uns nun dem dritten zentralen Satz zu, in dessen Beweis wir die Methoden aus Abschnitt 4 verwenden: dem Riemannschen Abbildungssatz. Es ist der tiefgründigste Satz, den wir in dieser Vorlesung kennenlernen werden. Insbesondere werden wir sehen, dass wir zum Beweis dieses Satzes das ganze Arsenal von Hilfsmittel heranziehen müssen, dass wir bisher in dieser Vorlesung entwickelt haben.

In diesem Abschnitt schreiben wir kurz $E := K_1(0)$ für die offene Einheitskreisscheibe.

Definition 7.1. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt *biholomorph*, wenn f holomorph und bijektiv ist und f^{-1} ebenfalls holomorph.

Theorem 7.2. (Riemannscher Abbildungssatz) *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das von $\mathbb{C}$ verschieden ist, so existiert eine biholomorphe Funktion $f \colon \Omega \to E$.*

Bemerkung 7.3. (a) Dass die Ausnahme $\Omega = \mathbb{C}$ notwendig ist, folgt aus dem Satz von Liouville, der uns zeigt, dass jede holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to E$ konstant ist.

(b) Da jede biholomorphe Funktion insbesondere ein Homöomorphismus ist (also stetig, bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung), bildet sie einfach zusammenhängende Gebiete in solche ab. Da die Kreisscheibe E einfach zusammenhängen ist, ist es daher auch notwendig anzunehmen, dass Ω einfach zusammenhängend ist.

(c) Für eine genauere Analyse des Randverhaltens der Funktion f aus dem Riemannschen Abbildungssatz verweisen wir auf [La99, §X.4].

Aus der Perspektive der Topologie liefert der Riemannsche Abbildungssatz eine Klassifikation aller einfach zusammenhängenden echten Teilgebiete der komplexen Ebene: sie sind alle homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe. Das ist ein ausgesprochen erstaunlicher Sachverhalt, da es sehr vielfältige einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$ gibt, die sehr unterschiedlich aussehen. Wir stellen hier einige Beispiele zusammen. Für den Nachweis ihres einfachen Zusammenhangs benötigt man allerdings etwas weitergehende Hilfsmittel aus der Topologie.

Beispiel 7.4. (Beispiele einfach zusammenhängender Gebiete)

(a) Die einfachsten Beispiele sind sternförmige Gebiete, die insbesondere die konvexen Gebiete umfassen. Ein wichtiges konkretes Beispiel ist die geschlitze Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(b) Die obere Halbebene $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ ist einfach zusammenhängen, aber auch für jede abschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\Omega := \Omega_0 \setminus \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z \leq 1, \operatorname{Re} z \in A\}$$

ebenfalls einfach zusammenhängend. Schon für die Menge

$$A := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$$

ist das ein interessantes Beispiel. Noch bizarrer wird es, wenn wir stattdessen die Cantormenge $A \subseteq [0, 1]$ nehmen.

(c) Die Bilder auf den Seiten 149–151 in Jänich's Buch [Ja80] vermitteln einen guten Eindruck weiterer bizarrer Beispiele.

7.1 Schlichte Abbildungen

Biholomorphe Funktionen sind insbesondere *schlichte Funktionen*, also injektiv und holomorph (Bemerkung 4.5). Für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes erinnern wir uns an die folgende holomorphe Variante des Satz über die Umkehrfunktion, der zeigt, dass jede schlichte Funktion biholomorph auf ihr Bild ist.

Satz 7.5. (Schlichte Funktionen sind biholomorph) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f(\Omega)$ ebenfalls offen und $f^{-1} \colon f(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Beweis. Nach dem Satz von der Gebietstreue ([Fi16, Satz 5.4]) ist $f(\Omega)$ offen, denn wegen der Injektivität ist f nicht konstant. Daher ist die Umkehrfunktion f^{-1} auf der offenen Teilmenge $f(\Omega)$ definiert.

Existiert ein $p \in \Omega$ mit $f'(p) = 0$, so ist für $w := f(p)$ die Ordnung $m := \operatorname{ord}(f, p) > 1$. Aus [Fi16, Satz 5.6] folgt dann die Existenz einer biholomorphen Funktion $h \colon K_\varepsilon(0) \to U$ mit $h(0) = 0$ auf eine offene Umgebung U on 0, so dass $f(p + h(z)) = w + h(z)^m$ für $|z| < \varepsilon$ gilt. Da die Potenzfunktion $z \mapsto z^m$ in keiner Nullumgebung injektiv ist, widerspricht dies der Injektivität von f. Daher hat die Ableitung f' keine Nullstelle (alternativ kann man mit Aufgabe 7.1 argumentieren). Nun folgt die Holomorphie von f^{-1} aus der holomorphen Variante des Satzes über die Umkehrfunktion ([Fi16, Lemma 5.11]). $\square$

7.2 Automorphismen des Einheitskreises

Wir erinnern uns an die Beschreibung der Gruppe $\operatorname{Aut}(E)$ der biholomorphen Abbildungen von E ([Fi16, §7]). Um diese Gruppe zu beschreiben, verwendet man das Schwarzsche Lemma ([Fi16, Lemma 7.1]):

Lemma 7.6. (Schwarzsches Lemma) *Sei $f \colon E \to E$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt:*

(i) *Für alle $z \in E$ ist $|f(z)| \leq |z|$.*

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(iii) *Gilt $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in E$, $z \neq 0$, oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung, d.h. es gibt ein $\theta \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(z) = e^{i\theta} z$ für alle $z \in E$.*

Satz 7.7. *Die Gruppe* $\mathrm{Aut}(E)$ *der biholomorphen Selbstabbildungen von E besteht aus den gebrochen rationalen Abbildungen der Form*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{\overline{a}z - 1} \qquad \textit{für} \qquad |a| < 1, \theta \in \mathbb{R}$$

(siehe hierzu auch Beispiel 3.23).

Beweis. Sei zuerst $a \in E$ und $f_a(z) := \frac{z-a}{\overline{a}z-1}$. Für $|z| < 1$ ist $|\overline{a}z| < 1$, so dass der Nenner in E keine Nullstellen besitzt. Man rechnet leicht direkt nach, daß $f_a(E) \subset E$ gilt und $f_a \circ f_a = \mathrm{id}_E$ ist. Daher ist $f_a \colon E \to E$ bijektiv uns selbstinvers, insbesondere also $f_a \in \mathrm{Aut}(E)$. Beachte, dass $f_a(a) = 0$ und $f_a(0) = a$ gilt.

Ist nun $f \in \mathrm{Aut}(E)$ beliebig und $a := f^{-1}(0)$, so ist $g := f \circ f_a \in \mathrm{Aut}(E)$ mit $g(0) = 0$. Nach dem Lemma von Schwarz ist also $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in E$. Für die Umkehrabbildung gilt ebenfalls $|g^{-1}(z)| \leq |z|$, also $|g(z)| = |z|$ für alle $z \in E$. Das Lemma von Schwarz zeigt daher, dass g eine Drehung ist, also $g(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Daher ist $f = g \circ f_a$ wie behauptet. □

7.3 Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

1. Behauptung: Es existiert eine biholomorphe Abbildung von Ω auf ein Teilgebiet von E.

Da man das Äußere eines Kreises $K_r(p)$ durch die Abbildung $z \mapsto \frac{r}{z-p}$ biholomorph auf ein Teilgebiet von E abbilden kann, genügt es Ω biholomorph auf ein Gebiet G abzubilden, das eine offene Kreisscheibe $K_r(p)$ nicht schneidet. Nach Voraussetzung ist $\Omega \neq \mathbb{C}$. Nach einer Translation, die ja insbesondere biholomorph ist, dürfen wir daher $0 \notin \Omega$ annehmen, also $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\times$.

Da Ω einfach zusammenhängend ist, existiert auf Ω eine Logarithmus-Funktion $L \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit (Satz 2.6), d.h. es gilt $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in \Omega$. Durch

$$S(z) := e^{\frac{1}{2}L(z)}$$

erhalten wir daher auf Ω eine holomorphe Quadratwurzel (vgl. Bemerkung 2.10), d.h. $S(z)^2 = z$ für alle $z \in \Omega$. Diese Funktion S is injektiv, denn aus $S(z_1) = S(z_2)$ folgt $z_1 = S(z_1)^2 = S(z_2)^2 = z_2$. Wegen Satz 7.5 bildet S das Gebiet Ω daher biholomorph auf ein Teilgebiet $G := S(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^\times$ ab.[6]

Ist $w \in G$, so ist $-w \notin G$, denn sonst gäbe es $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $w = S(z_1)$ und $-w = S(z_2)$. Dann wäre aber $z_1 = w^2 = (-w)^2 = z_2$, ein Widerspruch zu $w \neq -w$. Ist $K_r(w) \subseteq G$, so folgt daher $-K_r(w) \cap G = \emptyset$. Nach den obigen Vorüberlegungen ist damit die erste Behauptung bewiesen.

Wir dürfen daher $\Omega \subseteq E$ annehmen. Nach Anwendung einer geeigneten affinen Transformation $\varphi(z) = \frac{z-b}{2}$ für ein $b \in \Omega$ dürfen wir sogar $0 \in \Omega$ annehmen.

2. Behauptung: Unter allen schlichten Funktionen $f \colon \Omega \to E$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$ existiert eine, für die der Wert von $f'(0)$ maximal ist.

[6] Für die geschlitzte Ebene $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ erhalten wir aus $L(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, $-\pi < \theta < \pi$ die Beziehung $S(re^{i\theta}) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ und daher $S(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ (die rechte Halbebene).

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller schlichten Abbildungen $f\colon \Omega \to E$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$. Dann ist $\mathrm{id}_\Omega \in \mathcal{S}$ und daher $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Ist $K_{\leq\varepsilon}(0) \subseteq \Omega$, so gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to E$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\varepsilon(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta,$$

woraus sofort

$$|f'(0)| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

folgt. Daher ist die Menge

$$\mathcal{S}' := \{f'(0)\colon f \in \mathcal{S}\} \subseteq [0, \varepsilon^{-1}]$$

beschränkt. Sie besitzt also ein Supremum $s_0 := \sup \mathcal{S}'$.

Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$ mit $f_n'(0) \to s_0$. Diese Folge ist beschränkt (wegen $f_n(\Omega) \subseteq E$), so dass sie nach dem Satz von Montel 4.8 eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Sei f deren Grenzfunktion. Dann gilt $f(0) = 0$, und $f'(0) = s_0$ folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz 4.2. Insbesondere ist f nicht konstant und damit sogar schlicht (Bemerkung 4.5).[7] Aus der Konstruktion folgt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$ und der Satz über die Gebietstreue ([Fi16, Satz 5.4]) zeigt uns, dass $f(\Omega)$ offen und damit in E enthalten ist. Damit ist $f \in \mathcal{S}$.

3. Behauptung: Die schlichte Funktion f aus der zweiten Behauptung bildet Ω biholomorph auf E ab.

Da f schlicht ist, müssen wir nur noch zeigen, dass $f(\Omega) = E$ ist (Satz 7.5). Dazu nehmen wir an, dass $w_0 \in E \setminus f(\Omega)$ ist. Da die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(E)$ transitiv wirkt (Aufgabe 7.2), erhalten wir nach Komposition von f mit einem $g_1 \in \mathrm{Aut}(E)$ mit $g_1(w_0) = 0$, dass 0 nicht in $G := (g_1 \circ f)(\Omega)$ enthalten ist. Da $g_1 \circ f$ biholomorph ist, ist $G \subseteq \mathbb{C}^\times$ ebenfalls einfach zusammenhängend. Es existiert also auf G eine Logarithmusfunktion L (Satz 2.6) und damit auch eine Quadratwurzel $S(z) := e^{\frac{1}{2}L(z)}$. Wir wählen nun $g_2 \in \mathrm{Aut}(E)$ mit $g_2(S(g_1(0))) = 0$. Dann ist $F := g_2 \circ S \circ g_1 \circ f\colon \Omega \to E$ eine schlichte Abbildung mit $F(0) = g_2(S(g_1(0))) = 0$ (beachte $f(0) = 0$), die wir als "Konkurrenz" zu f auffassen.

Durch $h(z) := g_1^{-1}(g_2^{-1}(z)^2)$ erhalten wir eine holomorphe Funktion $E \to E$ mit $h(0) = g_1^{-1}(S(g_1(0))^2) = g_1^{-1}(g_1(0)) = 0$, für die $h \circ F = f$ gilt. Hieraus erhalten wir $f'(0) = h'(F(0))F'(0) = h'(0)F'(0)$ und nach dem Schwarzschen Lemma $|h'(0)| < 1$, da h kein Automorphismus von E ist. Hieraus folgt $0 < f'(0) < |F'(0)|$. Daher ist

$$\widetilde{f}\colon \Omega \to E, \quad \widetilde{f}(z) := \frac{|F'(0)|}{F'(0)} F(z)$$

schlicht mit $\widetilde{f}(0) = 0$ und $\widetilde{f}'(0) = |F'(0)| > f'(0)$; im Widerspruch zur Konstruktion von f.

Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω und $p \in \Omega$ mit $\mathrm{ord}(f, p) > 1$. Zeigen Sie mit dem Satz von Rouché, dass f in keiner

[7] Hier stecken einige zentrale Sätze der Funktionentheorie drin: der Satz von Rouché, das Nullstellen zählende Integral und damit auch der Residuensatz.

Umgebung von p injektiv ist.
Hinweis: Wähle $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ für $|z-p| = r$ gilt (warum geht das?). Schließen Sie dann, dass die Funktion f für jedes ausreichend kleine w in $K_r(p)$ mindestens zwei w-Stellen besitzt und dass diese nicht alle mehrfache w-Stellen sein können.

Aufgabe 7.2. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(E)$ der offenen Kreisscheibe $E = K_1(0)$ transitiv wirkt.

Aufgabe 7.3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) := \frac{r}{z-p}$ das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-p| > r\}$ biholomorph auf E abbildet.

Aufgabe 7.4. (Automorphismen der Einheitskreisscheibe E) Sei $E := K_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe und $\mathrm{Aut}(E)$ die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von E auf sich. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $a \in E$ definiert $f_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ eine holomorphe Abbildung $E \to E$.

(b) Es gilt $f_a(0) = a$ und $f_a(a) = 0$ sowie $f_a \circ f_a = id_E$. Schließen Sie daraus $f_a \in \mathrm{Aut}(E)$.

(c) Ist $g \in \mathrm{Aut}(E)$, so existiert genau ein $a \in E$ mit $(g \circ f_a)(0) = 0$.

(d) Ist $g \in \mathrm{Aut}(E)$ mit $g(0) = 0$, so ist $|g'(0)| = 1$. Schliessen Sie daraus weiter, dass g eine Drehung ist: $g(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.

(e) Die Elemente von $\mathrm{Aut}(E)$ sind genau die Funktionen $E \to E$ der Gestalt $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und ein $a \in E$.

Aufgabe 7.5. Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine nicht konstante rationale Funktion und $P \subseteq \mathbb{C}$ die Menge ihrer Polstellen. Zeigen Sie: Ist f auf $\mathbb{C} \setminus P$ injektiv (schlicht), so ist f gebrochen linear, d.h. von der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$.
Hinweis: Korollar 3.21.

Aufgabe 7.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in \Omega$ und $f \colon \Omega \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ schlicht. Zeigen Sie, dass in p keine wesentliche Singularität vorliegt und $\mathrm{ord}(f, p) \in \{-1, 0, 1\}$ gilt.

Aufgabe 7.7. (Die Automorphismengruppe der gelochten Ebene) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^\times)$ der biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}^\times$ auf sich genau aus den Abbildungen der Form $f(z) = az$ und $f(z) = az^{-1}$ für $a \in \mathbb{C}^\times$ besteht.
Hinweis: Korollar 3.18. Wieso liegt weder in 0 noch in ∞ eine wesentliche Singularität vor?

Aufgabe 7.8. (Die Automorphismengruppe der Ebene) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ der biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ auf sich genau aus den Abbildungen der Form $f(z) = az + b$ für $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$ besteht.

Aufgabe 7.9. (Die Cayley-Transformation) Zeigen Sie, dass die Cayley-Transformation

$$C(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

die obere Halbebene $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}\, z > 0\}$ biholomorph auf $E = K_1(0)$ abbildet.

8 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta\colon \Omega := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 1\} \to \mathbb{C}, \quad \zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

ist uns auf der Halbebene $\operatorname{Re} z > 1$ aus Aufgabe 4.1 bekannt, in der gezeigt wurde, dass die Reihe auf diesem Gebiet lokal gleichmäßig konvergiert.

Zunächst tritt diese Funktion natürlich mit der Frage nach den Werten $\zeta(m)$ für natürliche Zahlen $m > 1$ auf. In Satz 5.8 habe wir gesehen wie Euler bereits vor fast 300 Jahren die Werte der Zeta-Funktion in geraden Zahlen explizit berechnen konnte. Die Hauptbedeutung der Zeta-Funktion liegt allerding in ihrer Beziehung zur Menge

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

der Primzahlen und ihrer Verteilung als Teilmenge von $\mathbb{N}$. Der Bezug zu Primzahlen ist aus der Definition nicht unmittelbar ersichtlich, ergibt sich aber sofort aus der Beschreibung der Funktion als unendlichees Produkt.

Satz 8.1. (Produktentwicklung der Zeta-Funktion; Euler 1737) *Auf Ω besitzt die Riemannsche Zeta-Funktion die lokal gleichmäßig konvergente Entwicklung als Euler-Produkt*

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}. \tag{24}$$

Insbesondere besitzt ζ in Ω keine Nullstelle.

Beweis. Die geometrische Reihe liefert uns für jedes $p \in \mathbb{P}$ und $\operatorname{Re} z > 0$ die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}},$$

da $|p^{-z}| = p^{-\operatorname{Re} z} = e^{-\operatorname{Re} z \cdot \log p} < 1$ gilt. Für jede endliche Teilmenge $S_N = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{P}$ erhalten wir mit dem Cauchy-Produktsatz aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen

$$\prod_{p \in S_N} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \prod_{p \in S_N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m_1 + \ldots + m_N = m} \frac{1}{(p_1^{m_1} \cdots p_N^{m_N})^z}.$$

Für $\operatorname{Re} z > 1$ konvergiert die rechte Seite punktweise für $N \to \infty$ gegen $\zeta(z)$, da die definierende Reihe von $\zeta(z)$ absolut konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen $\zeta(z)$ und wir erhalten so (24).

Dass dieses Produkt auf Ω lokal gleichmäßig konvergiert, folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz des unendlichen Produkts $\prod_{p \in \mathbb{P}} 1 - p^{-z}$, die wir wiederum aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} |p^{-z}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |n^{-z}| < \infty$$

erhalten (Satz 6.6). Die Produktdarstellung der Zeta-Funktion zeigt insbesondere, dass sie in Ω keine Nullstelle besitzt. $\square$

Die Anwendungen der Zeta-Funktion auf die Verteilung der Primzahlen basieren ganz wesentlich auf der Existenz einer meromorphen Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene. Ein typisches Resultat, das sich so erhalten lässt ist der *Primzahlsatz* von J. Hadamard und C. de la Vallée-Poussin:

Theorem 8.2. (Primzahlsatz) *Sei $\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P} \colon p \le x\}|$ für $x \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Die Funktion π besitzt also die gleiche Asymptotik wie die Funktion $\frac{x}{\log x}$.

Der Primzahlsatz besagt insbesondere, dass die relative Dichte $\frac{\pi(x)}{x}$ der Primzahlen in den Intervallen $[0, x]$ sich asymptotisch wie $\frac{1}{\log x}$ verhält. Für Beweise des Primzahlsatzes verweisen wir auf [BF06, §VII.4-6] oder [Ru73].

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Existenz der meromorphen Fortsetzung der Zeta-Funktion zu beweisen und ihre Funktionalgleichung herzuleiten sowie die Werte $\zeta(-n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, explizit zu berechnen.

8.1 Die Gamma-Funktion

Der Schlüssel zur meromorphen Fortsetzung der Zeta-Funktion und ihrer Funktionalgleichung ist die Eulersche Gamma-Funktion.

Wir suchen eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit

$$f(n+1) = n! \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Natürlich wird man zusätzliche Annahmen machen müssen, um eine solche Funktion eindeutig zu machen. Da mit $f(z+1)$ auch die Funktion $zf(z)$ die entsprechende Relation für $n \ge 1$ erfüllt, liegt es nahe anzunehmen, dass f die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$f(z+1) = zf(z) \quad \text{und} \quad f(1) = 1. \tag{25}$$

Mehrfaches Anwenden der Funktionalgleichung führt zu

$$f(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)f(z).$$

Für $z \to 1-n$ erhalten wir für $m := n-1$ den Grenzwert

$$\lim_{z \to -m} f(z)(z+m) = \frac{f(1)}{(-m)(-m+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Hieraus schließen wir, dass f an den Stellen $-m$, $m \in \mathbb{N}_0$, einen einfachen Pol mit

$$\mathrm{Res}_{-m}(f) = \frac{(-1)^m}{m!} \tag{26}$$

besitzt.

Daher liegt es nahe, mit dem Weierstraßschen Produktsatz die Funktion $g := \frac{1}{f}$ zu konstruieren. Wir machen hierzu den Ansatz

$$g(z) := e^{h(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big) e^{-z/k},$$

wobei h zunächst eine ganze Funktion sein soll. Dass das Weierstraß-Produkt auf der rechten Seite lokal gleichmäßig konvergiert, haben wir schon am Anfang des Beweises von Satz 6.13 über die Produktentwicklung der Sinusfunktion gesehen. Die Funktionalgleichung von f entspricht der Funktionalgleichung

$$zg(z+1) = g(z) \quad \text{und} \quad g(1) = 1. \tag{27}$$

Um zu sehen, welche Bedingungen wir an h stellen müssen, schreiben wir g als Grenzwert $g_n \to g$ für

$$g_n(z) := e^{h(z)} z \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big) e^{-z/k} := \frac{1}{n!} \exp\Big(h(z) - z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) z \prod_{k=1}^{n} (z+k).$$

Aus der Analysis I wissen wir, dass der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = 0,5772\ldots$$

existiert.[8] Man nennt die Zahl γ die *Euler–Mascheronische Konstante*. Verwenden wir diese Zahl in der Darstellung von g, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{zg(z+1)}{g(z)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{zg_n(z+1)}{g_n(z)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(h(z+1) - h(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)(z+n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(h(z+1) - h(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \log n\Big)\Big(1 + \frac{z+1}{n}\Big) \\
&= \exp(h(z+1) - h(z) - \gamma).
\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $h(z) := \gamma z$ erhalten wir also die Funktionalgleichung (27). Dies führt uns auf:

Definition 8.3. (Eulersche Gamma-Funktion) Die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^{-1} e^{z/k}$$

heißt *Gamma-Funktion*.

Wir erhalten insbesondere

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= e^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-1} e^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \cdot \exp\Big(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \exp\Big(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \exp\Big(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma - \log n\Big) = 1.
\end{aligned}$$

[8] Man verwendet hierzu die Stammfunktion $\log x$ von $\frac{1}{x}$ und vergleicht das Integral auf dem Intervall $[1, n+1]$ mit den Integralen entsprechender Stufenfunktionen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) \geq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k},$$

wobei man ausnutzt, dass die Funktion $\frac{1}{x}$ monoton fallend ist.

Aus unsrer Konstruktion folgt, dass $g = \frac{1}{\Gamma}$ eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in $-\mathbb{N}_0$ ist. Entsprechend ist Γ eine meromorphe Funktion ohne Nullstellen und mit einfachen Polen in $-\mathbb{N}_0$. Da die Gamma-Funktion der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1$$

genügt, gibt insbesondere

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Residuen erhalten wir mit (26)

$$\operatorname{Res}_{-m}(\Gamma) = \frac{(-1)^m}{m!} \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Wir stellen nun eine Verbindung zur Sinusfunktion her. Hierzu betrachten wir noch einmal die ganze Funktion $g(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$. Aus ihrer Produktentwicklung erhalten wir unmittelbar

$$\frac{g(z)g(-z)}{(-z)} = z\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$$

und daher wegen $\frac{g(-z)}{-z} = g(1-z)$ (siehe (27)) die Relation

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{28}$$

Für $z = \frac{1}{2}$ ergibt sich sofort

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$$

und damit induktiv

$$\Gamma\big(n + \tfrac{1}{2}\big) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Wir formen nun die Partialprodukte von Γ noch etwas um:

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(z) &:= e^{-\gamma z}\frac{\prod_{k=1}^n e^{z/k}}{z\prod_{k=1}^n\big(1+\frac{z}{k}\big)} \\
&= \exp\Big(z\Big(-\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\Big)\Big)\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\
&= \exp\Big(z\Big(-\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\Big)\Big)\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die *Gaussche Produktformel*:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{29}$$

Aus dieser Formel lässt sich eine Integraldarstellung der Gamma-Funktion ableiten, da sich die rechts auftretenden Produkte als Integrale ausdrücken lassen. In der Tat erhalten wir für

$x \geq 1$ durch wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt &= \frac{n}{n\cdot x}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^{x}\,dt = \frac{n(n-1)}{n^2\cdot x(x+1)}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1}\,dt \\ &= \cdots = \frac{n!}{n^n\cdot x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt \\ &= \frac{n!}{n^n\cdot x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} n^{x+n} \\ &= \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}\end{aligned}$$

Für $x \geq 1$ erhalten wir daher

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt. \tag{30}$$

Wir rechtfertigen nun die Vertauschung des Grenzübergangs mit der Integration. Der Integrand auf $[0,\infty)$ ist die Funktion

$$f_n(t) = \chi_{[0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$$

und es gilt für $t \geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}.$$

Wegen

$$0 \leq 1-\frac{t}{n} \leq e^{-t/n} \quad \text{für} \quad t \leq n$$

ist

$$f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1} \quad \text{für} \quad n\in\mathbb{N}, t\geq 0.$$

Da die Majorante $e^{-t}t^{x-1}$ für $x > 1$ integrierbar ist, erhalten wir aus dem Lebesgueschen Satz über die majorisierte Konvergenz und (30) die Integralformel, die oft zur Definition der Gamma-Funktion verwendet wird:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{31}$$

Satz 8.4. (Integraldarstellung der Gamma-Funktion) *Für* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Beweis. Für $x = \operatorname{Re} z > 0$ existiert wegen

$$\int_0^\infty |e^{-t}t^{z-1}|\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt < \infty$$

das Integral $F(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ für $\operatorname{Re} z > 0$. Differentiation unter dem Integral zeigt, dass F eine holomorphe Funktion ist. Wegen (31) stimmt F auf dem Intervall $(0,\infty)$ mit Γ überein, so dass der Identitätssatz schließlich $F = \Gamma$ liefert. □

Wir schließen unsere Diskussion der Gamma-Funktion mit der folgenden Verdopplungsformel, die wir für die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion benötigen.

Satz 8.5. (Legendresche Verdopplungsformel) *Für* $z \notin \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots\}$ *gilt die Verdopplungsformel*

$$\Gamma(2z) = \frac{4^z}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big).$$

Beweis. Wegen $\Gamma(1) = 1$ existiert eine ausreichend kleine Kreisscheibe $K_r(1)$, so dass $\operatorname{Re}\Gamma(z) > 0$ für $z \in K_r(1)$ gilt. Insbesondere ist dann $\log\Gamma(z)$ definiert. Ebenso dürfen wir annehmen, dass $\operatorname{Re}\Gamma\big(z+\frac{1}{2}\big) > 0$ und $\operatorname{Re}\Gamma(2z) > 0$ für $z \in K_r(1)$ gilt.

Im folgenden sei also $z \in K_r(1)$. Eine direkte Rechnung liefert

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) = \frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}$$

(Aufgabe 8.1). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\log\Big(\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\big(z+\frac{1}{2}+k\big)^2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\big(2z+2k+1\big)^2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+k)^2} = \frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(2z).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\log\Big(\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big) - \log\Gamma(2z)$$

auf einer ausreichend kleinen 1-Umgebung eine lineare Funktion, also ergibt sich die folgende Identität meromorpher Funktion aus dem Identitätssatz:

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)} = e^{az+b}$$

für Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$. Einsetzen von $z = 1$ und $z = \frac{1}{2}$ führt zu

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = e^{b+a} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\pi} = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = e^{b+\frac{a}{2}}.$$

Hieraus folgt $e^a = \frac{1}{4}$ und $e^b = 2\sqrt{\pi}$. □

8.2 Meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion

In diesem Abschnitt leiten wir die meromorphe Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion her. Hierbei folgen wir in groben Zügen der Darstellung in [La99, §XV.4].

Wir beginnen hierzu mit der Integraldarstellung der Gamma-Funktion, die wir durch die Transformation $t' = (n+1)t$ umschreiben

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^s\frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-(n+1)t}(n+1)^s t^s\frac{dt}{t} \qquad \text{für} \qquad \operatorname{Re}s > 0.$$

Nach Division durch $(n+1)^s$ erhalten wir so

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(n+1)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} t^s \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t} \Big) t^s \frac{dt}{t}.$$

Mit der Formel für die geometrischen Reihe ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Mit der meromorphen Funktion

$$G(z) := \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} = \frac{1}{e^z - 1}$$

erhalten wir so

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} G(t) t^s \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t}. \tag{32}$$

Für die Funktion

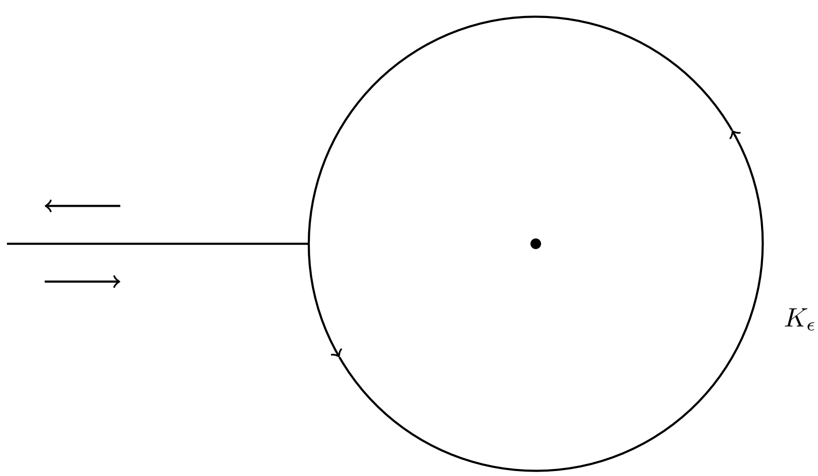
$$F(z) := \frac{e^z}{e^z - 1} = -G(-z)$$

betrachten wir nun das sogenannte *Hankel-Integral*

$$H(s) := \int_C F(z) z^s \frac{dz}{z},$$

wobei die Kontur C zusammengesetzt ist durch die Kurven $(-\infty, -\varepsilon)$, einen geschlossenen positiv orientierten Kreisbogen K_ε, der $\partial K_\varepsilon(0)$ parametrisiert und die Halbachse von $-\varepsilon$ bis $-\infty$; symbolisch haben wir also:

$$\int_C = \int_{-\infty}^{\varepsilon} + \oint_{|z|=\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty}.$$



Hierbei hat man für das erste Integral für $z^s = e^{s \log z}$ den Grenzwert $x^s = |x|^s e^{-s\pi i}$ von unten zu verwenden und für das dritte Integral den Grenzwert $x^s = |x|^s e^{s\pi i}$ von oben. Insbesondere heben sich dadurch die beiden Integrale nicht auf. Die Existenz der uneigentlichen Integrale folgt hier sofort aus dem schnellen Abfall der Exponentialfunktion auf der negativen reellen Achse, der insbesondere auch ein Ableiten unter dem Integral erlaubt, so dass H eine ganze Funktion ist. Die Unabhängigkeit des Integrals von ε folgt durch einen Grenzübergang aus dem Cauchyschen Integralsatz. Konkret haben wir

$$\begin{aligned} H(s) &= e^{-s\pi i} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^x}{e^x - 1} |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} + e^{s\pi i} \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} |x|^s \frac{dx}{x} \\ &= (e^{-s\pi i} - e^{s\pi i}) \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^x}{e^x - 1} |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \\ &= -2i \sin(\pi s) \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^x}{e^x - 1} |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \\ &= 2i \sin(\pi s) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \\ &= -2i \sin(\pi s) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \\ &= -2i \sin(\pi s) \int_{\varepsilon}^{\infty} G(x) |x|^s \frac{dx}{x} + \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

Mit

$$\oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} F(\varepsilon e^{it}) \varepsilon^s e^{its} i \, dt$$

erhalten wir die Abschätzung

$$\Big| \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} \Big| \leq 2\pi \sup_{|z|=\varepsilon} |F(z)| \cdot \varepsilon^{\operatorname{Re} s} e^{\pi |\operatorname{Im} s|}.$$

Da F in 0 einen einfachen Pol besitzt, führt dies für $\operatorname{Re} s > 1$ zu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z} = 0.$$

Mit (32) erhalten wir

$$H(s) = -2i \sin(\pi s) \int_0^{\infty} G(x) x^s \frac{dx}{x} = -2i \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{33}$$

Wegen $G(x) \sim \frac{1}{x}$ für kleine positive x, folgt die Existenz des Integrals auch direkt aus der Endlichkeit es Integrals $\int_0^1 x^a \, dx$ für $a > -1$. Stellen wir (33) um, so erhalten wir:

Satz 8.6. (Meromorphe Fortsetzungen der Zeta-Funktion) *Durch*

$$\zeta(s) = -\frac{H(s)\Gamma(1-s)}{2\pi i} \tag{34}$$

erhalten wir eine meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion auf $\mathbb{C}$, *die nur in* $s_0 = 1$ *einen einfachen Pol besitzt.*

Beweis. Aus (28) wissen wir, dass

$$\sin(\pi s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)}$$

ist, woraus sich die Formel für $\zeta(s)$ ergibt. Da H eine ganze Funktion ist und Γ meromorph, folgt die Existenz der meromorphen Fortsetzung der Zeta-Funktion.

Da $\Gamma(1-s)$ einfache Pole in allen $m \in \mathbb{N}$ besitzt, besitzt $\zeta(s)$ höchstens dort Pole, die maximal die Ordnung 1 haben können. Aus der Definition von ζ durch die Reihendarstellung folgt aber, dass in $\{2, 3, \ldots\}$ keine Pole vorliegen. Wegen

$$\lim_{s \to 1+} \zeta(s) = \lim_{s \to 1+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(monotone Konvergenz) liegt in 1 eine Polstelle vor. □

Da die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion in den negativen ganzen Zahlen definiert ist, möchten wir auch dort ihre Werte berechnen.

Satz 8.7. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\zeta(1-n) = -(n-1)! \operatorname{Res}_0 \left(\frac{F(z)}{z^n} \right).$$

Konkret haben wir

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} = B_1 \quad \textit{und} \quad \zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n},$$

wobei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Bernoullizahlen sind, also $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ gilt.

Beweis. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist der Integrand des Hankelintegrals

$$H(1-n) = \int_C F(z) z^{-n} \, dz$$

eine meromorphe Funktion, so dass sich die Integrale über die negative Halbachse gegeneinander aufheben. Es bleibt

$$H(1-n) = 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{F(z)}{z^n} \right)$$

und damit

$$\zeta(1-n) = -\frac{H(1-n)\Gamma(n)}{2\pi i} = -(n-1)! \operatorname{Res}_0 \left(\frac{F(z)}{z^n} \right).$$

Um dieses Residuum zu berechnen, erinnern wir uns an

$$F(z) = \frac{e^z}{e^z - 1} = 1 + \frac{1}{e^z - 1} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}.$$

Aus $B_1 = -1/2$ erhalten wir daher

$$\zeta(0) = -\operatorname{Res}_0(F(z)/z) = -(1 + B_1) = -\frac{1}{2},$$

und für $n > 1$ erhalten wir

$$\zeta(1-n) = -(n-1)! \frac{B_n}{n!} = -\frac{B_n}{n}.$$

□

Bemerkung 8.8. (a) Aus Satz 8.7 folgt insbesondere

$$\zeta(-2k) = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Man spricht hier von den *trivialen Nullstellen* der Zeta-Funktion.

(b) Bei Euler findet man die Relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n = \zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

die zunächst unsinnig aussieht, da die Reihe auf der linken Seite nicht konvergiert. Versteht man diesen Ausdruck allerdings im Sinne der analytischen Fortsetzung der Zeta-Funktion, so ergibt sich die Aussage aus Satz 8.7.

Um die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion zu finden, benötigen wir eine etwas explizitere Form der Hankel-Funktion H.

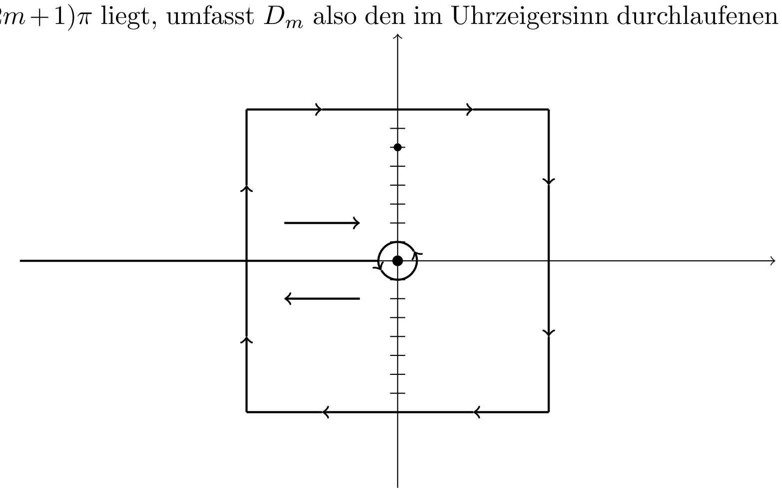
Satz 8.9. *Für* $\operatorname{Re} s < 0$ *ist*

$$H(s) = -(2\pi)^s 2i \sin(\pi s/2)\zeta(1-s).$$

Beweis. Sei $2 \leq m \in \mathbb{N}$ und D_m ein polygonaler geschlossener Weg, der in $\mathbb{C}$ sukzessive die Punkte

$$-\varepsilon, -(2m+1)\pi, (2m+1)(-1+i), (2m+1)\pi(1+i), (2m+1)\pi(1-i), -(2m+1)\pi(1+i), -(2m+1)\pi, -\varepsilon$$

durchläuft, zusammen mit der Parametrisierung von $\partial K_\varepsilon(0)$. Hierbei nehmen wir $0 < \varepsilon < 1$ an. Neben dem Anteil C_ε von C, der innerhalb des Quadrats Q_m um 0 der halben Seitenlänge $(2m+1)\pi$ liegt, umfasst D_m also den im Uhrzeigersinn durchlaufenen Rand dieses Quadrats.



Sei

$$R_n := \operatorname{Res}_{2\pi i n}(F(z)z^{s-1}) \quad \text{für} \quad 0 < |n| \leq m.$$

Dann ist nach dem Residuensatz

$$\int_{D_m} F(z)z^s \frac{dz}{z} = -2\pi i \sum_{0<|n|\leq m} R_n,$$

denn die Umlaufzahl ist für alle Pole -1. Für $n \geq 1$ haben wir

$$R_n = -i(2\pi n)^{s-1} e^{\pi i s/2} \quad \text{und} \quad R_{-n} = i(2\pi n)^{s-1} e^{-\pi i s/2}.$$

Für $n > 0$ folgt dies aus

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{2\pi i n}(F(z) z^{s-1}) &= \lim_{z \to 2\pi i n} \frac{z - 2\pi i n}{e^z - 1} e^z z^{s-1} \\
&= \frac{1}{e^{2\pi i n}} e^{2\pi i n} (2\pi n i)^{s-1} = (2\pi n i)^{s-1} = (2\pi n)^{s-1} e^{i\pi(s-1)/2}
\end{aligned}$$

und R_{-n} wird analog berechnet.

Wir zeigen nun, dass $\lim_{m\to\infty} \int_{\partial Q_m} F(z) z^s \frac{dz}{z} = 0$ für $\operatorname{Re} s < 0$ gilt. Hierzu schreiben wir $z = x + iy$ und $F(z) = 1 + \frac{1}{e^z - 1}$. Wir zeigen zuerst, dass wir für $|F(z)|$ auf ∂Q_m eine von m unabhängige Schranke haben. Auf den vertikalen Quadratseiten haben wir

$$|e^z - 1|^2 \geq (e^x - 1)^2 \geq (e^{-\pi} - 1)^2 \geq \frac{1}{4}$$

und auf den horizontalen Seiten ergibt sich aus $y = \pm(2m + 1)\pi$ die Abschätzung

$$|e^z - 1| = |-e^x - 1| = 1 + e^x \geq 1.$$

Wir haben also $|F(z)| \leq 2$ für $z \in \partial Q_m$. Weiter haben wir für $z = re^{i\theta} \in \partial Q_m$

$$|z^{s-1}| = r^{\operatorname{Re} s - 1} |e^{(s-1)i\theta}| \leq C m^{\operatorname{Re} s - 1},$$

wobei die Konstante C nicht von m abhängt. Damit erhalten wir

$$\left| \int_{\partial Q_m} F(z) z^{s-1}\, dz \right| \leq C 4(2m + 1)\pi m^{\operatorname{Re} s - 1} \to 0$$

für $m \to \infty$ und $\operatorname{Re} s < 0$. Damit ergibt sich

$$H(s) = \int_C F(z) z^s \frac{dz}{z} = \lim_{m\to\infty} \int_{D_m} F(z) z^s \frac{dz}{z} = -2\pi i \sum_{0<|n|} R_n.$$

Durch Summation der Residuen ergibt sich schließlich für $\operatorname{Re} s < 0$

$$\begin{aligned}
H(s) &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} -i(2\pi n)^{s-1} e^{\pi i s/2} + i(2\pi n)^{s-1} e^{-\pi i s/2} \\
&= -(2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{\pi i s/2} - n^{s-1} e^{-\pi i s/2} \\
&= -(2\pi)^s 2i \sin(\pi s/2) \zeta(1 - s).
\end{aligned}$$

□

Hieraus lässt sich die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion ableiten:

Theorem 8.10.

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \Gamma(1 - s) \frac{\sin(\pi s/2)}{\pi} \zeta(1 - s).$$

Beweis. Für $\operatorname{Re} s < 0$ folgt diese Formel aus Satz 8.6 und Satz 8.9 durch

$$\zeta(s) = -\frac{H(s)\Gamma(1-s)}{2\pi i} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}(2\pi)^s 2i \sin(\pi s/2)\zeta(1-s)$$

und damit durch den Identitätssatz bzw. durch analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. □

Der folgende Satz bringt die Funktionalgleichung der Zeta-Funktion in eine symmetrischere Form:

Satz 8.11. *Die Funktion* $\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ *ist ganz und punktsymmetrisch bezüglich* $s_0 = \frac{1}{2}$*:*

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Beweis. Der Faktor $s(s-1)$ ist invariant unter der Transformation $s \mapsto 1-s$. Dass der übrige Teil ebenfalls invariant ist, reduziert sich auf die Gleichung

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s),$$

die sich mit Theorem 8.10 und durch Kürzen von $\zeta(1-s)$ umformen lässt zu

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\Gamma(1-s)(2\pi)^s\frac{\sin(\pi s/2)}{\pi} = \pi^{(s-1)/2}\Gamma((1-s)/2).$$

Weiteres Vereinfachen führt zu

$$\Gamma(s/2)\Gamma(1-s)2^s \sin(\pi s/2) = \sqrt{\pi}\Gamma((1-s)/2). \tag{36}$$

Aus (28) gewinnen wir die Relation

$$\pi = \sin(\pi s/2)\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{s}{2}\Big)$$

und damit bleibt zu zeigen:

$$\Gamma(1-s)2^s\sqrt{\pi} = \Gamma\Big(1-\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big).$$

Dies folgt für $z = \frac{1-s}{2}$ aus der Verdopplungsformel der Gamma-Funktion (Satz 8.5). Damit ist (35) gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, dass ξ eine ganze Funktion ist. Da ζ nur einen einfachen Pol in $s_0 = 1$ besitzt, hat $(s-1)\zeta(s)$ keinen Pol. Also liegen in der rechten Halbebene $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ keine Pole. Aus (35) folgt damit, dass ξ keine Polstellen besitzt. □

8.3 Die Riemannsche Vermutung

Die folgende Vermutung ist eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Zahlentheorie. Für $\operatorname{Re} z > 1$ folgt aus der Produktdarstellung von $\zeta(z)$ (Satz 8.1), dass $\zeta(z) \neq 0$ ist. Darüber hinaus ist bekannt, dass unendlich viele Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ liegen.

Vermutung 8.12. (Riemannsche Vermutung; 1859) *Für* $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ *gilt* $\zeta(z) \neq 0$.

Die Beweise von Hadamard und de la Vallée-Poussin für den Primzahlsatz (Satz 8.2) stützen sich beide auf die folgende schwächere Form der Riemannschen Vermutung (siehe [BF06, §VII.5] für einen Beweis):

Theorem 8.13. *Die Riemannsche Zeta-Funktion* ζ *besitzt auf der Geraden* $\operatorname{Re} z = 1$ *keine Nullstelle.*

Aufgaben zu Kapitel 8

Aufgabe 8.1. Wir betrachten die Gaußsche ψ-Funktion $\psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, also die logarithmische Ableitung der Gammafunktion. Zeigen Sie:

(a) ψ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $-\mathbb{N}_0$ und $\operatorname{Res}_{-m}(\psi) = -1$.

(b) $\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$. (Hinweis: Funktionalgleichung der Gamma-Funktion).

(c) $\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z)$. (Hinweis: Formel für $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$.)

(d) $\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right)$

(e) $\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$.

(f) Für $x > 0$ ist $(\log \Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} > 0$, die Gammafunktion ist also auf $(0, \infty)$ logarithmisch konvex.

Aufgabe 8.2. Zeigen Sie, dass die Bernoulli-Zahlen der Relation

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j = B_k \quad \text{für} \quad k \geq 2$$

genügen.

Aufgabe 8.3. Zeigen Sie, dass die Eulersche Produktformel für Γ auch aus der Gaußschen Darstellung gewonnen werden kann:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad \text{(C. F. Gauß)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k} \qquad \text{(L. Euler).}$$

Aufgabe 8.4. Berechnen Sie für $\varepsilon > 0$ den Wert des Kurvenintegrals

$$\Phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} z^s \frac{dz}{z} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C},$$

wobei für $z^s = e^{s \log z}$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ zugrunde gelegt wird: $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ für $-\pi < \theta < \pi$.

- Für welche Werte von s hängt Φ von ε ab?
- Zeigen Sie, dass Φ eine ganze Funktion ist.

Aufgabe 8.5. (H ist eine ganze Funktion) Zeigen Sie, dass

(a) $\Psi(s) := \oint_{|z|=\varepsilon} F(z) z^s \frac{dz}{z}$ für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $F(z) := \frac{e^z}{e^z - 1}$ eine ganze Funktion definiert.

(b) $\Psi(s) := \oint_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} |x|^s \frac{dx}{x}$ für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ eine ganze Funktion definiert.

9 Elliptische Funktionen

Viele der wichtigen ganzen Funktionen sind periodisch: sin und cos sind 2π-periodisch und exp ist $2\pi i$-periodisch. In diesem Abschnitt diskutieren wir meromorphe Funktionen, die nicht nur eine Periode besitzen, sonder doppelt-periodisch sind; man nennt sie *elliptische Funktionen.*

Historisch wurden diese Funktionen auf einem Umweg entdeckt. Der Ausgangspunkt der Theorie der elliptischen Funktionen, dem sie ihren Namen schulden, ist die Theorie der elliptischen Integrale. Allgemein versteht man hierunter Integrale der Form $\int r(x)\sqrt{P(x)}\,dx$, wobei r eine rationale Funktion ist und P ein Polynom dritten oder vierten Grades ohne doppelte Nullstellen. Insbesondere stellt sich in dieser Theorie die Frage nach einer Stammfunktion von Funktionen der Gestalt $\frac{1}{\sqrt{P(x)}} = \frac{\sqrt{P(x)}}{P(x)}$, da sich diese nicht durch andere elementare Funktionen wie Logarithmen und trigonometrische Funktionen darstellen lassen. Nach einem Satz von N. H. Abel ([BF06, Thm. V.5.1]), besitzen die Stammfunktionen $f(x)$ von $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ die Eigenschaft, dass sich ihre lokal definierte Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu einer elliptischen Funktion meromorph fortsetzen lässt. Historisch wurde diese Phänomen zuerst für die Funktion $P(x) = 1 - x^4$ betrachtet, da das zugehörige Integral bei der Bogenlänge der Lemniskate auftritt (Aufgabe 9.8)

Dies war die Motivation für Weierstraß auf funktionentheoretischem Wege eine Theorie elliptischer Funktionen zu entwickeln (1862/63). Diesem Weg werden wir in diesem Abschnitt folgen. Im Zentrum dieser Entwicklung steht die *Weierstraßsche Funktion* $\wp(z)$. In diesem Kontext wird die Theorie der elliptischen Integrale zu einer Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen.

9.1 Periodengitter

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen grundlegenden Anmerkungen zu Perioden.

Definition 9.1. Eine komplexe Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *Periode der meromorphen Funktion* f, wenn

$$f(z+\omega) = f(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}$$

gilt. Wir schreiben $\mathrm{Per}(f) \subseteq \mathbb{C}$ für die Menge der Perioden von f.

Bemerkung 9.2. (a) Für jede meromorphe Funktion ist $\mathrm{Per}(f)$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{C}$.

(b) Für konstante Funktionen f ist $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{C}$.

Lemma 9.3. *Ist f eine nichtkonstante meromorphe Funktion, so ist* $\mathrm{Per}(f)$ *eine diskrete Untergruppe von* $\mathbb{C}$.

Beweis. Da wir schon wissen, dass $\mathrm{Per}(f)$ eine Untergruppe ist, müssen wir nur noch die Diskretheit zeigen. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ keine Polstelle von f. Dann ist $f(z_0+\omega) = f(z_0)$ für jedes $\omega \in \mathrm{Per}(f)$. Da f nicht konstant ist, ist die Teilmenge $z_0 + \mathrm{Per}(f)$ diskret, also ist $\mathrm{Per}(f)$ diskret. □

Die diskreten Untergruppen von $(\mathbb{C}, +)$ lassen sich leicht beschreiben (Aufgabe 9.2):

Satz 9.4. (Diskrete Untergruppen von $\mathbb{C}$) *Ist $\{0\} \neq \Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe, so gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$ *für ein* $\omega \in \mathbb{C}^\times$ (Γ *ist zyklisch*).

(b) $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ *für zwei reell linear unabhängige komplexe Zahlen* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^\times$ (Γ *ist eine Untergruppe vom Rang* 2).

Definition 9.5. Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subseteq (\mathbb{C}, +)$ vom Rang 2 heißt *Gitter*. Eine *elliptische Funktion f zum Periodengitter* Γ ist eine meromorphe Funktion mit $\mathrm{Per}(f) = \Gamma$.

Wird Γ von ω_1 und ω_2 erzeugt, so heißt

$$P := \{t\omega_1 + s\omega_2 \colon 0 \leq t, s < 1\}$$

das zugehörige *Periodenparallelogramm.* Es gilt $\mathbb{C} = P + \Gamma$ und die Addition $P \times \Gamma \to \mathbb{C}$ ist sogar bijektiv (Aufgabe 9.3).

9.2 Der Körper der elliptischen Funktionen

Der folgende Satz ist trivial:

Satz 9.6. *Die elliptischen Funktionen zu einem gegebenen Periodengitter Γ bilden einen Körper $K(\Gamma)$, der die Konstanten enthält. Ist $f \in K(\Gamma)$, so auch die Ableitung f'.*

Satz 9.7. *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

Beweis. Ist $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und elliptisch bzgl. $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, so ist $f(\mathbb{C}) = f(\overline{P})$, wobei

$$\overline{P} := [0, 1]\omega_1 + [0, 1]\omega_2$$

das von ω_1 und ω_2 aufgespannte abgeschlossen Periodenparallelogramm ist. Da $\overline{P}$ kompakt ist und f stetig, ist f beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. □

An dieser Stelle kann man sich fragen, ob es überhaupt nichtkonstante elliptische Funktionen gibt. Holomorphe Funktionen scheiden aus. Die Aussage lässt sich sogar verfeinern:

Satz 9.8. *Besitzt die elliptische Funktion f im Periodenparallelogramm P höchstens einen einfachen Pol, so ist f konstant.*

Dieser Satz folgt wiederum aus der folgenden allgemeineren Aussage, denn existiert nur ein Pol a, so zeigt Satz 9.9, dass $\mathrm{Res}_a(f) = 0$ ist, die Singularität ist also hebbar und Satz 9.8 folgt aus Satz 9.7.

Satz 9.9. *Sei f eine elliptische Funktion und $a_1, \ldots, a_k$ die paarweise verschiedenen Polstellen von f in P. Dann ist*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_j}(f) = 0.$$

Beweis. **1. Schritt:** Wir nehmen zuerst an, dass kein a_j auf ∂P liegt und dass (ω_1, ω_2) eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bildet (falls nicht vertauschen wir die beiden Erzeuger). Dann ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial P} f(z)\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \Big(\int_{[0,\omega_1]} f(z)\, dz + \int_{[\omega_1, \omega_1+\omega_2]} f(z)\, dz + \int_{[\omega_1+\omega_2, \omega_2]} f(z)\, dz + \int_{[\omega_2, 0]} f(z)\, dz \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \Big(\int_{[0,\omega_1]} f(z)\, dz + \int_{[0,\omega_2]} f(z)\, dz - \int_{[0,\omega_1]} f(z)\, dz - \int_{[0,\omega_2]} f(z)\, dz \Big) = 0.
\end{aligned}$$

2. Schritt: Liegt ein a_j auf ∂P, so existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $z_0 + \partial P = \partial(z_0 + P)$ kein a_j enthält (Aufgabe 9.4) und wir integrieren stattdessen über den Rand von $P' := z_0 + P$. Da jeder Pol a_j von f in P genau einem Pol $a'_j \in (a_j + \Gamma) \cap P'$ entspricht, ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j}(f) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a'_j}(f) = 0. \qquad \square$$

Den obigen Satz sollte man mit Satz 3.17 vergleichen, der eine ähnliche Aussage für Funktionen $\frac{f'}{f}$ liefert, wenn f auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph ist. Allerdings ist nicht jede Funktion eine logarithmische Ableitung. So ist z.B. $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph mit dem einzigen Pol 0, aber $\mathrm{Res}_0(f) \neq 0$.

Da Satz 9.9 stärker ist als Satz 3.17, lassen sich insbesondere die entsprechenden Folgerungen aus ihm ableiten (vgl. Korollar 3.21):

Satz 9.10. *Für eine nicht konstante elliptische Funktion f und $w \in \mathbb{C}$ hängt die Anzahl der w-Stellen in P nicht von w ab und stimmt mit der Summe der Ordnungen der Polstellen in P überein.*

Beweis. Da die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f}$ ebenfalls elliptisch ist, ist ihr Gesamtresiduum in P Null. Andererseits zählt dieses Residuum die Differenz der Null- und Polstellen in P (Satz 3.8). Um diesen Satz anzuwenden, verschieben wir P wieder so, dass auf dem Rand weder Null- noch Polstellen liegen. Wenden wir dieses Argument auf $f - w$ an, so ergibt sich, dass für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Zahl der w-Stellen in P nicht von w abhängt und mit der Summe der Polstellenordnungen übereinstimmt. $\square$

Wir haben nun nicht konstante elliptische Funktionen zu finden. Nachdem was wir bereits wissen, sind die einfachsten Kandidaten:

- Funktionen mit einem Pol der Ordnung 2 und Residuum 0 in P.
- Funktionen mit zwei einfachen Polen in P deren Residuen sich zu 0 addieren.

Wir betrachten hier nur den ersten Fall und verfolgen einen Mittag–Leffler-Ansatz, der sicherstellt, dass die Funktion Γ-periodisch ist.

Satz 9.11. *Die Funktion*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Gamma} \Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \Big)$$

definiert eine elliptische Funktion.

Diese Funktion heißt *Weierstraßsche $\wp$-Funktion.*

Beweis. **1. Schritt:** Zuerst zeigen wir die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe. Für $|z| \leq r$ und $|\omega| > 2r$ erhalten wir

$$\Big| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \Big| = \frac{|z| \cdot |2\omega - z|}{|\omega|^2 |\omega - z|^2} \leq \frac{r \cdot 3|\omega|}{|\omega|^2 \cdot \frac{|\omega|^2}{4}} \leq \frac{c}{|\omega|^3}$$

für eine Konstante $c > 0$. Da nur endlich viele ω die Bedingung $|\omega| < r$ erfüllen, erhalten wir für die Restreihe auf $K_r(0)$ die Majorante $\sum_{0 \neq \omega \in \Gamma} \frac{1}{|\omega|^3}$.

2. Schritt: $\sum_{0\neq\omega\in\Gamma}\frac{1}{|\omega|^3}<\infty$. Sei $\varphi\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ die bijektive reell lineare Abbildung, die durch $\varphi(1)=\omega_1$ und $\varphi(i)=\omega_2$ gegeben ist. Da φ^{-1} stetig ist, existiert eine Konstante $C>0$ mit

$$C|n_1+in_2|\leq|\varphi(n_1+in_2)|=|n_1\omega_1+n_2\omega_2|.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{0\neq\omega\in\Gamma}\frac{1}{|\omega|^3}\leq C^{-3}\sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{\|x\|_2^3}$$

und wir müssen die Konvergenz der rechten Reihe nachweisen. Sei hierzu $Q_n=[-n,n]^2\subseteq\mathbb{R}^2$. Dann enthält $\partial Q_n\cap\mathbb{Z}^2$ genau $8n$ Gitterpunkte. Damit erhalten wir

$$\sum_{0\neq\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{\|x\|_2^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in\partial Q_n}\frac{1}{\|x\|_2^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2}<\infty.$$

Hieraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe.

3. Schritt: Um die Periodizität von $\wp$ nachzuweisen, beachten wir zuerst, dass die Ableitung

$$\wp'(z)=-2\sum_{\omega\in\Gamma}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

offensichtlich Γ-periodisch ist. Für ein festes $\omega_0\in\Gamma$ erhalten wir daher

$$\frac{d}{dz}\big(\wp(z+\omega_0)-\wp(z)\big)=\wp'(z+\omega_0)-\wp'(z)=0,$$

also existiert ein $c\in\mathbb{C}$ mit

$$\wp(z+\omega_0)-\wp(z)=c.$$

Für $z:=-\frac{\omega_0}{2}$ erhalten wir

$$\wp\Big(\frac{\omega_0}{2}\Big)-\wp\Big(-\frac{\omega_0}{2}\Big)=c.$$

Da $\wp$ offensichtlich eine gerade Funktion ist, muss $c=0$ sein. Also ist $\wp$ ebenfalls Γ-periodisch. $\square$

Wir bestimmen nun die Laurententwicklungen von $\wp$ und $\wp'$ um den Nullpunkt. Für $\omega\neq0$ haben wir für $|z|<|\omega|$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{\omega^{k+1}},\tag{37}$$

denn

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}=\frac{d}{dz}\frac{1}{\omega-z}=\frac{1}{\omega}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}}=\frac{1}{\omega}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\omega^k}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{z^{k-1}}{\omega^{k+1}}.$$

Mit (37) erhalten wir

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in\Gamma}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{\omega^{k+1}}=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}k\Big(\sum_{0\neq\omega\in\Gamma}\frac{1}{\omega^{k+1}}\Big)z^{k-1}.$$

Wegen $\Gamma = -\Gamma$ verschwindet $\sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{1}{\omega^{k+1}}$ für gerade k (für die Konvergenz siehe den 1. Schritt im Beweis von Satz 9.9). Wir erhalten also

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} z^{2k} \quad \text{mit} \quad c_{2k} = (2k+1) \sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{1}{\omega^{2k+2}}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \cdots \\
\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \cdots \\
\wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \cdots .
\end{aligned} \tag{38}$$

Für die elliptische Funktion

$$f(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20c_2\wp(z) + 28c_4$$

ergibt sich damit als einzig möglicher Pol im Periodenparallelogramm P der Nullpunkt. Aus den Laurententwicklungen der Summanden folgt aber, dass in 0 eine hebbare Singularität mit dem Wert $f(0) = 0$ vorliegt. Aus Satz 9.7 folgt daher $f = 0$. Wir haben damit gezeigt:

Satz 9.12. (Differentialgleichung der $\wp$-Funktion) *Es gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \quad \textit{mit} \quad g_2 = 60 \sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{1}{\omega^4} \quad \textit{und} \quad g_3 = 140 \sum_{0\neq\omega\in\Gamma} \frac{1}{\omega^6}.$$

Wir leiten diese Differentialgleichung nun noch auf eine andere Weise her, um mehr Information über das Polynom $y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3)$ zu erhalten.

Da die $\wp$-Funktion in P genau einen Pol, und zwar der Ordnung zwei, besitzt, nimmt sie jeden Wert genau zweimal an. In den Nullstellen der Ableitung $\wp'$ wird der Wert jeweils mit der Vielfachheit 2 angenommen. Die Nullstellen von $\wp'$ sind leicht zu finden. Da $\wp'$ ungerade und periodisch ist, erhalten wir für jedes $\omega \in \Gamma$ die Beziehung

$$\wp'(\omega - z) = \wp'(-z) = -\wp'(z)$$

und damit eine Nullstelle in $\frac{\omega}{2}$. In P erhalten wir so die Nullstellen

$$\rho_1 := \frac{\omega_1}{2}, \quad \rho_2 := \frac{\omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \rho_3 := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{39}$$

Da $\wp'$ in P genau einen Pol, und zwar der Ordnung 3, besitzt, besitzt $\wp'$ in P genau drei Nullstellen (Satz 9.10). Wir haben also alle gefunden. Für $j = 1, 2, 3$ schreiben wir $e_j := \wp(\rho_j)$. Diese Werte sind paarweise verschieden, da alle mit der Vielfachheit 2 angenommen werden. Die gerade elliptische Funktion

$$f(z) := \wp'(z)^2 - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

hat in P höchsten einen Pol in 0, dessen Ordnung wegen (38) maximal 4 ist. Sie verschwindet in ρ_1, ρ_2, ρ_3 jeweils von der Ordnung 2. Wegen Satz 9.10 ist das nur dann möglich, wenn f konstant ist, also $f = 0$. Damit erhalten wir die zweite Differentialgleichung für $\wp$:

Satz 9.13. *Die Funktion $\wp$ genügt der Differentialgleichung*

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \quad \textit{mit} \quad e_j = \wp(\rho_j), j = 1, 2, 3.$$

Vergleich der Sätze 9.12 und 9.13 zeigt, dass die e_j die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms

$$4x^3 - g_2 x - g_3$$

sind. Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) &= g_2 \\ 4e_1e_2e_3 &= g_3. \end{aligned}$$

Satz 9.14. (Struktur des Körpers $K(\Gamma)$ der elliptischen Funktionen) *Jede elliptische Funktion ist eine rationale Funktion von $\wp$ und $\wp'$. Durch $\Phi(t) := \wp'$ und $\Phi(s) := \wp$ erhalten wir einen Isomorphismus*

$$\Phi \colon \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3) \to K(\Gamma).$$

Beweis. **1. Schritt:** Sei f eine gerade elliptische Funktion, also $f(-z) = f(z)$. Da f' nur endlich viele Nullstellen in P besitzt, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass f fast alle $c \in \mathbb{C}$ (mit nur endlich vielen Ausnahmen) an genau m verschiedenen Punkten in P annimmt (Satz 9.10). Sei $c = f(a)$ ein solcher Wert. Da f gerade ist, ist auch $c = f(-a)$. Ist $a = -a + \omega$ für ein $\omega \in \Gamma$, so folgt

$$f(a + z) = f(a - \omega + z) = f(-a + z) = f(a - z).$$

Dann ist aber $f'(a + z) = -f'(a - z)$ und somit $f'(a) = 0$, im Widersprich zur Wahl von a. Folglich ist

$$-a \notin a + \Gamma. \tag{40}$$

Daher ist m gerade. Der Wert wird in P also genau $m = 2k$ mal angenommen, in $a_1, \ldots, a_k$ und $a'_1, \ldots, a'_k$, wobei $a'_j \in -a_j + \Gamma$ gilt.

Sei d ein weiterer Wert, der von f an $2k$ verschiedenen Punkten $b_1, \ldots, b_k, b'_1, \ldots, b'_k$ angenommen wird. Dann ist

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

eine elliptische Funktion mit den Nullstellen a_j, a'_j und Polen erster Ordnung in den b_j, b'_j. Eine andere elliptische Funktion mit dieser Eigenschaft ist

$$G(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \cdots (\wp(z) - \wp(a_k))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \cdots (\wp(z) - \wp(b_k))}.$$

Wir beachten, dass $\wp'$ wegen (40) in keinem der Punkte a_j, a'_j, b_j, b'_j verschwindet, da wir ja alle Nullstellen von $\wp'$ aus (39) kennen.

Dann ist F/G eine holomorphe elliptische Funktion und somit konstant. Auflösen der gebrochen linearen Gleichung von F nach f (vgl. Beispiel 3.23) zeigt nun, dass f eine rationale Funktion in $\wp$ ist.

2. Schritt: Ist f eine ungerade elliptische Funktion, so ist $f/\wp'$ gerade und aus dem 1. Schritt folgt, dass $f/\wp'$, und somit auch f, eine rationale Funktion von $\wp$, multipliziert mit $\wp'$, ist. Da sich jede elliptische Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden schreiben lässt, hat sie die Gestalt $f = r_1(\wp) + \wp' r_2(\wp)$ für rationale Funktionen r_1 und r_2.

3. Schritt: Durch $\overline{\Phi}(s) := \wp$ und $\Phi(t) := \wp'$ erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\overline{\Phi} \colon \mathbb{C}(s)[t] \to K(\Gamma).$$

Dass $t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3$ in seinem Kern enthalten ist, folgt aus Satz 9.12. Damit faktorisiert $\overline{\Phi}$ zu einem Ringhomomorphismus $\Phi \colon \mathbb{F} := \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3) \to K(\Gamma)$. Aus Schritt 1 folgt, dass Φ surjektiv ist. Da $\mathbb{F}$ ein Körper ist (Aufgabe 9.6), ist Φ auch injektiv, da sein Kern ein echtes Ideal ist, also $\{0\}$. □

9.3 Elliptische Integrale

Wir schließen dieses Kapitel nun damit ab, dass wir den Zusammenhang der Theorie der elliptischen Funktionen mit Fragestellungen aus der Analysis beleuchten.

Wir betrachten ein Rechteckgitter der Form

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \quad \text{mit} \quad 0 < \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 \in i\mathbb{R}, \operatorname{Im}\omega_2 > 0.$$

Da Γ invariant under komplexer Konjugation ist, erhalten wir für die Weierstraß-Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Gamma} \Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \Big)$$

die Beziehung $\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$. Insbesondere ist $\wp(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$. Aus demselben Grund sind $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus erhalten wir

$$\overline{\wp(\rho_2)} = \wp(\overline{\rho_2}) = \wp(-\rho_2) = \wp(\rho_2) \quad \text{und} \quad \overline{\wp(\rho_3)} = \wp(\overline{\rho_3}) = \wp(\rho_3 - \omega_2) = \wp(\rho_3),$$

so dass auch alle $e_j = \wp(\rho_j)$ reell sind (siehe 39). Wir betrachten $\rho_1 = \frac{\omega_1}{2}$ und $e_1 = \wp(\rho_1)$. Für $0 < x < \rho_1$ ist dann

$$\wp(x) = \wp(-x) = \wp(\omega_1 - x).$$

Die Funktion $\wp$ nimmt also den Wert $\wp(x)$ im Interval $(0, \rho_1)$ nur an der Stelle x an, da $\omega_1 - x > \rho_1$. Also wird das halboffene Intervall $(0, \rho_1]$ von $\wp$ bijektiv auf $[e_1, \infty)$ ab. Insbesondere ist $\wp$ auf $(0, \rho_1]$ eine streng monoton fallende Funktion. Die Umkehrfunktion $E \colon [e_1, \infty) \to (0, \rho_1]$ ist ebenfalls streng monoton fallend und auf dem Innern stetig differenzierbar mit

$$E'(\wp(x)) = \frac{1}{\wp'(x)}.$$

Aus

$$\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$$

und $\wp'(x) < 0$ erhalten wir

$$\wp'(x) = -\sqrt{4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3} = -\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3} \quad \text{für} \quad u = \wp(x).$$

Damit ergibt sich

$$E'(u) = \frac{-1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} \quad \text{für} \quad u > e_1.$$

Zusammenfassend erhalten wir:

Satz 9.15. *Die Umkehrung der Funktion* $\wp|_{(0\rho_1]}$ *ist eine Stammfunktion der auf* $[e_1, \infty)$ *definierten Funktion*

$$\frac{-1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}},$$

wobei $4u^3 - g_2 u - g_3 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)$ *drei verschiedene reelle Nullstellen besitzt.*

Bemerkung 9.16. Wir haben gesehen, dass die Weierstraß-Funktion $\wp$ zu einem Rechtecksgitter Γ (von einer reellen und einer rein imaginären Zahl erzeugt) auf einem reellen Intervall die Umkehrfunktion der Stammfunktion einer Funktion der Gestalt $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ ist, wobei P ein Polynom dritten Grades mit drei verschiedenen reellen Nullstellen ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass für jedes relle Polynom $P(x)$ vom Grad 3 oder 4 mit getrennten Nullstellen die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ eine Umkehrfunktion besitzt, die sich meromorph zu einer elliptischen Funktion fortsetzen lässt ([FL83, S. 199]). Dies war eine Leitidee der Theorie der elliptischen Funktionen, wie sie von Gauß, Legendre, Jacobi, Weierstraß u.a. entwickelt wurde.

9.4 Analogie zu trigonometrischen Funktionen

Wir betrachten die Umkehrfunktion

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

der Sinusfunktion auf dem Interval $[-\pi/2, \pi/2]$, das durch sin bijektiv auf $[-1, 1]$ abgebildet wird. Aus

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

erhalten wir die Integralformel

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{41}$$

Falls wir die Sinusfunktion noch nicht kennen würden, aber das Integral

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1$$

berechnen möchten, würden wir also feststellen:

- $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend (da der Integrand positiv ist), bildet $[-1, 1]$ also bijektiv auf das Interval $f([-1, 1])$ ab.
- Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f([-1, 1]) \to \mathbb{R}$ besitzt eine holomorphe Fortsetzung $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (nämlich die komplexe Sinusfunktion aus [Fi16, §5.2]), die 2π-periodisch ist:
$$F(z + 2\pi) = F(z) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Geometrisch tritt das Integral $f(x)$ auf, wenn wir die Länge eines Kreissegments berechnen wollen, das wir als Graph der Funktion $h(t) = \sqrt{1 - t^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ beschreiben.

Aus der Analysis wissen wir, dass die Bogenlänge des Funktionsgraphen von h auf dem Intervall $[0,x]$ gegeben ist durch das Integral

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1+h'(t)^2}\, dt.$$

Nun ist

$$1+h'(t)^2 = 1+\Big(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\Big)^2 = 1+\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2}$$

und daher

$$L(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f(x).$$

Die Frage nach der Länge von Kreissegmenten führt in diesem Sinne auf die 2π-periodische Sinusfunktion.

Aufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 9.1. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe Γ der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ genau dann diskret ist, wenn sie zyklisch ist.

Aufgabe 9.2. (Diskrete Untergruppen von $\mathbb{R}^n$) Zeigen Sie, dass zu jeder diskreten Untergruppe $D \subseteq \mathbb{R}^n$ linear unabhängige $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$ so existieren, dass

$$D = \sum_{i=1}^k \mathbb{Z}v_i.$$

Hinweis: Induktion nach $\dim \operatorname{span} D$. Ist $n>1$ und D erzeugt $\mathbb{R}^n$, so existiert eine Vektorraumbasis $f_1,\ldots,f_n$, die in D enthalten ist. Nun wendet man den Induktionsschritt auf $F\cap D$ an, wobei $F := \operatorname{span}\{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ eine Hyperebene ist und ersetze $f_1,\ldots,f_{n-1}$ durch linear unabhängige Erzeuger $v_1,\ldots,v_{n-1}$ von $F\cap D$. Schließlich finde man ein $d\in D$ mit $D = \mathbb{Z}d + F\cap D$. Hierzu zeige man die Existenz eines Elements in D mit einer minimalen positiven f_n-Komponente. Hier reicht es die Elemente von D in dem von $v_1,\ldots,v_{k-1},f_n$ erzeugten Quader zu betrachten, und davon gibt es nur endlich viele.

Aufgabe 9.3. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe, die von den reell linear unabhängigen Elementen ω_1 und ω_2 erzeugt wird und

$$P := \{t\omega_1 + s\omega_2 \colon 0 \leq t,s < 1\}$$

das zugehörige Periodenparallelogramm. Zeigen Sie, dass die Additionsabbildunge

$$P\times\Gamma \to \mathbb{C}, \quad (z,w)\mapsto z+w$$

bijektiv ist.

Aufgabe 9.4. Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $F\subseteq\mathbb{C}$ endlich. Dann existiert ein $z_0\in\mathbb{C}$, so dass $z_0+F+\Gamma$ den Rand des Periodenparallelogramms nicht schneidet.

Aufgabe 9.5. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a\in\mathbb{K}$ und $\mathbb{F} := \mathbb{K}^2$, versehen mit der Multiplikation

$$(x,y)\cdot(x',y') := (xx'+ayy', xy'+x'y).$$

(i) Zeige, dass $(\mathbb{F}, +, \cdot, (0,0), (1,0))$ ein Ring mit Eins ist.

(ii) Für $(x,y) \in \mathbb{F}$ definiere $N(x,y) := x^2 - ay^2$. Dann gilt:

$$N((x,y)(x',y')) = N(x,y)N(x',y').$$

(iii) $\mathbb{F}^\times = \{(x,y) \in \mathbb{F} \colon N(x,y) \neq 0\}$, und für $(x,y) \in \mathbb{F}^\times$ hat man

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{N(x,y)}, -\frac{y}{N(x,y)}\right).$$

(iv) $\mathbb{F}$ ist genau dann ein Körper, wenn a kein Quadrat in $\mathbb{K}$ ist, d.h. wenn $a \neq b^2$ für alle $b \in \mathbb{K}$ gilt.

(v) Zeige, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a = -1$ der Körper $\mathbb{F}$ isomorph ist zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(vi) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Für welche natürlichen Zahlen $a \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{F}$ ein Körper?

Aufgabe 9.6. Im Körper $\mathbb{C}(z)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ ist ein Polynom p vom Grad 3 kein Quadrat. Schliessen Sie hieraus, dass $\mathbb{C}(z)[w]/(w^2 - p)$ ein Körper ist.
Hinweis: Dieser Ring ist isomorph zu $\mathbb{F}$ in Aufgabe 9.5 für $\mathbb{K} = \mathbb{C}(z)$ und $a = p$.

Aufgabe 9.7. Sei $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ eine Ellipse mit den Halbachsen $a > b$. Zeigen Sie, dass die Bogenlängenberechnung von C auf ein elliptisches Integral der Form

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$$

führt. Was ist die geometrischen Bedeutung von k?
Hinweis: Betrachte die Ellipsenbögen als Graphen.

Aufgabe 9.8. (Bogenlänge der Lemniskate) Sind P_1, P_2 Punkte in der Ebene und $a > 0$, so nennt man die Kurve, die aus allen Punkten Q besteht, für die das Produkt der Abstände $d(P_1,Q)d(P_2,Q) = a^2$ ist, eine *Lemniskate.* Wir betrachten den Spezialfall $a = d(P_1,P_2)/2$, so dass wir $P_1 = (-a,0)$ und $P_2 = (a,0)$ für ein $a > 0$ annehmen dürfen. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ schreiben wir $r := \sqrt{x^2+y^2}$ für die Länge des Vektors. Zeigen Sie:

(i) Die Gleichung der Lemniskate hat die Form $r^4 + 2r^2a^2 = 4x^2a^2$. Für $a^2 = \frac{1}{2}$ ergibt sich also $r^2(r^2+1) = 2x^2$. Wir betrachten nun diesen Fall.

(ii) $\gamma(r) := \left(r\sqrt{\frac{1+r^2}{2}}, r\sqrt{\frac{1-r^2}{2}}\right)$ liefert eine Parametrisierung des positiven Teils der Lemniskate.

(iii) Das zugehörige Bogenlängenintegral hat die Form $s = \int \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$.
Hinweis: Mit $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ zeige man zuerst $r^2 = \cos(2\theta)$. Für $r' := \frac{dr}{d\theta}$ zeige man weiter $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = (r')^2 + r^2$ und schließe daraus $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + (r'/r)^{-2}$.

Literatur

[Ap78] Apéry, R., *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11-13

[BF06] Busam, R., und E. Freitag, "Funktionentheorie I", Springer, 2006

[Fi16] Fiebig, P., "Skript zur Funktionentheorie I," Sommersemester 2016, FAU Erlangen–Nürnberg

[FL83] Fischer, W., und I. Lieb, "Funktionentheorie," vieweg studium **47**, Vieweg Verlag, 1983

[Fo77] Forster, O., "Riemannsche Flächen," Heidelberger Taschenbücher **184**, Springer, 1977

[Ja80] Jänich, K., "Einführung in die Funktionentheorie," 2. Auflage, Hochschultext, Springer, 1980

[La99] Lang, S., "Complex Analysis", Graduate Texts in Math. **103**, Springer, 1999

[Mi00] Milnor, J., "Dynamics in One Complex Variable", 2nd edition, Vieweg Verlag, 2000

[Ri00] Rivoal, T., *La fonction de zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationelles aux entiers impairs*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics **331:4** (2000), 267–270

[Ru73] Rudin, W., "Functional Analysis," McGraw Hill, 1973

[Va06] Varadarajan, V. S., "Euler Through Time: A new Look at old Themes," Amer. Math. Soc., 2006