Topologie

Hermann Schulz-Baldes, Dept. Mathematik

Assistenz: Anna-Katherina Hirmer, Dept. Mathematik

Vorlesung, Sommersemester 2020

Termine

Vorlesungstermine (zunächst studon-Chat/Zoom)

Do 08:15 – 09:45 Uhr   Raum: H13   Hermann Schulz-Baldes

Sprechstunde (zunächst studon-Chat/Telefon)

Mi 09:15 – 10:00 Uhr   Raum: 02.360   Hermann Schulz-Baldes

Fragestunde Assistentin (zunächst studon-Chat/Zoom)

Do 12.15 - 13.45   Raum: U4   Anna-Katharina Hirmer

Übungstermine (zunächst studon-Chat/Zoom)

Fr 12:15 – 13:45   Raum: H13   Nicolas Manger

Regeln

Anmeldung

- Melden Sie sich in Studon zu Veranstaltung und Übungen an
- Beachten Sie Anmeldefristen für Klausur

Übungen

- Die Übungsblätter werden montags auf Studon bereitgestellt
- Es gibt in der darauffolgenden Woche Lösungsskizzen
- Fakultativ: Abgabe von Lösungen zur Korrektur
  (nur falls Lösungsskizzen nicht ausreichend)

Klausur

- Klausur am 6.8.2020 von 8:30-9:30 in H11
- Einsicht am Tag danach in 02.315 (Mathematik)
- Nachklausur am 1.10.2020 von 8:30-9:30 in H12
- Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Überblick

NUR: Mengentheoretische Topologie! Somit geht es um

- offene, abgeschlossene Mengen
- stetige, offene, abgeschlossene Abbildungen
- Filter
- Kompaktheit
- Trennungsaxiome
- Metrisierbarkeit
- Zusammenhang ...

NICHT:

- Homotopietheorie
- Homologietheorie
- Kohomologietheorie
- Algebraische Topologie
- K-Theorie ...

Mengentheoretische Topologie - Was ist das?

Axiomatischer Zugang zu Begriffen der Konvergenz und Stetigkeit

Begriffswahl führt in verschiedenen Zusammenhängen zu ähnlichen geometrischen Vorstellungen

Topologie gemeinsame Sprache und Handwerkszeug von:

Funktionalanalysis, Dynamische Systeme (Differentialgleichungen), Wahrscheinlichkeitstheorie, Differentialgeometrie, *etc.*

Ist Teil der ”Grundausbildung” eines Mathematikers

Elementar, keine Vorkenntnisse notwendig (wirklich!)

Trotzdem: nicht einfach!

Historische Entwicklung hier ausgeblendet

Literatur

Es gibt viele gute Quellen zu obigen Themen!

Wählen Sie nach Ihrem Geschmack aus, z.B.

- Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Klaus Jänich. *Topologie.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon
- James R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall Incorporated
- N. Bourbaki. *General Topology.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg

und es gibt diese Folien auf Studon

Kapitel

1. Mengen und Abbildungen
2. Begriff des topologischen Raumes
3. Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen
4. Konstruktion von Topologischen Räumen
5. Konvergenztheorie
6. Trennungsaxiome
7. Kompakte Räume
8. Lokalkompakte Räume
9. Vollständig reguläre Räume
10. Metrisierungssatz
11. Zusammenhang

Vorlesungshergang

1. Woche vom 23.4. bis Satz 2.9
2. Woche vom 30.4. bis Satz 2.24
3. Woche vom 7.5. bis Definition 3.11
4. Woche vom 14.5. bis Satz 4.18
5. Woche vom 21.5. bis Satz 4.26
6. Woche vom 28.5. bis Satz 5.13
7. Woche vom 4.6. ist Bergwoche
8. Woche vom 11.6. bis Satz 5.29
9. Woche vom 18.6. bis Beispiel 6.8
10. Woche vom 25.6. bis Satz 6.18
11. Woche vom 2.7. bis Satz 7.13
12. Woche vom 9.7. bis Satz 8.6
13. Woche vom 16.7. Paragraphen 9 und 10
14. Woche vom 23.7. bis Paragraph 11
15. Woche vom 30.7. ist Wiederholungswoche

1 Mengen und Abbildungen

Das Meiste aus diesem kurzen Paragraphen wohl bekannt

Trotzdem notwendig um Konventionen und Schreibweisen festzulegen

Naiver Mengenbegriff nach Cantor

(a) X Menge, x Element von X wird geschrieben als $x \in X$

(b) $A \subset X$ Teilmenge $\iff (x \in X \ \ \forall\, x \in A)$

(c) $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subset X\}$ heisst Potenzmenge von X

(d) Binäre Mengenoperationen sind:

$A \cap B$ Durchschnitt von $A, B \in \mathcal{P}(X)$
$A \cup B$ Vereinigung von $A, B \in \mathcal{P}(X)$
$A \backslash B = \{x \in A \ : \ x \notin B\}$ heisst "A ohne B"

Unäre Mengenoperation:

$A^c = X \backslash A$ Komplement von A in X
Um Abhängigkeit von A zu betonen, oft auch Bezeichnung $C_X A$

Fakt: $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, C_X)$ ist eine Boolsche Algebra, d.h.

(i) $\cap, \cup$ assoziativ, d.h. z. B. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(ii) $\cap, \cup$ kommutativ, d.h. z. B. $A \cap B = B \cap A$

(iii) $A \cap X = A$ d.h. neutrales Element von $\cap$ ist X

(iv) $A \cup \emptyset = A$ d.h. neutrales Element von $\cup$ ist $\emptyset$

(v) Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(vi) $A \cup A^c = X$ und $A \cap A^c = \emptyset$

Zudem gilt:

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ und $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A^c)^c = A$

$A \subset B \implies A^c \supset B^c$

$A \backslash B = A \cap B^c$

Abbildungen sind Zuordnungen $f : X \longrightarrow Y$ zwischen Mengen X, Y

(a) f injektiv $\iff (f(x) = f(x') \impliedby x = x')$

(b) f surjektiv $\iff (\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ mit $f(x) = y)$

(c) f bijektiv $\iff$ f injektiv und surjektiv

(d) Zu f sind $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$f(A) = \{f(x) \ :\ x \in A\} \subset Y$ Bild von $A \subset X$

$f^{-1}(B) = \{x \in X \ :\ f(x) \in B\}$ Urbild von $B \subset Y$

(e) Vielzahl elementarer Regeln

$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $\quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$f^{-1}(C_Y B) = C_X(f^{-1}(B))$, $\quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mit Gleichheit bei Injektivität

$f^{-1}(f(A)) \supset A$ mit Gleichheit bei Injektivität

$f(f^{-1}(B)) \subset B$ mit Gleichheit bei Surjektivität

(f) Komposition $g \circ f : X \to Z$ mit $g : Y \to Z$

$g \circ f(A) = g(f(A))$ $\quad (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$

Kartesisches mengentheoretisches Produkt

$(X_i)_{i\in I}$ Familie von Mengen mit beliebiger Indexmenge I

Vereinigung $\bigcup_{i\in I} X_i$ heisst auch mengentheoretische Summe

Mengentheoretisches Produkt ist definiert durch

$$\prod_{i\in I} X_i \;=\; \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;:\; f(i) \in X \;\forall\; i \in I\right\} \;=\; \left\{(x_i)_{i\in I} \;:\; x_i \in X_i\right\}$$

Projektion $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ auf $j$te Komponente

$$\pi_j\left((x_i)_{i\in I}\right) \;=\; x_j$$

Wenn $(Y_i)_{i\in I}$ weitere Familie und $f_i : X_i \to Y_i$, dann

$$\prod_{i\in I} f_i \;:\; \prod_{i\in I} X_i \;\to\; \prod_{i\in I} Y_i$$

definiert durch

$$\left(\left(\prod_{i\in I} f_i\right)\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)_j \;=\; f_j(x_j)$$

2 Begriff des topologischen Raumes

Definition 2.1

X Menge und $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum $\Longleftrightarrow$

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$

(ii) Beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{O}$ gehören zu $\mathcal{O}$:

$$(A_i)_{i\in I},\ A_i \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$$

(ii) Endliche Durchschnitte von Elementen in $\mathcal{O}$ sind in $\mathcal{O}$:

$$(A_i)_{i=1,\dots,n} \text{ mit } A_i \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$$

Elemente von $\mathcal{O}$ heißen offene, deren Komplemente abgeschlossen

X heißt Träger des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$

Beispiele 2.2

In jedem der folgenden Fälle müssen die Axiome überprüft werden:

(i) $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ triviale Topologie

(ii) $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ diskrete Topologie. Dann $(X, \mathcal{O})$ diskreter topo. Raum

(iii) $\mathcal{O} = \{A \subset X \ : \ A^c = C_X A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ co-finite Topologie

(iv) $X = \mathbb{R}$ und

$\mathcal{O} = \{$ Vereinigungen offener Intervalle $]a, b[$ mit $a \leqslant b \}$

Dies ist die natürliche Topologie

(v) $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{(-\infty, a] \ : \ a \in \mathbb{R}\}$

Eine ganze Klasse von Beispielen sind die metrischen Räume:

Definition 2.3

(X, d) mit $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ metrischer Raum $\iff$

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Nichtentartung)

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall\, x, y \in X$ (Symmetry)

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \ \forall\, x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Beispiele 2.4

(i) $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ euklidischer Raum

(ii) $(V, \|\,.\,\|)$ normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$

Dann $X = V$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ ist ein metrischer Raum

z. B. $(C(I), \|\ \|_\infty)$ metrischer Raum gleichmäßiger Konvergenz

Definition 2.5

Natürliche Topologie eines metrischen Raumes (X, d) ist

$$\mathcal{O} = \{A \subset X : \forall\, x \in A\, \exists\, r > 0, \text{so dass } B_r(x) \subset A\}$$

wobei $B_r(x)$ offene metrische Kugel vom Radius $r > 0$ um $x \in X$ ist:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Überprüfung, dass dies eine Topologie im Sinne von Definition 2.1 ist:

Beweis: $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ klar

Vereinigungen auch

Endliche Durchschnitte: Sei $x \in A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ mit A_i offen

Da A_i offen, $\exists\, r_i$ mit $B_{r_i}(x) \subset A_i$

Setze $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0 \implies B_r(x) \subset A$ $\square$

Achtung: Verschiedene Metriken können gleiche Topologie erzeugen!

Nach diesen Beispielen nun weiter mit Begriffsbildungen:

Definition 2.6

Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $A \subset X$

$U \subset X$ Umgebung von $A \iff \exists\, B \in \mathcal{O}$ mit $A \subset B \subset U$

Falls $A = \{x\}$ einpunktig, spricht man auch von Umgebung von x

und $\mathcal{U}_x = \{U \,:\, U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt Umgebungssystem von x

Satz 2.7

$\mathcal{U}_x$ erfüllt

(1) $U \subset V,\ U \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad V \in \mathcal{U}_x$

(2) $U, V \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{U}_x$

(3) $x \in U \quad \forall \quad U \in \mathcal{U}_x$

(4) $U \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad \exists\, V \in \mathcal{U}_x$ *mit* $U \in \mathcal{U}_y\ \forall\ y \in V$

Begr: (4) $U \in \mathcal{U}_x \quad \Longrightarrow \quad \exists\, V$ offen mit $V \subset U$

Natürlich ist V Umgebung all seiner Punkte $\square$

Satz 2.8

A offen $\iff$ *A Umgebung all seiner Punkte*

Begr: "$\Longleftarrow$" $x \in A$, also nach Voraussetzung $\exists\, A_x \in \mathcal{O}$ offen mit $x \in A_x \subset A \quad \Longrightarrow \quad A = \bigcup_{x \in A} A_x \in \mathcal{O}$ □

Satz 2.9

Gegeben $\{\mathcal{U}_x^* \ : \ x \in X\}$ *so dass jedes* $\mathcal{U}_x^*$ (1)-(4) *aus* Satz 2.7 *erfüllt*
$\Longrightarrow \ \exists^{=1}$ *Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X *mit* $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x^* \ \ \forall\, x \in X$

Bemerkung: Hausdorff wählte dies als Definition einer Topologie ◇

Beweis: Eindeutigkeit: $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei Topologien

$A \in \mathcal{O}_1 \overset{\textbf{Satz 2.8}}{\Longrightarrow} A \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}_1} \ \forall\, x \in A$ (Umgebung all seiner Punkte bez. $\mathcal{O}_1$)

Zudem $\mathcal{U}_x^{\mathcal{O}_1} = \mathcal{U}_x^* = \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}_2} \ \ \forall\, x \in X \Longrightarrow A \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}_1} = \mathcal{U}_x^* = \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}_2} \ \ \forall\, x \in A$

$\overset{\textbf{Satz 2.8}}{\Longrightarrow} \quad A \in \mathcal{O}_2$

Existenz: Ansatz ist

$$A \subset X \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathcal{U}_a^* \;\; \forall\, a \in A$$

Zunächst wird gezeigt, dass $\mathcal{O} = \{A \text{ offen}\}$ eine Topologie definiert, überprüfen also die Axiome von Definition 2.1:

(i) $\varnothing \in \mathcal{O}$, $x \in \mathcal{O}$

(ii) Seien $(A_i)_{i\in I}$ offen, d.h. $A_i \in \mathcal{U}_{a_i} \;\forall\, a_i \in A_i,\;\; i \in I$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \;\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}_{a_j}^* \;\forall\, j$

Da a_j beliebig, gilt $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}_a^* \;\forall\, a \in \bigcup_{i\in I} A_i$

Somit $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$ offen

(iii) $A, B \in \mathcal{O}$

Somit $A \in \mathcal{U}_a^* \;\forall\, a \in A$ und $B \in \mathcal{U}_b^* \;\forall\, b \in B$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \;A \cap B \in \mathcal{U}_c^* \;\forall\, c \in A \cap B$, d.h. $A \cap B \in \mathcal{O}$

Noch zu zeigen: $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x^*$ (wobei $\mathcal{U}_x$ bez. $\mathcal{O}$ ist)

"$\subset$" $U \in \mathcal{U}_x \implies \exists\, D \in \mathcal{O}$ offen mit $x \in D \subset U$ nach (Def. Umgebung)

$$\overset{\text{Ansatz}}{\implies} D \in \mathcal{U}_x^* \overset{(1)}{\implies} U \in \mathcal{U}_x^*$$

"$\supset$" Sei $A \in \mathcal{U}_x^*$ gegeben

Setze $U = \{y \in x \,:\, A \in \mathcal{U}_y^x\} \subset A$ (U "Inneres" von A). Dann U offen!

Begründung: Gemäß Ansatz ist zu zeigen, dass $U \in \mathcal{U}_y^* \;\forall\, y \in U$

$$y \in U \implies A \in \mathcal{U}_y^* \overset{(4)}{\implies} \exists\, V \in \mathcal{U}_y^*, \text{ so dass } A \in \mathcal{U}_z^* \;\forall\, z \in V$$

$$\overset{Def.\,U}{\implies} V \subset U \text{ und da } V \in \mathcal{U}_y^* \overset{(1)}{\implies} U \in \mathcal{U}_y^* \qquad \diamond$$

Zum Schluss:

$A \in \mathcal{U}_x^*,\; U = \{y \in X \,:\, A \in \mathcal{U}_y^*\}$ offen und $x \in U$

$\implies x \in U \subset A$ (da $y \in U \implies A \in \mathcal{U}_y^* \overset{(3)}{\implies} y \in A$)

$\implies A \in \mathcal{U}_x$ $\square$

Definition 2.10

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum

(i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_x$ Umgebungsbasis von x

$\iff \forall\, U \in \mathcal{U}_x \;\exists\, B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$

(ii) $(X, \mathcal{O})$ erfüllt erstes Abzählbarkeitsaxiom (1. AA)

$\iff \forall x \in X$ hat $\mathcal{U}_x$ abzählbare Basis

(iii) $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ Basis der Topologie $\mathcal{O}$

$\iff$ jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$

(iv) $Y \subset \mathcal{O}$ Subbasis der Topologie $\mathcal{O}$ (oder Erzeugendensystem)

$\iff$ jede offene Menge ist Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus Y

(v) $(X, \mathcal{O})$ erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom (2. AA)

$\iff$ es gibt eine abzählbare Basis

Beispiel 2.11

(X, d) metrischer Raum

$\left\{B_{\frac{1}{n}}(x) \; : \; n \in \mathbb{N}\right\}$ abzählbare Basis von $\mathcal{U}_x$

$\Longrightarrow \; (X, d)$ erfüllt 1. AA

Bemerkung 2.12

$(X, \mathcal{O})$ 2. AA $\Longrightarrow$ $(X, \mathcal{O})$ 1. AA

Beispiele 2.13

(i) $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie erfüllt 2. AA mit Basis $\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}}$

(ii) $(X, \mathcal{O})$ diskreter topologischer Raum. Dann gilt:
$(X, \mathcal{O})$ erfüllt 2. AA $\Longleftrightarrow$ X abzählbar
Somit: Umkehrung von Bemerkung 2.12 gilt nicht
(denn in überabzählbarem diskreten Raum ist $\{\{x\}\}$ Basis von $\mathcal{U}_x$)

Satz 2.14

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ *Basis einer Topologie* $\Longleftrightarrow$

(i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ x \in B_1 \cap B_2 \implies \exists\, B_3 \in \mathcal{B}$ *mit* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

(ii) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

Beweis: "$\Longrightarrow$" Definition der Basis impliziert $\mathcal{O} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B : \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\}$

(i) Wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, so auch $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$, d.h. $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ für geeignetes $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Jedes $x \in B_1 \cap B_2$ is dann in einem $B \in \mathcal{B}$

(ii) ist klar, da $\mathcal{O}$ Topologie, somit $X \in \mathcal{O}$

"$\Longleftarrow$" Zu zeigen ist, dass $\mathcal{O}$ wie oben definiert eine Topologie ist

klar $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ $\quad$ ($\emptyset$ erhält man mit $\mathcal{C} = \emptyset$)

Vereinigungen auch klar, somit z. z. durchschnittstabil

Seien $A_j = \bigcup_{B_l \in \mathcal{C}_j} B_j$ wobei $j = 1, 2$. Dann

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B_1 \in \mathcal{C}_1, B_2 \in \mathcal{C}_2} B_1 \cap B_2 \overset{(ii)}{=} \bigcup_{B_1 \in \mathcal{C}_1, B_2 \in \mathcal{C}_2} \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B_3(x) \in \mathcal{O} \quad \square$$

Satz 2.15

Jedes Mengensystem $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Subbasis einer Topologie, der von $\mathcal{I}$ erzeugten Topologie

Beweis: Setze

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{S \in \mathcal{C}} S \;:\; \mathcal{C} \subset \mathcal{I} \text{ endlich} \right\}$$

mit der Konvention $\bigcap_{S \in \emptyset} S = X$

Dann ist $\mathcal{B}$ durchschnittsstabil und somit nach Satz 2.14 eine Basis □

Satz 2.16

Sei $\mathcal{B}$ Basis der Topologie $\mathcal{O}$ auf X. Umgebungssystem von $x \in X$ ist

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X \;:\; \exists\, B \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U\}$$

Begründung: Übung □

Definition 2.17

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. Das Innere von $A \subset X$ ist

$$A^\circ = \{x \in X : A \in \mathcal{U}_x\} = \{x \in A : A \in \mathcal{U}_x\}$$

Satz 2.18

(i) $A^\circ = \bigcup_{j \in J} A_j$ *wobei* $(A_j)_{j \in J}$ *Familie aller offenen Teilmengen von* A

(ii) A° *größte in* A *enthaltene offene Menge* $A^\circ = \bigcup_{O \subset A \text{ offen}} O$

(iii) A *offen* $\iff A^\circ = A$

Beweis: (i) "$\subset$" $x \in A^\circ \implies A \in \mathcal{U}_x$, d.h. $\exists$ offenes D mit $x \in D \subset A$

$\implies x \in \bigcup_{j \in J} A_j$ (denn D mit dabei)

"$\supset$" $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \implies x \in A_j \subset A$ für ein $j \implies A \in \mathcal{U}_x$

(ii) klar nach (i)

(iii) A offen $\overset{\text{Satz 2.8}}{\iff}$ A Umgebung all seiner Punkte $\iff A = A^\circ$ $\square$

Satz 2.19

$(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum*

Abbildung $\rho : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *definiert durch* $\rho(A) = A^\circ$. *Dann*

(1) $\rho\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \bigcap_{j=1}^n \rho(A_j)$

(2) $\rho(A) \subset A$

(3) $\rho \circ \rho = \rho$

(4) $\rho(X) = X$

Begründung: (2) - (4) klar. Für (1):

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j=1}^n \rho(A_j) &\iff x \in \rho(A_j) \qquad \forall\, j = 1 \dots n \\ &\iff A_j \in \mathcal{U}_x \qquad \forall\, j = 1 \dots n \\ &\iff \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{U}_x \iff x \in \rho\Big(\bigcap_{j=1}^n A_j\Big) \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.20

X Menge und $\rho : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ erfüllt (1) - (4) *aus* Satz 2.19
$\implies \exists^{=1}$ *Topologie auf X mit $\rho(A) = A^\circ$*

Bemerkung: Ohne (4) erhält man eine Topologie auf $\rho(X)$ $\diamond$

Beweis: Existenz: Ansatz ($A \in \mathcal{O}$ offen $\iff \rho(A) = A$)

Nachweis der Axiome der Topologie aus Definition 2.1:

(i) $\rho(\varnothing) \subset \varnothing \implies \rho(\varnothing) = \varnothing \implies \varnothing$ offen

Zudem: $\rho(X) = X \implies X$ offen

(ii) $\rho(A_j) = A_j$ (d.h. A_j offen)

$$\stackrel{(1)}{\implies} \rho\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \bigcap_{j=1}^n \rho(A_j) = \bigcap_{j=1}^n A \implies \bigcap_{j=1}^n A_j \text{ offen}$$

(iii) Zunächst

$$A \subset B \implies \rho(A) \subset \rho(B) \tag{2.1}$$

weil:

$$A \subset B \implies A \cap B = A \implies \rho(A) = \rho(A) \cap \rho(B) \implies \rho(A) \subset \rho(B)$$

Nun $(A_j)_{j\in J}$ offen $\implies A_j = \rho(A_j) \subset \rho\big(\bigcup_j A_j\big)$

$\implies \bigcup_j A_j \subset \rho\big(\bigcup_j A_j\big) \overset{(2)}{\subset} \bigcup_j A_j$, somit Gleichheit, d.h. $\bigcup_j A_j$ offen

Also definiert Ansatz eine Topologie $\mathcal{O}$!

Noch zu zeigen ist die Eigenschaft $\rho(A) = A^\circ$ wobei Inneres bez. $\mathcal{O}$

$A^\circ \subset A$ und A° nach Satz 2.18 offen

$$\implies A^\circ \overset{\text{Def}}{=} \rho(A^\circ) \overset{(2.1)}{\subset} \rho(A) \text{ weil } A^\circ \subset A$$

$\rho(A) \overset{(2)}{\subset} A$, zudem ist $\rho(A)$ offen, da $\rho(\rho(A)) \overset{(3)}{=} \rho(A)$

Also $\rho(A) \subset A^\circ$ weil Letzteres größte in A enthaltene offene Menge ist

Eindeutigkeit:

Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien mit Eigenschaften (1)-(3)

$A \in \mathcal{O}_1 \implies \rho(A) = A^\circ = A$ nach Satz 2.18 (iii) $\implies A \in \mathcal{O}_2$ $\square$

Definition 2.21

$(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $x \in X$, $A \subset X$

(i) x Berührungspunkt (BP) von A $\iff$ $U \cap A \neq \emptyset \ \forall \ U \in \mathcal{U}_x$

(ii) $\overline{A} = \{x \in X \ : \ x \ BP \text{ von } A\}$ heißt abgeschlossene Hülle von A

(iii) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$ heißt Rand von A

Satz 2.22

Für alle $A \subset X$ gilt $C_X \overline{A} = (C_X A)^\circ$ und $A^\circ = C_X(\overline{C_X A})$

Beweis:

$$\begin{aligned} C_X \overline{A} &= \{x \in X \ : \ x \text{ nicht } BP \text{ von } A\} \\ &= \{x \in X \ : \ \exists \ U \in \mathcal{U}_x \text{ mit } U \cap A = \emptyset\} \\ &= \{x \in X \ : \ \exists \ U \in \mathcal{U}_x \text{ mit } U \subset C_X A\} \\ &= \{x \in X \ : \ C_X A \in \mathcal{U}_x\} \\ &= (C_X A)^\circ \end{aligned}$$

Zweite Gleichung dann durch Einsetzen von $C_X A$ in erste □

Weitere Eigenschaften (Übung):

- ∂A ist abgeschlossen
- $X = A^\circ \cup \partial A \cup C_X\overline{A}$ disjunkte Vereinigung

Dualitätsprinzip bez. Komplementbildung in der Topologie

Wegen Satz 2.22 gilt:

A	$\cap$	$\cup$	$\subset$	$=$	offen	abge.	$^-$	*BP* von A
C_XA	$\cup$	$\cap$	$\supset$	$=$	abge.	offen	$^\circ$	*BP* von C_XA

Obige Sätze 2.18, 2.19 und 2.20 übertragen sich nun direkt:

Satz 2.23

(i) *$\overline{A} = \bigcap_{j \in J} A_j$ wobei $(A_j)_{j \in J}$ Familie abge. Obermengen von A*

(ii) *$\overline{A}$ ist die kleinste A enthaltende abgeschlossene Menge*

(iii) *A abgeschlossen $\iff$ $A = \overline{A}$*

Satz 2.24

$(X, \mathcal{O})$ topo. Raum und $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definiert durch $\psi(A) = \overline{A}$

Dann gilt:

(1) $\psi\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \psi(A_j)$

(2) $\psi(A) \supset A$

(3) $\psi \circ \psi = \psi$

(4) $\psi(\varnothing) = \varnothing$

Es gibt genau eine Topologie mit $\psi(A) = \overline{A}$

Bemerkung: Dies sind Kuratowskis Hüllenaxiome ◇

Nun sollen Topologien verglichen werden. Folgendes ist natürlich:

Definition 2.25

Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf einer Menge X

$$\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2 \iff \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$$

Man sagt dann auch, dass $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$ oder $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_1$

Beispiel: Diskrete Topologie ist feinste aller Topologien auf X

Klumpentopologie ist gröbste aller Topologien auf X ◇

Alternative Charakterisierung:

Satz 2.26

$\mathcal{O}_{1,2}$ Topologien auf Menge X mit Umgebungssystemen $\mathcal{U}_x^{1,2}$ von x

Dann gilt: $\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2 \iff \mathcal{U}_x^1 \subset \mathcal{U}_x^2$ für alle $x \in X$

Beweis: Für die Hinrichtung "$\Longrightarrow$":

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U}_x^1 &\implies \exists\, B \in \mathcal{O}_1 \text{ mit } x \in B \subset A \\ &\implies \exists\, B \in \mathcal{O}_2 \text{ mit } x \in B \subset A \ \text{ (nach Voraussetzung)} \\ &\implies A \in \mathcal{U}_x^2 \end{aligned}$$

und "$\Longleftarrow$":

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{O}_1 &\implies A \in \mathcal{U}_x^1 \ \forall\, x \in A \ \text{ (A Umgeb. all seiner Punkte bez. $\mathcal{O}_1$)} \\ &\implies A \in \mathcal{U}_x^2 \ \forall\, x \in A \ \text{ (A Umgeb. all seiner Punkte bez. $\mathcal{O}_2$)} \\ &\implies A \in \mathcal{O}_2 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.27

Menge $\mathcal{T}(X) = \{\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X) \ : \ \mathcal{O} \text{ Top. auf } X\}$ ist durch $\leqslant$ geordnet, d.h.

(i) $\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2 \leqslant \mathcal{O}_1 \implies \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ (Antisymmetrie)

(ii) $\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2 \leqslant \mathcal{O}_3 \implies \mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_3$ (Transitivität)

Allerdings: diese Ordnung nicht total, d.h.

Gegeben $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ muss nicht gelten $\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2$ oder $\mathcal{O}_2 \leqslant \mathcal{O}_1$

Erinnerung:

Definition 2.28

$(T, \leqslant)$ geordnete Menge und $S \subset T$ sowie $t \in T$

(i) t Maximum von $S \iff s \leqslant t \;\forall\; s \in S$ und $t \in S$

(ii) t obere Schranke von $S \iff s \leqslant t \;\forall\; s \in S$

(iii) t Supremum von $S \iff t = \mathrm{Min}\{t^* \;:\; t^* \text{ obere Schranke von } S\}$

(iv) Analog werden Minimum, untere Schranke und Infimum definiert

Achtung: Alle diese Objekte müssen nicht existieren!

Wenn sie existieren, müssen sie nicht eindeutig sein!

Satz 2.29

Sei X Menge und $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$

Die Menge $\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X) \;:\; \mathcal{J} \subset \mathcal{O}\}$ besitzt ein Minimum

Minimum heißt die von $\mathcal{J}$ erzeugte Topologie und $\mathcal{J}$ eine Subbasis

Beweis: Minimums konstruktiv gegeben durch

$\{$beliebige Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{J}\}$

Details sind Übung $\square$

Satz 2.30

X Menge und $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ Familie von Topologien auf X

$\implies \mathrm{Inf}\{\mathcal{O}_i \;:\; i \in I\}$ existiert und gegeben durch $\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$

Das Infinum heißt die Durchschnittstopologie von $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$.

Beweis: Überprüfen zuerst, dass $\mathcal{O} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ Topologie ist

Sei $\mathcal{O}'$ Topologie mit $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_i \; \forall \, i \in I \implies \mathcal{O}' \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$

Somit maximale untere Schranke $\square$

Bemerkung 2.31

Nach Satz 2.29 besitzt $\{\mathcal{O}_i \;:\; i \in I\}$ auch ein Supremum,

nämlich die von der Subbasis $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ erzeugte Topologie

3 Stetige, offene und abgeschlossene Abbildungen

Definition 3.1

Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $A \subset X$ und $f : X \to Y$ Abb.

(i) f stetig in $x \iff \forall\ V \in \mathcal{U}_{f(x)}\ \exists\ U \in \mathcal{U}_x$ mit $f(U) \subset V$

(ii) f stetig auf $A \iff f$ stetig in allen $x \in A$

(iii) f stetig (in Großen) $\iff f$ stetig auf X

Bemerkung 3.2

f stetig in $x \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x\ \forall\ V \in \mathcal{U}_{f(x)}$

Begründung: "$\Longrightarrow$" Für V und U wie in (i) gilt $f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$

Mengentheoretisch gilt immer $U \subset f^{-1}(f(U))$

Somit $x \in U \subset f^{-1}(V)$ für $U \in \mathcal{U}_x \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$

"$\Longleftarrow$" $\exists\ A \in \mathcal{O}$ mit $x \in A \subset f^{-1}(V)$. Also auch $A \in \mathcal{U}_x$

$\implies f(A) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$

Bemerkung 3.3

Seien $(X, d^X),\ (Y, d^Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$

Dann ist f stetig in $x \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit

$$d^X(x, x') < \delta \implies d^Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall\, x' \in X$$

Bemerkung 3.4

f stetig in x und x BP von $A \subset X \implies f(x)$ BP von $f(A)$

Begründung: Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x)} \implies f^{-1}(V)$ Umgebung von x weil f stetig

Da x BP von A ist, folgt $f^{-1}(V) \cap A \neq \varnothing$

$\implies \varnothing \neq f(f^{-1}(V) \cap A) \subset f(f^{-1}(V)) \cap f(A) \subset V \cap f(A)$

Da dies $\forall\ V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ gilt, ist $f(x)$ BP von $f(A)$

Bemerkung 3.5

$f : X \to Y$ stetig in x und $g : Y \to Z$ stetig in $f(x) \implies g \circ f$ stetig in x

Begr.: $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ Umgebung von $x\ \ \forall\ V \in \mathcal{U}_{g \circ f(x)}$

Beispiele:

(i) $f : X \to Y$ konstante Abbildung stetig (für alle Topologien)

(ii) $\mathrm{id}_X : X \to X$ stetig

(iii) $f : X \to Y$ wobei X diskrete Topologie $\implies f$ stetig
(denn dann $U = \{x\}$ Umgebung von x)

(iv) Beispiel aus Analysis auf $\mathbb{R}$ mit metrischer Topologie

Satz 3.6

$(X, \mathcal{O}^X), (Y, \mathcal{O}^Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$. Äquivalent sind:

(1) *f stetig (in Großen)*

(2) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset X$

(3) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) \quad \forall\, B \subset Y$

(4) *Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen*

(5) *Urbilder offener Mengen sind offen* (d.h. $f^{-1}(\mathcal{O}^Y) \leqslant \mathcal{O}^X$)

(6) *Urbilder der Mengen einer Subbasis sind offen*

Beweis:

(1)$\Longrightarrow$(2): klar nach Bemerkung 3.4 über BP weil $\overline{A} = \{\text{BP von } A\}$

(2)$\Longrightarrow$(3): Sei $A = f^{-1}(B) \overset{(2)}{\Longrightarrow} f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$

$\overset{f^{-1}}{\Longrightarrow} \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(\overline{B})$

(3)$\Longrightarrow$(4): $B \subset Y$ abgeschlossen in $Y \overset{(3)}{\Longrightarrow} \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$

wobei Letzteres trivial $\Longrightarrow f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ abgeschlossen

(4)$\Longrightarrow$(5): $A \subset Y$ offen $\Longrightarrow C_Y A$ abgeschlossen

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} f^{-1}(C_Y(A)) = C_X(f^{-1}(A))$ abgeschl. $\Longrightarrow f^{-1}(A)$ offen

(5)$\Longrightarrow$(1): Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ offen $\overset{(5)}{\Longrightarrow} f^{-1}(V)$ offene Umgebung von x

somit stetig in x nach Bemerkung 3.2 (für alle $x \in X$)

(5)$\Longleftrightarrow$(6): weil f^{-1} verträglich mit $\cap$ und $\cup$ $\square$

Definition 3.7

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$

(i) f offen $\iff$ Bilder offener Mengen in X sind offen in Y

(ii) f abgeschlossen $\iff$ Bilder abgeschlossener Mengen in X sind abgeschlossen in Y.

Satz 3.8

$f : X \to Y$ Abb. zwischen topologischen Räumen. Dann

$$f \text{ abgeschlossen} \iff \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) \qquad \forall\ A \subset X$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" $A \subset \overline{A} \implies f(A) \subset f(\overline{A}) \implies \overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} \overset{\text{Vor.}}{=} f(\overline{A})$

"$\Longleftarrow$" $A = \overline{A} \implies f(A) \subset \overline{f(A)} \overset{\text{Vor.}}{\subset} f(\overline{A}) = f(A) \implies \overline{f(A)} = f(A)$ abg. $\square$

Satz 3.9

$f : X \to Y$ Abb. zwischen topologischen Räumen. Äquivalent sind:

(1) *f offen*

(2) *$f(B)$ offen $\forall\ B \in \mathcal{B}$ wobei $\mathcal{B}$ Basis der Topologie auf X*

(3) $U \in \mathcal{U}_x^X \implies f(U) \in \mathcal{U}_{f(x)}^Y$

Beweis:

(1)$\Longrightarrow$(3): $U \in \mathcal{U}_x \implies \exists\ D$ offen mit $x \in D \subset U$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $f(D)$ offen, und $f(x) \in f(D) \subset f(U)$, d.h. $f(U) \in \mathcal{U}_{f(x)}$

(3)$\Longrightarrow$(1): U offen in $X \iff U \in \mathcal{U}_x\ \forall\ x \in U$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $f(U) \in \mathcal{U}_{f(x)}\ \forall\ x \in U,\ f(x) \in f(U) \iff f(U)$ offen

(1)$\Longrightarrow$(2): trivial

(2)$\Longrightarrow$(1): $f(\bigcup_j B_j) = \bigcup_j f(B_j)$ $\square$

Satz 3.10

$f : X \to Y$ bijektive Abb. zwischen topologischen Räumen X, Y

$$\begin{aligned} f, f^{-1} \text{ stetig} &\iff f \text{ stetig und offen} \\ &\iff f \text{ stetig und abgeschlossen} \\ &\iff f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \;\; \forall\, A \subset X \\ &\iff f(A^\circ) = f(A)^\circ \;\forall\, A \subset X \end{aligned}$$

Beweis: klar nach Obigem, da $f^{-1}(f(A)) = A$ und $f(f^{-1}(B)) = B$ □

Definition 3.11

Abbildung wie in Satz 3.10 heißt Homöomorphismus

(English: homeomorphism)

Beispiel für stetige Bijektion, die kein Homöomorphismus ist:

$[0, 1[\xrightarrow{e^{2\pi i t}} \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ jeweils mit induzierter Topologie (s.u.)

Umkehrung nicht stetig bei 1 (dies kann "repariert" werden)

4 Konstruktion von Topologischen Räumen

Überblick zu oft vorliegenden Situationen:

$$f : X \to Y \quad \text{Abbildung}$$

1. Gegeben Topologie auf Y, suche gröbste Topologie auf X,
   die f stetig macht

   Diese Topologie heißt Urbildtopologie
   (oder in etwas allgemeinerer Situation: Initialtopologie)

   Beispiele sind: Unterraumtopologie, Produkttopologie
2. Gegeben Topologie auf X, suche feinste Topologie auf Y,
   die f stetig macht

   Diese Topologie heißt Finaltopologie

   Beispiele sind: Quotiententopologie, topologische Summen

Definition 4.1

Seien X Menge, $(Y, \mathcal{O}^Y)$ topologischer Raum und $f : X \to Y$ Abb.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^X &= \mathrm{Min}\{\mathcal{O} \text{ Topologie auf } X \;:\; f : X \to Y \text{ stetig}\} \\ &= \{f^{-1}(B) \;:\; B \text{ offen in } Y\} \\ &= f^{-1}(\mathcal{O}^Y) \end{aligned}$$

$\mathcal{O}^X = \mathcal{O}^X_f$ heißt die Urbildtopologie von f auf X

Bemerkung 4.2

Tatsächlich ist $f^{-1}(\mathcal{O}^Y)$ eine Topologie

(weil "Urbildnehmen" verträglich ist mit $\cap, \cup$)

Offensichtlich ist $f : (X, \mathcal{O}^X) \to (Y, \mathcal{O}^Y)$ stetig

und $\mathcal{O}^X = f^{-1}(\mathcal{O}^Y)$ minimal mit dieser Eigenschaft

Bemerkung 4.3

X Urbildtop. von $f : X \to (Y, \mathcal{O}^Y)$. Wegen $C_X f^{-1}(B) = f^{-1}(C_Y(B))$:
$A \subset X$ abgeschl. in $X \iff A = f^{-1}(B)$ für B abgeschl. in Y

Satz 4.4 (Vorschalteigenschaft der Urbildtopologie)

X, Y, Z topologische Räume und $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$

(i) *X trage Urbildtopologie von f. Dann: g stetig $\iff$ $f \circ g$ stetig*

(ii) *Urbildtopologie von $f \circ g$ auf Z gleich der Urbildtopologie von g von der Urbildtopologie von f*

Begründung: (i) "$\Longrightarrow$" klar, da f auch stetig
"$\Longleftarrow$" $(f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(f^{-1}(B))$ offen in Z für alle $B \subset Y$ offen
Da $\mathcal{O}^X = \{f^{-1}(B) : B \text{ offen}\}$, $g^{-1}(A) \in \mathcal{O}^Z$ für $A \in \mathcal{O}^X$, d.h. g stetig
(ii) $\mathcal{O}^Z_{f \circ g} = \{(f \circ g)^{-1}(B) : B \in \mathcal{O}^Y\} = \{g^{-1}(f^{-1}(B)) : B \in \mathcal{O}^Y\}$
$= \{g^{-1}(A) : A \in \mathcal{O}^X_f, \text{ Urbildtopologie auf } X\} = g^{-1}(\mathcal{O}^X_f)$ □

Nun wichtiger Spezialfall:

Definition 4.5

X topologischer Raum und $Y \subset X$ Teilmenge mit Inklusion $i : Y \hookrightarrow X$
Urbildtopologie $\mathcal{O}_i^Y$ von i auf Y heißt Unterraumtopologie
(gelegentlich Spurtopologie, Relativtopologie, Teilraumtopologie,...)
$(Y, \mathcal{O}_i^Y)$ heißt topologischer Unterraum (UR)

Bemerkungen 4.6

(i) $\mathcal{O}_i^Y$ ist gröbste Topologie, so dass i stetig

(ii) $Z \subset Y \subset X$

Z als UR von X $=$ Z als UR von Y, wobei Y UR von X

(iii) (Grund für Begriff Spurtopologie) Y UR von X und $A \subset Y$. Dann:

- A offen in $Y \iff \exists$ offenes $B \subset X$ mit $A = B \cap Y$
- A abgeschl. in $Y \iff \exists$ abgeschl. $B \subset X$ mit $A = B \cap Y$

Begründung: $\mathcal{O}_i^Y = i^{-1}(\mathcal{O}^X) = \{B \cap Y \, : \, B \subset X \text{ offen}\}$

Bemerkung 4.7

Y Unterraum von $(X, \mathcal{O})$ und $z \in Y$. Dann:

$V \in \mathcal{U}_z^Y$ (Umgebung von z in Y) $\iff \exists\, U \in \mathcal{U}_z^x$ mit $V = U \cap Y$

Begründung: "$\Longrightarrow$" $\exists\, D \subset Y$ offen in Y mit $z \in D \subset V$

Nach der Ur-Eigenschaft $\exists\, B \subset X$ offen $D = B \cap Y,\ z \in B$

Dann erfüllt $U = B \cup V$ das Gewünschte, d.h.

$$U \in \mathcal{U}_z^x \quad \text{und} \quad U \cap Y = (B \cup U) \cap Y = V$$

"$\Longleftarrow$" klar, denn $\exists$ offenes B(in X) mit $z \in B \subset U$, denn $z \in B \cap Y \subset U \cap Y = U$ und $B \cap Y$ offen in Y, so dass $V \in \mathcal{U}_z^y$.

Bemerkung 4.8

Seien Y Unterraum von X und $A \subset Y$. Dann: $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$

Begründung:

$$\begin{aligned}
\overline{A}^Y &= \bigcap_{B \supset A,\ C_Y B \in \mathcal{O}^Y} B && \text{(nach Satz 2.23)} \\
&= \bigcap_{B \cap Y \supset A,\ C_X B \in \mathcal{O}^X} B \cap Y \\
&= \Big(\bigcap_{B \supset A, ,\ C_X B \in \mathcal{O}^X} B \Big) \cap Y && \text{(da Schnitt mit } Y\text{)} \\
&= \overline{A}^X \cap Y
\end{aligned}$$

Aber nur: $(A^\circ)^Y \supset (A^\circ)^X \cap Y$ (Beispiel: Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}^2$) da

$$(A^\circ)^Y = \bigcup_{B \subset A,\ B \in \mathcal{O}^Y} B = \bigcup_{B \cap Y \subset A,\ B \in \mathcal{O}^X} B \cap Y \supset \Big(\bigcup_{B \subset A,\ B \in \mathcal{O}^X} B \Big) \cap Y = (A^\circ)^X \cap Y$$

Bemerkung 4.9

Für $A \subset Y$ gilt $\partial_Y A \subset \partial_X A \cap Y$ (ohne Gleichheit, Beispiel wie oben), da

$$\begin{aligned}
\partial_Y A &= \overline{A}^Y \cap \overline{C_Y A}^Y && \text{(siehe Definition 2.21)} \\
&= \overline{A}^X \cap \overline{C_Y A}^X \cap Y && \text{(siehe Bemerkung 4.8)} \\
&\subset \overline{A}^X \cap \overline{C_X A}^X \cap Y \\
&= \partial_X A \cap Y
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.10

Sei Y Unterraum von X. Dann gilt:

$\forall\, A \subset Y$ gilt (A offen in $X \iff A$ offen in Y) $\iff Y$ offen in X

Begründung: "$\Longrightarrow$" Y offen in Y, somit Y offen in X nach Voraus.

"$\Longleftarrow$" Wenn A offen in X und $A \subset Y$, dann A offen in UR Y

Sei A offen $Y \implies \exists\, B$ offen in X mit $A = \underbrace{B \cap Y}_{\text{beide offen}} \implies A$ offen in X

Bemerkung 4.11

X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ Unterraum und $f : X \to Z$ stetig

Dann ist die Einschränkung $f|_Y : Y \to Z$ stetig

Begründung: $f|_Y = f \circ i$ ist Hintereinanderausführung stetiger Abb.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f|_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.12

Sei $f : X \to Z$ stetig und betrachte sein Bild $f(X)$ als Unterraum von Z

$\Longrightarrow$ $f^* : X \to f(X)$ definiert durch $f^*(x) = f(x)$ ist stetig

Begründung: UR Topologie erzeugt von $B \cap f(X)$ mit B offen in Z

und es gilt $(f^*)^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B)$, was also offen ist

Nun Verallgemeinerung der Urbildtopologie:

Definition 4.13

$(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ Familie von Abb. von Menge X in topologische Räume
Initialtopologie bez. $(f_i)_{i \in I}$ ist das Minimum von

$$\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X) \ : \ f_i : X \to Y_i \text{ stetig für alle } i \in I\}$$

Bemerkungen 4.14

(i) Dies ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle f_i stetig sind.

(ii) Wenn $\mathcal{O}_i = (f_i)^{-1}(\mathcal{O}^{Y_i})$ Urbildtopologie von f_i, dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

Subbasis für Initialtopologie

(iii) Zudem gilt: Initialtopologie $= \sup\{\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}(X) \ : \ i \in I\}$

Folgendes gilt natürlich auch für die Urbildtopologie (siehe Satz 4.4)

Satz 4.15 (Charakteristische Eigenschaft)

Sei X versehen mit Initialtopologie zu $\left(f_i : X \to (Y_i, \mathcal{O}^{Y_i})\right)_{i \in I}$
Für alle Abbildungen $g : (Z, \mathcal{O}^Z) \to X$ gilt

$$g \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i \circ g \text{ stetig für alle } i \in I$$

Begründung: Zum Merken & Argumentieren verwende das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} g \text{ stetig} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Urbilder der Subbasis } \{f_i^{-1}(A) : A \in \mathcal{O}^{Y_i},\ i \in I\} \subset \mathcal{O}^Z \\ &\Longleftrightarrow \quad g^{-1}(f_i^{-1}(A)) = (f \circ g_i)^{-1}(A) \in \mathcal{O}^Z \ \ \forall \ \ A \in \mathcal{O}^{Y_i},\ i \in I \\ &\Longleftrightarrow \quad f \circ g_i \text{ stetig} \ \ \forall \ \ i \in I \end{aligned}$$

$\square$

Wieder ein wichtiger Spezialfall:

Definition 4.16

$\prod_{i\in I} Y_i$ mengentheoretisches Produkt topologische Räume $(Y_i)_{i\in I}$
$\pi_i : \prod_{j\in I} Y_j \to Y_i$ Projektionen auf die Fasern
Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} Y_i$ ist die Initialtopologie bez. $(\pi_i)_{i\in I}$

Bemerkungen 4.17

(i) Basis der Produkttopologie bilden sogenannte Elementarmengen:
$E = \prod_{i=I} A_i$ mit $A_i \subset Y_i$ offen, $A_i = Y_i$ bis auf endlich viele $i \in I$
weil
$$\mathcal{O}_i = (\pi_i)^{-1}(\mathcal{O}^{Y_i}) = \{\prod_i A_j \,:\, A_j = Y_j \;\forall\, j \neq i,\; A_i \text{ offen}\}$$
Elementarmengen heißen oft auch offene Zylinder

(ii) Projektionen π_i sind surjektive und offene Abbildungen
Begründung: Bilder der Basis sind offen und π_i verträglich mit $\cup$

(iii) $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ erfüllt nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom!

Satz 4.18

Seien X topologischer Raum und $\prod_{i\in I} Y_i$ topologisches Produkt Zudem sei gegeben eine Abbildung $g : X \to \prod_{i\in I} Y_i$. Dann:

$$g \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_i \circ g \text{ stetig für alle } i \in I$$

Begründung: Wir verwenden das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi_i \circ g"'] & \prod\limits_{j\in I} Y_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

”$\Longrightarrow$” ist somit klar wegen Komposition von stetigen Abbildungen

”$\Longleftarrow$” $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ mit $\mathcal{O}_i = (\pi_i)^{-1}(\mathcal{O}^{Y_i})$ bildet Subbasis

Es reicht zu zeigen, dass Urbilder der Subbasis-Mengen offen sind

$g^{-1}\left(\pi_i^{-1}(A_i)\right) = \left(\pi_i \circ g_i\right)^{-1}(A_i)$ ist offen $\forall\ A_i \in \mathcal{O}^{Y_i}\ \forall\ i$ $\square$

Folgerung: $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ Familie von Abbildungen in topo. Räume Y_i

Definiere $f : X \to \prod_{j \in I} Y_j$ durch Kommutativität folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j \in I} Y_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

d.h. i-te Komponente von $f = f_i$ und $f_i = \pi_i \circ f$. Dann nach Satz 4.18:

$$f \ \text{stetig} \iff f_i \ \text{stetig} \ \forall \ i \in I$$

Somit: gröbste Topo. auf X mit f_i = gröbste Topo. mit f stetig, d.h.

Satz 4.19

Initialtopo. von $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ = Urbildtopo. von $f : X \to \prod_{i \in I} Y_i$ (wobei Letzteres das topologische Produkt ist)

Satz 4.20

$(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ *Familie von Abb. zwischen topologischen Räumen*

Definiere f durch

$$\begin{tikzcd} \prod X_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod Y_j \arrow[d, "\hat\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Dann: f *stetig* $\iff$ f_i *stetig* $\forall\ i \in I$

Beweis: "$\Longleftarrow$" f_i stetig $\forall\ i \implies f_i \circ \pi_i = \hat\pi_i \circ f$ stetig $\forall\ i$

Nach Satz 4.18 ist dann f stetig (schaue auf rechtes obere Dreieck)

"$\Longrightarrow$" f stetig $\implies \hat\pi_i \circ f = f_i \circ \pi_i$ stetig $\forall\ i$

Nun für $A \subset Y_i$ offen ist $\left(f_i \circ \pi_i\right)^{-1}(A) = \pi_i^{-1}(f_i^{-1}(A))$ offen in $\prod_j X_j$

Da π_i offen ist (siehe (ii) in Bem. 4.17), folgt $\pi_i\left(\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(A))\right)$ offen in X_i

$\overset{\pi_i \text{ surj.}}{\Longrightarrow}$ $f_i^{-1}(A)$ offen in X_i, somit f_i stetig $\square$

Nun zur zweiten Klasse von Konstruktionen:

Definition 4.21

X topologischer Raum, Y Menge und $f : X \to Y$

Die Menge $\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y) \ : \ f \text{ stetig}\}$ besitzt ein Maximum gegeben durch:

$$\mathcal{O}_f \;=\; \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \text{ offen in } X\}$$

Die Topologie $\mathcal{O}_f$ heißt Finaltopologie bez. f

Übung: $\mathcal{O}_f$ ist tatsächlich eine Topologie

Offensichtlich ist es maximal in $\{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y) \ : \ f \text{ stetig}\}$

Bemerkung: Es ist sinnvoll anzunehmen, dass f surjektiv ist

Andernfalls ist $Y \backslash f(X)$ einfach mit der diskreten Topologie versehen $\diamond$

Satz 4.22 (Nachschalteigenschaft der Finaltopologie)

X, Z topo. Räume und $f: X \to Y$ wobei Y mit Finaltopologie von f
Für $g: Y \to Z$ gilt dann: $\quad g$ stetig $\iff$ $g \circ f$ stetig

Begründung: "$\Longrightarrow$" trivial

"$\Longleftarrow$" Wenn $A \subset Z$ offen, so $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ offen in X
$\Longrightarrow$ $g^{-1}(A)$ offen in Y (Def. Finaltopo.) $\Longrightarrow$ g stetig $\square$

Satz 4.23

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ mit f, g surjektiv und X topologischer Raum
Finaltopo. $\mathcal{O}_{g \circ f}$ bez. $g \circ f$ = Finaltopo. bez. g von Finaltopo. $\mathcal{O}_f$ bez. f

Begründung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{g \circ f} &= \{B \subset Z : (g \circ f)^{-1}(B) \text{ offen in } x\} \\
&= \{B \subset Z : f^{-1}(g^{-1}(B)) \text{ offen in } x\} \\
&= \{B \subset Z : g^{-1}(B) \text{ offen in } \mathcal{O}_f\} \\
&= \text{Finaltopologie von } \mathcal{O}_f \text{ bez. } g
\end{aligned}$$
$\square$

Satz 4.24

X topologischer Raum und Y trage Finaltopologie zu $f : X \to Y$. Dann

$$B \subset Y \text{ abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(B) \text{ abgeschlossen in } X$$

Begründung: f^{-1} verträglich mit Komplement-Bildung $\square$

Satz 4.25

$f : X \to Y$ Abbildung zwischen topologischen Räumen

Zudem sei f stetig, offen und surjektiv

$\implies$ Y trägt Finaltopologie bez. f

Begründung: Sei $\mathcal{O}$ gegebene Topologie auf Y, $\mathcal{O}_f$ Finaltopologie

$\mathcal{O} \leqslant \mathcal{O}_f$: $B \in \mathcal{O} \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f^{-1}(B)$ offen in $X \implies B \in \mathcal{O}_f$ (nach Def. Finaltopo.)

$\mathcal{O}_f \leqslant \mathcal{O}$: $B \in \mathcal{O}_f$, d.h. $f^{-1}(B)$ offen in $X \overset{f \text{ offen}}{\Longrightarrow} f(f^{-1}(B)) \in \mathcal{O}$

$$\overset{f \text{ surj.}}{\Longleftrightarrow} B \in \mathcal{O}$$ $\square$

Verträglichkeit von Unterraum- und Finaltopologie

Satz 4.26

Y Finaltopologie bez. $f : X \to Y$, $A \subset X$ offener UR mit $A = f^{-1}(f(A))$ (d.h. A saturiert bez. f)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f|_A"'] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dann: Unterraumtopologie auf $f(A)$ = Finaltopologie bez. $f|_A$

Begründung: $f(A)$ offen in Y, da $f^{-1}(f(A)) = A$ offen in X

Erinnerung: ($B \subset A$ offen im UR $\iff$ B offen in X) $\iff$ $A \subset X$ offen

Dies angewandt auf $f(A) \subset Y$ offen:

$D \subset f(A)$ offen in UR $\iff$ D offen in Y $\overset{\text{Finaltop}}{\iff}$ $f^{-1}(D)$ offen in X

$\iff$ $(f|_A)^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap A = f^{-1}(D)$ offen in A für $D \subset f(A)$

$\iff$ $D \subset f(A)$ offen in Finaltopologie bez. $f|_A$ $\square$

Der Prototyp von einer Finaltopologie ist der folgende Spezialfall:

Definition 4.27 (Quotientenraum)

Sei X topologischer Raum mit Äquivalenzrelation $\sim$

$\tilde{x} = \{y \in X \ : \ x \sim y\}$ Äquivalenzklassen von x und $X/\sim = \{\tilde{x} \ : \ x \in X\}$

$\varphi : X \mapsto \ X/\sim$ definiert durch $\varphi(x) = \tilde{x}$ heißt kanonische Abbildung

Finaltopologie auf $X/\sim$ bez. φ heißt Quotiententopologie

Beispiele (zeichnen Sie sich Bilder):

(i) Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $x \sim y \iff x_k = y_k$ mod 1 $\forall\ k = 1, \ldots, n$
Dann ist $X/\sim$ der n-dimensionaler Torus

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n/\{0\}$ und $x \sim y \iff x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$
$X/\sim = \ \mathbb{R}P^{n-1}$ reeller projektiver Raum (für $n = 3$ projektive Ebene)

(iii) Möbiusband $[0, 1]^2/\sim$ wobei $(0, x) \sim (1, 1 - x)$ für $x \in [0, 1]$

(iv) Klein'sche Flasche $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]/\sim$ wobei

$$((x, y), 0) \sim ((x, -y), 1) \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$$

Satz 4.28 (Kanonische Zerlegung einer Abbildung)

$f : X \to Y$ Abb. zwischen topologische Räumen, Bild $f(X)$ Unterraum

Definiere: $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$

sowie: $\overline{f} : X/\sim \to f(X)$ durch $\overline{f}(\tilde{x}) = f(x)$

Dann $\overline{f}$ bijektiv und $f = i \circ \overline{f} \circ \varphi$, d.h. $f : X \xrightarrow{\varphi} X/\sim \xrightarrow{\overline{f}} f(X) \xhookrightarrow{i} Y$ und

$$f \text{ stetig} \iff \overline{f} \text{ stetig}$$

Beweis: f stetig $\iff \overline{f} \circ \varphi$ stetig (nach Satz 4.4 da $f(X)$ Unterraum)

$\iff \overline{f}$ stetig (nach Satz 4.22 da $X/\sim$ Finaltopo.) $\square$

Im Allgemeinen $\overline{f}$ kein Homöomorphismus, aber:

Satz 4.29

Zudem f surjektiv, stetig und Y Finaltopologie bez. $f \implies \overline{f}$ Homöom.

Beweis: $\overline{f}^{-1}$ existiert, φ stetig und gegeben durch $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\overline{f}^{-1}} X/\sim$

Da Y Finaltopologie folgt mit Satz 4.22: φ stetig $\iff \overline{f}^{-1}$ stetig $\square$

Definition 4.30

$(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ Familie von Abbildungen von topologischen Räumen X_i
Die Finaltopologie auf Y bez. $(f_i)_{i \in I}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\{B \subset Y \,:\, f_i^{-1}(B) \text{ offen in } X_i \ \forall\, i \in I\} \\
&\qquad = \operatorname{Max} \{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y) \,:\, f_i \text{ stetig } \forall\, i \in I\} \quad \text{feinste Topo. mit } f_i \text{ stetig} \\
&\qquad = \inf_{i \in I} \{\mathcal{O}_i \,:\, \mathcal{O}_i \text{ Finaltopologie auf } Y \text{ bez. } f_i\}
\end{aligned}$$

Satz 4.31 (Nachschalteeigenschaft der Finaltopologie)

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

wobei Z topologischer Raum und $g : Y \to Z$ Abbildung. Es gilt:

$$g \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad g \circ f_i \text{ stetig } \forall\, i \in I$$

Beweis:

$$g \circ f_i \text{ stetig } \forall\, i \iff (g \circ f_i)^{-1}(C) = f_i^{-1}(g^{-1}(C)) \text{ offen } \forall\, C \subset Z \text{ offen } \forall\, i$$
$$\iff g^{-1}(C) \text{ offen in } Y \quad \forall\, C \subset Z \text{ offen (nach Def.)}$$
$$\iff g \text{ stetig} \qquad \square$$

Spezialfall (entspricht Produkttopologie bei Initialtopologie):

Definition 4.32 (Topologische Summen)

$(X_j)_{j \in I}$ topologische Räume und $Y = \bigcup_{j \in I} X_j$ disjunkte Vereinigung

$i_j : X_j \to Y$ Einbettungsabbildungen

Y mit der Finaltopologie bez. $(i_j)_{j \in I}$ heißt topologische Summe

Bemerkung Oft verwendete Notation ist $Y = \sum_{j \in I} X_j$

Eigenschaften von topologischen Summen:

(i) $B \subset Y$ offen $\iff$ $B \cap X_j$ offen in X_j $\forall\, j \in I$

Begründung:

$B \subset Y$ offen $\iff$ $(i_j)^{-1}(B) = B \cap X_j$ offen in X_j $\forall\, j \in I$

(ii) X_j offen und abgeschlossen in Y $\quad \forall\, j \in I$

Begründung:

X_j offen ist klar nach (i)

X_j abgeschlossen in Y $\iff$ $C_Y X_j = \bigcup_{i \neq j} X_i$ $\quad$ offen in Y

(iii) Jede disjunkte Zerlegung $Y = \bigcup_{j \in I} X_j$ eines topo. Raumes mit offenem X_j ist topologische Summe der Unterräume $(X_j)_{j \in I}$

Begründung:

$B = \mathring{\bigcup}_j B \cap X_j$ offen in Y $\iff$ $B \cap X_j$ offen in Y $\forall\, j$

$\iff$ $B \cap X_j$ offen in X_j $\forall\, j$ (da X_j offener Unterraum von Y)

$\iff$ B offen in topologischer Summe der Unterräume nach (i) $\diamond$

Folgende Aussage entspricht Satz 4.19 für die Produkttopologie:

Satz 4.33

Seien $(X_j)_{j\in I}$ topologische Räume und $f_j : X_j \to Z$ Abbildungen. Setze:

$$f = \sum_{j\in I} f_j \; : \; Y = \sum_{j\in I} X_j \;\to\; Z$$

wobei Y topologische Summe. Dann:

Finaltopologie auf Z bez. $(f_j)_{j\in I}$ = Finaltopologie bez. $f : Y \to Z$

Begründung:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & Y = \sum X_i \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Nun gilt: f stetig $\iff$ f_j stetig $\forall\, j$ $\square$

5 Konvergenztheorie

Zur Motivation der Filterkonvergenz: Folgenkonvergenz (analog zu $\mathbb{R}^n$)

Definition 5.1 (Komvergenz und Häufungspunkt von Folge)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge im topologischen Raum X und $x \in X$

(i) $\lim x_n = x \iff \forall\, U \in \mathcal{U}_x \;\exists\, N$ mit $x_n \in U \;\forall\, n \geqslant N$

(ii) x Häufungspunkt (HP) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\iff \forall\, U \in \mathcal{U}_x$ und $N \in \mathbb{N} \;\exists\, n \geqslant N$ mit $x_n \in U$

Satz 5.2

$f : X \to Y$ stetige Abb. zwischen topologischen Räumen und $x \in X$

(i) *f stetig in x* $\implies \Big(\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)\Big)$

(ii) *X erfüllt 1. Abzählbarkeitsaxiom $\implies$ Umkehrung in (i) gilt*

Beweis:

(i) Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$

Da f stetig, existiert $U \in \mathcal{U}_x$ mit $f(U) \subset V$

Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U \quad \forall\, n \geqslant N$ (möglich, da $\lim x_n = x$)

Dann $f(x_n) \in V \quad \forall\, n \geqslant N$, d.h. $\lim f(x_n) = f(x)$

(ii) Sei f unstetig

Wir konstruieren Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = x$, aber $\lim f(x_n) \neq f(x)$

(d.h. $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$)

Nach Voraussetzung $\exists$ Umgebungsbasis $\{U_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ von x

Zudem ohne Einschränkung $U_n \supset U_{n+1} \;\forall\, n$

Da f unstetig, $\exists\; V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ mit $f(U_n) \not\subset V \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(Negation von Bemerkung 3.2 zusammen mit Basiseigenschaft)

Wähle $x_n \in U_n$, so dass $f(x_n) \notin V$

Es gilt $\lim x_n = x$ (nach Definition), und $\lim f(x_n) \neq f(x)$ $\square$

Nun sollte Stetigkeit anschaulich gesehen charakterisiert sein durch:

Konvergente Objekten werden in konvergente Objekte überführt

Somit: obiger Konvergenzbegriff nicht richtig (wenn X ohne 1. AA)

Typisches Beispiel hierfür:

Beispiel: $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ mit Produkttopologie erfüllt nicht das 1. AA

Begründung: Sei $x = (x(t))_{t\in\mathbb{R}} \in X$ und $\pi_t : X \to \{0,1\}$ Projektion

Dann sind

$$U_t = (\pi_t)^{-1}(\{0\}) \text{ offen in } X$$

überabzählbar viele Umgebungen von $\mathbf{0} = (\mathbf{0}(t))_{t\in\mathbb{R}} = (0)_{t\in\mathbb{R}}$

Aber keine davon kann aus einer Basis herausgenommen werden, denn

$$U_t \not\subset U_s \qquad \forall\, s \neq t$$

◇

Weiter mit $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$: Die Funktion

$$f : X \to \{0,1\} \qquad , \qquad f((x(t))_{t\in\mathbb{R}}) = \sup_{A\subset\mathbb{R},\, \mathbb{R}\setminus A \text{ endl.}} \inf_{t\in A} x(t)$$

erfüllt Folgendes:

(1) $f(\mathbf{0}) = 0$

(2) f ist nicht stetig bei $\mathbf{0}$

(3) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ Folge in X mit $\lim x_n = \mathbf{0} \implies \lim f(x_n) = 0$

Also: Überführung der Folgenkonvergenz impliziert **nicht** die Stetigkeit

Begründung:

(1) klar

(2) In jeder Umgebung von $\mathbf{0}$ gibt es $x = (x(t))_{t\in\mathbb{R}}$, die bis auf endlich vielen t den Wert 1 annehmen. Für solche gilt $f(x) = 1$

(3) Hierfür benötigen wir folgendes Lemma 5.3:

Lemma 5.3

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in topologischem Produkt* $X = Y^I$ *mit Indexmenge* I

Dann

$$\lim x_n = x \;\; \text{in } X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in I: \;\lim x_n(i) = x(i) \;\; \text{in } Y$$

Begründung: "$\Longrightarrow$" Faserprojektionen $\pi_i : X \to Y$ sind stetig

$\overset{\text{Satz 5.2}}{\Longrightarrow}$ $\lim \pi_i(x_n) = \pi_i(x) = x(i)$ in Y $\forall\, i \in I$, was zu zeigen war

"$\Longleftarrow$" Sei $U \in \mathcal{U}_x$ beliebig

Gemäß Bemerkung 4.17(i) gibt es dann $J \subset I$ endlich, so dass

$U = \prod_{i\in I} U_i$ mit $U_j \in \mathcal{U}_{x(j)}$ Umgebung in Y und $U_i = Y$ $\forall\, i \notin J$

Nach Voraussetzung ist $x_n(j) \in U_j$ für alle $n \geqslant N_j$

Setze $N = \max_{j\in J} N_j$. Dann gilt $x_n \in U$ für alle $n \geqslant N$

Somit $\lim x_n = x$ in X $\square$

Nun können wir obiges Argument zu (3) vervollständigen:

$$\begin{aligned} \lim x_n = \mathbf{0} \quad &\iff \quad \lim x_n(t) = 0 \;\forall\; t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \forall\; t \in \mathbb{R} : \;\exists\; N_t \text{ mit } x_n(t) = 0 \;\forall\; n \geqslant N_t \end{aligned}$$

Für $N \in \mathbb{N}$ setze:

$$R_N \;=\; \{t \in \mathbb{R} \;:\; N_t \leqslant N\} \;=\; \{t \in \mathbb{R} \;:\; x_n(t) = 0 \;\forall\; n \geqslant N\}$$

Da $\lim x_n = \mathbf{0}$, gilt $\bigcup_N R_N = \mathbb{R}$

Somit $\exists\; N_0 \in \mathbb{N}$ mit R_{N_0} überabzählbar

$\implies$ $A \subset \mathbb{R}$ in Definition von f muss Punkte von R_{N_0} enhalten

$\implies$ $f(x_n) = 0 \;\forall\; n \geqslant N_0 \implies \lim f(x_n) = 0$ □

Bemerkung: Wenn $I = \mathbb{Z}$ ist, so R_N endlich für alle N möglich

Also kann man **nicht** schließen, dass $\lim f(x_n) = 0$, da Wert 1 möglich

(f unstetig bei **0** gilt aber auch in $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$) ◇

Definition 5.4 (Begriff des Filters nach Henri Cartan)

Auf einer X Menge ist ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Filter $\iff$

(i) $\mathcal{F} \neq \varnothing$ und $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $F \in \mathcal{F},\ A \supset F \implies A \in \mathcal{F}$

(iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

Beispiele:

(1) $\mathcal{F} = \{B : B \supset A\}$ Filter der Obermengen von $A \subset X,\ A \neq \varnothing$

(2) $\mathcal{U}_x$ Umgebungsfilter von $x \in X$ in topologischen Raum X

(3) X unendliche Menge $\implies \mathcal{F} = \{A \subset X : C_X A \text{ endlich}\}$ Filter

(4) X überabzählb. Menge $\implies \mathcal{F} = \{A \subset X : C_X A \text{ abzählbar}\}$ Filter

(5) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X. Der zugehörige Elementarfilter ist:

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : \exists\ n_0 \text{ mit } x_n \in F\ \forall\ n \geqslant n_0\}$$

Im Allgemeinen gibt es viel mehr Filter als Elementarfilter

Definition 5.5

Die Menge der Filter auf X ist geordnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \leqslant \mathcal{F}_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_1 \text{ gröber als } \mathcal{F}_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_2 \text{ feiner als } \mathcal{F}_1 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(1) $\mathcal{F} = \{X\}$ ist der gröbste aller Filter (Minimum)

(2) Das Maximum einer Menge von Filtern muss nicht existieren:

$$X = \{x, y\} \quad , \quad \mathcal{F}_1 = \{X\} \quad , \quad \mathcal{F}_2 = \{\{x\}, X\} \quad , \quad \mathcal{F}_3 = \{\{y\}, X\}$$

Dann gilt: $\mathcal{F}_2 \nleqslant \mathcal{F}_1 \quad , \quad \mathcal{F}_3 \nleqslant \mathcal{F}_2 \quad , \quad \mathcal{F}_2 \nleqslant \mathcal{F}_3$

(3) Elementarfilter einer Folge ist immer gröber als der Elementarfilter einer Teilfolge (denke z.B. an Folge mit mehreren HP)

Satz 5.6

Sei $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *eine nicht-leere Menge von Filtern auf* X
$\Longrightarrow \exists \inf_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_*$ *und ist gegeben durch* $\mathcal{F}_* = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$
d.h. $\mathcal{F}_*$ *größte untere Schranke oder feinster Filter* $\mathcal{F}_* \leqslant \mathcal{F}_i \ \forall \ i \in I$

Beweis: $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ist ein Filter und offensichtlich $\mathcal{F}_j \geqslant \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$
Noch zu zeigen: $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ größte untere Schranke ist
Sei $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{F}_i \ \forall \ i \in I$, d.h. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i \ \forall \ i \Longrightarrow \ \mathcal{F} \subset \bigcap_i \mathcal{F}_i$, d.h. $\mathcal{F} \leqslant \bigcap_i \mathcal{F}_i$ □

Bemerkung 5.7

Obere Schranken von Filtern $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ existieren im Allgemeinen nicht:
X Menge, $A \neq \emptyset, \ A \subset X, \ A \neq X$

$$\mathcal{F}_1 = \{F \ : \ F \supset A\} \qquad , \qquad \mathcal{F}_2 = \{F \ : \ C_X A \subset \mathcal{F}\}$$

Jede obere Schranke müßte A und $C_X A$ enthalten
also auch $A \cap C_X A = \emptyset$. Somit kann es kein Filter sein! ◇

Satz 5.8

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. *Dann ist* $\{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ *Filter auf* $X, \mathcal{F} \supset \mathcal{M}\} \neq \emptyset$

$\iff$ *endliche Durchschnitte von Elementen aus* $\mathcal{M}$ *sind nicht-leer*

Nach Satz 5.6 besitzt diese Menge dann ein Minimum, nämlich:

$$\mathcal{F}^* = \{F \subset X : F \text{ Obermenge endl. Durchschnitte von Elem. aus } \mathcal{M}\}$$

$\mathcal{F}^*$ *heißt das Erzeugnis von* $\mathcal{M}$, *der gröbste* $\mathcal{M}$ *enthaltende Filter.*

Begründung: "$\Longrightarrow$" klar nach Filteraxiomen

"$\Longleftarrow$" Offensichtlich ist $\mathcal{F}^*$ ein Filter mit den gewünschten Eigensch.

Es ist elementar die Minimalität von $\mathcal{F}^*$ nachzuweisen $\square$

Folgerung: $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ nicht-leere Familie von Filtern

Dann existiert das Erzeugnis von $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$

$\iff$ Elemente von $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ haben nicht-leere endliche Durchschnitte $\diamond$

Erinnerung: $(T, \leqslant)$ geordnete Menge

(i) $S \subset T$ heißt vollständig geordnete Teilmenge (oder auch Kette)

$\iff \forall\ s_1, s_2 \in S$ gilt $s_1 \leqslant s_2$ oder $s_2 \leqslant s_1$

(ii) $(T, \leqslant)$ heißt induktiv geordnet

$\iff$ jede vollständig geordnete Teilmenge S besitzt obere Schranke, d.h. es existiert $t \in S$ mit $s \leqslant t\ \forall\ s \in S$

Zorn'sches Lemma: Jede nicht-leere induktiv geordnete Menge hat maximale Elemente, d.h. $\exists\ t \in T$ mit: $(t \leqslant s \implies s = t \quad \forall\ s \in T)$

Satz 5.9

Wenn $X \neq \emptyset$, dann ist $\{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ Filter auf $X\}$ induktiv geordnet

Begründung:

Vollständig geordnete Teilmengen von Filtern besitzen Vereinigung, welche nicht verschwindende endliche Durchschnittsmengen hat

Somit sichert obige Folgerung die Existenz von oberen Schranken $\square$

Definition 5.10

Maximale Elemente der Menge aller Filter auf X heißen Ultrafilter:

$$\mathcal{F} \text{ Ultrafilter} \quad \iff \quad (\mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F} \implies \mathcal{F}' = \mathcal{F})$$

Satz 5.11

Zu jedem Filter gibt es einen feineren Ultrafilter

Begründung: Satz 5.9 und Zorn'sches Lemma □

Beispiel 5.12

$\mathcal{F}_x = \{F : x \in F\}$ ist ein Ultrafilter zu $x \in X$

Begründung: Sei $\mathcal{F}' > \mathcal{F}_x$ mit strikter Ungleichung

$\implies \exists\, A \in \mathcal{F}'$ mit $A \notin \mathcal{F}$, d.h. $x \notin A$

$\implies \{x\} \cap A = \emptyset \in \mathcal{F}'$, also $\mathcal{F}'$ kein Filter ◇

Satz 5.13

Sei $\mathcal{F}$ Filter auf Menge X. Dann gilt:

$\mathcal{F}$ *Ultrafilter* $\iff \forall\ A \subset X\ :$ *entweder* $A \in \mathcal{F}$ *oder* $C_X A \in \mathcal{F}$

Beweis:

"$\Longrightarrow$" $\mathcal{F}$ Ultrafilter und $C_X A \notin \mathcal{F}$

$\Longrightarrow\ A \cap F \neq \varnothing\ \forall F \in \mathcal{F}$ (sonst $F \subset C_X A$ und somit $C_X A \in \mathcal{F}$)

$\Longrightarrow$ Erzeugnis von A und $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}^* \geqslant \mathcal{F}$

$\Longrightarrow \mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ (nach Voraussetzung)

$\Longrightarrow\ A \in \mathcal{F}$

"$\Longleftarrow$" Gegenannahme: $\exists\ \mathcal{F}^* > \mathcal{F}\ \Longrightarrow\ \exists\ A \in \mathcal{F}^*,\ A \notin \mathcal{F}$

$\Longrightarrow\ C_X A \in \mathcal{F}$ (nach Voraussetzung)

$\Longrightarrow\ C_X A \in \mathcal{F}^*$ (da $\mathcal{F}^* > \mathcal{F}$)

$\Longrightarrow\ \varnothing = C_X A \cap A \in \mathcal{F}^*$, was nicht erlaubt ist $\square$

Definition 5.14

$\mathcal{F}$ Filter auf X, $\varnothing \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, $\varnothing \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{F}$

(i) $\mathcal{B}$ Basis des Filters $\mathcal{F} \iff \forall\, F \in \mathcal{F}\ \exists\, B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset F$

(ii) $\mathcal{S}$ Subbasis von $\mathcal{F}$

$\iff$ endl. Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ bilden Basis von $\mathcal{F}$

Beispiel:

$\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ endl. Durchschnitte von Elementen aus $\mathfrak{M}$ nicht-leer

$\implies$ $\mathfrak{M}$ Subbasis seines Erzeugnisses

Beispiel: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X. Die Endstücke $\{x_n : n \geqslant N\}$ bilden eine Basis der Elementarfilter der Folge

Satz 5.15

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ *Basis eines Filters* $\iff$

(i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists\, B_3 \in \mathcal{B}$ *mit* $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (ii) $\varnothing \notin \mathcal{B}$

Begr: "$\Longrightarrow$" klar. "$\Longleftarrow$" $\{M \subset X : M \supset B \in \mathcal{B}\}$ Filter $\square$

Satz 5.16

$f : X \to Y$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X

$\implies f(\mathcal{F}) = \{f(F) \,:\, F \in \mathcal{F}\}$ *ist eine Filterbasis*

Deren Erzeugnis (kleinster $f(\mathcal{F})$ enthaltender Filter) heißt der Bildfilter (der gröbste $f(\mathcal{F})$ enthaltende Filter)

Trotz Notationskonflikten wird er oft mit $f(\mathcal{F})$ bezeichnet

Begründung: Seien $f(A), f(B) \in f(\mathcal{F})$

Weil $A \cap B \in \mathcal{F}$ ist dann $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \in f(\mathcal{F})$

Somit ist $f(\mathcal{F})$ Filterbasis nach Satz 5.15 $\square$

Bemerkung: Wenn $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{F}$, dann ist $f(\mathcal{B})$ Basis von $f(\mathcal{F})$ $\diamond$

Satz 5.17

$\mathcal{F}$ Filter mit abzählb. Basis $\Longrightarrow$ $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}$ wobei $\mathcal{E}$ Elementarfilter

Beweis: Die abzählbare Basis von $\mathcal{F}$ sei von der Form

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

(wenn nicht gegeben, gehe über zu $B_1, B_1 \cap B_2, B_1 \cap B_2 \cap B_3, \dots$)
Wähle $x_n \in B_n$, dann erfüllt Elementarfilter $\mathcal{E}$ zu $(x_n)_{n \geqslant 1}$, dass $\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}$
Somit ist $\bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}$ nicht-leer und $\mathcal{F} \leqslant \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}$
Annahme: $\mathcal{F} < \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}$
$\Longrightarrow \ \exists\, A \in \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}$ mit $A \notin \mathcal{F} \Longrightarrow \ F \cap C_X A \neq \varnothing \quad \forall\, F \in \mathcal{F}$
$\Longrightarrow \ B_n \cap C_X A \neq \varnothing \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ wähle $x_n \in B_n \cap C_X A$
Zugehöriger Elementarfilter erfüllt $\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}$. Somit $C_X A \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow$
Andererseits $A \in \mathcal{E}$ $\left(\text{da } A \in \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}} \mathcal{E}\right)$
$\Longrightarrow \ A \cap C_X A = \varnothing \in \mathcal{E}$, Widerspruch! $\square$

Folgerung: X topologischer Raum, $x \in X$, X erfüllt 1. AA
$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}_x = \bigcap_{\mathcal{E} \geqslant \mathcal{U}_x} \mathcal{E}$ wobei $\mathcal{E}$ Elementarfilter

Definition 5.18

X topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X. Dann:

$$\lim \mathcal{F} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \geqslant \mathcal{U}_x$$

Bemerkungen:

(i) $\lim \mathcal{F} = x$
$\Longleftrightarrow \ \forall \ U \in \mathcal{U}_x \ \exists$ Basiselement B einer Basis von $\mathcal{F}$ mit $B \subset U$

(ii) $\mathcal{F} =$ Elementarfilter von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \lim \mathcal{F} = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \ U \in \mathcal{U}_x \text{ sind Endstücke von } (x_n)_{n \geqslant 1}, \text{ ganz in } U \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim x_n = x \quad \text{(nach Definition 5.1)} \end{aligned}$$

(iii) $\mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F}$ und $\lim \mathcal{F} = x \implies \lim \mathcal{F}' = x$

(iv) Ein Filter kann mehrere Grenzwerte haben (je nach Topologie)

Definition 5.19 (Häufungspunkt von Filter)

X topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X mit Basis $\mathcal{B}$

x HP von $\mathcal{F} \iff x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$

Bemerkungen:

(i) x HP von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}' \leqslant \mathcal{F} \implies x$ HP von $\mathcal{F}'$

(ii) x HP von $\mathcal{F} \iff U \cap B \neq \varnothing \; \forall \, U \in \mathcal{U}_x \; \forall \, B \in \mathcal{B}$

Begründung: Definition des Abschlusses

(iii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X ud $\mathcal{E}$ zugehöriger Elementarfilter. Dann:

x HP von $\mathcal{E} \iff x$ HP von $(x_n)_{n \geqslant 1}$

Begründung: x HP von $(x_n)_{n \geqslant 1}$

$\iff \forall \, U \in \mathcal{U}_x \; \forall \, N \in \mathbb{N} \; \exists \, n \geqslant N$ mit $x_n \in U$

$\iff \forall \, U \in \mathcal{U}_x \; \forall \, N \in \mathbb{N} \; : \; \varnothing \neq U \cap \{x_n \; : \; n \geqslant N\}$

$\overset{\text{(ii)}}{\iff}$ x HP von $\mathcal{E}$ (da $\{x_n \; : \; n \geqslant N\}$ Basis des Elementarfilters)

(iv) Ein Filter kann viele Häufungspunkte haben

Nun einer der Sätze, die für die Filtertheorie sprechen:

Satz 5.20

X topologsicher Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ Filter auf X

x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ $\iff$ $\exists\, \mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F}$ mit $\lim \mathcal{F}' = x$

Beweis:

$$x \text{ HP von } \mathcal{F} \overset{\text{Bem. (ii)}}{\iff} U \cap F \neq \emptyset \ \forall\, U \in \mathcal{U}_x,\ F \in \mathcal{F}$$

$$\overset{\text{Satz 5.8}}{\iff} \exists\, \mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F}, \mathcal{U}_x \quad (\mathcal{F}' = \text{Erzeugnis von } \mathcal{F} \cup \mathcal{U}_x) \ \square$$

Folgerung: $\lim \mathcal{F} = x \implies x \text{ HP von } \mathcal{F}$

Bemerkung: Satz 5.20 wäre nicht richtig für Folgen, in dem Sinne, dass wenn $\mathcal{F}$ der zugehörige Elementarfilter ist, der Filter $\mathcal{F}'$ **kein** Elementarfilter sein muss (es gibt also nicht notwendigerweise eine konvergente Teilfolge!). Wenn X jedoch das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist dies richtig, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5.21

X topologischer Raum, $x \in X$, $\mathcal{U}_x$ abzählbare Basis
$\mathcal{F}$ Filter auf X mit abzählbarer Basis (z.B. ein Elementarfilter). Dann:

$$x \text{ Häufungspunkt von } \mathcal{F} \iff \exists \text{ Elementarfilter } \mathcal{E} \geqslant \mathcal{F} \text{ mit } \lim \mathcal{E} = x$$

Begründung: "$\Longleftarrow$" klar nach Satz 5.20
"$\Longrightarrow$" Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Basis von $\mathcal{F}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Basis von $\mathcal{U}_x$
Wir können annehmen (nach Übergang zu Durchschnitten)

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \qquad U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$$

x Häufungspunkt von $\mathcal{F} \overset{\text{Bem. (ii)}}{\Longrightarrow} U_n \cap B_n \neq \emptyset \ \forall\, n$
Wähle $x_n \in U_n \cap B_n$
Der zu $(x_n)_{n\geqslant 1}$ gehörige Elementarfilter $\mathcal{E}$ erfüllt $\mathcal{E} \geqslant \mathcal{U}_x$, $\mathcal{E} \geqslant \mathcal{F}$
(denn U_n, B_n sind Obermengen der Schwänze)
Aber $\mathcal{E} \geqslant \mathcal{U}_x$ heißt ja $\lim \mathcal{E} = x$ $\square$

Satz 5.22

X topologischer Raum, $x, y \in X$, $x \neq y$

$\exists\ \mathcal{F}$ *Filter mit* $\lim \mathcal{F} = x,\ \lim \mathcal{F} = y \iff U \cap V \neq \emptyset\ \forall\ U \in \mathcal{U}_x,\ V \in \mathcal{U}_y$

Beweis: $\lim \mathcal{F} = x,\ \lim \mathcal{F} = y \iff \mathcal{F} \geqslant \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y \overset{\text{Satz 5.8}}{\iff}$ Beh. $\square$

In gewissem Sinne pathologisch, d.h. uninteressanter Raum.

Definition 5.23

X topologischer Raum. Dann:

X Hausdorff-Raum (oder T_2-Raum, d.h. Raum mit Trennungsaxiom 2)

$\iff \forall\ x \neq y\ \exists\ U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y$ und $U \cap Y = \emptyset$

$\iff$ verschiedene Punkte haben disjunkte Umgebungen

$\overset{\text{Satz 5.22}}{\iff}$ kein Filter konvergiert gegen zwei verschiedene Punkte

Satz 5.24

$\mathcal{F}$ Filter auf Hausdorff-Raum X

$$\lim \mathcal{F} = x \implies x \text{ ist einziger Häufungspunkt von } \mathcal{F}$$

Begründung: y weiterer Häufungspunkt von $\mathcal{F}$

$\overset{\text{Satz 5.20}}{\Longrightarrow} \exists\, \mathcal{F}' \geqslant \mathcal{F}$ mit $\lim \mathcal{F}' = y$

Zudem gilt nach wie vor: $\lim \mathcal{F}' = x \quad \overset{T_2}{\Longrightarrow} \quad x = y$ $\square$

Nun bewegen wir uns auf die Charakterisierung der Stetigkeit zu:

Definition 5.25

$f : X \to Y$, Y topologischer Raum, X Menge, $\mathcal{F}$ Filter auf X, $y \in Y$

$$\lim_{\mathcal{F}} f = y \iff \lim f(\mathcal{F}) = y \text{ wobei } f(\mathcal{F}) \text{ Bildfilter}$$

Beispiel 5.26

$X = \mathbb{N}$, Y topologischer Raum, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in Y

$f : X \to Y$ mit $f(n) = y_n$ Folgenabbildung

$\mathcal{F}$ = Elementarfilter der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ (heißt auch Frechetfilter)

$\Longrightarrow \quad f(\mathcal{F})$ = Elementarfilter von $(y_n) = \mathcal{E}$

$\lim_{\mathcal{F}} f = y \iff \lim \mathcal{E} = y \iff \lim x_n = y$ (Bem. (ii) nach Def. 5.18)

Bemerkung 5.27

X, Y topologische Räume, $\quad f : X \to Y \quad x \in X,\ y = f(x) \in Y$

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{U}_x} f = y \quad &\iff \quad \lim f(\mathcal{U}_x) = y \\ &\iff \quad f(\mathcal{U}_x) \geqslant \mathcal{U}_y \\ &\iff \quad \forall\ V \in \mathcal{U}_y\ \exists\ U \in \mathcal{U}_x \text{ mit } f(U) \subset V \\ &\iff \quad f \text{ stetig in } x \end{aligned}$$

Satz 5.28

X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f : X \to Y$

f stetig in x $\iff$ $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$ $\forall$ Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\lim \mathcal{F} = x$

Beweis:

"$\Longleftarrow$" Setze $\mathcal{F} = \mathcal{U}_x$ (denn $\lim \mathcal{U}_x = x$) $\overset{\text{Bem. (ii)}}{\Longrightarrow}$ f stetig in x

"$\Longrightarrow$" Sei $\mathcal{F}$ Filter auf X mit $\lim \mathcal{F} = x$, d.h. $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{U}_x$

$\Longrightarrow$ $f(\mathcal{F}) \geqslant f(\mathcal{U}_x) \geqslant \mathcal{U}_{f(x)}$ Letzteres nach Voraussetzung und Bem. (ii)

$\Longrightarrow$ $\lim_{\mathcal{F}} f = f(x)$ $\square$

Folgender Satz entspricht Lemma 5.3 für Folgen:

Satz 5.29

$X = \prod_{i\in I} X_i$ topologisches Produkt von topologischen Räumen $(x_i)_{i\in I}$

$\pi_i : X \to X_i$ Projektionen

$\mathcal{F}$ Filter auf X und $x \in X$. Dann:

$\lim \mathcal{F} = x \iff \lim \pi_i(\mathcal{F}) = x_i \quad \forall\, i \in I$

Beweis: "$\Longrightarrow$" Stetigkeit von π_i zusammen mit Satz 5.28

"$\Longleftarrow$" $\lim \pi_i(\mathcal{F}) = x_i \quad \forall\, i \in I$

$\iff \mathcal{U}_{x_i} \leqslant \pi_i(\mathcal{F}) \quad \forall\, i \in I$

$\Longrightarrow \pi_i^{-1}(\mathcal{U}_{x_i}) \subset \pi_i^{-1}\big(\pi_i(\mathcal{F})\big) \subset \mathcal{F} \quad \forall\, i \in I$

Zudem $(\pi_i)^{-1}(\mathcal{U}_{x_i}) = \left\{ \left(\prod_{j\neq i} X_j\right) \times V_i \;:\; V_i \in \mathcal{U}_{x_i} \right\}$

$\left((\pi_i)^{-1}\left(\mathcal{U}_{x_i}\right)\right)_{i\in I}$ bilden Subbasis von $\mathcal{U}_x$, die in $\mathcal{F}$ enthalten ist

Also ist auch $\mathcal{U}_x \leqslant \mathcal{F} \implies \lim \mathcal{F} = x$ □

6 Trennungsaxiome

Definition 6.1 (Trennungsaxiome für topologischen Raum X)

(i) X T_0-Raum

$\iff \forall\, x \neq y :\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ mit $y \notin U$, oder $\exists\ V \in \mathcal{U}_y$ mit $x \notin V$

(ii) X T_1-Raum

$\iff \forall\, x \neq y :\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ mit $y \notin U$, und $\exists\ V \in \mathcal{U}_y$ mit $x \notin V$

(iii) X T_2-Raum (oder Hausdorff-Raum, oder separierter Raum)

$\iff \forall\, x \neq y\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y$ mit $U \cap Y = \emptyset$

(iv) X T_3-Raum (nach Vietoris)

$\iff \forall\, A \subset X$ abges., $x \in C_X A\ \exists\, U \in \mathcal{U}_A$, $V \in \mathcal{U}_x$ mit $U \cap V = \emptyset$

(v) X T_4-Raum (nach Tietze)

$\iff \forall$ abges. $A, B,\ A \cap B = \emptyset\ \exists\, U \in \mathcal{U}_A,\ V \in \mathcal{U}_B$ mit $U \cap V = \emptyset$

(vi) X regulär $\iff$ X T_1 und T_3

(vii) X normal $\iff$ X T_1 und T_4

Satz 6.2

T_1-Eigenschaft $\iff$ einpunktige Mengen sind abgeschlossen

Begründung: "$\Longrightarrow$" $\{x\} \subset X \overset{T_1}{\Longrightarrow} \forall\, y \in C_X\{x\}\ \exists\ V \in \mathcal{U}_y$ mit $x \notin V$

Somit $V \subset C_X\{x\}$, d.h. $C_X\{x\}$ ist Umgebung all seiner Punkte

$\Longrightarrow\ C_X\{x\}$ offen $\Longrightarrow\ \{x\}$ abgeschlossen

"$\Longleftarrow$" Sei $x \neq y \implies y \in C_X\{x\}$ und $x \in C_X\{y\}$

Da $C_X\{x\},\ C_X\{y\}$ offen, folgt $C_X\{x\} \in \mathcal{U}_y$ und $C_X\{y\} \in \mathcal{U}_x$

Dies sind die gewünschten Umgebungen, da $x \notin C_X\{x\},\ y \notin C_X\{y\}$ $\square$

Folgerungen:

i) $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ trivial

ii) $(T_1, T_3) \implies (T_2, T_3)$ weil: wende T_3 auf $A = \{y\}$ an

iii) $(T_1, T_4) \iff (T_2, T_4)$

iv) $(T_1, T_4) \implies (T_1, T_3)$

Somit Hierarchie:

$$
\begin{array}{cc}
T_1 & \\
\uparrow & \\
T_2 & \\
\uparrow & \\
(T_1, T_3) & \text{regulär} \\
\uparrow & \\
(T_1, T_{3a}) & \text{vollständig regulär (später)} \\
\uparrow & \\
(T_1, T_4) & \text{normal} \\
\uparrow & \\
\text{kompakt} & \text{(später)}
\end{array}
$$

Beispiele dafür, dass all dies echte Einengungen sind, werden folgen

Zunächst jedoch mehrere Sätze, die T_2, T_3 und T_4 charakterisieren:

Satz 6.3

X T_2-Raum ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall\, x \in X$ *gilt* $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U}$ (*dies heißt auch* T_2')

(ii) *Jeder konvergente Filter konvergiert nur gegen* **einen** *Punkt*

(iii) *Diagonale* $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ *abges. in Produkttopologie*

Beweis:

"$T_2 \implies$ (i)": Sei $y \neq x \overset{T_2}{\implies} \exists\; U \in \mathcal{U}_x,\; V \in \mathcal{U}_y$ mit $U \cap V = \emptyset$

$\implies$ y nicht BP von U, d.h. $y \notin \overline{U} \implies y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U}$

"(i) $\implies T_2$": $x \neq y \implies \exists\; U \in \mathcal{U}_x,\; y \notin \overline{U}$

$\implies \exists\; V \in \mathcal{U}_y$ mit $V \cap \overline{U} = \emptyset$ (sonst wäre $y \in \overline{U}$)

U, V trennen also x und y

"$T_2 \iff$ (ii)": Satz 5.22 aus Kapitel 5

"$T_2 \implies$ (iii)":

$(x, y) \notin \Delta$, d.h. $x \neq y$

$\implies \exists\ U \in \mathcal{U}_x,\ V \in \mathcal{U}_y$ mit $U \cap V = \varnothing$

$\implies U \times V \in \mathcal{U}_{(x,y)}$ in $X \times X$, zudem $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$

$\implies (X \times X)/\Delta$ ist Umgebung all seiner Punkte, d.h. offen

$\implies \Delta$ abgeschlossen

"(iii) $\implies T_2$":

Sei $\Delta = \overline{\Delta}$ und $(x, y) \in (X \times X)/\Delta$, was offen ist in $X \times X$

$\implies \exists\ U \in \mathcal{U}_x,\ V \in \mathcal{U}_y$, so dass $U \times V$ Umgebung von (x, y) und

$U \times V \subset X \times X/\Delta$ (da diese Mengen Basis der Produkttopologie sind)

$\implies U \cap V = \varnothing$, d.h. T_2 $\square$

Satz 6.4

X T_3-Raum $\iff$ $\forall\, x \in X$ hat $\mathcal{U}_x$ Basis aus abges. Mengen (heißt T_3')

Z.B.: $\{\overline{U} \;:\; U \in \mathcal{U}_x\}$ Basis von $\mathcal{U}_x$

Beweis: "$\Longrightarrow$" Für $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x$ zu zeigen: $\exists\; B = \overline{B} \in \mathcal{U}_x$ mit $B \subset U$

Setze $A = C_X U^\circ$. Dann ist A abgeschlossen

$\overset{T_3}{\Longrightarrow}$ $\exists$ offene $V \in \mathcal{U}_x$, $W \in \mathcal{U}_A$ mit $V \cap W = \emptyset$

(von der gegebenen Umgebung wähle offene Teil-Umgebungen)

$\Longrightarrow$ $x \in V \subset C_X W \subset U^\circ \subset U$ (da $W \in \mathcal{U}_A$ ist $W \supset A = C_X U^\circ$)

$\Longrightarrow$ $B = C_X W$ ist abgeschlossene Umgebung von x

"$\Longleftarrow$" $A \subset X$ abgeschlossen, $x \notin A \Longrightarrow$ $C_X A$ offene Umgebung von x

$\Longrightarrow$ $\exists$ abgeschlossenes $W \in \mathcal{U}_x$ mit $x \in W \subset C_X A$ (nach Voraussetz.)

$\Longrightarrow$ $C_X W$ offen und $C_X W \supset A$, d.h. $C_X W \in \mathcal{U}_A$

Somit: $W \in \mathcal{U}_x$ und $C_X W \in \mathcal{U}_A$ gewünschte disjunkte Umgebungen $\square$

Satz 6.5

X T_4-Raum ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall$ $A \subset X$ *abgeschlossen ist* $\{\overline{B} \,:\, B \in \mathcal{U}_A\}$ *Basis von* $\mathcal{U}_A$

(ii) $\forall$ *abgeschlossenen* $A \subset X$ *und offenen* $U \in \mathcal{U}_A$ $\exists$ *offenes* $V \in \mathcal{U}_A$ *mit* $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ (*dies heißt auch* T_4')

Beweis: "(i)$\Longleftrightarrow$(ii)" nur Umschreibung des Basisbegriffs (siehe unten)

"$T_4 \implies T_4'$": A abgeschlossen, U offen und $A \subset U$

$\implies$ $C_X U \cap A = \emptyset$, und $C_X U, A$ beide abgeschlossen

$\overset{T_4}{\implies}$ $\exists$ offene disjunkte V_1, V_2 mit $A \subset V_1$ und $C_X U \subset V_2$

Nun: $V_1 \cap V_2 = \emptyset \implies V_1 \subset C_X V_2 \implies \overline{V}_1 \subset C_X V_2$ da $C_X V_2$ abges.

Somit

$$A \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset C_X V_2 \subset U$$

d.h. V_1 ist die gesuchte Umgebung

"$T_4' \implies T_4$": Seien A, B abgeschlossen mit $A \cap B \subset \varnothing$

$\implies A \subset C_X B$ und $C_X B$ offen

Nach T_4' existiert V mit $A \subset V \subset \overline{V} \subset C_X B$

Offensichtlich $V \cap C_X \overline{V} = \varnothing$

$\implies V$ und $C_X \overline{V}$ sind disjunkte Umgebungen von A und B

"$T_4' \implies$(i)": klar

"(i)$\implies T_4'$": Seien A abgeschlossen und $U \in \mathcal{U}_A$ offen

$\implies \exists\ \overline{B} \subset U, \overline{B} \in \mathcal{U}_A$

$\implies \exists\ V$ offen $A \subset V \subset \overline{B}$ (nach Definition von Umgebung)

$\implies A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ $\square$

Bemerkung: Analog zu Satz 6.5 kann man zeigen:

$T_3 \iff \forall\ x \in X$ und $U \in \mathcal{U}_x\ \exists$ offenes $V \in \mathcal{U}_x$ mit $x \in V \subset \overline{V} \subset U$

Nun kommen wir zu den Beispielen:

Beispiel 6.6 (T_1-Raum, nicht T_2-Raum)

X unendliche Menge, cofinite Topologie, d.h. A offen $\iff X \setminus A$ endlich

T_1 klar, denn zu $x \neq y$ existiert nicht leere Umgebung von y

Aber: zu $x \neq y$ gibt es keine disjunkten Umgebungen,

da jede Umgebung fast alle Elemente enthält

Beispiel 6.7 (T_2-Raum, aber nicht regulär bzw. T_3)

$X = \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O} =$ erzeugt von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$ und der Menge $\mathbb{Q}$

d.h. $\mathcal{O} =$ Vereinigungen offener Mengen in $\mathbb{R}$ und der Menge $\mathbb{Q}$

T_2 klar, denn Punkte schon durch offene Intervalle trennbar

T_3: $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abgeschlossen mit $1 \notin A$

1 und A können nicht durch disjunkte Umgebungen getrennt werden

weil: Jede Umgebung von 1 enthält irrationale Punkte (bis auf $\mathbb{Q}$)

und die Umgebung $\mathbb{Q}$ trennt auch nicht von A

Beispiel 6.8 (Regulärer Raum, aber nicht normal (T_3, nicht T_4))

Auf $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geqslant 0\}$ definiere Topologie durch:

(i) Basis der Umgebungen von $(x, y) \in X$ mit $y > 0$ seien die offenen Kreisscheiben um (x, y), die ganz in X enthalten sind

(ii) Basis der Umgebungen von $(x, 0) \in X$ seien offene Kreisscheiben mit Randpunkt $(x, 0)$, vereinigt mit $(x, 0)$

Topologie? Verifiziere Hausdorff's Umgebungsaxiome (Satz 2.9)

T_2? Ja, alle Punkte trennbar mit Mengen des Umgebungsbasis

T_3? Ja, denn jede Basisumgebung enthält abges. Umgeb. (Satz 6.4) (Wähle hierfür kleinere abges. Kreisscheiben, und beachte, dass jede Teilmenge A des Randes $R = \{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ abges. ist, weil $C_X A$ als Vereinigung y-berührender Scheiben offen ist)

Fakt: X nicht normal

Beispiel (Fortsetzung)

Gegenannahme: X erfüllt T_4

$A \subset R \overset{T_4}{\Longrightarrow} \exists\ U(A) \in \mathcal{U}_A$ und $V(R \backslash A) \in \mathcal{U}_{R\backslash A}$ mit $U(A) \cap V(R\backslash A) = \varnothing$

Sei $D = \{(x, y) \in X\ :\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ und definiere $F : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(D)$ durch

$$F(A) = U(A) \cap D$$

Behauptung: F ist injektiv

da: Sei $A \neq B$, ohne Einschränkung $A \not\subset B$, d.h. $A \cap R\backslash B \neq \varnothing$

$\Longrightarrow\ U(A) \cap V(R\backslash B) \neq \varnothing \Longrightarrow\ D \cap U(A) \cap V(R\backslash B) \neq \varnothing$

Wenn nun $F(A) = F(B)$, so erhält man einen Widerspruch durch

$$\big(D \cap U(A)\big) \cap V(R\backslash B) = \big(D \cap U(B)\big) \cap V(R\backslash B) = \varnothing$$

Mit dieser Injektivität und mengentheoretischer Eigenschaften von Mächtigkeiten von Mengen folgt nun ein Widerspruch:

$$\sharp\mathbb{R}\ =\ \sharp R\ <\ \sharp\mathcal{P}(R)\ \leqslant\ \sharp\mathcal{P}(D)\ =\ \sharp\mathcal{P}(\mathbb{Q})\ \leqslant\ \sharp\mathbb{R}$$

Nach diesen Gegenbeispielen kommen wir nun zu Resultaten:

Satz 6.9

Jeder metrische Raum ist normal

Beweis: Zu T_2: Seien $x \neq y \in X$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$

$\implies U = B_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}_x$ und $V = B_\varepsilon(y) \in \mathcal{U}_y$ trennen x und y

Zu T_4: Seien A, B abgeschlossen, $A \cap B = \varnothing$.

Zu $x \in A$ sei $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_x}(x) \cap B = \varnothing$

(ε_x existiert, weil sonst x BP von abgeschlossenen B, also in B wäre)

Ebenso zu $y \in B$ sei $\varepsilon_y > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_y}(y) \cap A = \varnothing$

Setze $U = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_x}(x)$ und $V = \bigcup_{y \in B} B_{\varepsilon_y}(y)$

Dies sind offene Umgebungen von A bzw. B. Zudem: $U \cap V = \varnothing$

Begründung: sonst $z \in U \cap V$

$\implies \exists\ x \in A,\ y \in B$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \cap B_{\varepsilon_y}(y) \neq \varnothing$

$\implies x \in B_{\varepsilon_x + \varepsilon_y}(y)$ und $y \in B_{\varepsilon_x + \varepsilon_y}(x)$

Falls $\varepsilon_x \leqslant \varepsilon_y$, ist ersteres, sonst zweiteres ein Widerspruch $\square$

Satz 6.10

Für $i = 1, 2, 3$ ist jeder Unterraum eines T_i-Raumes ein T_i-Raum

Beweis: z.B. für T_3: Seien $Y \subset X$ UR, $A \subset Y$ abgeschlossen, $y \in C_Y A$

$\Longrightarrow$ $\exists\ B \subset X$ abgeschlossen, so dass $A = B \cap Y$. Zudem $y \notin B$

$\Longrightarrow$ $\exists\ U \in \mathcal{U}_B^X$ und $V \in \mathcal{U}_y^X$ mit $U \cap V = \varnothing$ (hier Umgebungen in X)

$\Longrightarrow$ $U \cap Y \in \mathcal{U}_A^Y$ und $V \cap Y \in \mathcal{U}_y^Y$ mit leerem Schnitt $\square$

Bemerkung: Ähnliches ist nicht richtig für T_4-Raum X!

Hierfür wähle A, B abgeschlossen in X mit Schnitt $\varnothing \neq A \cap B \subset C_X Y$

Dann sind $A \cap Y$ und $B \cap Y$ abgeschlossen in Y

Zudem gilt $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \varnothing$ (zeichne diese Mengen!)

Da $A \cap B \neq \varnothing$ können A und B eventuell nicht in X getrennt werden

Dann ist Trennung von $A \cap Y$ und $B \cap Y$ in Y nicht offensichtlich $\diamond$

Richtig ist hingegen:

Satz 6.11

X T_4-Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ Unterraum Y auch T_4-Raum

Beweis: A, B abgeschlossen in $Y \Longrightarrow$ auch abgeschlossen in X $\square$

Satz 6.12

$(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ topologisches Produkt

X $T_{1,2,3}$-Raum $\Longleftrightarrow$ X_i $T_{1,2,3}$-Raum $\forall\, i \in I$

Beweis: "$\Longrightarrow$" X_i ist homöomorph zu einen Unterraum von X

weil: Wähle $y \in X$ fest. Dann definiert

$$x_i \in X_i \;\mapsto\; z = \begin{cases} z_i = x_i \,, & \\ z_j = y_j \,, & \forall\, j \neq i \,, \end{cases}$$

eine homöomorphe Einbettung von X_i in X

Nach Satz 6.10 sind also alle X_i $T_{1,2,3}$-Räume

„$\Longleftarrow$"

T_2: Seien $x, y \in X = \prod_{j \in I} X_j$ und $x \neq y$

$\Longrightarrow\ \exists\, j$ mit $x_j \neq y_j$

$\Longrightarrow\ \exists$ offene, disjunkte $U_j \in \mathcal{U}_{x_j}^{X_j},\ V_j \in \mathcal{U}_{y_j}^{X_j}$

Setze $U = U_j \times \prod_{i \neq j} X_j$ und $V = V_j \times \prod_{i \neq j} X_i$

Dies sind offene Umgebungen von x um y in X, zudem $U \cap V = \emptyset$

T_1: genauso

$T_3 = T_3' \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{U}_x$ hat Basis aus abgeschlossenen Mengen $\forall\ x \in A$

Umgebungsbasis von x in X gebildet durch $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(U_k),\ U_k \in \mathcal{U}_{x_k}^{X_k}$

Wähle $A_k \subset U_k$ abgeschlossen, $A_k \in \mathcal{U}_{x_k}^{X_k}$

$\Longrightarrow\ \bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(A_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \pi^{-1}(U_k)$ abges. Umgebung von x $\square$

Nun folgen Trennungseigenschaften durch stetige Funktionen:

Satz 6.13 (Urysohn)

X T_4-Raum $\iff$ folgende Eigenschaft T_4^* gilt:

zu $A, B \subset X$ abges., disjunkt, nicht-leer, existiert Urysohn-Funktion

$$f : X \to [0,1] \text{ stetig mit } \quad f|_A = 0\,, \quad f|_B = 1$$

Beweis: "$T_4^* \implies T_4$": Setze

$U = \{x \in X \,:\, f(x) < \frac{1}{2}\} = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ offen

$V = \{x \in X \,:\, f(x) > \frac{1}{2}\} = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ offen

Dann U Umgebung von A, V Umgebung von B und $U \cap V = \varnothing$

"$T_4 \implies T_4^*$" Sei $R = \left\{r = \frac{k}{2^n} \,:\, k, n \in \mathbb{N}\,,\ 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$

$A \cap B = \varnothing \implies A \subset C_X B$ und $C_X B$ offen. Setze $U(1) = C_X B$

$\stackrel{T_4'}{\implies} A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U(1) = C_X B$ mit $U(0)$ offen

$\overset{T_4'}{\Longrightarrow}\; A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U\left(\frac{1}{2}\right) \subset \overline{U\left(\frac{1}{2}\right)} \subset U(1) = C_X B$. Nochmal T_4':

$U(0) \subset \overline{U(0)} \subset U\left(\frac{1}{4}\right) \subset \overline{U\left(\frac{1}{4}\right)} \subset U\left(\frac{1}{2}\right) \subset \overline{U\left(\frac{1}{2}\right)} \subset U\left(\frac{3}{4}\right) \subset \overline{U\left(\frac{3}{4}\right)} \subset U(1)$

Nach Iteration bekommt man für jedes $r \in R$ ein offenes $U(r) \in \mathcal{U}_A$

Definiere:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U(r)\}\,, & x \notin B \\ 1\,, & x \in B \end{cases}$$

Natürlich erfüllt f, dass $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$

f stetig in $x_0 \in X$? Sei $f(x_0) = q$, und zunächst $q \neq 0, 1$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wird ein $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ konstruiert mit $f(U) \subset (q - \varepsilon, q + \varepsilon)$

Gegeben $\varepsilon > 0$, wähle $r_1, r_2 \in R$ mit $q - \varepsilon < r_1 < q < r_2 < q + \varepsilon$

$\Longrightarrow\; x_0 \in U(r_2) \setminus \overline{U(r_1)} = U(r_2) \cap C_X \overline{U(r_1)}$ offene Umgebung von x_0

Sei $x \in U(r_2) \setminus \overline{U(r_1)} \Longrightarrow\; f(x) \leqslant r_2$, da $x \in U(r_2)$

Zudem $f(x) \geqslant r_1$, da $x \notin \overline{U(r_1)}$

$$\Longrightarrow\ -\varepsilon < r_1 - q \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant r_2 - q < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U(r_2)\backslash\overline{U(r_1)}$$

Somit f stetig in x_0

Falls $q = 0, 1$, ersetzte $U(r_2)\backslash U(r_1)$ durch $U(r_2)$ bzw. $C_X\overline{U(r_1)}$ □

Bemerkung: Satz zeigt: T_4-Räume reich an stetigen Funktionen ◇

Alternative Interpretation: $A, B \neq \emptyset$ abgeschlossen disjunkt in X

Definiere:

$$f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in A \\ 1\,, & x \in B \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig bez. der Unterraum-Topologie auf $A \cup B$

(Begründung: Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen)

Urysohn-Funktion ist stetige Fortsetzung der Funktion f auf ganz X ◇

Letzteres und Unterschied zwischen T_3 zu T_4 motiviert:

Definition 6.14

(i) X T_{3a}-Raum

$\iff$ $\forall\, x \in X,\ A \subset X$ abges., $x \notin A$, existiert Urysohn-Funktion,

d.h. $f : X \to [0,1]$ stetig, $f|_A = 0,\ f(x) = 1$

$\iff$ $\forall\, x \in X,\ U \in \mathcal{U}_x\ \exists\ f : x \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 1,\ f|_{C_X U} = 0$

(ii) X vollständig regulär (oder Tychonov-Raum) $\iff$ (T_1, T_{3a}) gelten

Satz 6.15

(i) *X T_{3a}-Raum* $\implies$ *X T_3-Raum*

(ii) *X vollständig regulär* $\implies$ *X regulär*

Beweis: A abges., $x \notin A \Longrightarrow \exists f$ Urysohn-Funktion zu x, A. Setze

$U = \{y \in X : f(y) < \frac{1}{2}\} = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \in \mathcal{U}_A$

$V = \{y \in X : f(y) > \frac{1}{2}\} = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \mathcal{U}_x$

Zudem $U \cap V = \emptyset$ so dass (i) folgt. (ii) ist dann offensichtlich □

Satz 6.16

T_{3a}-Eigenschaft vererbt sich auf Unterräume

Unterräume vollständig regulärer Räume wieder vollständig regulär

Beweis: $Y \subset X$, $A \subset Y$ abgeschlossen in Y, $y \in Y \backslash A$

$\Longrightarrow \exists B$ abgeschlossen in X mit $A = B \cap X$, $y \notin B$

$\overset{T_{3a}}{\Longrightarrow} \exists f : X \to [0, 1]$ stetig mit $f|_B = 0$, $f(y) = 1$

$\Longrightarrow f|_Y = f \circ i$ stetige Urysohn Funktion für A, y in Y

Zweite Behauptung folgt zusammen mit Satz 6.10 □

Satz 6.17

$X = \prod_{i \in I} X_i$ vollständig regulär $\iff$ X_i vollständig regulär $\forall\ i \in I$

Beweis: T_1-Eigenschaft klar nach Satz 6.10, also nur T_{3a} überprüfen

"$\Longrightarrow$" X_i homöomorph zu Unterraum von X, somit Satz 6.16

"$\Longleftarrow$" $y = (y_i)_{i \in I} \in X$ und $U \in \mathcal{U}_y$ Elementarumgebung,
d.h. $U = \prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$ mit $\sharp\, J < \infty$
(Erinnerung: jede Umgebung enthält Elementarumgebung)
Sei $f_i : X_i \to [0, 1]$ stetig, $f_i(y_i) = 1$ und $f_i|_{C_{X_i} U_i} = 0$. Setze

$$f(x) \;=\; \inf_{i \in I} f_i \circ \pi_i(x) \;=\; \min_{i \in J} f_i \circ \pi_i(x)$$

Behauptung: f Urysohn-Funktion in X zu y, U

f stetig als Minimum von endlich vielen stetigen Funktionen

$f(y) = 1$ klar

$f|_{C_X U} = 0$, da $x \in C_X U \implies x_i = \pi_i(x) \notin U_i$ für mindestens ein $i \in J$ $\square$

Satz 6.18 (Tietze Extensionstheorem)

Topologischer Raum X ist ein T_4-Raum

$\Longleftrightarrow$ *zu jeder abgeschlossenen nicht-leeren $A \subset X$ und jeder stetigen Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ existiert eine stetige Fortsetzung, d.h. $F : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $F|_A = f$*

Zudem:

Wenn $f(A) \subset I$ Intervall, so kann man F so wählen, dass $F(x) \subset I$

Korollar 6.19

X normal $\implies$ X vollständig regulär

Beweis: Weil X T_1-Raum, ist $\{x\}$ abgeschlossen (Satz 6.2)

Dann wende Satz von Tietze an auf $A \cup \{x\}$ $\square$

Bemerkung: $T_4 \implies T_{3a}$ nicht richtig! $\diamond$

Beweis des Satzes von Tietze:

"$\Longleftarrow$" (einfache Implikation)

Seien A, B disjunkt, nicht-leer, abgeschlossen

Definiere

$$f : A \cup B \longrightarrow [0,1] \qquad , \qquad f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in A \\ 1\,, & x \in B \end{cases}$$

Offensichtlich ist f stetig

Sei $F : X \to [0,1]$ die stetige Erweiterung. Setze:

$$U = \left\{ x \in X \,:\, F(x) < \frac{1}{2} \right\} \qquad , \qquad V = \left\{ x \in X \,:\, F(x) > \frac{1}{2} \right\}$$

Dann $U \in \mathcal{U}_A$ und $V \in \mathcal{U}_B$

Zudem gilt $U \cap V = \emptyset$

"$\Longrightarrow$" $A \neq \emptyset$ abgeschlossen

Vorbereitung: eine grobe Approximation der Erweiterung

(1) Sei $g : A \to [-c, c]$ stetig, $c \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta \leqslant \frac{1}{3}$

$\Longrightarrow \ \exists\, h : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|h(x)| \leqslant c \cdot \delta$ und

$$|h(x) - g(x)| \leqslant c(1 - \delta) \qquad \forall\, x \in A \tag{6.1}$$

Begründung: Setze

$$A_1 = \{x \in A \,:\, g(x) \geqslant \delta c\} \quad , \quad A_2 = \{x \in A \,:\, g(x) \leqslant -\delta c\}$$

Dann sind A_1, A_2 abgeschlossen in X, und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\overset{\text{Satz 6.13}}{\Longrightarrow} \exists$ Urysohn-Funktion $h : X \to [-\delta c, \delta c]$ zu A_1, A_2 mit

$$h|_{A_1} = \delta c \qquad , \qquad h|_{A_2} = -\delta c$$

Dieses h erfüllt auch die Ungleichung (6.1):

Für $x \in A_1$:

$$0 \;=\; \delta c - \delta c \;\leqslant\; g(x) - h(x) \;\leqslant\; c - \delta c \;=\; (1 - \delta)$$

Für $x \in A_2$:

$$-c(1-\delta) \;=\; -c + \delta c \;\leqslant\; g(x) - h(x) \;\leqslant\; -\delta c + \delta c \;=\; 0$$

Für $x = A \backslash A_1 \cup A_2$:

$$|g(x) - h(x)| \;\leqslant\; |g(x)| + |h(x)| \;\leqslant\; \delta c + \delta c \;\overset{\delta < \frac{1}{3}}{\leqslant}\; c(1-\delta)$$

(2) Beweis für den Fall, dass $f : A \to [-c, c]$, **abgeschl.** Intervall

Sei $0 < \delta \leqslant \frac{1}{3}$. Wende (1) auf $f = g$ an $\Longrightarrow\; \exists\, h_0 : X \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\begin{aligned} |h_0(x)| &\leqslant \delta c \qquad , \qquad \forall\, x \in X \\ |f(x) - h_0(x)| &\leqslant c(1-\delta) \qquad , \qquad \forall\, x \in A \end{aligned}$$

Nun wende (1) an auf $g = f - h_0$ gleiches A und $c \widehat{=} c(1-\delta)$:

$\implies \exists\, h_1 : X \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\begin{aligned} |h_1(x)| &\leqslant \delta \cdot |f(x) - h_0(x)| \leqslant \delta c(1-\delta) \quad , \quad \forall\, x \in X \\ |f(x) - h_0(x) - h_1(x)| &\leqslant c(1-\delta)^2 \quad , \quad \forall\, x \in A \end{aligned}$$

Nach Iteration erhält man $h_n : X \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &\leqslant \delta c(1-\delta)^n \quad , \quad x \in X \\ |f(x) - h_0(x) - \ldots - h_n(x)| &\leqslant c(1-\delta)^n \quad , \quad \forall\, x \in A \end{aligned}$$

Setze

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$$

F ist stetig als gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen

Zu zeigen: für jedes $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\exists\, \mathcal{U}_x$ mit

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, y \in \mathcal{U}_x$$

Dies ist das klassische $\varepsilon/3$-Argument:

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| \;&\leqslant\; \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} h_k(y)\right| \\
&\quad + \left|\left(\sum_{k=0}^{n} h_k\right)(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} h_k\right)(y)\right| + \left|F(y) - \sum_{j=1}^{n} h_\varepsilon(y)\right| \\
&\leqslant\; 2 \sum_{k=h+1}^{\infty} \delta c(1-\delta)^k + \left|\left(\sum_{k=0}^{n} h_k\right)(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} h_k\right)(y)\right| \\
&\leqslant\; 2\,\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;\leqslant\; \varepsilon
\end{aligned}$$

für geeignetes n für $y \in \mathcal{U}_x$ mit $\mathcal{U}_y$ geeignet gewählt wegen der Stetigkeit von $\sum_{k=1}^{n} h_k$ ausreichend groß. Zudem gilt:

$$F|_A = f \qquad , \qquad |F(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \delta c(1-\delta)^n = \delta c \frac{1}{1-(1-\delta)} = c$$

(3) Beweis für den Fall, dass $f : A \to (-c, c)$ **offenes** Intervall

Obige Konstruktion gibt $F : X \to [-c, c]$ stetig, d.h.

$$|F(x)| \leqslant c \qquad , \qquad \forall\, x \in X$$

Dann ist

$$B = \{x \in X : F(x) = \pm c\}$$

abgeschlossen und $A \cap B = \varnothing$

Sei $g : X \to [0, 1]$ zugehörige Urysohn-Fktn mit $g|_B = 0$ und $g|_A = 1$

Dann erfüllt $g \cdot F$ das Erwünschte

Falls das Intervall halboffen ist, gehe genauso vor

(4) Im Allgemeinen, verwende den Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1) \qquad , \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1 + (x)}$$

um sich auf obigen Fall zurückzuziehen $\square$

7 Kompakte Räume

Definition 7.1

X Menge und $(X_i)_{i\in I}$ Familie in $\mathcal{P}(X)$

(i) $(X_i)_{i\in I}$ Überdeckung $\iff$ $X = \bigcup_{i\in I} X_i$

(ii) $(X_i)_{i\in I'}$ Teilüberdeckung von $(X_i)_{i\in I}$ $\iff$ $I' \subset I$ und $X = \bigcup_{i\in I'} X_i$

Definition 7.2

X topologischer Raum

(i) X quasikompakt $\iff$ jede offene Überdeckung (d.h. mit offenen Mengen) besitzt endliche Teilüberdeckung

(ii) X kompakt $\iff$ X T_2-Raum und quasikompakt

Bemerkung 7.3

In der Literatur wird ein quasikompakter Raum manchmal als kompakt bezeichnet, und ein kompakter dann als kompakter Hausdorff-Raum

Definition 7.4

X topologischer Raum und $A \subset X$

(i) $A \subset X$ quasikompakte Teilmenge

$\iff$ A als Unterraum von X quasikompakt

(ii) $A \subset X$ kompakte Teilmenge

$\iff$ A als Unterraum von X kompakt

(iii) $A \subset X$ relativ kompakt $\iff$ $\overline{A}$ kompakt

Ausformuliert:

$A \subset X$ quasikompakte Teilmenge $\iff$

$A = \bigcup_{i \in I} X_i \cap A,\ X_i$ offen in $X \implies \exists$ endl. $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J}(X_i \cap A) = A$

Charakterisierung der Quasikompaktheit:

Satz 7.5

Äquivalent sind:

(i) *X quasikompakt*

(ii) *jeder Filter auf X besitzt Häufungspunkt*

(iii) *jeder Ultrafilter auf X konvergent*

(iv) *jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ besitzt endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt*

Beweis: (i)$\Longleftrightarrow$(iv): klar nach Dualitätsprinzip

(iv)$\Longrightarrow$(ii): Gegenannahme: $\exists$ Filter $\mathcal{F}$ auf X ohne HP

$\Longrightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{F} \text{ abges.}} F = \emptyset$ (nach Definition 5.19 von HP)

$\overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} \exists$ endliche viele $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$

Widerspruch zu Filteraxiomen

(ii)$\Longrightarrow$(iii): $\mathcal{U}$ Ultrafilter auf X

$\Longrightarrow$ $\exists$ Häufungspunkt x von $\mathcal{U}$ (nach (ii))

Nach Satz 5.20 $\exists\, \mathcal{F}$ Filter mit $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{U}$ $\lim \mathcal{F} = x$

$\Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{U}$ und $\lim \mathcal{U} = x$, da $\mathcal{U}$ als Ultrafilter maximal

(iii)$\Longrightarrow$(ii): $\mathcal{F}$ Filter auf $X \overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow} \exists$ Ultrafilter $\mathcal{U} \geqslant \mathcal{F} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \lim \mathcal{U} = x$

Wegen Satz 5.20 ist x HP von $\mathcal{U}$ $\Longrightarrow$ x HP von $\mathcal{F}$

(ii)$\Longrightarrow$(iv): Gegenannahme: $\exists\ (A_i)_{i \in I}$ abges. mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$ und

alle **endlichen** Durchschnitte sind nicht-leer

(möglich wegen Durchschnittsbedingung)

Sei $\mathcal{F}$ = Erzeugnis von $\bigcup_{i \in I} A_i \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists\ x$ HP von $\mathcal{F}$

$\Longrightarrow\ x \in \overline{A}_i = A_i \quad \forall\, i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$ Widerspruch $\square$

Satz 7.6

X quasikompakt und $\mathcal{F}$ Filter auf X. Dann gilt:

(i) *jede Umgebung von $A = \{x : x$ HP von $\mathcal{F}\}$ gehört zu $\mathcal{F}$*

(ii) *$\mathcal{F}$ besitzt nur einen Häufungspunkt $x \implies \lim \mathcal{F} = x$*

(iii) *X zudem T_2-Raum, d.h. X kompakt. Dann:*

$\mathcal{F}$ besitzt genau einen Häufungspunkt $\iff$ $\mathcal{F}$ konvergent

Beweis: (i) Gegenannahme: $\exists\ U \in \mathcal{U}_A$ mit $U \notin \mathcal{F}$

$\implies \nexists\ F \in \mathcal{F}$ mit $F \subset U$, d.h. $C_X U \cap F \neq \emptyset \quad \forall\ F \in \mathcal{F}$

Sei $\mathcal{G}$ Filter auf X mit Basis $\{C_X U \cap F : F \in \mathcal{F}\}$

$\implies \exists\ x$ Häufungspunkt von $\mathcal{G}$ nach Satz 7.5(ii)

Nun ist $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \implies x$ auch Häufungspunkt von $\mathcal{F} \implies x \in A$

Dies ist aber nicht möglich, denn dann wäre U Umgebung von x

(da ja $U \in \mathcal{U}_A$, also auch $U \in \mathcal{U}_x$ für $x \in A$)

und x HP von $\mathcal{G}$ heißt $U \cap G \neq \emptyset \quad \forall\ G \in \mathcal{G}$

$\implies U \cap (C_X U \cap F) \neq \emptyset \quad \forall\ F \in \mathcal{F}$. Widerspruch!

(ii) Dann $A = \{x\}$ und $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F} \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \lim \mathcal{F} = x$

(iii) "$\Longleftarrow$" folgt aus Satz 5.24 $\square$

Satz 7.7

X kompakt $\Longrightarrow$ X T_3-Raum

Beweis: Zeige, dass $\{\overline{U} \,:\, U \in \mathcal{U}_x\}$ Basis von $\mathcal{U}_x \;\; \forall\, x \in X$ (Satz 6.4)

Da X T_2-Raum, gilt $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U} \;\; \forall\, x \in X$ (d.h. T_2' in Satz 6.3)

Somit Durchschnitte nicht-leer $\Longrightarrow \{\overline{U} \,:\, U \in \mathcal{U}_x\}$ Basis eines Filters $\mathcal{F}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ hat x als einzigen Häufungspunkt (siehe Definition 5.19)

$\Longrightarrow \lim \mathcal{F} = x$ da X quasikompakt $\Longrightarrow \mathcal{F} \geqslant \mathcal{U}_x$

Andererseits $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{U}_x$ nach Konstruktion $\Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{U}_x$ $\square$

Folgender Sachverhalt ist aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannt

Er gilt aber auch im Allgemeinen:

Satz 7.8

Sei X ein T_2-Raum. Dann gilt die Implikation:

A kompakter Unterraum von X $\implies$ A abgeschlossen

Beweis: Zu zeigen: $C_X A$ offen, d.h. Umgebung all seiner Punkte

Sei $y \in C_X A$. Zu jedem $a \in A$ existieren nach der T_2-Eigenschaft

offene $U(a) \in \mathcal{U}_a$ und $V(a) \in \mathcal{U}_y$ mit $U(a) \cap V(a) = \emptyset$

$\implies \bigcup_{a \in A} U(a)$ offene Überdeckung von A

$\implies \bigcup_{k=1,\ldots,n} U(a_k)$ endliche Teilüberdeckung von A

$\implies \bigcap_{k=1,\ldots,n} V(a_k)$ offene Umgebung von y, enthalten in $C_X A$ $\square$

Satz 7.9

X quasikompakt und $A \subset X$ abgeschlossen $\implies$ A quasikompakt

Beweis: Sei $(B_i)_{i \in I}$ Familie abges. Mengen in A mit $\bigcap_{i \in I} B_i = \emptyset$

Dann $B_i = A_i \cap A$ mit A_i abges. in X

Also $(A_i)_{i \in I}$ Familie abges. Mengen in X mit $\bigcap_{i \in I}(A_i \cap A) = \emptyset$

$\implies \{A, (A_i)_{i \in I}\}$ Familie abges. Mengen in X mit leerem Durchschnitt

Da X quasikompakt $\exists\ J \subset I$, $\sharp J < \infty$ mit $\bigcap_{i \in J}(A_i \cap A) = \emptyset$

Somit $\bigcap_{i \in J} B_i = \emptyset$, d. h. A quasikompakt $\square$

Korollar 7.10

X kompakt und $A \subset X$. Dann:

$$A \text{ kompakt} \iff A \text{ abgeschlossen}$$

Beweis: Dies kombiniert die Sätze 7.8 und 7.9 $\square$

Satz 7.11

X kompakt $\Longrightarrow$ X normal

Beweis: T_2 klar

Seien A, B abgeschlossen, disjunkt in X

$\Longrightarrow A, B$ kompakt nach Satz 7.9, disjunkt

Verwende T_3-Eigenschaft (wegen Satz 7.7) für $a \in A$ und B

$\Longrightarrow \ \exists\ U(a) \in \mathcal{U}_a,\ V(a) \in \mathcal{U}_B$ mit $U(a) \cap V(a) = \varnothing$

$\Longrightarrow \ (U(a))_{a \in A}$ offene Überdeckung von A

Sei $(U(a_k))_{k=1,\dots,n}$ offene endliche Teilüberdeckung von A

Setze $U_A = \bigcup_{k=1,\dots,n} U(a_k) \in \mathcal{U}_A$ und $U_B = \bigcap_{k=1,\dots,n} V(a_k) \in \mathcal{U}_B$

U_A und U_B sind disjunkte Umgebungen von A und B, also gilt T_4 $\square$

Satz 7.12 (Stetige Bilder quasikompakter Mengen)

$f : X \to Y$ stetig und X quasikompakt $\implies$ $f(X)$ quasikompakt

Beweis:

Behauptung: Es reicht aus, dies für f surjektiv zu zeigen

weil: $(A_i)_{i \in I}$ offene (in Y) Überdeckung von $f(X)$

$\implies$ $(A_i \cap f(X))_{i \in I}$ offene (in $f(X)$) Überdeckung von $f(X)$

$\implies$ $(A_i \cap f(X))_{i \in J}$ endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ (nach Vorauss.)

$\implies$ $(A_i)_{i \in J}$ endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ $\diamond$

Sei $\mathcal{F}'$ Filter auf $Y = f(X)$

Zu zeigen (Satz 7.5): $\mathcal{F}'$ hat mindestens einen HP

Betrachte Erzeugnis $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{F}')$, was ein Filter auf X ist

Da X quasikompakt hat $\mathcal{F}$ mindestens einen Häufungspunkt x

Nach Satz 5.20 $\exists\, \mathcal{G} \geqslant \mathcal{F}$ mit $\lim \mathcal{G} = x$ (d. h. $\mathcal{G} \geqslant \mathcal{U}_x$)

Weil f stetig gilt nach Satz 5.28: $\lim f(\mathcal{G}) = f(x)$, also $f(x)$ HP von $f(\mathcal{G})$

Behauptung: $f(\mathcal{G}) \geqslant f(\mathcal{F}) = f(f^{-1}(\mathcal{F}')) = \mathcal{F}'$

Begründung: f surjektiv $\implies f(f^{-1}(F)) \subset F \quad \forall\, F$

Also $f(f^{-1}(\mathcal{F}')) \geqslant \mathcal{F}$

Andererseits sei $F \in f(f^{-1}(\mathcal{F}')) \implies \exists\, B \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ mit $F \supset f(B)$

$\implies \exists\, A \in \mathcal{F}'$ mit $B \supset f^{-1}(A)$

d.h. $\exists\, A \in \mathcal{F}'$ mit $F \supset f(f^{-1}(A)) = A \implies \mathcal{F}' \geqslant f(f^{-1}(\mathcal{F}'))$

Dies zeigt erst Gleichheit. Da f surjektiv auch $f(f^{-1}(\mathcal{F}')) = \mathcal{F}'$ $\diamond$

Somit $f(x)$ Häufungspunkt auch von $\mathcal{F}' \leqslant f(\mathcal{G})$

(wegen Bemerkung (i) nach Definition 5.19) $\square$

Satz 7.13

$f : X \to Y$, X quasikompakt und Y T_2-Raum. Dann:

$$f \text{ stetig} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ abgeschlossen}$$

Insbesondere: Wenn f bijektiv, dann f Homöomorphismus

Beweis: $A \subset X$ abgeschlossen

Nach Satz 7.9 ist A quasikompakt

Nach Satz 7.12 ist auch $f(A) \subset Y$ quasikompakt

Weil $Y \supset f(A)$ T_2-Raum ist, ist $f(A)$ auch T_2-Raum (Satz 6.10)

$\Longrightarrow f(A)$ kompakt

Nach Satz 7.8 ist also $f(A)$ abgeschlossen $\square$

Korollar 7.14 (Stetige Bilder kompakter Mengen)

$f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y T_2-Raum $\Longrightarrow$ $f(X)$ kompakt

Folgendesüberraschend, weil Indexmenge überabzählbar sein darf

Satz 7.15 (Satz von Tychonov)

$X = \prod_{i \in I} X_i$ topologisches Produkt. Dann:

(i) *X quasikompakt $\iff$ X_i quasikompakt für alle $i \in I$*

(ii) *X kompakt $\iff$ X_i kompakt für alle $i \in I$*

Beweis: (i) "$\Longrightarrow$" Da $\pi_i : X \to X_i$ stetig, folgt dies aus Satz 7.12.

(i) "$\Longleftarrow$": Nach Satz 7.5 zu zeigen: jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ konvergent

$\pi_i(\mathcal{U})$ Filter auf X_i

Sei $A \subset X_i \overset{\mathcal{U}\text{ Ultraf.}}{\Longrightarrow} \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ oder $C_X(\pi_i^{-1}(A)) = \pi_i^{-1}(C_{X_i}(A)) \in \mathcal{U}$

$\overset{\pi_i\text{ surj.}}{\Longrightarrow} \pi_i(\pi_i^{-1}(A)) = A$ oder $C_{X_i}(A)$ in $\pi_i(\mathcal{U})$, d.h. Ultrafilter auf X_i

Da X_i quasikompakt $\Longrightarrow$ $\pi_i(\mathcal{U})$ konvergent in X_i $\quad \forall\, i$

$\overset{\text{Satz 5.29}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{U}$ konvergent in X

(ii) folgt aus (i) zusammen mit Satz 6.12 □

Nun Zusammenhänge mit den anderen Kompaktheitsbegriffen

Definition 7.16

X topologischer Raum

(i) X abzählbar kompakt
$\iff$ jeder Elementarfilter besitzt Häufungspunkt und T_2-Raum

(ii) X folgenkompakt
$\iff$ jede Folge besitzt konvergente Teilfolge und T_2-Raum

Bemerkung 7.17

Äquivalente Definition von abzählbare Kompaktheit (Querenburg):
jede abzählbare offene Überdeckung hat endliche Teilüberdeckung

Bemerkung 7.18

X kompakt $\implies$ X abzählbar kompakt (nach Satz 7.5)
X folgenkompakt $\implies$ X abzählbar kompakt

Satz 7.19

X erfüllt 1. Abzählbarkeitsaxiom. Dann:

$$X \text{ abzählbar kompakt} \iff X \text{ folgenkompakt}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\mathcal{E}$ zugehöriger Elementarfilter

Nach Voraussetzung hat $\mathcal{E}$ Häufungspunkt

Nach Satz 5.21 und 1. AA $\exists$ Elementarfilter $\mathcal{E}' \geqslant \mathcal{E}$ mit $\lim \mathcal{E}' = x$

Somit Teilfolge von $\mathcal{E}$ konvergent $\square$

Satz 7.20

X erfülle 2. Abzählbarkeitsaxiom. Dann:

$$X \text{ abzählbar kompakt} \iff X \text{ kompakt}$$

Satz 7.21 (Satz von Lindelöf)

X erfülle 2. Abzählbarkeitsaxiom

Dann hat jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung

Beweis: Sei $(B_n)_{n\geqslant 1}$ Basis und $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung

Wenn immer möglich, wähle für n ein i mit $B_n \subset U_i$

Dies ergibt Familie $(U_i)_{i\in J}$ mit abzählbarem $J \subset I$

Zu x $\exists$ $k \in I$ mit $x \in U_k$ und auch n mit $x \in B_n \subset U_k$

Also $k \in J$. Somit $(U_i)_{i\in J}$ abzählbare Teilüberdeckung $\square$

Beweis von Satz 7.20: "$\Longrightarrow$" Gegenannahme:

$\exists$ $(X_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbare Teilüberdeckung (Satz 7.21)

Auch $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine endliche Teilüberdeckung

Setze $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$. Dann $U_n \subset U_{n+1}$ $\forall$ n und $U_\infty = X$

Zudem $U_n \neq X$ $\forall$ n. Wähle $x_n \in C_X U_n$

Es gilt $x_m \notin U_n$ $\forall$ $n \leqslant m$, d.h. $x_m \in C_X U_n$ $\forall m \geqslant n$

Da $C_X U_n$ abges., ist jeder HP von $(x_m)_{m\geqslant 1}$ in $C_X U_n$ (für alle n)

Sei nun $x \in X$ beliebig $\Longrightarrow$ $\exists$ n mit $x \in U_n$, aber $x \notin C_X U_m$ $\forall$ $m \geqslant n$

$\Longrightarrow$ x nicht HP von $(x_m)_{m\geqslant 1}$ $\Longrightarrow$ X nicht abzählbar kompakt $\square$

Satz 7.22

(X, d) *metrischer Raum. Dann:* X *folgenkompakt* $\iff$ X *kompakt*

Lemma 7.23 (Lebesguesches Überdeckungslemma)

(X, d) *folgenkompakt,* $(A_i)_{i \in I}$ *offene Überdeckung von* X

$\implies \exists$ *Lebesgue'sche Zahl* $\delta > 0$*, so dass* $\forall\, x \in X\ \exists\, i \in I$ *mit* $B_\delta(x) \subset A_i$

Beweis: Gegenannahme: $\nexists$ solches $\delta > 0$

$\implies \forall\, n \geqslant 1\ \exists\, x_n \in X$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset A_i \quad \forall\, i \in I$

Sei x_0 HP von $(x_n)_{n \geqslant 1}$ (nach Voraussetzung)

Sei $i_0 \in I$, so dass $x_0 \in A_{i_0}$ (Überdeckung)

Sei $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ (A_{i_0} offen)

Wähle $k \geqslant \frac{2}{\epsilon}$ mit $x_k \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_0)$ (x_0 ist HP)

$\implies B_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_k) \overset{\text{Dreieck}}{\subset} B_\epsilon(x_0) \subset A_{i_0}$ Widerspruch $\lightning$ $\square$

Lemma 7.24

(X, d) *folgenkompakt*

$\implies \forall\, \delta > 0\ \exists$ *endlich viele* $x_1, \ldots, x_r$ *mit* $X = \bigcup_{j=1}^{r} B_\delta(x_j)$

Beweis: Gegenannahme:

$\exists\, \delta > 0$ mit $X \neq \bigcup_{j=1}^{r} B_\delta(x_j)$ für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_r$ und $r \in \mathbb{N}$

Sei y_0 beliebig $\implies \exists\, y_1$ mit $d(y_1, y_0) \geqslant \delta$ (Aussage für Fall $r = 1$)

$\implies \exists\, y_2$ mit $d(y_2, y_1) \geqslant \delta$ und $d(y_2, y_0) \geqslant \delta$ (Fall $r = 2$)

Iteration: $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\exists\, y_n \ \text{ mit } \ d(y_k, y_n) \geqslant \delta \qquad \forall\, k < n$$

Diese Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt also $d(y_n, y_m) \geqslant \delta \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$

Also kann diese Folge keinen HP oder konvergente Teilfolge haben

Widerspruch zur Folgenkompaktheit $\lightning$ $\square$

Beweis von Satz 7.22: "X folgenkompakt $\Longrightarrow$ X kompakt"

Sei $(A_i)_{i\in I}$ gegebene offene Überdeckung

Sei $\delta > 0$ zugehörige Lebesguezahl

Nach Lemma 7.24 wähle $x_1, \dots, x_r$ mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$

Da $B_\delta(x_j) \subset A_{i_j}$ für geeignetes i_j nach Lemma 7.24 gilt $X = \bigcup_{j=1}^r A_{i_j}$

d.h. es gibt endliche Teilüberdeckung

Rückrichtung: Bemerkung 7.18 und Satz 7.19 $\square$

Satz 7.25

(X, d) metrischer Raum , $K \subset X$ kompakt

$\Longrightarrow$ *K beschränkt, d.h.* $\operatorname{diam}(K) = \sup_{x,y\in K} d(x, y) < \infty$

Beweis: $x \in K$, $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von K

$\Longrightarrow$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung $(B_{n_i}(x))_{i=1,\dots,N}$

$\Longrightarrow$ $K \subset B_{n_N}(x)$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{diam} K < n_N < \infty$ $\square$

Satz 7.26 (Satz von Heine-Borel)

Sei $\mathbb{R}^d$ versehen mit der euklidische Metrik und $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann:

A kompakt $\iff$ A beschränkt und abgeschlossen

Beweis:

"$\Longrightarrow$" Satz 7.8 und Satz 7.25

"$\Longleftarrow$"

Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt einen HP

Also hat Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A einen HP x, der auch BP von A ist

(entweder $x = x_n$ für unendlich viele n, oder x HP von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

Da A abgeschlossen $\Longrightarrow \quad x \in A$

Somit hat jede Folge in A einen HP in A

$\Longrightarrow \quad A$ kompakt nach Satz 7.22 $\square$

Anwendungsbeispiel: Satz von Banach-Alaoglu

Definition 7.27

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

(i) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ für $v, w \in V$

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|v\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|v\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = \vec{0}$

heißt eine Norm und $(V, \| \, \|)$ dann normierter Raum

Die Norm induziert eine Metrik durch

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad , \quad d(v, w) = \|v - w\|$$

Somit ist $(V, \| \, \|)$ ein topologischer Vektorraum

Beispiel 7.28

X topo. Raum und beschränkte stetige Fkt. $C_b(X, \mathbb{R})$ mit max-Norm

Definition 7.29

Dualraum V' eines normierten Vektorraumes $(V, \| \ \|)$ ist die Menge aller linearen stetigen Funktionale $\ell : V \to \mathbb{R}$

Satz 7.30

Eine lineare Abbildung $\ell : V \to \mathbb{R}$ *ist stetig* $\iff \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\ell(v)| < \infty$

Beweis: Setze $\|\ell\|' = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\ell(v)|$

"$\Longleftarrow$" Sei $v_n \to v \implies |\ell(v_n) - \ell(v)| = |\ell(v_n - v)| \leqslant \|\ell\|' \|v_n - v\| \to 0$

"$\Longrightarrow$" Ansonsten $\exists$ Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|v_n\| \leqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty} \ell(v_n) = \infty$

$\implies \frac{v_n}{\ell(v_n)} \to 0$ in $V \implies \lim_{n\to\infty} \ell(\frac{v_n}{\ell(v_n)}) = 0$ da ℓ stetig

Widerspruch zu $\ell(\frac{v_n}{\ell(v_n)}) = 1$ $\square$

Bemerkung 7.31

Mit $\|\ell\|' = \sup_{\|v\| \leqslant 1} |\ell(v)|$ wird V' zu einem normierten Vektorraum

Nun kann jede Abbildung (auch die nicht-linearen)

$$\ell : V \to \mathbb{R}$$

aufgefaßt werden als Element aus mengentheoretischen Produkt $\mathbb{R}^V$
Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^V$ überträgt sich auf $V' \subset \mathbb{R}^V$:

Definition 7.32

Unterraum-Topologie auf $V' \subset \mathbb{R}^V$ heißt schwach-$*$ Topologie $(\mathrm{w}*)$

Lemma 7.33

$\ell_n \overset{w*}{\to} \ell \iff \ell_n(v) \to \ell(v) \quad \forall\, v \in V$

Dies wird im Folgenden nicht verwendet (und folgt aus Satz 4.18)

Bemerkung 7.34

Analog ist die schwache (w für weak) Topologie auf V gegeben:

$$v_n \overset{w}{\to} v \iff \ell(v_n) \to \ell(v) \quad \forall\, \ell \in V'$$

Satz 7.35 (Banach-Alaoglu)

$(V, \| \, \|)$ *normierter Vektorraum. Die abgeschlossene Einheitskugel*

$$B' = \{\ell \in V' \; : \; \|\ell\| \leqslant 1\}$$

des Dualraums ist kompakt bez. der schwach-$*$ Topologie

Als Vorbereitung für den Beweis benötigen wir:

Satz 7.36

$g, f : X \to Y$ *stetig und* Y T_2*-Raum. Dann ist*

$$\{g = f\} = \{x \in X \; : \; g(x) = f(x)\} \quad \textit{abgeschlossen}$$

Begründung: $h : X \to Y \times Y$ mit $h = (f, g)$ stetig nach Satz 4.18
Da Y T_2-Raum, ist die Diagonale $\Delta \subset Y \times Y$ abgeschlossen
$\Longrightarrow \; \{f = g\} = h^{-1}(\Delta)$ abgeschlossen $\square$

Beweis von Satz 7.35:

Sei $\pi_v : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ für $v \in V$ die stetige Projektion. Nun ist

$$B' = \bigcap_{v,w \in V} \underbrace{\{\pi_{v+w} = \pi_v + \pi_w\}}_{\text{Additivität}} \cap \bigcap_{v \in V, \lambda \in \mathbb{R}} \underbrace{\{\pi_{\lambda v} = \lambda \pi_v\}}_{\text{Homogenität}} \cap \bigcap_{v \in V,\, \|v\| \leqslant 1} \underbrace{\pi_v^{-1}([-1,1])}_{\text{Beschränktheit}}$$

abgeschlossen als Durchschnitt abgeschlossener Mengen (Satz 7.36)

Zudem ist nach Satz 7.30 für $\ell \in B'$

$$|\ell(v)| \leqslant \|\ell\|' \|v\| \leqslant \|v\|,$$

so dass $\ell \in K = \prod_{v \in V} [-\|v\|, \|v\|]$

Nach Tychonov ist $K \subset \mathbb{R}^V$ kompakt

Da $B' \subset K$ abgeschlossen ist es nach Satz 7.9 schwach-$*$ kompakt $\square$

8 Lokalkompakte Räume

Definition 8.1

X lokalkompakt

$\iff X$ T_2-Raum und zu jedem $x \in X$ $\exists$ kompakte Umgebung

Satz 8.2

Jeder lokalkompakte Raum ist regulär (T_1, T_3)

Beweis:

Nachweis von T_3' (abgeschl. Umgebungen bilden Umgebungsbasis)

$x \in X \implies \exists\ K \in \mathcal{U}_x$ kompakt

Sei $U \in \mathcal{U}_x$ beliebig $\implies U \cap K \in \mathcal{U}_x^K$ (bez. Unterraum-Topologie auf K)

Da K regulär ist, $\exists\ V \in \mathcal{U}_x^K$ offen in K mit $x \in V \subset \overline{V}^K \subset U \cap K$

Beh: $\exists\ W$ abgeschlossen in X mit $W \cap K = \overline{V}^K$ (Unterraum-Topologie)

Begr.: $C_K \overline{V}^K$ offen in $K \implies \exists\, R$ offen in X mit $C_K \overline{V}^K = R \cap K$

$\implies \overline{V}^K = C_K(R \cap K) = C_X R \cap K$, d.h. $W = C_X R$ abges. $\diamond$

Somit $\overline{V}^K$ kompakt in X as abges. Teilmenge einer kompakten

Außerdem ist $\overline{V}^K \in \mathcal{U}_x$ $\square$

Korollar 8.3

In lokalkompaktem Raum hat jeder Punkt kompakte Umgebungsbasis

Begründung: Schneide abgeschlossene Umgebungsbasis mit der kompakten Umgebung $\square$

Bemerkung 8.4

Lokalkompakte Räume sind im Allgemeinen nicht normal

Definition 8.5

Ein topologischer Raum $\tilde{X}$ heißt Kompaktifizierung von X, wenn $\tilde{X}$ kompakt ist und X dichter Unterraum von $\tilde{X}$ ist (d.h. $\overline{X} = \tilde{X}$, wobei der Abschluss bzgl. der Topologie von $\tilde{X}$ genommen wird)

Satz 8.6 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung nach Alexandroff)

Sei X lokalkompakt und $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$
$\Longrightarrow \exists^{=1}$ *Topologie auf $\tilde{X}$, so dass $\tilde{X}$ Kompaktifizierung von X ist*

Beweis: Teilmengen von $\tilde{X}$ sind von

1. Art $\quad \{A \,:\, A \subset X\}$
2. Art $\quad \{B = D \cup \{\infty\} \,:\, D \subset X\}$

Setze:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{A \,:\, A \text{ offen in } X\} \cup \{B = D \cup \{\infty\} \,:\, D \subset X,\ C_X D \text{ kompakt}\}$$

Behauptung: $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist eine Topologie

Begründng: Tatsächlich $\emptyset, \widetilde{X} \in \mathcal{O}$

Beliebige Vereinigungen:

$A_i \in \widetilde{\mathcal{O}}$ von 1. Art $\Longrightarrow$ $\bigcup_i A_i \in \widetilde{\mathcal{O}}$ auch von 1. Art

$$A_i \in \widetilde{\mathcal{O}},\ B_j \in \widetilde{\mathcal{O}} \implies C_{\widetilde{X}}\left(\bigcup_j A_i \cup \bigcup_j B_j\right) = \bigcap_i \underbrace{C_X A_i}_{\text{abges.}} \cap \bigcap_j \underbrace{C_{\widetilde{X}} B_j}_{\text{komp. in } X}$$

Also kompakt in X und somit $\bigcup_j A_i \cup \bigcup_j B_j$ offen in $\widetilde{X}$

Endliche Durchschnitte:

$A_i \in \widetilde{\mathcal{O}}$, eines von 1. Art $\Longrightarrow$ $\bigcap_i A_i$ von 1. Art, also $\in \widetilde{\mathcal{O}}$

$B_j \in \widetilde{\mathcal{O}}$, alle von 2. Art. Dann ist

$$C_{\widetilde{X}}\left(\bigcap_{j=1}^n B_j\right) = C_{\widetilde{X}}\left(\{\infty\} \cup \left(\bigcap_{j=1}^n D_j\right)\right) = \bigcup_{j=1}^n C_X D_j$$

kompakt als endliche Vereinigung kompakter Mengen $C_X D_j$ $\diamond$

Behauptung: $(X, \mathcal{O})$ Unterraum von $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{O}})$

Begründng: $A \in \widetilde{\mathcal{O}}$ von 1. Art $\Longrightarrow$ $A \cap X = A$ offen in X

$B = D \cup \{\infty\} \in \widetilde{\mathcal{O}}$ von 2. Art $\Longrightarrow$ $(D \cup \{\infty\}) \cap X = A$ offen in X,

da $C_X D$ kompakt und somit abgeschlossen (X T_2-Raum) $\diamond$

Behauptung: $\widetilde{X}$ T_2-Raum

Begründung: $x, y \in \widetilde{X}$, $x \neq y$

Wenn $x, y \neq \infty$, trenne durch Umgebungen aus $\mathcal{O}$

Wenn $x \in X,\ y = \infty$ $\Longrightarrow$ $\exists\, K \in \mathcal{U}_x$ kompakt

$\Longrightarrow$ $C_X K \cup \{\infty\} \in \mathcal{U}_y$ disjunkt zu $\mathcal{U}_x$ $\diamond$

Behauptung: $\widetilde{X}$ quaskikompakt

Begründung: Sei $(X_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $\widetilde{X}$

Sei $\infty \in X_1 = D \cup \{\infty\}$ mit $C_X D$ kompakt

$\Longrightarrow$ $C_X D$ wird von **endlich** vielen der anderen X_i überdeckt

So entsteht endliche Teilüberdeckung $\diamond$

Behauptung: $\tilde{\mathcal{O}}$ eindeutig

Begründung: $\{\infty\}$ muss abgeschlossen sein (da $\tilde{X}$ T_2-Raum)

$\implies$ X offen in $\tilde{X}$

Sei $A \subset X$ von 1. Art: A offen in $\tilde{X}$ $\iff$ A offen in X

weil: "$\implies$" $A = A \cap X$ offen in X wegen Unterraum

"$\impliedby$" $\exists$ B mit $A = B \cap X$ $\quad$ B offen in $\tilde{X}$ $\overset{X \text{ offen}}{\implies}$ A offen in $\tilde{X}$

Nun $B = D \cup \{\infty\}$ 2. Art: B offen in $\tilde{X}$ $\iff$ $C_{\tilde{X}}(D \cup \{\infty\})$ abges. in $\tilde{X}$

$\overset{\text{Satz}}{\iff}$ $C_{\tilde{X}}(D \cup \{\infty\}) =$ kompakt in $\tilde{X}$ $\iff$ $C_X D$ kompakt in $\tilde{X}$

$\implies$ $C_X D$ kompakt in X

(denn endliche offene Teilüberdeckung in $\tilde{X}$ ist offen in X $\diamond \square$

Beispiel 8.7

1. $\mathbb{S}^n$ Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$
2. $[0, 1]$ Kompaktifizierung von $(0, 1]$
3. $\mathbb{S}^1$ Kompaktifizierung von $(0, 1)$

9 Vollständig reguläre Räume

Zunächst Erinnerung: (Definition 6.14)

vollständig regulär $\iff$ (T_1, T_{3a})

T_{3a} $\iff$ Punkt und abges. Menge durch Urysohn-Funktion trennbar

Sätze 6.16 und 6.17: T_{3a} vererbt sich auf Unterräume und Produkte

Vollständig reguläre Räume heißen auch Tychonov-Räume wegen

Satz 9.1

X topologischer Raum und $\Psi = \{f : X \to [0,1]$ stetig$\}$

(i) *X T_{3a}-Raum $\Longrightarrow$ $\{f^{-1}([0,1)) \,:\, f \in \Psi\}$ Basis der Topologie auf X*

(ii) *X T_1-Raum und $\{f^{-1}([0,1)) \,:\, f \in \Psi\}$, $\Phi \subset \Psi$ Basis der Topologie*
$\Longrightarrow$ *X homöomorph zu Unterraum von $\prod_{f \in \Phi} I_f$ mit $I_f = [0,1]$*

(iii) *X vollständig regulär*
$\iff$ *X homöomorph zu Teilraum von Einheitswürfeln*

Beweis: (i) Zunächst ist $f^{-1}([0,1))$ offen, da f stetig und $[0,1)$ offen

Sei $A \subset X$ offen. Zu zeigen: A Vereinigung von Basiselementen

T_{3a}: zu $x \in A$ $\exists$ stetiges $f_x : X \to [0,1]$ mit $f_x(x) = 0$ und $f_x|_{C_X A} = 1$

$\implies x \in f_x^{-1}([0,1)) \subset A \implies A = \bigcup_{x\in A} f_x^{-1}([0,1))$

(ii) Sei φ definiert durch Kommutativität folgender Diagramme $\forall\, f \in \Phi$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & \prod_{f\in\Phi} I_f \arrow[d, "f"] \\ & I_f \end{tikzcd}$$

φ stetig wegen universeller Eigenschaft des topo. Produkts (f stetig)

Behauptung: φ injektiv

Begründung: $x \neq y \xRightarrow{T_1} \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ mit $y \notin U$, zudem U offen

$\xRightarrow{\text{Basis}} \exists\, f \in \Phi$ mit $x \in f^{-1}([0,1))$ und $y \notin f^{-1}([0,1))$

$\implies f(x) < 1$ und $f(y) = 1$, d. h. $f(x) \neq f(y) \implies \varphi(x) \neq \varphi(y)$ $\diamond$

Somit ist $\varphi : X \to \varphi(X)$ Bijektion

Behauptung: $\varphi : X \to \varphi(X)$ offen

Begründung: Es reicht, dies für Basiselemente zu überprüfen, d.h.

$\varphi(f^{-1}([0,1)))$ ist offen in $\varphi(X)$ für alle $f \in \Phi$

Da $f^{-1}([0,1)) = \varphi^{-1} \circ \pi_f^{-1}([0,1))$,

ist $\varphi(f^{-1}([0,1))) = \pi_f^{-1}([0,1)) \cap \varphi(X)$ offen in $\varphi(X)$ weil π_f stetig $\diamond$

Somit ist φ ein Homöomorphismus auf sein Bild

(iii) "$\Longrightarrow$" Wähle $\Phi = \Psi$ in (ii)

$\Longrightarrow$ $(X$ vollständig regulär $\Longrightarrow$ Teilraum von $\prod_{f\in\Psi} I_f)$

"$\Longleftarrow$" $\prod_{f\in\Psi} I_f$ kompakt nach Tychonov, also auch vollständig regulär

$\overset{\text{Satz 6.16}}{\Longrightarrow}$ Unterraum $\varphi(X)$ von $\prod_{f\in\Psi} I_f$ ist auch vollständig regulär $\square$

Korollar 9.2

X vollständig regulär und X erfüllt 2. AA (Abzählbarkeitsaxiom)

$\Longrightarrow$ *X Unterraum von $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$ wobei $I_n = [0,1]$*

Begründung: Sei $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abzählbare Basis von $\mathcal{O}$

Nach Satz 9.1(i) existiert zu jedem B_k ein f_k, so dass $f_k^{-1}([0,1)) \subset B_k$

Dies zusammen mit (ii) von Satz 9.1 beweist das Korollar $\square$

Satz 9.3 (Stone-Cech Kompaktifizierung)

Zu vollständig regulärem X existiert eine bis auf Homöomorphismus Kompaktifizierung βX, eindeutig mit folgender Eigenschaft:

Zu kompaktem Raum Y und stetigem $f : X \to Y$ existiert eindeutiges stetiges $\beta f = f' : \beta X \to Y$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "f'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Bemerkung 9.4

βX hat nichts mit der Ein-Punkt-Kompaktifizierung zu tun

Hierzu betrachte folgendes Beispiel:

$X = (0, 1] \quad , \quad f : X \to [-1, 1] \quad , \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

f kann nicht stetig auf die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $[-1, 1]$ fortgesetzt werden, aber $(0, 1]$ ist vollständig regulär

Bemerkung 9.5

Vollständige Regularität *notwendig*, um Kompaktifizierung zu besitzen (denn nach Satz 6.16 sind Unterräume von vollständig regulären Räumen, wie der Kompaktifizierung, wieder vollständig regulär)

Der Satz besagt, dass dies auch hinreichend ist

Bemerkung 9.6

Intuition: βX größte Kompaktifizierung von X (so groß, dass meist unbestimmbar). Jede andere ist ein Quotient von βX nach βf

Beweis: Nach Satz 9.1 existiert φ_X stetig, offen, injektiv,

$$\varphi_X : X \hookrightarrow \prod_{g \in \Psi_X} I_g \qquad , \qquad \Psi_X = \{g : X \to [0,1] \text{ stetig}\}$$

Setze $\beta X = \overline{\varphi_X(X)}$, wobei der Abschluss bez. der Produkttopologie ist
Somit: βX als abges. Teilmenge von kompakten Raum kompakt
Zudem ist Y kompakt und somit vollständig regulär. Somit haben wir

$$\varphi_Y : Y \to \prod_{h \in \Psi_Y} I_h \qquad , \qquad \Psi_Y = \{h : Y \to [0,1] \text{ stetig}\}$$

Definiere

$$F : I^{\Psi_X} = \prod_{g \in \Psi_X} I_g \longrightarrow I^{\Psi_Y} = \prod_{h \in \Psi_Y} I_h$$

durch

$$F\left((t_g)_{g \in \Psi_X}\right) = (t_{h \circ f})_{h \in \Psi_Y}$$

Dann bekommt man folgendes Diagramm (kommutativ)

$$\begin{tikzcd}
I^{\Psi_X} \arrow[r, "F"] & I^{\Psi_Y} \\
\varphi_X(X) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, "F|_{\varphi_X(X)}"] & \varphi_Y(Y) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \\
X \arrow[u, "\varphi_X"'] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\varphi_Y"']
\end{tikzcd}$$

In der Tat gilt $F \circ \varphi_x = \varphi_Y \circ f$ denn:

$$\begin{aligned} F \circ \varphi_x(x) &= F\Big(\prod_{g \in \Psi_x} g(x)\Big) = \prod_{h \in \Psi_Y} h \circ f(x) \\ &= \prod_{h \in \Psi_Y} h(f(x)) = \varphi_Y(f(x)) \end{aligned}$$

Behauptung: F stetig

Begründung: F stetig $\iff$ $\pi_h \circ F$ stetig $\forall\ h \in \Psi_Y$ (Satz 4.18)

Zudem:

$$\pi_h \circ F\left((t_g)_{g\in\Psi_X}\right) = \pi_h\left((t_{h\circ f})_{h\in\Psi_y}\right) = t_{h\circ f} = \pi_{h\circ f}\left((t_g)_{g\in\Psi_X}\right)$$

Somit:

$$\pi_h \circ F = \pi_{h\circ f} \qquad \text{(beides Projektionen auf } I^{\Psi_X}\text{)}$$

und da $\pi_{h\circ f}$ stetig ist, ist auch $\pi_h \circ F$ stetig $\diamond$

Behauptung: $F(\varphi_X(X))$ dicht in $F(\beta X) = F(\overline{\varphi_X(X)}) \subset \overline{F(\varphi_X(X))}$

Begründung: $F(\varphi_X(X)) \subset \varphi_Y(Y)$, denn

$$x \xrightarrow{\varphi_X} \prod_{g\in\Psi_X} g(x) \xrightarrow{F} \prod_{h\in\Psi_Y} h\circ f(x) \in \varphi_Y(Y)$$

Nun ist $\varphi_Y(Y)$ abgeschlossen (nach Satz 7.13) $\Longrightarrow$ $F(\beta X) \subset \varphi_Y(Y)$ $\diamond$

Also kann man folgende Abbildung definieren:

$$f' \;=\; (\varphi_Y)^{-1} \circ F|_{\beta X} \;:\; \beta X \;\to\; Y$$

Da φ_Y offen (Satz 9.1), ist φ_Y^{-1} stetig und somit f' stetig. Außerdem ist

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_X=\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "f'"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

in der Tat kommutativ, da für $x \in X$

$$f' \circ \varphi_X(x) \overset{\text{def.}}{=} (\varphi_Y)^{-1} \circ F \circ \varphi_X(x) \;=\; (\varphi_Y)^{-1} \circ \varphi_Y \circ f(x) \;=\; f(x)$$

Zudem ist es durch f auf der dichten Teilmenge X von βX vorgegeben und somit ist f' wegen der Stetigkeit eindeutig

Begründung: $X \subset \{f = f'\}$ und $\{f = f'\}$ ist abgeschlossen in βX

$\Longrightarrow \overline{X}^{\beta X} = \beta X = \{f = f'\}$ ◇

Zur Eindeutigkeit: Gegeben zwei Stone-Cech-Kompaktifizierungen:

$$X \xrightarrow{\beta_1} \beta_1 X \quad , \quad X \xrightarrow{\beta_2} \beta_2 X$$

Dann existieren wegen charakterisierenden Eigenschaft β_1' und β_2' mit:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & \beta_1 X \arrow[d, shift left, "\beta_2'"] \\ & \beta_2 X \arrow[u, shift left, "\beta_1'"] \end{tikzcd}$$

Nun betrachte: $\beta_1' \circ \beta_2' \circ \beta_1 : X \to \beta_1 X$ und

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_1' \circ \beta_2' \circ \beta_1"'] & \beta_1 X \arrow[d, "(\beta_1' \circ \beta_2' \circ \beta_1)' = \beta_1' \circ \beta_2'"] \\ & \beta_1 X \end{tikzcd}$$

wobei letztere Gleichheit aus Eindeutigkeit folgt ($\beta_1' \circ \beta_2'$ tut es)

Somit $\beta_1' \circ \beta_2' = \mathrm{id}_{\beta_1 X}$. Analog $\beta_2' \circ \beta_1' = \mathrm{id}_{\beta_2 X}$. Also β_1' Homöo. □

Korollar 9.2:

vollständig regulärer Raum mit 2.AA homöomorph zu UR von $\prod_{h=1}^{\infty} I_h$

Dies erlaubt zu zeigen, dass dieser Raum metrisierbar ist

Definition 9.7

$(X, \mathcal{O})$ metrisierbar $\iff$ $\exists$ Metrik auf X, die gleiche Topologie erzeugt

Natürlich ist die Metrik nicht eindeutig, es gilt sogar:

Satz 9.8

(X, d) metrischer Raum $\implies$ $\exists$ Metrik d^* auf X, die die gleiche Topologie erzeugt und $d^*(x, y) \leqslant 1 \quad \forall\, x, y \in X$

Beweis: Betrachte den Homöomorphismus

$$\rho : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to [0, 1) \qquad , \qquad \rho(x) = \frac{x}{1 + x}$$

Es gilt $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$

Setze: $d^* = \rho \circ d$. Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften $\square$

Satz 9.9

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ *Familie von metrisierbaren topologischen Räumen*
$\Longrightarrow\ X = \prod_{h=1}^{\infty} X_n$ *metrisierbar*

Beweis: Sei $d_n \leqslant 1$ Metrik auf X_n. Setze

$$d(x,y) \;=\; \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}\, d_n(x_n,y_n) \qquad , \qquad x = (x_n)_{n\geqslant 1},\; y = (y_n)_{n\geqslant 1} \in X$$

Die Metrik d induziert die Produkttopologie auf X, denn:

Behauptung 1: Jede d-Kugel enthält endliches Produkt von d_n-Kugeln

Behauptung 2: Jedes endl. Produkt von d_n-Kugeln enthählt d-Kugel

Da d-Kugeln und endlichen Produkte von d_n-Kugeln ja jeweils die Topologie erzeugen (einmal die metrische, einmal die Produkt-Topo.), folgt die Aussage

Begündung von Behauptung 1: $x \in X$, $B^d_\varepsilon = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$
Wähle $N = N_\varepsilon$, so dass $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$
Setze: $V = B^{d_1}_{\frac{\varepsilon}{N}}(x_1) \times \ldots \times B^{d_N}_{\frac{\varepsilon}{N}}(x_N) \times \prod_{n=N+1}^\infty X_n$ endliches Produkt
Für $y \in V$ gilt

$$d(x,y) < \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\implies V \subset B^d_\varepsilon$ $\diamond$

Begründung von Behauptung 2: Sei $x \in X$ und

$$U = B^{d_1}_{\varepsilon_1}(x_1) \times \ldots \times B^{d_N}_{\varepsilon_N}(x_N) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} X_n$$

Wähle $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2^1}, \ldots, \frac{\varepsilon_N}{2^N}\right\}$
Für $y \in B^d_\varepsilon$ gilt dann $d_n(x_n, y_n) < \varepsilon_n \quad \forall\, n = 1, \ldots, N \implies B^d_\varepsilon \subset U$ $\diamond\,\square$

Satz 9.10 (1. Metrisierungssatz von Urysohn)

X topologischer Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom

$$X \text{ metrisierbar} \iff X \text{ normal} \iff X \text{ vollständig regulär}$$

Beweis: Erstes "$\Longrightarrow$" nach Satz 6.9, und zweites "$\Longrightarrow$" klar

Sei X vollständig regulär $\overset{\text{Korollar 9.2}}{\Longrightarrow}$ X Unterraum von $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$

Aber $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$ ist metrisierbar nach Satz 9.9, somit auch X $\diamond$

Satz 9.11 (2. Metrisierungssatz von Urysohn)

Für X kompakt: X metrisierbar $\iff$ X 2. Abzählbarkeitsaxiom

Beweis: "$\Longleftarrow$" klar nach Satz 9.10

"$\Longrightarrow$" Aus $\left(B_{\frac{1}{n}}(x)\right)_{x \in X}$ wähle endl. Teilüberdeck. $\left(B_{\frac{1}{n}}\left(x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1,\dots,k_n}$

Dann ist $\left(B_{\frac{1}{n}}\left(x_i^{(n)}\right)\right)_{i=1,\dots,k_n,\ n \geqslant 1}$ eine abzählbare Basis

weil: Zu $B_\varepsilon(y)$, wähle $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \implies \exists\ x_i^{(n)}$ mit $y \in B_{\frac{1}{n}}\left(x_n^{(i)}\right) \subset B_\varepsilon(y)$ $\square$

10 Metrisierungssatz

Definition 10.1

X topologischer Raum und $(X_i)_{i\in I}$ Familie von Teilmengen

$(X_i)_{i\in I}$ lokal endlich $\Longleftrightarrow \forall\, x \in X\ \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ mit $\sharp\{i \in I : X_i \cap U \neq \emptyset\} < \infty$

Definition 10.2

$(X_i)_{i\in I}$ ist Verfeinerung von $(Y_j)_{j\in J} \Longleftrightarrow\ \forall\, i \in I\ \exists\, j \in J$ mit $X_i \subset Y_j$

Lemma 10.3

$(X_i)_{i\in I}$ lokal endlich. Dann

(i) *$(\overline{X_i})_{i\in I}$ lokal endlich*

(ii) *$\forall\, J \subset I$ gilt: $\bigcup_{i\in J} \overline{X_i}$ abgeschlossen in X*

Beweis: (i) Sei $x \in X$ beliebig

$\implies \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ mit $X_i \cap U = \varnothing$ für alle bis auf endliche viele j

Wähle U offen so dass $C_X U$ abgeschlossen. Dann

$$X_i \subset C_X U \implies \overline{X_i} \subset C_X U \implies \overline{X_i} \cap U = \varnothing$$

Somit hat auch $(\overline{X_i})_{i \in I}$ nur endlich viele nicht-leere Schnitte mit U

(ii) Setze $Y = \bigcup_{i \in J} \overline{X_i}$ und zeige, dass $C_X Y$ Umgeb. all seiner Punkte

Sei $x \in C_X Y$ beliebig $\stackrel{\text{(i)}}{\implies} \exists\, U \in \mathcal{U}_x$ offen und endlich $\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_n}$
mit $U \cap \overline{X}_{i_e} \neq \varnothing$, und $U \cap \overline{X}_j = \varnothing \quad \forall\, j \neq i_1, \ldots, i_n$
Dann ist $U \subset C_X \overline{X}_j$ und $U \cap C_X \overline{X}_j = U$, so dass

$$V = U \cap C_X Y = U \cap \bigcap_{j \in J} C_X \overline{X}_j = U \cap \bigcap_{e=1}^{n} C_X \overline{X}_{i_e}$$

Somit ist V offen und $V \in \mathcal{U}_x$, und da $V \subset C_X Y$ ist auch $C_X Y \in \mathcal{U}_x$ $\square$

Definition 10.4 (Dieudonné)

X topologischer Raum heißt parakompakt

$\iff$ zu jeder offenen Überdeckung von X existiert eine Verfeinerung, die offen und lokal-endlich ist und immer noch Überdeckung ist (Verfeinerungüberdeckung), und X T_2-Raum

Offensichtlich: X kompakt $\implies$ X parakompakt

Satz 10.5

X parakompakt $\implies$ X normal

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass X regulär ist

Seien $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in C_X A$

Wegen der T_2 existiert $\forall\ a \in A$ offener $U_{(a)} \in \mathcal{U}_a$ mit $x \notin \overline{U_{(a)}}$

$\implies$ $\left(U_{(a)}\right)_{a \in A}, C_X A$ offene Überdeckung von X

$\implies$ $(V_i)_{i \in I}, G$ offene lokal-endliche Verfeinerungüberdeckung

Da $G \subset C_X A$, ist $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ offene Umgebung von A

Zudem ist $x \notin \overline{V_i}$, da $\overline{V_i} \subset \overline{U_{(a)}}$ für geeignetes $a \in A$

Nach Lemma 10.3 (ii) ist $W = \bigcup_{i \in I} \overline{V_i}$ abgeschlossen

Zudem ist $x \notin W$, so dass $C_X W \in \mathcal{U}_x,\ C_X W \cap V = \varnothing$ (da $V \subset W$)

Somit ist die Regularität nachgewiesen

Seien nun A, B abgeschlossen

$\overset{T_3}{\Longrightarrow}\ \forall\, a \in A \quad \exists$ offenes $U_{(a)} \in \mathcal{U}_a$ mit $B \cap \overline{U_{(a)}} = \varnothing$

Nun führt man obiges Argument durch mit x ersetzt durch B

$(U_{(a)})_{a \in A}, C_X A$ offene Überdeckung von X

$(V_i)_{i \in I}, G$ offene lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung

Nun ist $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ offene Umgebung von A und $W = \bigcup_{i \in I} \overline{V_i}$ abges.

Da $B \cap \overline{V_i} = \varnothing \quad \forall\, i \in I$, folgt $B \cap W = \varnothing$

Somit $C_X W \in \mathcal{U}_B,\ V \in \mathcal{U}_A$ und $C_X W \cap V = \varnothing$ (da $V \subset W$) $\square$

Definition 10.6

X topologischer Raum , $\mathcal{X} = (X_j)_{j \in J}$ Familie von Teilmengen von X

$\mathcal{X}$ σ-lokal-endlich $\iff$ $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{X}_n$ lokal-endlich Familie

Satz 10.7

Sei X regulär. Dann sind äquivalent:

(i) *X parakompakt*

(ii) *Jede offene Überdeckung von X besitzt σ-lokal-endlich offene Verfeinerungsüberdeckung*

(iii) *Jede offene Überdeckung von X hat lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung (noch nicht notwendig offen)*

(iv) *Jede offene Überdeckung von X hat lokal-endliche abgeschlossene Verfeinerungsüberdeckung*

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) trivial

(ii) $\Longrightarrow$ (iiii)

Sei $\mathcal{X}$ offene Überdeckung

Nach Voraussetzung existiert $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n \geqslant 0}$ offene σ-lokal-endliche

Verfeinerungsüberdeckung von $\mathcal{X}$, d.h. $\mathcal{S}_n$ lokal-endlich

Setze

$$X_n = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_n} S \quad , \quad Y_m = \bigcup_{n=0}^{m} X_n$$

Dann Y_m wachsend in m und $Y_\infty = X$.

Weiter sei $\mathcal{A} = (A_n)_{n \geqslant 0}$ mit $A_n = Y_n \backslash Y_{n-1}$ mit $A_0 = Y_0$

Dann sind die A_n disjunkt und $A_n \subset X_n$, weil $A \cup B \backslash B \subset A$

Behauptung: $\mathcal{Z} = (A_n \cap S)_{S \in \mathcal{S}_n, n \geqslant 0}$ gesuchte lokal-endliche

Verfeinerungsüberdeckung von $\mathcal{X}$

Begründung:

(a) $\mathcal{Z}$ Verfeinerung von $\mathcal{S}$, da ja noch Schnitte gebildet werden

(b) $\mathcal{Z}$ Überdeckung

weil: Zu $x \in X \implies \exists\, n$ mit $x \in A_n = Y_n \setminus Y_{n-1} \subset X_n$
Da $\mathcal{S}_n$ Überdeckung von X_n, $\exists\, S \in \mathcal{S}_n$ mit $x \in S$, somit $x \in S \cap A_n$

(c) $\mathcal{Z}$ lokal-endlich

weil: Sei $x \in X$ und n, so dass $x \in Y_n \setminus Y_{n-1} \subset Y_n$. Weiter sei $m < n$
Da $\mathcal{S}_m$ lokal-endlich und Y_n offen, $\exists\, V_m \in \mathcal{U}_x$ mit $V_m \subset Y_n$ (ggfs. mit Y_n schneiden), so dass V_m nur endlich viele Mengen in $\mathcal{S}_m$ trifft
$\implies V = \bigcap_{m=0}^{n} V_m \in \mathcal{U}_x$ und V schneidet endlich viele Mengen in $\mathcal{Z}$,
da $V \cap A_k = \emptyset \quad \forall\, k > n$ (da $V_m \subset Y_n$ und $A_k \cap Y_n = \emptyset$)
Somit gibt es für $m \leqslant n$ nur jeweils endlich viele nicht-leere Schnitte und für $k > n$ gar keine $\diamond$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Sei $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung

Für jedes $x \in X$ $\exists$ i mit $x \in X_i \overset{T_3'}{\Longrightarrow}$ $\exists$ V_x offen mit $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset X_i$

Zu $(V_x)_{x \in X}$ sei $\mathcal{Z} = (Z_j)_{j \in J}$ lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung

$\overset{\text{Lemma 10.3}}{\Longrightarrow}$ $\overline{\mathcal{Z}} = (\overline{Z_j})_{j \in J}$ abgeschlossene lokal-endliche Überdeckung

Zudem: $\forall$ j ist $Z_j \subset V_x$ für geeignetes x, also $\overline{Z_j} \subset \overline{U_x} \subset X_i$

Somit $\overline{\mathcal{Z}}$ Verfeinerung von $\mathcal{X}$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Sei $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow}$ Wähle $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung

(deren Abgeschlossenheit spielt hier keine Rolle)

$\Longrightarrow$ $\forall$ $x \in X$ $\exists$ offenes $W_x \in \mathcal{U}_x$ mit endlich vielen Schnitten mit $\mathcal{V}$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{Z} = (Z_k)_{k \in K}$ abges. lokal-endl. Verfeinerungsüb. von $(W_x)_{x \in X}$

Für $V \in \mathcal{V}$ setze

$$V' = X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}, Z \cap V = \emptyset} \overline{Z}$$

$\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}, Z \cap V = \emptyset} \overline{Z}$ nach Lemma 10.3 abgeschlossen, somit V' offen

Zudem $V \subset V'$, da $\mathcal{Z}$ Überdeckung und bei Definition von V' werden alle $Z \in \mathcal{Z}$ mit leerem V-Schnitt ausgeschlossen

$\implies \mathcal{V}' = (V_j')_{j \in J}$ offene Überdeckung

Behauptung: $\mathcal{V}'$ lokal endlich

Begründung: Zu $x \in X \ \exists \ U_x \in \mathcal{U}_x$ mit U_x schneidet nur endlich viele $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{Z}$ (da $\mathcal{Z}$ lokal-endlich) $\implies U_x \subset (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)$

Sei nun $V' \in \mathcal{V}'$, so dass $U_x \cap V' \neq \emptyset$

$\implies V' \cap Z_k \neq \emptyset$ für ein $k = 1, \ldots, n \implies V \cap Z_k \neq \emptyset$ für ein k

Dieses Z_k trifft aber nur endliche viele V

$\implies U_x \cap V' \neq \emptyset$ nur für endlich viele $V' \in \mathcal{V}'$, d.h. $\mathcal{V}'$ lokal-endlich $\diamond$

Zuletzt: zu $V \in \mathcal{V}$ wähle $X_V \in \mathcal{X}$ mit $V \in X_V$ (da $\mathcal{V}$ Verfeinerung von $\mathcal{X}$)

$\implies (U_V \cap V')_{V \in \mathcal{V}}$ offene lokal-endl. Verfeinerungsüberdeckung von $\mathcal{X}$ (Überdeckung, da $V \subset X_V$ und $V \subset V'$, so dass $V \subset U_V \cap V'$, und schon $\mathcal{V}$ war ja Überdeckung) $\square$

Satz 10.8 (A. H. Stone)

X metrisierbar $\Longrightarrow$ X parakompakt

Beweis: Sei d die Metrik, welche die Topologie indiziert

X metrisch $\Longrightarrow$ X normal $\Longrightarrow$ X regulär

Nach Satz 10.7 zu zeigen: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ existiert eine σ-lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung

Sei I wohlgeordnet mit totaler Ordnung $<$

(Wohlordnungssatz $\widehat{=}$ Lemma von Zorn $\widehat{=}$ Auswahlaxiom)

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in I$

$$\begin{aligned} A_{n,i} &= \{x \in V_i \ : \ d(C_X V_i, x) \geqslant 2^{-n}\} \\ B_{n,i} &= \{x \in A_{n,i} \ : \ x \notin A_{n+1,j} \text{ für } j < i\} \\ U_{n,i} &= \{x \in X \ : \ d(x, B_{n,i}) < 2^{-n-3}\} \end{aligned}$$

Behauptung 1: $V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,i} \quad \forall\, i \in I$ (gilt, da V_i offen ist)

Behauptung 2: $(U_{n,i})_{n\in\mathbb{N},i\in I}$ offene Verfeinerungsüberdeckung von $\mathcal{V}$

Begründung: wegen "$<$" ist $U_{n,i}$ offen

Sei $x \in X \implies$ bestimme i minimal mit $x \in V_i$

$\implies x \in A_{n,i}$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$

Andererseits $x \notin A_{n+1,j}$ für $j < i$ (Index $n+1$ beliebig)

$\implies x \in B_{n,i}$

$\implies x \in U_{n,i}$, d.h. Überdeckung

Noch zu zeigen: Verfeinerung, d.h. $U_{n,i} \subset V_i$

Annahme: $\exists\, x \in U_{n,i}$ mit $x \notin V_i$, d.h. $x \in C_X V_i$

$\implies \exists\, y \in B_{n,i}$ mit $d(x,y) < 2^{-n-3}$

$\implies \exists\, y \in A_{n,i}$ mit $d(x,y) < 2^{-n-3}$

Andererseits gilt für $y \in A_{n,i}$ und $x \in C_X V_i$, dass

$$d(x,y) > 2^{-n} \qquad \text{Widerspruch!}$$

$\diamond$

Behauptung 3: $d(B_{n,i}, B_{n,j}) \geqslant 2^{-n-1} \quad \forall\, i \neq j$

Begründung: Sei $j < i$ und $x \in B_{n,i},\ y \in B_{n,j}$. Dann (nach Dreiecksungl.)

$$d(x,y) \;\geqslant\; d(y, C_X V_j) \;-\; d(x, C_X V_j)$$

Nun $d(y, C_X V_j) \geqslant 2^{-n}$ da $y \in B_{n,j} \subset A_{n,j}$

Außerdem ist $d(x, C_X V_j) \leqslant 2^{-n-1}$

denn: $x \leqslant B_{n,i} \implies x \in A_{n,i}$ und $x \notin A_{n+1,j}$ für $j < i$

Falls $x \in V_j \implies d(x, C_X V_j) \leqslant 2^{-n-1}$, da $x \notin A_{n+1,j}$

Falls $y \notin V_j \implies d(x, C_X V_j) = 0$.

Zusammen $d(x,y) \geqslant 2^{-n} - 2^{-n-1} \geqslant 2^{-n-1}$ $\diamond$

Behauptung 4: $d(U_{n,i}, U_{n,j}) \geqslant 2^{-n-2} \quad \forall\, i \neq j$

Begründung: Mit Beh. 3: $d(U_{n,i,}, U_{n,j}) \geqslant 2^{-n-1} - 2 \cdot 2^{-n-3} = 2^{-n-2}$ $\diamond$

Letztendlich setze $\mathcal{X}_n = (U_{n,i})_{i \in I}$

Da alle $U_{n,i}$ disjunkt sind (Beh. 4), ist diese Familie lokal-endlich

$\implies \mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (U_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, i \in I}$ σ-lokal-endl. Verfeinerungsüberd. $\square$

Satz 10.9 (Metrisierungssatz von Bing, Nagota-Smirnov)

X metrisierbar $\Longleftrightarrow$ X regulär mit σ-lokal-endliche Basis

Beweis: "$\Longrightarrow$"

X metrisierbar $\Longrightarrow$ X normal $\Longrightarrow$ X regulär $\overset{\text{Stone}}{\Longrightarrow}$ X parakompakt

$\left(B_{\frac{1}{2^n}}(x)\right)_{x \in X}$ offene Überdeckung

$\overset{X \text{ parakomp.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{X}_n$ offene lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung

$\Longrightarrow$ $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ-lokal-endlich

Zudem ist $\mathcal{X}$ Basis der Topologie, denn es gilt (Satz 2.14)

$B_1, B_2 \in \mathcal{X}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ $\Longrightarrow$ $\exists$ $B_3 \in \mathcal{X}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

weil:

Wähle nur den Radius ausreichend klein für B_3

und verwende dabei $\mathcal{X}_n$ Überdeckung $\diamond$

"$\Longleftarrow$"

Sei $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{S}_n = (S_{n,i})_{i\in I_n}$ σ-lokal-endl. Basis der Topologie

Behauptung 1: X parakompakt (und somit normal)

Begründung: Da X regulär, reicht es nach Satz 10.7 zu zeigen:

Jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ hat σ-lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung

Sei $\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{S}_n \ : \ \exists\, j \text{ mit } V \subset U_j\}$

Da $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{S}_n$, ist $\mathcal{V}_n$ lokal-endlich und $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-lokal-endlich

Offensichtlich ist $\mathcal{V}$ Verfeinerung von $\mathcal{U}$

Zudem ist $\mathcal{V}$ Überdeckung, da nach der Basis-Eigenschaft sich jede U_j als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben lässt $\diamond$

Behauptung 2: Jede offene Menge U von X ist Vereinigung einer abzählbaren Familie von abgeschlossenen Mengen

Begründung:

Weil X T_3-Raum,

gibt es zu $x \in U \in \mathcal{U}_x$ ein $V_x \in \mathcal{U}_x$ mit $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$

$\overset{\mathcal{S}\text{ Basis}}{\Longrightarrow}$ $x \in S_{n(x),i(x)} \subset \overline{S_{n(x),i(x)}} \subset U$

Setze

$$T_n = \bigcup_{x \in U, n(x)=n} \overline{S}_{n,i(x)}$$

Da $\mathcal{S}_n$ lokal-endlich, ist nach Lemma 10.3 T_n abgeschlossen

Außerdem $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ $\diamond$

Schritt 3: Konstruktion der Metrik

Sei nunächst (n, i) fest $\overset{\text{Beh. 2}}{\Longrightarrow}$ $S_{n,i} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} T_j$ mit T_j abgeschlossen

Mit Beh. 1 (T_4-Raum) trenne abgeschlossenes T_j und $C_X S_{n,i}$ durch

Urysohn-Funktion $f_j : X \to [0, 1]$ stetig mit $f_j|_{T_j} = 1$ und $f_j|_{C_X S_{n,i}} = 0$

Setze $\phi_{n,i}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_j(x)$ so dass $\phi_{n,i} : X \to [0, 1]$

Nun ist $\phi_{n,i}$ stetig als gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Fkt.

Zudem $\phi_{n,i}|_{C_X S_{n,i}} = 0$ und: $\phi_{n,i}(X) > 0 \iff x \in S_{n,i}$

Da $\mathcal{S}_n = (S_{n,i})_{i\in I_n}$ lokal-endlich, ist $\sum_{i\in I_n} \phi_{n,i}(x)$ stetig

(für jedes x existiert Umgebung, in welcher die Summe endlich)

Somit ist $\psi_{n,i} : X \to [0, 2^{-n}]$ gegeben durch

$$\psi_{n,i}(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\phi_{n,i}(x)}{1 + \sum_{i\in I_n} \phi_{n,i}(x)}$$

stetig und $\psi_{n,i}|_{C_X S_{n,i}} = 0$ sowie: $\psi_{n,i}(x) > 0 \iff x \in S_{n,i}$

Zudem ist $\sum_{i\in I_n} \psi_{n,i} : X \to [0, 2^{-n}]$ stetig aus gleichem Grund

Setze:

$$d(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in I_n} |\psi_{n,i}(x) - \psi_{n,i}(y)| \qquad , \qquad x,y \in X$$

Da $d(x,y)$ wieder gegeben durch gleichmäßig konvergente Summe (in n) von stetigen Funktionen, ist es stetig in x und in y

Somit ist d auf $X \times X$ stetig (nach Eigenschaft der Produkttopologie)

Nun kann überprüft werden:

(a) $d(x,y) \geqslant 0$ und $d(x,x) = 0$

(b) d symmetrisch + Dreiecksungleichung

(c) $x \neq y \overset{T_1 + \text{Basis}}{\Longrightarrow} \exists\ (n,i)$ mit $x \in S_{n,i},\ \ y \notin S_{n,i}$

$\Longrightarrow\ \psi_{n,i}(x) > 0,\ \psi_{n,i}(y) = 0 \ \Longrightarrow\ d(x,y) > 0$

Umgekehrt ist klar, dass: $d(x,y) > 0 \ \Longrightarrow\ x \neq y$

Zusammengefaßt: d ist eine Metrik $\diamond$

Behauptung 4 *d* induziert die auf X gegebene Topologie $\mathcal{O}$

Begründung: Sei $d_x(y) = d(x, y)$, d. h. $d_x : X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig

$\implies B_\varepsilon(x) = \{y \in X \ : \ d_x(y) < \varepsilon\} = d_x^{-1}([0, \varepsilon))$ offen

$\implies$ metrische Topologie gröber als $\mathcal{O}$

Umgekehrt, sei $U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}$

$\implies \exists\ (n, i)$ mit $S_{n,i} \subset U$ (da $\mathcal{S}$ Basis)

Setze $\varepsilon = \psi_{n,i}(x)$

Also $d(x, y) < \varepsilon \implies |\psi_{n,i}(x) - \psi_{n,i}(y)| < \varepsilon = \psi_{n,i}(x)$

$\implies \psi_{n,i}(y) > 0 \implies y \in S_{n,i} \subset U$

$\implies B_\varepsilon(x) \subset U$

Somit $\mathcal{O}$ gröber als die metrische Topologie $\square$

11 Zusammenhang

Definition 11.1

Topologischer Raum X heißt zusammenhängend

$\iff$ $\nexists$ Zerlegung von X in zwei disjunkte, offene und nicht-leere Teilmengen

$\iff$ $\nexists$ Zerlegung von X in zwei disjunkte, abgeschlossene und nicht-leere Teilmengen

$\iff$ $X, \emptyset$ sind die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen

Beispiel 11.2

(i) $\mathbb{R}$ zusammenhängend

(ii) $\mathbb{Q}$ nicht zusammenhängend

(iii) D diskreter Raum mit $\sharp D \geqslant 2 \implies D$ nicht zusammenhängend

Definition 11.3

Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend

$\iff$ A als Unterraum zusammenhängend

$\iff$ ($A \subset B \cup C$ mit B, C offen in X und $A \cap B \cap C = \emptyset$

$\implies$ $A \cap B = \emptyset$ oder $A \cap C = \emptyset$)

Satz 11.4

$A \subset X$ zusammenhängend und $A \subset B \subset \overline{A} \implies B$ zusammenhängend

Beweis: Gegenannahme: $\exists\ U_1, U_2$ offen in X mit

$$(B \cap U_1) \cup (B \cap U_2) = B \ , \ (B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) = \emptyset \ , \ B \cap U_{1,2} \neq \emptyset$$

Seien $x_{1,2} \in B \cap U_{1,2} \implies x_{1,2} \in \overline{A} \implies U_{1,2} \cap A \neq \emptyset$, weil $U_{1,2} \in \mathcal{U}_{x_{1,2}}$

Außerdem (weil $A \subset B$)

$$(A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) = A \qquad , \qquad (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = \emptyset$$

$\implies$ A nicht zusammenhängend, Widerspruch! $\square$

Satz 11.5

$(A_i)_{i \in I}$ *Familie zusammenhängender Teilmengen in X*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \textit{zusammenhängend}$$

Begründung:

Gegenannahme:

$A \subset B \cup C$, B, C offen, $A \cap B \neq \emptyset$, $C \cap A \neq \emptyset$ und $A \cap B \cap C = \emptyset$

Sei $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ und, zum Beispiel, $a \in B$

$\Longrightarrow \ B \cap A_i \neq \emptyset \quad \forall\, i \in I$

Andererseits gilt $C \cap A_j \neq \emptyset$ für geeignetes j (da $C \cap A \neq \emptyset$)

$\Longrightarrow \ A_j$ ist nicht zusammenhängend, Widerspruch! $\square$

Satz 11.6

Sei $B \subset X$ zusammenhängend und $A \subset X$. Dann:

$$\left(B \cap A \neq \emptyset \quad , \quad B \cap C_X A \neq \emptyset\right) \quad \Longrightarrow \quad B \cap \partial A \neq \emptyset$$

Beweis:

Betrachte disjunkte Zerlegung $X = A^\circ \cup \partial A \cup C_X \overline{A}$

Gegenannahme: $B \cap \partial A = \emptyset$

Dann $B \subset A^\circ \cup C_X \overline{A}$ wobei $A^\circ, C_X \overline{A}$ offen

Da B zusammenängend, folgt $B \subset A^\circ$ oder $B \subset C_X \overline{A}$

$\Longrightarrow$ $B \subset A$ oder $B \subset C_X A$. Widerspruch zur Annahme! $\square$

Satz 11.7

$f : X \to Y$ stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen X, Y

$A \subset X$ zusammenhängend in $X \implies f(A)$ zusammenhängend in Y

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{f} & f(A) \end{array}$$

Es reicht, den Fall $A = X$ und f surjektiv zu betrachten

Sei $Y = B \cup C$ offene, disjunkte Zerlegung, z.Z. B oder C leer

$\implies f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = X$ offen, disjunkt

Da X zusammenängend, folgt $f^{-1}(B) = \emptyset$ oder $f^{-1}(C) = \emptyset$

$\implies B = \emptyset$ oder $C = \emptyset$ $\square$

Satz 11.8

Topologischer Raum X nicht zusammenhängend

$\Longleftrightarrow \ \exists\, f : X \to D$ *stetig, surjektiv mit D diskrete, $\sharp\, D \geqslant 2$*

Beweis:

"$\Longrightarrow$"

X nicht zusammenhängend

$\Longrightarrow \ \exists$ offene, disjunkte, nicht-leere Zerlegung $X = B \cup C$

Setze $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in B \\ 0\,, & x \in C \end{cases}$

$f : X \to \{0, 1\}$ stetig und surjektiv

"$\Longleftarrow$"

$X = \bigcup_{d \in D} f^{-1}(d)$ nicht-triviale offene Zerlegung von X

$\Longrightarrow \ X$ nicht zusammenhängend $\square$

Satz 11.9

$X = \prod_{i \in I} X_i$ *zusammenhängend* $\Longleftrightarrow$ X_i *zusammenhängend* $\forall\ i \in I$

Beweis: "$\Longrightarrow$" X zusammenhängend $\pi_i : X \to X_i$ stetig, surjektiv

$\Longrightarrow$ $X_i = \pi_i(X)$ zusammenhängend nach Satz 11.7

"$\Longleftarrow$"

Sei zunächst $\# I = 2$, d.h. $I = \{1, 2\}$

Fixiere $y_2 \in X_2$ als Basispunkt. Zu $x_1 \in X_1$ setze

$$A_{x_1} = X_1 \times \{y_2\} \cup \{x_1\} \times X_2$$

Dann sind $X_1 \times \{y_2\}$ und $\{x_1\} \times X_2$ zusammenhängend

Zudem ist $(X_1 \times \{y_2\}) \cap (\{x_1\} \times X_2) \neq \emptyset$, somit A_{x_1} zshgd. (Satz 11.5)

Dann $X = \bigcup_{x_1 \in X_1} A_{x_1}$ zshgd. da $\bigcap_{x_1 \in X_1} A_{x_1} \neq \emptyset$ (Satz 11.5)

Ähnlich oder durch Iteration wird endliches I behandelt

Nun sei I unendlich

Wähle $y = (y_i)_{i \in I}$ fest

Zu endlichem $K \subset I$ setze

$$B_K = \{x \in X : x_i = y_i \; \forall \; i \notin K\}$$

Da B_K homöomorph zu $\prod_{i \in K} X_i$ ist B_K zshgd.

Nun ist $y \in \bigcap_K B_K$ mit Durchschnitt über alle endlichen $K \subset I$

Somit $Y := \bigcup_K B_K$ zshgd. (Satz 11.5)

Für jede Elementarmenge U gilt $U \cap Y \neq \emptyset$ (gibt Schnittpunkt an!)

Somit ist Y dicht in X, d.h. $\overline{Y} = X$

Nach Satz 11.4 ist dann auch X zshgd. $\square$

Definition 11.10

X topologischer Raum und $x \in X$

Zusammenhangskomponente von x ist $Z_x = \bigcup_{x \in A, A \text{ zshgd.}} A$

Bemerkung 11.11

(i) Z_x größte zusammenhängende Teilmenge, die x enthält

(ii) Z_x abgeschlossen (aber nicht notwendig offen)

weil: nach Satz 11.4, $Z_x \subset B \subset \overline{Z_x} \implies B$ zusammenhängend

(iii) $x, y \in X \implies Z_x = Z_y$ oder $Z_x \cap Z_y = \varnothing$

weil: Sei $y \in Z_x \overset{Z_x \text{ zshgd.}}{\implies} Z_x \subset Z_y \implies x \in Z_y \overset{Z_y \text{ zshgd.}}{\implies} Z_y \subset Z_x$

Somit: Zugehörigkeit zu Zusammenhangskomponenten ist eine Äquivalenzrelation

Definition 11.12

X topologischer Raum

X total unzusammenhängend $\iff Z_x = \{x\} \quad \forall\, x \in X$

Beispiel 11.13

(i) diskrete Räume
(ii) $\mathbb{Q}$ mit Unterraum-Topologie
(iii) Cantormenge (Hausaufgabe)

Definition 11.14

Topologischer Raum X heißt lokal-zusammenhängend

$\iff \forall\, x \in X\ \exists$ Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen

Achtung! lokal-zusammenhängend $\not\Rightarrow$ zusammenhängend

Satz 11.15

X lokal-zusammenhängend
$\Longleftrightarrow$ Zusammenhangskomponenten jeder offenen Teilmenge sind offen

Beweis:

"$\Longrightarrow$" $U \subset X$ offen, $x \in U$, Z_x^U Zusammenhangskomponente von x in U

Für $y \in Z_x^U$ gilt $U \in \mathcal{U}_y$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow}\ \exists\ V \in \mathcal{U}_y,\ V \subset U,\ V$ zusammenhängend

$\overset{\text{Satz 11.5}}{\Longrightarrow}\ Z_x^U \cup V$ zusammenhängend $\overset{\text{Maximalität}}{\Longrightarrow}\ V \subset Z_x^U \Longrightarrow Z_x^U \in \mathcal{U}_y$

Somit ist Z_x^U offen, weil Umgebung all seiner Punkte

"$\Longleftarrow$" $x \in X,\ U \in \mathcal{U}_x \overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} Z_x^U$ offen $\Longrightarrow Z_x^U \in \mathcal{U}_x,\ Z_x^U \subset U$

Somit bilden die zusammenhängenden Mengen Umgebungsbasis $\square$

Definition 11.16

(i) X wegzusammenhängend

$\iff \forall\, x, y \in X\ \exists\, \varphi : [0, 1] \to X$ stetig mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$

(ii) $A \subset X$ wegzusammenhängend

$\iff$ A als Unterraum wegzusammenhängend

(iii) X lokal wegzusammenhängend

$\iff \forall\, x$ hat $\mathcal{U}_x$ Basis aus wegzusammenhängenden Umgebungen

Bemerkung: Wegzusammenhang ist eine Äquivalenzrelation

Satz 11.17

X wegzusammenhängend $\implies$ X zusammenhängend

Beweis: Fixiere $x \in X$. Sei φ_y Weg nach $y \in X$

$\implies \varphi_y([0, 1])$ zshgd. als stetiges Bild zshgd. Menge

$\implies X \subset \bigcup_{y \in X} \varphi_y([0, 1])$ zusammenhängend nach Satz 11.5 $\square$

Satz 11.18

X lokal wegzusammenhängend
$\Longrightarrow$ jede offene, zshgd. Teilmenge ist wegzusammenhängend

Beweis: U offen, zusammenhängend und $x \in U$

Setze $U' = \{y : \exists \text{ Weg } \varphi_y \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y\} \subset U$

$\Longrightarrow U \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in U'$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} \forall\, y \in U' \; \exists\, V \in \mathcal{U}_x$ mit $V \subset U$, V wegzusammenhängend

$\Longrightarrow V \subset U' \Longrightarrow U'$ Umgebung all seiner Punkte, somit U' offen

Genauso zeigt man $U \backslash U'$ offen in U

Da U zusammenhängend und $U' \neq \varnothing$

$\Longrightarrow U \backslash U' = \varnothing$, d.h. $U = U'$

Somit U wegzusammenhängend $\square$