Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 10 (18.6.2021)

Aufgabe 46: K sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, versehen mit der Zariski-Topologie. Durch

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}, \quad f_3(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0, \end{cases}, \quad f_4(t) = \begin{cases} -t & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

werden Funktionen $K \to K$ definiert.

(1) Welche der Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 ist stetig?
(2) Gib stetige Funktionen $g, h : K \to K$ an, sodass die Funktion $g + h : K \to K$, $t \mapsto f(t) + g(t)$, nicht stetig ist.
(3) Gib stetige Funktionen $g, h : K \to K$ an, sodass die Funktion $g \cdot h : K \to K$, $t \mapsto g(t)h(t)$, nicht stetig ist.

Aufgabe 47: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$. Durch $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$ wird eine nichtsinguläre projektive ebene Quadrik C über K definiert.

(1) Zeige, dass gilt

$$(x_0 + x_1 : x_2) = (x_2 : x_0 - x_1) \text{ für alle } (x_0 : x_1 : x_2) \in C \setminus \{(1 : 1 : 0), (1 : -1 : 0)\}.$$

Daher wird durch

$$\phi : C \to \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \begin{cases} (x_0 + x_1 : x_2) & \text{für } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : -1 : 0), \\ (x_2 : x_0 - x_1) & \text{für } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : 1 : 0) \end{cases}$$

ein Morphismus definiert.

(2) Zeige, dass es keine homogenen Polynome gleichen Grades $f, g \in K[x_0, x_1, x_2]$ gibt, sodass für alle $(x_0 : x_1 : x_2) \in C$ gilt

$$\phi((x_0 : x_1 : x_2)) = (f(x_0, x_1, x_2) : g(x_0, x_1, x_2)).$$

(Die obige Fallunterscheidung in der Definition von ϕ läßt sich also nicht umgehen.)

Aufgabe 48: Eine Ordnungsfunktion (oder diskrete Bewertung) v eines Körpers K ist eine surjektive Abbildung $v : K^* \to \mathbb{Z}$, sodass gilt

- $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in K^*$,
- $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$ für alle $a, b \in K^*$ mit $a + b \neq 0$.

Dann gilt auch die Implikation

$$a, b \in K^* \text{ mit } v(a) \neq v(b) \quad \Longrightarrow \quad a + b \neq 0 \text{ und } v(a + b) = \min(v(a), v(b)).$$

Sei nun K algebraisch abgeschlossen. Jede Funktion $f \in K(x)^*$ lässt sich dann eindeutig in der Form

$$f = c \cdot \prod_{\alpha \in K} (x - \alpha)^{e(\alpha)}$$

schreiben mit $c \in K^*$, $e(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\#\{\alpha \in K : e(\alpha) \neq 0\} < \infty$. In der Vorlesung haben wir folgende Ordnungsfunktionen auf $K(x)$ kennengelernt: $\operatorname{ord}_\alpha$ für alle $\alpha \in K$ und $\operatorname{ord}_\infty$ mit

$$\operatorname{ord}_\alpha(f) = e(\alpha) \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_\infty(f) = -\sum_{\alpha \in K} e(\alpha),$$

wobei außerdem noch

$$\operatorname{ord}_\alpha(c) = \operatorname{ord}_\infty(c) = 0 \text{ für alle } c \in K^*$$

gilt.
Zeige: Ist v eine Ordnungsfunktion auf $K(x)$ mit $v(c) = 0$ für alle $c \in K^*$, so ist v eine der obigen Ordnungsfunktionen $\operatorname{ord}_\alpha$ oder $\operatorname{ord}_\infty$.

Aufgabe 49: Sei $\pi : X \to \mathbb{A}^2$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ in $O = (0,0)$, $E = \pi^{-1}(O)$ die exzeptionelle Faser, $f(x,y)$ ein Polynom vom Grad d, C die durch $f(x,y) = 0$ definierte ebene affine Kurve und

$$\lambda(f) = \# \left(E \cap \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{O\})} \right),$$

d.h. $\lambda(f)$ gibt an, in wievielen Punkten das eigentliche Urbild von C die exzeptionelle Faser schneidet.
Zeige:

(1) Es gilt: $O \in C \iff \lambda(f) \geq 1$.
(2) Es gilt: $\lambda(f) \leq d$.
(3) Genau dann ist $\lambda(f) = d$, wenn C Vereinigung von d verschiedenen Geraden ist, die durch O gehen.

Aufgabe 50: Sei C der projektive Abschluss der durch $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$ definierten ebenen Kurve (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 2$).

(1) Zeige, dass $P = (1:0:0)$ der einzige singuläre Punkt von C ist.
(2) Beschreibe eine zu C birational äquivalente nichtsinguläre projektive Kurve $\widetilde{C}$ (durch Aufblasung und affine Überdeckungen) und den zugehörigen Morphismus $\phi : \widetilde{C} \to C$.
(3) Zeige, dass $\phi^{-1}(P)$ aus 3 verschiedenen Punkten P_1, P_2, P_3 besteht.
(4) Bestimme Funktionen $t_i \in K(\widetilde{C})$ (als rationale Funktionen in x und y), sodass für alle $i, j \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\operatorname{ord}_{P_j}(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j, \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j. \end{cases}$$