KAPITEL 2

Lösungsmethoden für spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bemerkungen:

(1) Unter einem **Intervall** verstehen wir ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall, also
- (a, b) mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$,
- $(a, b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
- $[a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$,
- $[a, b]$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. (Wenn wir differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$ betrachten, ist die Voraussetzung $a < b$ sinnvoll.)

(2) Eine Differentialgleichung 1. Ordnung wird gegeben durch
$$x' = f(t, x).$$
Dabei ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert ist.

(3) Unter einer **Lösung der Differentialgleichung** verstehen wir eine auf einem Intervall I definierte und differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, sodass gilt
$$(t, \varphi(t)) \in D \text{ für alle } t \in I \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ für alle } t \in I.$$
Die Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist **maximal**, wenn sie nicht zu einer Lösung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $I \subsetneq \widetilde{I}$ fortgesetzt werden kann.

(4) Für $(t_0, x_0) \in D$ definiert
$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$
ein sogenanntes **Anfangswertproblem**. Eine Lösung des Anfangswertproblems ist eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, sodass außerdem
$$\varphi(t_0) = x_0$$
gilt.

(5) Ab und zu sind Beispiele oder Hausaufgaben inspiriert durch Staatsexamensaufgaben zur Analysis. Ein Bezug zur Staatsexamensaufgabe vom Frühjahr/Herbst xxxx, Thema Nr. y, Aufgabe Nr. z wird durch Fxxxx/y/z bzw. Hxxxx/y/z abgekürzt. Handelt sich um eine Aufgabe aus dem nichtvertieften Staatsexamen, hängen wir nv an.

1. Die homogene lineare Differentialgleichung $x' = ax$ mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten zunächst die **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**
$$x' = ax$$
mit einer festen reellen Zahl a. Man sieht sofort, dass die Funktion
$$e^{at}$$
die Differentialgleichung löst. Ist $x(t)$ irgendeine Lösung der Differentialgleichung, d.h. $x'(t) = ax(t)$, so betrachten wir
$$y(t) = x(t)e^{-at}, \quad \text{d.h. wir schreiben} \quad x(t) = y(t)e^{at}.$$
Wann ist $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung?
$$x'(t) = ax(t) \iff y'(t)e^{at} + y(t) \cdot ae^{at} = ay(t)e^{at} \iff y'(t)e^{at} = 0 \iff y'(t) = 0.$$

Datei: al_dgl2.tex. Version vom 5.11.2020

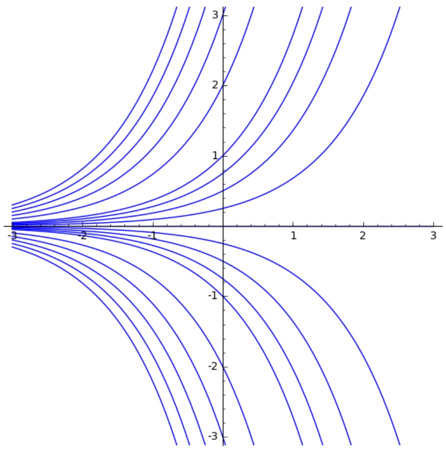
Genau dann löst $x(t) = y(t)e^{at}$ die Differentialgleichung, wenn $y(t) = c$ konstant ist. Es folgt

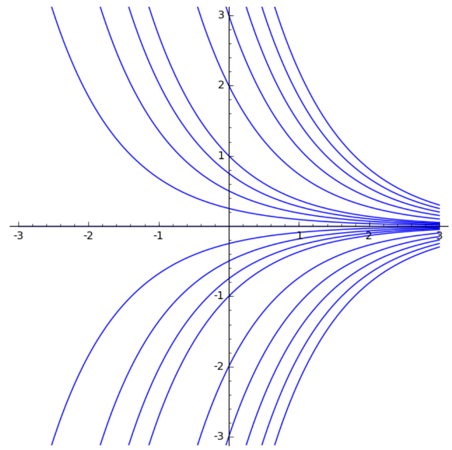
$$x(t) = c\,e^{at}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung $x' = ax$ sind also

$$x(t) = c\,e^{at} \text{ mit einer Konstanten } c.$$

Die folgenden Bilder zeigen Lösungen für $a = 1$ und $a = -1$:





An Hand dieser Differentialgleichung erläutern wir noch eine geometrische Darstellungsmöglichkeit:

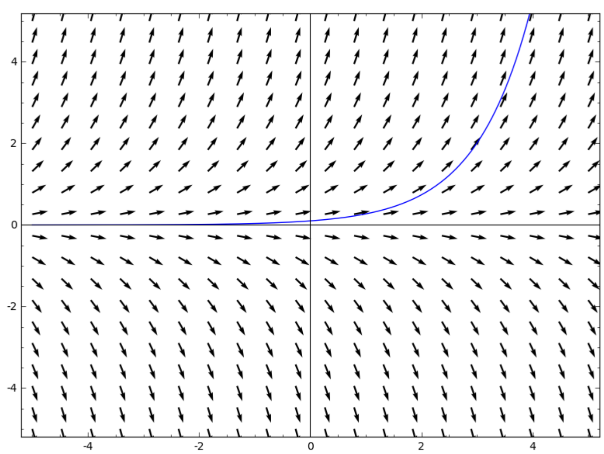
Richtungsfelder: Ist eine Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ gegeben und ist $x(t)$ eine Lösungskurve, die durch den Punkt (t_0, x_0) geht, so ist die Steigung der Kurve dort $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$. Der Tangentialvektor ist dort

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(t_0, x_0) \end{pmatrix} \text{ bzw. normiert } \frac{1}{\sqrt{1 + f(t_0, x_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(t_0, x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir heften nun an den Punkt (t_0, x_0) diesen Vektor an. Tun wir dies für eine Reihe von Punkten, so erhalten wir das **Richtungsfeld** der Differentialgleichung.

Im Fall der Differentialgleichung $x' = ax$ ist die Steigung in einem Punkt (t, x) einfach ax, der zugehörige Richtungsvektor also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ ax \end{pmatrix} \text{ bzw. normiert } \frac{1}{\sqrt{1 + a^2x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ ax \end{pmatrix}.$$



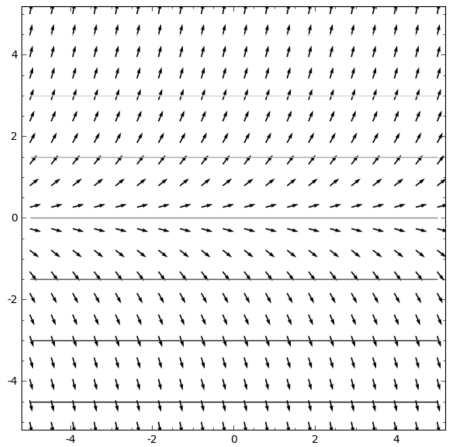
Isoklinen: Zu einer Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ kann man die Niveaulinien der Funktion $f(t, x)$ betrachten, also die Kurven

$$f(t, x) = c = \text{konstant}.$$

Man nennt sie Isoklinen. Alle Punkte einer Isokline haben den gleichen (normierten) Richtungsvektor. Dies kann beim Skizzieren eines Richtungsfelds helfen, wenn man die Isoklinen gut beschreiben kann: Man wählt eine Isokline $f(t,x) = c$ und heftet dann an alle/viele Punkte der Isokline den gleichen Richtungsvektor

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix}.$$

Im Fall der Differentialgleichung $x' = ax$ sind die Isoklinen einfach $ax = c$, also die Parallelen zur t-Achse:



Die Differentialgleichung $x' = ax$ kommt auch bei natürlichen Vorgängen vor. Wir geben zwei Beispiele.

Newtons Abkühlungsgesetz [1]: Ein Körper mit Temperatur $T(t)$ wird in eine Umgebung mit konstant bleibender Temperatur T_U gebracht. Die Änderungsrate der Temperatur

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} \approx \frac{dT(t)}{dt} = T'(t)$$

ist dann nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz proportional zur aktuellen Temperaturdifferenz $T(t) - T_U$, d.h. es gibt eine Konstante k mit

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_U).$$

Dann genügt aber $T(t) - T_U$ der Differentialgleichung

$$(T(t) - T_U)' = -k(T(t) - T_U).$$

Es gibt also eine Konstante c mit $T(t) - T_U = ce^{-kt}$. Hat der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur T_0, so gilt $T_0 - T_U = T(0) - T_U = c$, sodass wir für die Temperatur die Gleichung

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U)e^{-kt}$$

erhalten.

Beispiel: Eine Flasche Sekt wurde bei Raumtemperatur (20 Grad) aufbewahrt. Durch Legen in ein mit Eiswürfeln gekühltes Wasserbad (0 Grad) soll die Sektflasche auf 7 Grad abgekühlt werden. Wie lange braucht dies?
Wir messen die Zeit in Minuten und die Temperatur in Grad. Dann ist also $T_U = 0$ und $T(0) = 20$. Obige Formel liefert

$$T(t) = 20e^{-kt}.$$

Die Größe k kennen wir noch nicht. Nun messen wir nochmals: Nach 10 Minuten ist die Temperatur bereits auf 12 Grad gesunken, d.h. $T(10) = 12$. Damit erhalten wir die Gleichung

$$12 = T(10) = 20e^{-k\cdot 10},$$

[1] D. Meschede. Gerthsen Physik. 24., überarbeitete Auflage. Springer, 2010. S.274

also

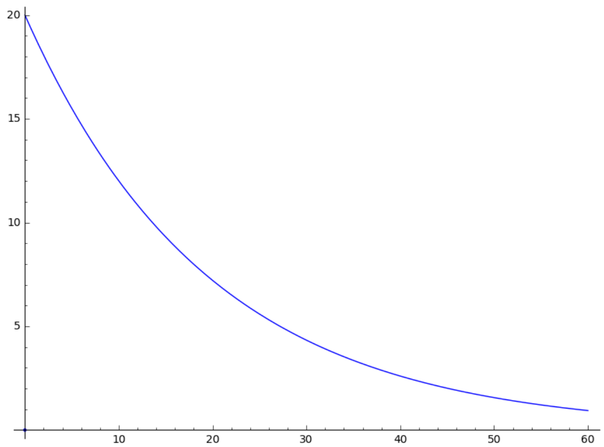
$$e^{10k} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, \qquad \text{also} \qquad 10k = \ln\frac{5}{3},$$

und damit

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{5}{3} \approx 0.051.$$

Wir erhalten also

$$T(t) = 20e^{-0.051\,t}.$$



Nun gilt:

$$T(t) = 7 \iff 20e^{-0.051t} = 7 \iff \frac{20}{7} = e^{0.051t} \iff \ln\frac{20}{7} = 0.051t \iff$$
$$\iff t = \frac{\ln\frac{20}{7}}{0.051} \approx 20.58.$$

Nach 20 bis 21 Minuten sollte also die Sektflasche auf 7 Grad abgekühlt sein.

Radioaktiver Zerfall: Sei $N(t)$ die Anzahl der Isotope eines Elements zum Zeitpunkt t. (Wir betrachten $N(t)$ der Einfachkeit halber als kontinuierliche Größe.) Dann nimmt die Anzahl $N(t)$ proportional zur noch vorhandenen Anzahl ab, d.h. es gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{dN}{dt} = -k \cdot N(t) \text{ mit einer Konstanten } k > 0.$$

$N(t)$ genügt also der Differentialgleichung $N'(t) = -k\,N(t)$. Es ist also

$$N(t) = c\,e^{-kt} \text{ mit einer Zahl } c.$$

Wegen $c = N(0)$ können wir auch schreiben

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

wenn N_0 die Anzahl der Isotope zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt. Es gilt

$$\frac{1}{2}N(t) = \frac{1}{2}N_0 e^{-kt} = N_0 e^{-kt} \cdot e^{-\ln 2} = N_0 e^{-k(t+\frac{\ln 2}{k})} = N(t + \frac{\ln 2}{k}).$$

Nach der Zeit $\frac{\ln 2}{k}$ halbiert sich $N(t)$ immer. Man nennt dies die **Halbwertszeit** $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k},$$

und damit

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Mit der Halbwertszeit können wir also auch schreiben

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}.$$

2. Die lineare Differentialgleichung $x' = a(t)x + b(t)$

Wir betrachten zunächst die allgemeine **homogene lineare Differentialgleichung**

$$x' = a(t)x$$

mit einer auf einem Intervall I definierten stetigen Funktion $a : I \to \mathbb{R}$. Durch etwas Probieren kommt man auf folgende Lösungsidee: Ist $A : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von a, d.h.

$$A'(t) = a(t),$$

so ist

$$e^{A(t)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung, denn

$$\left(e^{A(t)}\right)' = e^{A(t)} \cdot A'(t) = e^{A(t)} \cdot a(t) = a(t) \cdot e^{A(t)}.$$

Die Lösung ist ebenfalls auf I definiert. Sei $x(t)$ irgendeine Lösung der Differentialgleichung, d.h. $x'(t) = a(t)x(t)$. Wir betrachten

$$y(t) = x(t)e^{-A(t)}, \quad \text{also} \quad x(t) = y(t)e^{A(t)},$$

und bilden

$$y'(t) = x'(t)e^{-A(t)} + x(t)(-A'(t))e^{-A(t)} = a(t)x(t)e^{-A(t)} - x(t)a(t)e^{-A(t)} = 0,$$

also ist $y(t) = c$ konstant. Wir erhalten daher

$$x(t) = ce^{A(t)} \text{ mit einer Konstanten } c.$$

Wir fassen dies kurz zusammen:

Satz. *Ist $a : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und $A : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von a, d.h. $A'(t) = a(t)$, so sind die Lösungen der* **homogenen linearen Differentialgleichung**

$$x' = a(t) \cdot x$$

die Funktionen

$$x(t) = ce^{A(t)} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

(Man spricht dann auch von der **allgemeinen Lösung** *der Differentialgleichung.) Die Lösungen bilden also einen 1-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Lösungen sind auf ganz I definiert.*

Bemerkung: Ist $a : I \to \mathbb{R}$ stetig und $t_0 \in I$, so ist

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du$$

eine Stammfunktion von a.

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = tx.$$

Wir brauchen eine Stammfunktion von $a(t) = t$; wir wählen $A(t) = \frac{1}{2}t^2$. Daher ist

$$x(t) = c\, e^{\frac{1}{2}t^2} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(2) (H2016/3/6nv) Gesucht ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \ln(t) \cdot x, \quad x(1) = 1.$$

Die Funktion $a(t) = \ln(t)$ ist auf $I = (0, \infty)$ definiert. Eine Stammfunktion von $\ln(t)$ ist $t \ln t - t$, sodass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch

$$x(t) = c\, e^{t \ln(t) - t} = c\, t^t e^{-t} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

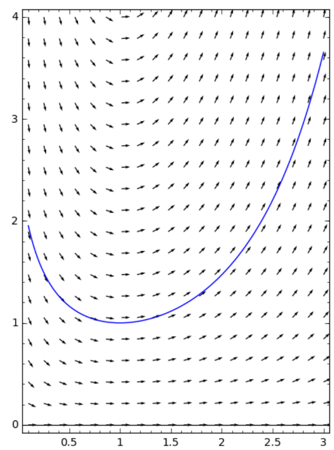
gegeben ist. Für diese Lösung gilt

$$x(1) = c\, e^{\ln(1) - 1} = \frac{c}{e}.$$

Daher erhalten wir eine Lösung des Anfangswertproblems für $c = e$. Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = e \cdot e^{t \ln(t) - t} = e^{t \ln(t) - t + 1}.$$

(Die Lösung ist insbesondere eindeutig bestimmt und auf ganz $(0, \infty)$ definiert.)



(3) (H2018/2/4nv) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = x \cdot \left(1 + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right),$$

wobei wir den Definitionsbereich auf $I = (0, \pi)$ einschränken, damit keine Nullstellen im Nenner vorkommen. Wir brauchen eine Stammfunktion von

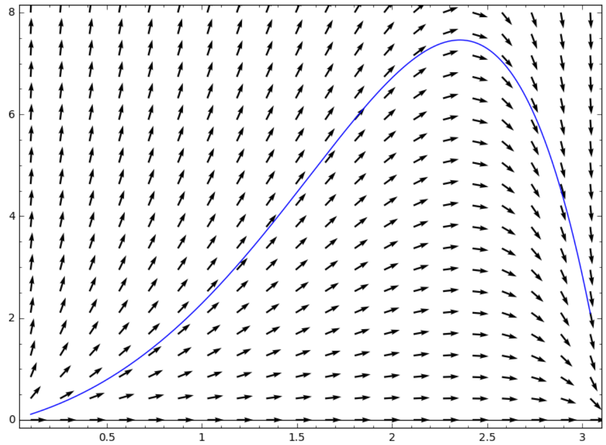
$$a(t) = 1 + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

Wegen $\sin(t) > 0$ für $t \in (0, \pi)$ und

$$1 + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = (t + \ln(\sin(t)))'$$

können wir $t + \ln(\sin(t))$ wählen. Daher ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = c\, e^{t + \ln(\sin(t))} = c\, \sin(t)\, e^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$



(Da wir die Differentialgleichung nur für $t \in (0, \pi)$ betrachten, ist die Lösung auch nur in diesem Intervall sinnvoll definiert.)

(4) (H2012/2/5/nv) Bestimmt werden soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

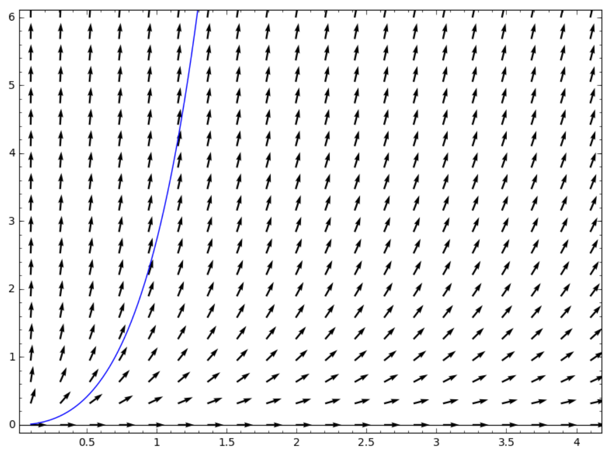
$$x' = \left(1 + \frac{2}{t}\right) x$$

für $t > 0$. Wir brauchen eine Stammfunktion von

$$a(t) = 1 + \frac{2}{t} = (t + 2\ln(t))' = \big(t + \ln(t^2)\big)'$$

und wählen $A(t) = t + \ln(t^2)$. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = c\, e^{t+\ln(t^2)} = c\, t^2\, e^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$



Wir betrachten nun die allgemeine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x' = a(t) \cdot x + b(t).$$

Hier gilt folgender Struktursatz:

Satz. *Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t),$$

wobei a und b stetige Funktionen sind, die auf einem Intervall I definiert sind. Ist $x_h(t)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$x' = a(t) \cdot x,$$

also

$$x_h(t) = c\,e^{A(t)} \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } A'(t) = a(t),$$

ist $x_s(t)$ *eine* **spezielle** *(oder auch* **partikuläre***)* **Lösung** *der inhomogenen Gleichung, also*

$$x_s'(t) = a(t) \cdot x_s(t) + b(t),$$

so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = c\,e^{A(t)} + x_s(t) \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Zunächst gilt für $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$ natürlich

$$x'(t) = (x_h(t) + x_s(t))' = x_h'(t) + x_s'(t) = a(t)x_h(t) + a(t)x_s(t) + b(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

sodass $x(t) = x_h(t) + x_s(t)$ die Differentialgleichung löst. Ist nun umgekehrt $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so folgt aus

$$(x(t) - x_s(t))' = a(t)x(t) + b(t) - a(t)x_s(t) - b(t) = a(t)(x(t) - x_s(t)),$$

dass $x(t) - x_s(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, d.h. dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $x(t) - x_s(t) = ce^{A(t)}$. Dann ist

$$x(t) = ce^{A(t)} + x_s(t),$$

was wir zeigen wollten. ■

Der Struktursatz kann auch praktisch helfen, wenn man eine spezielle Lösung der Differentialgleichung erraten kann.

Beispiel: (F2017/3/5nv) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \frac{x}{t} + t, \quad x(1) = 1$$

soll bestimmt werden, wobei das Definitionsintervall $(0, \infty)$ sein soll. Die homogene Gleichung

$$x' = \frac{x}{t}$$

hat offensichtlich die Lösung $x(t) = t$, sodass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h(t) = ct \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

ist. Durch etwas Probieren findet man, dass

$$x_s(t) = t^2$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Daher ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = ct + t^2 \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangswertbedingung ergibt

$$x(1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c + 1 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 0,$$

sodass das Anfangswertproblem durch die Funktion

$$x(t) = t^2$$

gelöst wird.

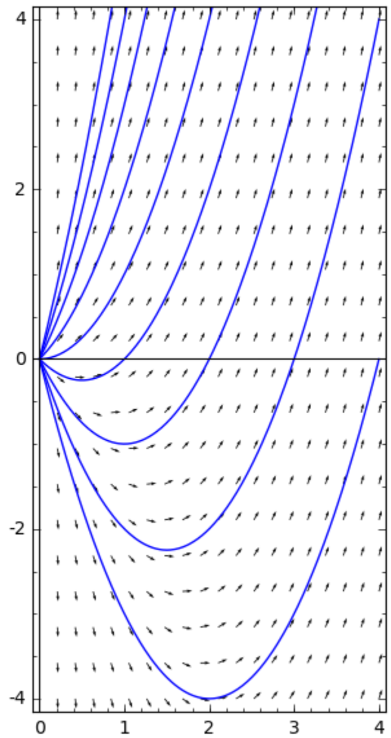
Wir zeigen jetzt einen Weg, wie man die inhomogene Differentialgleichung $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ allgemein lösen kann. Dieser Weg ist unter dem Namen **Variation der Konstanten** bekannt.

Variation der Konstanten: Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = a(t) \cdot x + b(t)$, wobei a und b auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen sind.

- Zunächst bestimmt man die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung
$$x' = a(t) \cdot x,$$
also
$$x_h(t) = c\, e^{A(t)} \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } A'(t) = a(t).$$
Sei $x_1(t)$ eine von 0 verschiedene Lösung der homogenen Gleichung, also
$$x_1(t) = c_1 e^{A(t)} \text{ mit einer reellen Zahl } c_1 \neq 0.$$
Dann ist also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
$$x_h(t) = c\, x_1(t) \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$
- Jede Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als
$$x(t) = c(t)\, x_1(t)$$
mit einer Funktion $c : I \to \mathbb{R}$, da $x_1(t) = c_1 e^{A(t)}$ nie 0 wird. Mit diesem Ansatz (**Variation der Konstanten**) untersuchen wir nun, wann $x(t)$ die Differentialgleichung löst:
$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \iff c'(t)x_1(t) + c(t)x_1'(t) = a(t)c(t)x_1(t) + b(t) \iff$$
$$\iff c'(t)x_1(t) = b(t) \iff c'(t) = \frac{b(t)}{x_1(t)}.$$
Genau dann haben wir also eine Lösung der Differentialgleichung, wenn $c(t)$ eine (beliebige) Stammfunktion der stetigen Funktion $\frac{b(t)}{x_1(t)}$ ist. Ist $\widetilde{c}(t)$ eine festgewählte Stammfunktion, so kann man weiter umformen:
$$c'(t) = \frac{b(t)}{x_1(t)} \iff c'(t) = \widetilde{c}'(t) \iff c(t) = \widetilde{c}(t) + C \text{ mit einer Zahl } C \in \mathbb{R}.$$
Die Lösungen der Differentialgleichung $x' = a(t)x + b(t)$ sind also
$$x(t) = (\widetilde{c}(t) + C)x_1(t) \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$
- Zusammenfassung:
  - Man bestimmt zunächst eine von 0 verschiedene Lösung $x_1(t)$ der homogenen Differentialgleichung $x' = a(t)x$.
  - Nun macht man den Ansatz $x(t) = c(t)x_1(t)$ und untersucht, wann $x(t)$ die Differentialgleichung $x' = a(t)x + b(t)$ löst.

Beispiele:

(1) (F2017/3/5nv) Wir betrachten nochmals die Differentialgleichung
$$x' = \frac{x}{t} + t.$$
Eine Lösung der homogenen Gleichung $x' = \frac{1}{t}x$ ist offensichtlich
$$x_1(t) = t.$$
Wir setzen also an:
$$x(t) = c(t)t.$$
Wann erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung?
$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + t \iff c'(t)t + c(t) = \frac{c(t)t}{t} + t \iff c'(t)t = t \iff$$
$$\iff c'(t) = 1 \iff c(t) = t + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also
$$x(t) = (t + C)t = t^2 + Ct \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$



(2) (F2010/1/5nv) Bestimmt werden soll die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$x' = 2tx - 6t.$$

Für die homogene Gleichung $x' = 2tx$ wählen wir $A(t) = t^2$ als Stammfunktion und erhalten daher

$$x_h(t) = ce^{t^2} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

also allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Nun machen wir den Ansatz

$$x(t) = c(t)e^{t^2}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} x'(t) = 2tx(t) - 6t \quad &\iff \quad c'(t)e^{t^2} + c(t) \cdot 2te^{t^2} = 2t \cdot c(t)e^{t^2} - 6t \quad \iff \\ &\iff \quad c'(t) = -6te^{-t^2} \quad \iff \\ &\iff \quad c(t) = 3e^{-t^2} + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$x(t) = (3e^{-t^2} + C)e^{t^2} = Ce^{t^2} + 3 \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (Insbesondere ist 3 eine spezielle Lösung der Differentialgleichung, die man eventuell auch hätte erraten können.)

(3) (F2009/3/5nv) Wir wollen die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x' = \frac{x-1}{t^2+1}$$

bestimmen. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$x' = \frac{1}{t^2+1}\,x - \frac{1}{t^2+1},$$

so sieht man besser, dass es sich tatsächlich um eine lineare Differentialgleichung handelt. Da $\arctan(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2+1}$ ist, ist

$$x_h(t) = ce^{\arctan(t)} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$x(t) = c(t)e^{\arctan(t)}.$$

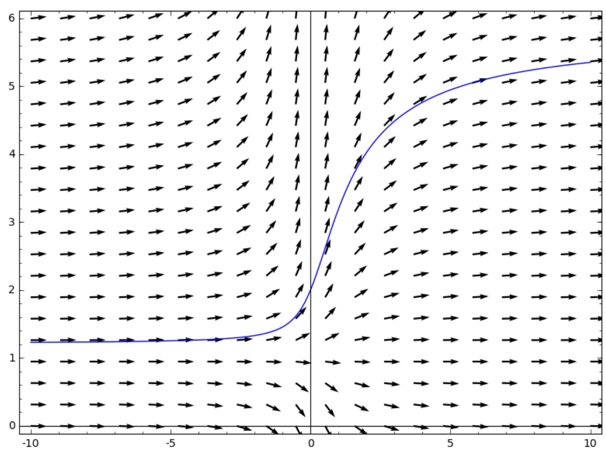
Es gilt:

$$\begin{aligned}
& x'(t) = \frac{1}{t^2+1}x(t) - \frac{1}{t^2+1} \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & c'(t)e^{\arctan(t)} + c(t)\cdot e^{\arctan(t)} \cdot \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}\cdot c(t)e^{\arctan(t)} - \frac{1}{t^2+1} \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & c'(t)e^{\arctan(t)} = -\frac{1}{t^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(t) = -\frac{1}{t^2+1}e^{-\arctan(t)} \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & c(t) = e^{-\arctan(t)} + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$x(t) = \left(e^{-\arctan(t)} + C\right)e^{\arctan(t)} = Ce^{\arctan(t)} + 1.$$

(Auch hier hätte man sofort sehen können, dass 1 eine Lösung der Differentialgleichung ist.)



(4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = 1 + t - x.$$

Die homogene Gleichung $x' = -x$ hat offensichtlich die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = ce^{-t} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$x(t) = c(t)e^{-t}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
x'(t) = 1 + t - x(t) \quad & \Longleftrightarrow \quad c'(t)e^{-t} + c(t)(-e^{-t}) = 1 + t - c(t)e^{-t} \quad \Longleftrightarrow \\
& \Longleftrightarrow \quad c'(t)e^{-t} = 1 + t \quad \Longleftrightarrow \quad c'(t) = (1+t)e^{t} \quad \Longleftrightarrow \\
& \Longleftrightarrow \quad c(t) = te^{t} + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

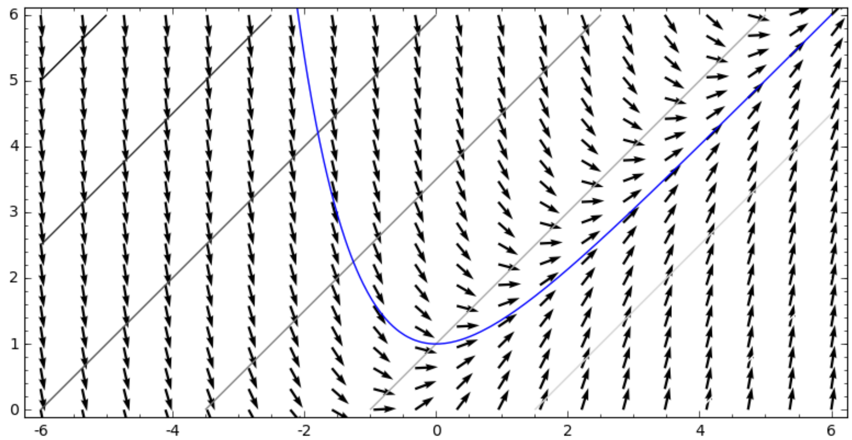
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$x(t) = (te^t + C)e^{-t} = t + Ce^{-t} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

(Auch die spezielle Lösung $x_s(t) = t$ hätte man eventuell erraten können.) Die Isoklinen ergeben sich als Lösungen von

$$1 + t - x = m, \qquad \text{also} \qquad x = t + 1 - m$$

für $m \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um Parallelen zur Winkelhalbierenden. Auf diesen Parallelen zur Winkelhalbierenden ist die Steigung x' jeweils gleich, nämlich m.



Bemerkung: Zur Lösung der Differentialgleichung $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ hatten wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmt:

$$x_h(t) = c\, e^{A(t)} \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } A'(t) = a(t).$$

Zum Finden der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung können wir den Ansatz $x(t) = c(t)e^{A(t)}$ machen, der zur Gleichung

$$c'(x) = b(t)e^{-A(t)}$$

führt. Ist t_0 im Definitionsbereich von $a(t)$ und $b(t)$, so ist

$$\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du$$

eine Stammfunktion von $b(t)e^{-A(t)}$, sodass die letzte Gleichung äquivalent zu

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$x(t) = c(t)e^{A(t)} = \left(\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du + C \right) e^{A(t)} = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz. *Seien a und b auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen. Sei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$ und $t_0 \in I$. Dann ist*

$$x(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)} du \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x' = a(t)x + b(t)$. Insbesondere ist jede Lösung auch auf dem Intervall I definiert. Jedes Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

Beispiel: Zwar haben wir die Differentialgleichung

$$x' = \frac{x}{t} + t$$

oben schon gelöst, wir wollen aber nochmals die Formel des Satzes anwenden. Als Stammfunktion von $a(t) = \frac{1}{t}$ wählen wir $A(t) = \ln(t)$, außerdem $t_0 = 1$ und $b(t) = t$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= C\,e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{0_0}^{x} b(u)e^{-A(u)}du = C\,e^{\ln(t)} + e^{\ln(t)} \int_1^t ue^{-\ln(u)}du = \\ &= C\,t + t\int_1^t u \cdot \frac{1}{u}dt = c\,t + t\int_1^t du = c\,t + t(t-1) = (c-1)\,t + t^2. \end{aligned}$$

3. Die autonome Differentialgleichung $x' = h(x)$

Eine Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ heißt **autonom**, wenn die rechte Seite $f(t,x)$ nicht von t abhängt, wenn man also $f(t,x) = h(x)$ schreiben kann.

Es gibt einen Ansatz, der zunächst mathematisch nicht sauber begründet wird, der aber prägnant und einfach zu merken ist:

Ansatz zur Lösung eines Anfangswertproblems $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$: Dabei wird die Funktion $h(x)$ als stetig in einer Umgebung von $x_0 =$ vorausgesetzt.

(1) **Fall $h(x_0) = 0$:** Dann ist
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = x_0$$
eine Lösung des Anfangswertproblems.

(2) **Fall $h(x_0) \neq 0$:**
- Schreibe $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$ als
$$\frac{dx}{dt} = h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$
- „Trenne die Variablen“:
$$\frac{dx}{h(x)} = dt, \quad x(t_0) = x_0.$$
- Integriere:
$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} du.$$
- Löse die Gleichung nach $x = x(t)$ auf.
- Überprüfe, ob $x(t)$ das Anfangswertproblem löst.

Eine präzisere mathematische Darstellung folgt im nächsten Satz.

Beispiel: Wir wollen das Anfangswertproblem
$$x' = \frac{1}{x}, \quad x(0) = -1$$
lösen. Wir schreiben
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}, \quad x(0) = -1$$
beziehungsweise
$$xdx = dt, \quad x(0) = -1$$
und integrieren
$$\int_{-1}^{x} ydy = \int_0^t du,$$
was
$$\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=-1}^{x} = t, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = t,$$
und damit
$$x^2 = 2t + 1, \quad \text{also} \quad x = \pm\sqrt{2t+1}$$
liefert. Wegen $x(0) = -1$ brauchen wir das negative Vorzeichen:
$$x = -\sqrt{2t+1}.$$

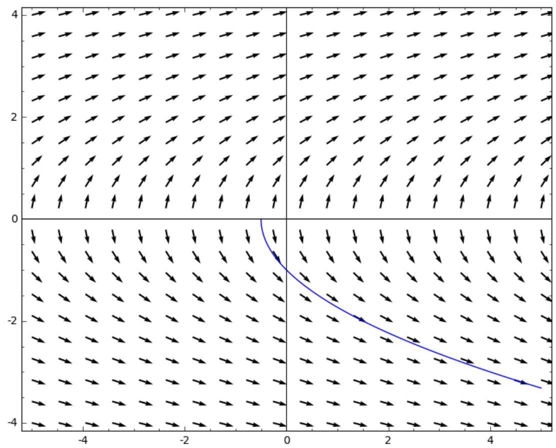
Wir schreiben die Lösung jetzt als $x = \varphi(t)$:

$$\varphi(t) = -\sqrt{2t+1}.$$

Wo ist $\varphi(t)$ definiert? Der Ausdruck $-\sqrt{2t+1}$ ist nur für $t \geq -\frac{1}{2}$ definiert. Im Fall $t = -\frac{1}{2}$ würde $\varphi(-\frac{1}{2}) = 0$ folgen, aber für $x = 0$ ist die Differentialgleichung nicht definiert. Daher betrachten wir

$$\varphi : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = -\sqrt{2t+1}.$$

Man überprüft nun, dass φ tatsächlich das Anfangswertproblem löst. (φ ist eine maximale Lösung des Anfangswertproblems, da der Definitionsbereich nicht vergrößert werden kann.)



Wir beginnen mit zwei Beispielen.

Beispiel: Wir suchen nach einer Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = e^x, \quad x(0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\frac{dx}{dt} = e^x, \quad x(0) = 0$$

„trennen die Variablen“

$$e^{-x}dx = dt, \quad x(0) = 0$$

und integrieren:

$$\int_0^x e^{-y}dy = \int_0^t du.$$

Wir erhalten

$$\left[-e^{-y}\right]_{y=0}^x = t, \quad \text{also} \quad 1 - e^{-x} = t,$$

und damit

$$e^{-x} = 1 - t.$$

Durch Logarithmieren ergibt sich $-x = \ln(1-t)$ bzw.

$$x = \ln\frac{1}{1-t}.$$

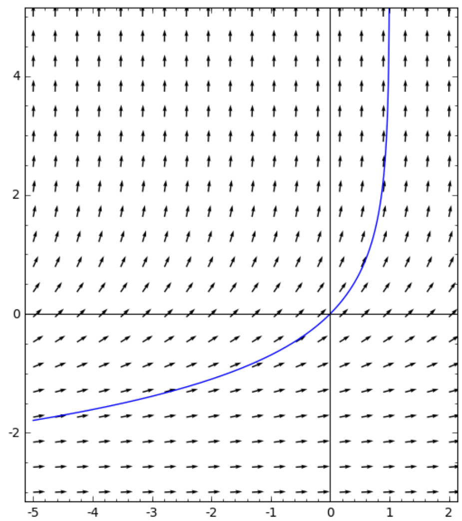
Damit die Lösung definiert ist, muss $1 - t > 0$, also $t < 1$ gelten. Wir wählen daher

$$\varphi : (-\infty, 1) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \ln\frac{1}{1-t}.$$

(Sicherheitshalber kann man nun nachrechnen, dass φ das Anfangswertproblem löst.) Es gilt

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow 1} \varphi(t) = \infty.$$

Dies zeigt, dass die Lösung φ nicht auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden kann, φ ist also eine maximale Lösung des Anfangswertproblems. (Obwohl die Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert ist, ist die Lösung nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.)



Beispiel: Wir suchen nach einer Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x^2 - 1, \quad x(0) = 0.$$

Wir schreiben

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 1, \quad x(0) = 0$$

und „trennen die Variablen“:

$$\frac{dx}{x^2 - 1} = dt, \quad x(0) = 0.$$

Integration liefert

$$\int_0^x \frac{dy}{y^2 - 1} = \int_0^t du = t.$$

Mit Partialbruchzerlegung ergibt sich, wenn wir beachten, dass unsere Lösung x wegen $x(0) = 0$ zunächst nahe 0 definiert sein muss:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dy}{y^2 - 1} &= \int_0^x \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y-1} \right) dy = \\
&= \int_0^x \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y} \right) dy = \\
&= \left[\frac{1}{2} \ln(1-y) - \frac{1}{2} \ln(1+y) \right]_{y=0}^{x} = \\
&= \frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1+x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = t.$$

Diese Gleichung wollen wir nach x auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} = t \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln \frac{1-x}{1+x} = 2t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - x = e^{2t}(1+x) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - e^{2t} = (1 + e^{2t})x \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}.
\end{aligned}$$

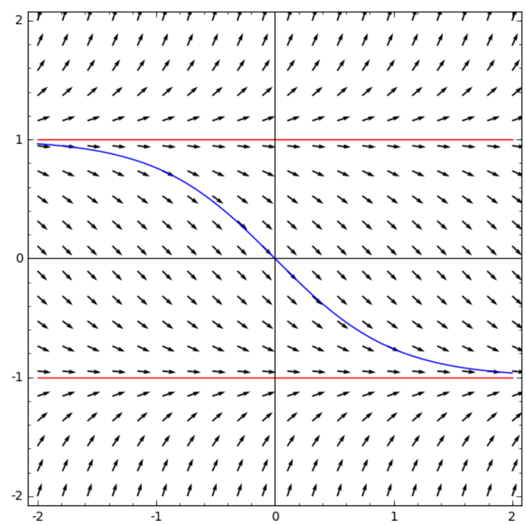
Die rechte Seite ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Daher definieren wir

$$\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

Man kann nun sicherheitshalber noch nachrechnen, dass φ tatsächlich das Anfangswertproblem löst. Da sich die Differentialgleichung auch in der Form $x' = (x-1)(x+1)$ schreiben lässt, sieht man, dass auch die konstanten Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_1(t) = 1 \quad \text{ und } \quad \varphi_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_{-1}(t) = -1$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.



Bemerkung: Wir haben die Lösungen der Differentialgleichung $x' = h(x)$ aus der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} du$$

gewohnen. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine (stetig differenzierbare) Funktion mit

$$h(\varphi(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in I \quad \text{ und } \quad \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} du,$$

so erhält man durch Differenzieren nach t mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{1}{h(\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = 1, \quad \text{ also } \quad \varphi'(t) = h(\varphi(t)).$$

Die Funktion φ löst also die Differentialgleichung $x' = h(x)$.

Der folgende Satz betrachtet die Situation etwas theoretischer. Zuvor erinnern wir noch an ein Ergebnis aus der Analysis I:

Lemma. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ (bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$). Sei $J = f(I)$ das Bildintervall. Dann ist $f : I \to J$ bijektiv, die Umkehrabbildung $f^{-1} : J \to I$ ist differenzierbar mit*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Nun kommen wir zum versprochenen Satz:

SATZ. *Sei h eine auf einem offenen Intervall I definierte stetige Funktion und $x_0 \in I$, außerdem $t_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$x' = h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

und unterscheiden zwei Fälle:

(1) **Fall $h(x_0) = 0$:** *Dann ist die konstante Funktion*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = x_0$$

eine Lösung des Anfangswertproblems. (Dies muss nicht die einzige Lösung des Anfangswertproblems sein.)

(2) **Fall $h(x_0) \neq 0$:**

- *Sei (x_-, x_+) (mit $x_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $x_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) ein maximales offenes Intervall im Definitionsbereich von h mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ und $x_0 \in (x_-, x_+)$.*
- *Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ auf (x_-, x_+) mit $H(x_0) = t_0$, also*

$$H : (x_-, x_+) \to \mathbb{R} \text{ mit } H'(x) = \frac{1}{h(x)} \text{ und } H(x_0) = t_0.$$

  Natürlich kann man H auch als Integral schreiben:

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} + t_0.$$

- *H ist injektiv und das Bild $H((x_-, x_+))$ ein offenes Intervall:*

$$H((x_-, x_+)) = (t_-, t_+) \text{ mit } t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, t_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

  Genauer:

  - **Fall $h(x_0) > 0$:** *Dann ist $h(x) > 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ und H streng monoton steigend. t_- und t_+ lassen sich so berechnen:*

$$t_- = \lim_{x \downarrow x_-} H(x) \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x \uparrow x_+} H(x).$$

  - **Fall $h(x_0) < 0$:** *Dann ist $h(x) < 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ und H streng monoton fallend. t_- und t_+ lassen sich so berechnen:*

$$t_- = \lim_{x \uparrow x_+} H(x) \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x \downarrow x_-} H(x).$$

  Insbesondere ist dann

$$H : (x_-, x_+) \to (t_-, t_+)$$

  bijektiv.

- *Sei $\varphi = H^{-1}$ die Umkehrabbildung, d.h.*

$$\varphi : (t_-, t_+) \to (x_-, x_+) \text{ mit } H(\varphi(t)) = t.$$

  Die Funktion φ löst das Anfangswertproblem, d.h.

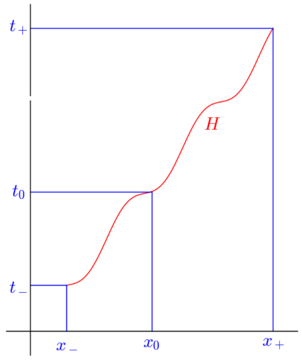
$$\varphi'(t) = h(\varphi(t)) \text{ für alle } t \in (t_-, t_+) \text{ und } \varphi(t_0) = x_0.$$

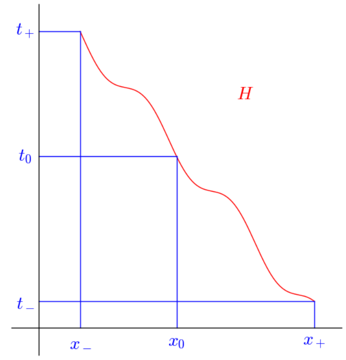
  - *Im Fall $h(x_0) > 0$ gilt*

$$\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t) = x_- \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = x_+.$$

  - *Im Fall $h(x_0) < 0$ gilt*

$$\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t) = x_+ \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = x_-.$$





- *Es gelten folgende Eindeutigkeitsaussagen:*
  (a) *Für die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems gilt folgende Aussage: Ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so gilt*
  $$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in J \cap (t_-, t_+).$$
  Insbesondere ist das Anfangswertproblem (im Fall $h(x_0) \neq 0$) **lokal eindeutig lösbar**.
  (b) *Ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit $h(\psi(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$, so gilt*
  $$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in J \text{ und } J \subseteq (t_-, t_+).$$

Beweis:

(1) Ist $h(x_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $\varphi(t) = x_0$ wegen $\varphi'(t) = 0$ trivialerweise eine Lösung des Anfangswertproblems.

(2) Wir betrachten den Fall $h(x_0) > 0$. Da h stetig ist, gilt $h(x) > 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$. Dann ist natürlich H wegen $H'(x) = \frac{1}{h(x)} > 0$ streng monoton steigend. Insbesondere existieren die Grenzwerte
$$t_- = \lim_{x \downarrow x_-} H(x) \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x \uparrow x_+} H(x)$$
in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ bzw. $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann ist
$$H : (x_-, x_+) \to (t_-, t_+)$$
bijektiv, die Umkehrfunktion
$$\varphi = H^{-1} : (t_-, t_+) \to (x_-, x_+)$$
also wohldefiniert. Klar ist auch
$$\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t) = x_- \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = x_+.$$
Wegen $H'(x) = h(x) > 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ ist die Umkehrfunktion H^{-1} nach einem Satz aus der Analysis I auch differenzierbar. Aus $H(\varphi(t)) = t$ folgt durch Differenzieren
$$H'(\varphi(t))\varphi'(t) = 1, \quad \text{also} \quad \frac{1}{h(\varphi(t))}\varphi'(t) = 1,$$
und damit
$$\varphi'(t) = h(\varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_+).$$
Aus $H(x_0) = t_0$ folgt $\varphi(t_0) = x_0$. Also ist φ eine Lösung des Anfangswertproblems.

(2') Der Fall $h(x_0) < 0$ geht ganz analog.

(3) Wir wollen nun die Eindeutigkeitsaussagen beweisen.
  (a) Sei also $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, d.h.
  $$\psi'(t) = h(\psi(t)) \text{ für alle } t \in J \quad \text{und} \quad \psi(t_0) = x_0.$$
  Für die Behauptung können wir annehmen, dass $J \subseteq (t_-, t_+)$ gilt.

- Wir definieren Teilmengen des Intervalls J:
$$U_1 = \{t \in J : \psi(t) = \varphi(t)\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{t \in J : \psi(t) \neq \varphi(t)\}.$$
Trivialerweise gilt
$$U_1 \cup U_2 = J \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$
- Wir wollen zeigen, dass U_1 eine offene Teilmenge von J ist. Sei also $t_1 \in U_1$. Dann gilt $\psi(t_1) = \varphi(t_1) \in (x_-, x_+)$. Da ψ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit
$$\psi(t) \in (x_-, x_+) \text{ für alle } t \in J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Für $t \in J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ ist $H(\psi(t))$ definiert und es gilt
$$(H(\psi(t)))' = H'(\psi(t))\psi'(t) = \frac{1}{h(\psi(t)}h(\psi(t)) = 1.$$
Also gibt es eine Konstante c mit
$$H(\psi(t)) = t + c \text{ für alle } t \in J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Für $t = t_1$ folgt
$$t_1 + c = H(\psi(t_1)) = H(\varphi(t_1)) = t_1, \quad \text{also} \quad c = 0,$$
und damit
$$H(\psi(t)) = t \text{ für alle } t \in J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Wegen der Injektivität von H folgt dann aus $H(\varphi(t)) = t$ sofort
$$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Es folgt
$$J \cap (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq U_1.$$
Dies beweist, dass U_1 eine offene Teilmenge von J ist.
- Da ψ und φ stetig sind, ist $U_2 = \{t \in J : \psi(t) \neq \varphi(t)\}$ natürlich eine offene Teilmenge von J.
- Nun lässt sich aber ein Intervall J nicht in disjunkte, nichtleere offene Mengen U_1, U_2 zerlegen. Eine der Mengen U_1, U_2 muss also leer sein. Wegen $t_0 \in U_1$ muss also $U_2 = \emptyset$ gelten, und damit $U_1 = J$, also
$$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in J,$$
was wir zeigen wollten.

(b) Sei nun $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit $h(\psi(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$.
$$x' = h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$
Wegen $\psi(t_0) = x_0$ und der angenommenen Maximalität von (x_-, x_+) gilt dann
$$\psi(t) \in (x_-, x_+) \text{ für alle } t \in J.$$
Also ist $H \circ \psi$ definiert. Es gilt
$$(H \circ \psi)'(t) = H'(\psi(t))\psi'(t) = \frac{1}{h(\psi(t))}h(\psi(t)) = 1 \text{ für } t \in J.$$
Also gibt es eine Konstante c mit
$$H(\psi(t)) = t + c \text{ für } t \in J.$$
Aus $H(x_0) = t_0$ folgt dann $c = 0$ und damit
$$H(\psi(t)) = t \text{ für alle } t \in J.$$
Diese Gleichung zeigt, dass J im Bild von H liegt, d.h.
$$J \subseteq (t_-, t_+).$$
Weiter folgt
$$\psi(t) = H^{-1}(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in J,$$
und damit die Behauptung. ■

Beispiele:

(1) Wir betrachten nochmals das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x(0) = -1.$$

Mit den Bezeichnungen des Satzes wählen wir

$$h : I \to \mathbb{R} \text{ mit } I = (-\infty, 0) \text{ und } h(x) = \frac{1}{x}, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = -1.$$

Natürlich ist $(x_-, x_+) = (-\infty, 0) = I$ ein maximales offenes Intervall im Definitionsbereich von h, in dem h von 0 verschieden ist. Wir definieren

$$H : (-\infty, 0) \to \mathbb{R} \text{ mit } H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} + t_0 = \int_{-1}^{x} y dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=-1}^{x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Es ist

$$t_- = \lim_{x\uparrow 0} H(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{ und } \quad t_+ = \lim_{x\downarrow -\infty} H(x) = \infty,$$

also wegen $H((x_,x_+)) = (t_-, t_+)$

$$H((-\infty, 0)) = (-\frac{1}{2}, \infty).$$

Die Umkehrfunktion

$$\varphi = H^{-1} : (-\frac{1}{2}, \infty) \to (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$$

löst das Anfangswertproblem. Wir berechnen sie aus der Beziehung $H(\varphi(t)) = t$:

$$\begin{aligned} H(\varphi(t)) = t \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\varphi(t)^2 - \frac{1}{2} = t \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(t)^2 = 2t + 1 \overset{\varphi(t)\in(-\infty,0)}{\Longleftrightarrow} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = -\sqrt{2t+1}. \end{aligned}$$

$$\varphi : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = -\sqrt{2t+1}$$

löst das das Anfangswertproblem. Auf dem Intervall $(-\frac{1}{2}, \infty)$ ist die Lösung auch eindeutig bestimmt. Da die Differentialgleichung für $x = 0$ nicht definiert ist, kann die Lösung φ wegen $\lim_{t\downarrow -\frac{1}{2}} \varphi(t) = 0$ auch nicht auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden, d.h. die Lösung ist maximal.

(2) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = x^3, \quad x(0) = 1.$$

Mit den Bezeichnungen des Satzes ist $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $h(x) = x^3$. Das maximale offene Intervall, in dem h von 0 verschieden ist und 1 liegt, ist $(x_-, x_+) = (0, \infty)$. Auf diesem Intervall definieren wir die Funktion

$$H : (0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{1}^{x} \frac{dy}{y^3} = \left[-\frac{1}{2y^2}\right]_{y=1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$

Das Bild von H ist $H((0, \infty)) = (t_-, t_+)$ mit

$$t_- = \lim_{x\downarrow x_-} H(x) = \lim_{x\downarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$$

und

$$t_+ = \lim_{x\uparrow x_+} H(x) = \lim_{x\uparrow\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$H : (0, \infty) \to (-\infty, \frac{1}{2})$$

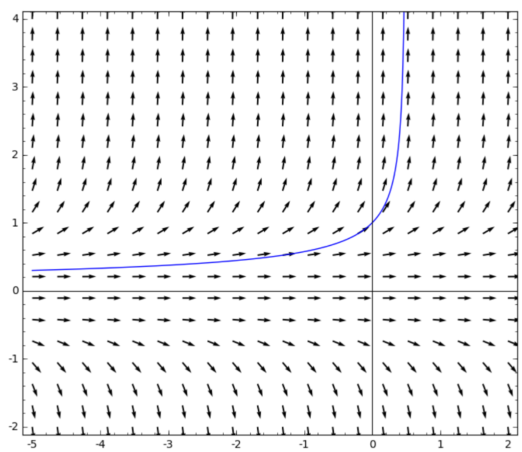
bijektiv. Wir brauchen die Umkehrfunktion $\varphi = H^{-1}$ und gewinnen sie aus der Relation $H(\varphi(t)) = t$:

$$H(\varphi(t)) = t \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varphi(t)^2} = t \iff \frac{1}{2\varphi(t)^2} = \frac{1}{2} - t \iff$$
$$\iff \varphi(t)^2 = \frac{1}{2(\frac{1}{2} - t)} \overset{\varphi(t)\in(0,\infty)}{\iff} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2(\frac{1}{2} - t)}}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi : (-\infty, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

Wegen $\lim_{t\uparrow\frac{1}{2}} \varphi(t) = \infty$, kann das Definitionsintervall nicht nach rechts vergrößert werden. Daher ist die Lösung maximal.



(3) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \sin(x), \quad x(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Im Intervall $(x_-, x_+) = (0, \pi)$ ist $h(x) = \sin(x)$ immer positiv. Dort können wir definieren

$$H(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{dy}{\sin(y)}.$$

Nun hat $\frac{1}{\sin(y)}$ die Stammfunktion $\ln(\frac{\sin(y)}{1+\cos(y)})$, weswegen wir weiter erhalten

$$H(x) = \left[\ln \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right]_{y=\frac{\pi}{2}}^{x} = \ln \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}.$$

Wegen $\sin(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}$ für $x \in (0,\pi)$ gilt

$$\ln \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \ln \frac{\sqrt{1-\cos(x)^2}}{1+\cos(x)} = \ln \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}.$$

Damit folgt

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \text{ für } x \in (0,\pi).$$

Das Bild $H((0,\pi))$ von H ist (t_-, t_+) mit

$$t_- = \lim_{x\downarrow 0} H(x) = -\infty \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x\uparrow\pi} H(x) = \infty.$$

Also ist

$$H : (0,\pi) \to (-\infty, \infty)$$

bijektiv. Wir berechnen die Umkehrfunktion $\varphi = H^{-1}$ aus der Relation $H(\varphi(t)) = t$:

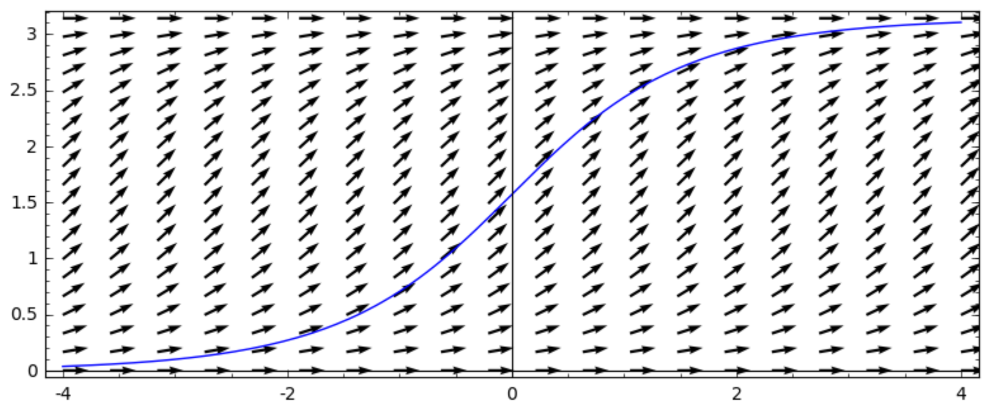
$$\begin{aligned}
H(\varphi(t)) = t \quad &\iff \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(\varphi(t))}{1+\cos(\varphi(t))} = t \quad \iff \quad \frac{1-\cos\varphi(t)}{1+\cos\varphi(t)} = e^{2t} \quad \iff \\
&\iff \quad 1-\cos\varphi(t) = (1+\cos\varphi(t))e^{2t} \quad \iff \\
&\iff \quad \cos\varphi(t)\left(1+e^{2t}\right) = 1-e^{2t} \quad \iff \\
&\iff \quad \cos\varphi(t) = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} \quad \iff \quad \varphi(t) = \arccos\left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right).
\end{aligned}$$

Daher löst

$$\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \arccos\left(\frac{1+e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)$$

das Anfangswertproblem. Es ist

$$\lim_{t\downarrow-\infty} \varphi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\uparrow\infty} \varphi(t) = \pi.$$



(4) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = x_0 \text{ mit } x_0 > 0.$$

Das maximale, x_0 enthaltende offene Intervall, auf dem $h(x) = \sqrt{|x|}$ von 0 verschieden ist, ist $(x_-, x_+) = (0, \infty)$. In diesem Intervall ist $h(x) = \sqrt{|x|} = \sqrt{x}$ positiv. Dort gilt

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = [2\sqrt{y}]_{y=x_0}^{x} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x_0}.$$

Das Bild von H ist $H((0,\infty)) = (t_-, t_+)$ mit

$$t_- = \lim_{x\downarrow 0} H(x) = -2\sqrt{x_0} \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x\uparrow\infty} H(x) = \infty.$$

Also ist

$$H : (0, \infty) \to (-2\sqrt{x_0}, \infty)$$

bijektiv. Die Umkehrfunktion $\varphi = H^{-1}$ löst das Anfangswertproblem. Wir berechnen sie aus der Beziehung $H(\varphi(t)) = t$:

$$\begin{aligned}
H(\varphi(t)) = t \quad &\iff \quad 2\sqrt{\varphi(t)} - 2\sqrt{x_0} = t \quad \iff \\
&\iff \quad \sqrt{\varphi(t)} = \frac{t}{2} + \sqrt{x_0} \quad \iff \\
&\iff \quad \varphi(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\varphi : (-2\sqrt{x_0}, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2$$

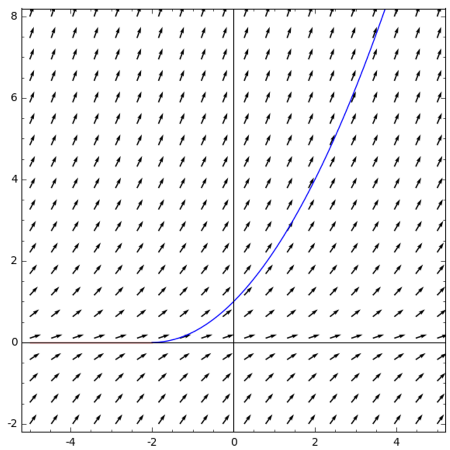
eine Lösung des Anfangswertproblems. Es gilt weiter

$$\lim_{t \downarrow -2\sqrt{x_0}} \varphi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow \infty} \varphi(t) = \infty.$$

Die angebene Lösung ist aber nicht maximal, da sie sich ganz einfach zu einer Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2 & \text{für } t > -2\sqrt{x_0}, \\ 0 & \text{für } t \leq -2\sqrt{x_0} \end{cases}$$

löst das Anfangswertproblem. (Es gibt auch noch andere Lösungen.)



Bemerkung: Wann ist die Lösung $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ eines Anfangswertproblems $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$ maximal? Die folgenden Aussagen sind sofort klar.

- Das Intervall (t_-, t_+) lässt sich nicht nach rechts vergrößern zu $(t_-, \widetilde{t}_+) \supsetneq (t_-, t_+)$, falls gilt
  - $t_+ = \infty$ oder
  - $t_+ < \infty$ und $\lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = \pm\infty$ oder
  - $t_+ < \infty$ und $\lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t)$ existiert (in $\mathbb{R}$) und $\lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t)$ liegt nicht im Definitionsbereich von h.
- Das Intervall (t_-, t_+) lässt sich nicht nach links vergrößern zu $(\widetilde{t}_-, t_+) \supsetneq (t_-, t_+)$, falls gilt
  - $t_- = -\infty$ oder
  - $t_- > -\infty$ und $\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t) = \pm\infty$ oder
  - $t_- > -\infty$ und $\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t)$ existiert (in $\mathbb{R}$) und $\lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t)$ liegt nicht im Definitionsbereich von h.

Bemerkung: Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Man sagt, das Anfangswertproblem ist **lokal eindeutig lösbar**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Anfangswertproblem besitzt eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$.
- Ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so gibt es $\delta > 0$ mit

$$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Die Fragen nach der eindeutigen Lösbarkeit bzw. lokal eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen wird uns später noch intensiv beschäftigen. Hier schreiben wir nochmals explizit auf, was eigentlich schon im letzten Satz steht. (Im Satz ist sogar explizit ein Intervall (t_-, t_+) angegeben, auf dem die Lösungen eindeutig sind.)

Folgerung. *Ist $h : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion, $x_0 \in I$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(x_0) \neq 0$, so ist das Anfangswertproblem*

$$x' = h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

lokal eindeutig lösbar.

Manchmal kann man auch eine Aussage über die globale Eindeutigkeit machen:

Folgerung. *Ist $\varphi : J \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = h(x), \quad x(0) = x_0$$

(mit einer auf einem Intervall stetigen Funktion h) und gilt

$$h(\varphi(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in J,$$

so ist das Anfangswertproblem **global eindeutig lösbar** *und φ ist diese Lösung.*

Die Folgerung liefert ein Kriterium, das auch in der Praxis oft hilfreich ist: Man bestimmt eine Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}$ eines Anfangswertproblems $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$, testet, ob die Lösung maximal ist und ob $h(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt. Wenn ja, hat man die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems gefunden.

Das folgende Beispiel zeigt, dass ein Anfangswertproblem $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$ auch unendlich viele Lösungen haben kann. Wegen des Satzes bzw. der Folgerung muss dann $h(x_0) = 0$ gelten.

Beispiel: Wir wollen alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0$$

bestimmen.

(1) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann ist $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(t) = \sqrt[3]{\varphi(t)^2} \geq 0$, insbesondere ist φ monoton steigend. Sei

$$I = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = 0\}$$

die Menge der Nullstellen von φ. Da φ stetig ist, ist I abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Aus der Monotonie und $\varphi(0) = 0$ folgt:
- Ist $u_- < 0$ mit $u_- \in I$, so ist $[u_-, 0] \subseteq I$.
- Ist $u_+ > 0$ mit $u_+ \in I$, so ist $[0, u_+] \subseteq I$.

Daher ist I ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, wobei auch die Fälle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$ zugelassen sind. Es gibt also Zahlen

$$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } a \leq 0 \leq b \text{ und } I = [a, b] \cap \mathbb{R}.$$

(2) Ist $a = -\infty$, so gilt $\varphi(t) = 0$ für alle $t \leq 0$. Wir betrachten den Fall $-\infty < a \leq 0$. Sei $t_0 < a$ und $x_0 = \varphi(t_0)$. Mit den Bezeichnungen unseres Satzes wählen wir

$$(x_-, x_+) = (-\infty, 0) \text{ und } h(x) = \sqrt[3]{x^2} = (-x)^{2/3}.$$

und berechnen $H : (x_-, x_+) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} + t_0 = \int_{x_0}^{x} (-y)^{-2/3} dy + t_0 = \left[\frac{-(-y)^{1/3}}{1/3}\right]_{y=x_0}^{x} + t_0 = \\ &= -3(-x)^{1/3} + 3(-x_0)^{1/3} + t_0. \end{aligned}$$

Das Bild von H ist $H((x_-, x_+)) = (t_-, t_+)$ mit

$$t_- = \lim_{x \downarrow -\infty} H(x) = -\infty \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x \uparrow 0} H(x) = 3(-x_0)^{1/3} + t_0.$$

Für $t \in (t_-, t_+)$ gilt $H(\varphi(t)) = t$, also:

$$\begin{aligned} H(\varphi(t)) = t \quad &\iff \quad -3(-\varphi(t))^{1/3} + 3(-x_0)^{1/3} + t_0 = t \quad \iff \\ &\iff \quad -3(-\varphi(t))^{1/3} + t_+ = t \quad \iff \quad (-\varphi(t))^{1/3} = -\frac{1}{3}(t - t_+) \quad \iff \\ &\iff \quad (-\varphi(t))^{1/3} = \frac{1}{3}(t_+ - t) \quad \iff \quad -\varphi(t) = \left(\frac{1}{3}(t_+ - t)\right)^3 \quad \iff \\ &\iff \quad \varphi(t) = -\left(\frac{1}{3}(t_+ - t)\right)^3 . \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich

$$\varphi(t) < 0 \text{ für } t < t_+ \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = 0.$$

Aus der Definition der Zahl a folgt daher $t_+ = a$. Wir können also schreiben

$$\varphi(t) = \left(\frac{t-a}{3}\right)^3 \text{ für } t \leq a.$$

(3) Ist $b = \infty$, so gilt $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Wir betrachten nun den Fall $0 \leq b < \infty$. Sei $t_0 > b$ und $x_0 = \varphi(t_0)$. Mit den Bezeichnungen des Satzes wählen wir

$$(x_-, x_+) = (0, \infty) \text{ und } h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

und berechnen $H : (x_-, x_+) \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x) \quad = \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^{2/3}} + t_0 = \int_{x_0}^{x} y^{-2/3} dy + t_0 = \left[\frac{y^{1/3}}{1/3}\right]_{y=x_0}^{x} + t_0 = 3x^{1/3} - 3x_0^{1/3} + t_0.$$

Das Bild von H ist $H((x_-, x_+)) = (t_-, t_+)$ mit

$$t_- = \lim_{x \downarrow 0} H(x) = -3x_0^{1/3} + t_0 \quad \text{und} \quad t_+ = \lim_{x \uparrow \infty} H(x) = \infty.$$

Für $t \in (t_-, t_+)$ gilt $H(\varphi(t)) = t$, also:

$$\begin{aligned} 3\varphi(t)^{1/3} - 3x_0^{1/3} + t_0 = t \quad &\iff \quad 3\varphi(t)^{1/3} + t_- = t \quad \iff \quad \varphi(t)^{1/3} = \frac{t - t_-}{3} \quad \iff \\ &\iff \quad \varphi(t) = \left(\frac{t - t_-}{3}\right)^3 . \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\varphi(t) > 0 \text{ für } t > t_- \text{ und } \lim_{t \downarrow t_-} \varphi(t) = 0.$$

Dies impliziert $t_- = b$ und damit

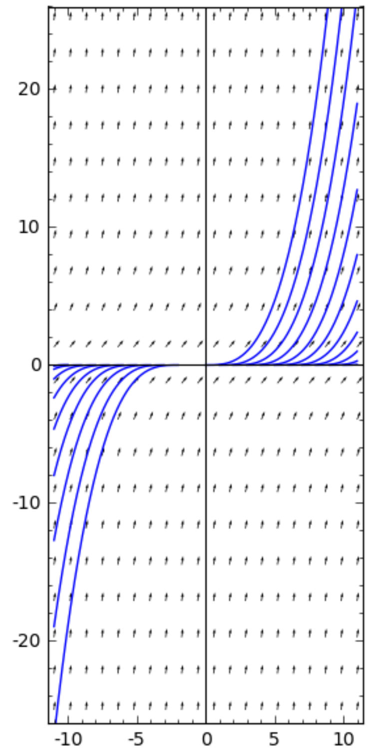
$$\varphi(t) = \left(\frac{t-b}{3}\right)^3 \text{ für } t \geq b.$$

(4) Wir fassen zusammen:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-a}{3}\right)^3 & \text{für } t < a, \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ \left(\frac{t-b}{3}\right)^3 & \text{für } t > b. \end{cases}$$

Nun überprüft man leicht, dass die angegebene Funktion tatsächlich das Anfangswertproblem löst. Wir erhalten also eine 2-parametrige Schar - abhängig von a und b - von Lösungen des

Anfangswertproblems.



4. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen - Trennung der Variablen

Unter einer **Differentialgleichung mit getrennten Variablen** verstehen wir eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x' = g(t)h(x).$$

Ist $x' = f(t,x)$, so lässt sich also $f(t,x)$ in ein Produkt $f(t,x) = g(t)h(x)$ zerlegen, wo g nur von t und h nur von x abhängt. Die Variablen sind „getrennt“. Im Fall $g(t) = 1$ haben wir den Spezialfall, den wir im letzten Abschnitt behandelt haben, eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir beginnen mit einem Ansatz, der zwar mathematisch nicht sauber begründet ist, aber prägnant und einprägsam ist.

Ansatz zur Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen durch „Trennung der Variablen“: Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = g(t)h(x)$.

- Schreibe $x' = g(t)h(x)$ als
$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x).$$
- „Trenne die Variablen“:
$$\frac{dx}{h(x)} = g(t).$$
- Integriere:
$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- Löse die letzte Gleichung nach $x = x(t)$ auf.
- Überprüfe, ob $x(t)$ die Differentialgleichung löst.

Oft kann man auf diese einfache Weise Lösungen finden. Ob man dann alle gefunden hat, ist hier überhaupt nicht klar.

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = tx^2,$$

die auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert ist. Wir schreiben

$$\frac{dx}{dt} = tx^2,$$

„trennen die Variablen“

$$\frac{dx}{x^2} = tdt$$

integrieren:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int tdt + c$$

und erhalten

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

Aus dieser Gleichung können wir $x = x(t)$ berechnen:

$$x(t) = \frac{1}{-\frac{1}{2}t^2 - c}.$$

Den gleichen Ansatz können wir auch zum Lösen von Anfangswertproblemen benutzen:

Ansatz zur Lösung eines Anfangswertproblems für eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen durch „Trennung der Variablen“: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei g und h als in einer Umgebung von t_0 bzw. x_0 definierte und stetige Funktionen sind.

(1) **Fall $h(x_0) = 0$:** Dann ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = x_0$$

eine Lösung des Anfangswertproblems.

(2) **Fall $h(x_0) \neq 0$:**
- Schreibe $x' = h(x)$, $x(t_0) = x_0$ als

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

- „Trenne die Variablen“:

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt, \quad x(t_0) = x_0.$$

- Integriere:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)dt.$$

- Löse die Gleichung nach $x = x(t)$ auf.
- Überprüfe, ob $x(t)$ das Anfangswertproblem löst.
- Bemerkung: Die Vorgehensweise ist zwar prägnant und einprägsam, aber mathematisch nicht sauber begründet.

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = -tx^2, \quad x(0) = -2.$$

Wir schreiben

$$\frac{dx}{dt} = -tx^2, \quad x(0) = -2,$$

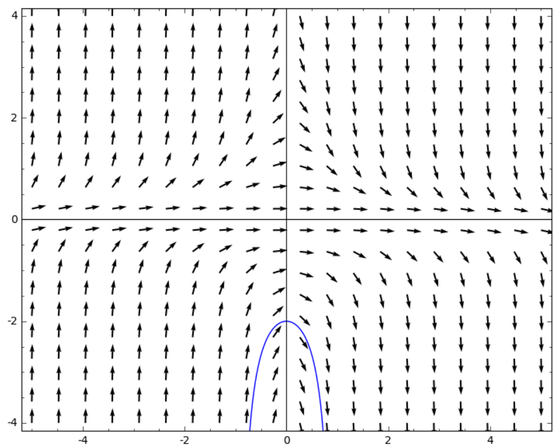
„trennen die Variablen“

$$\frac{dx}{-x^2} = tdt, \quad x(0) = -2,$$

integrieren

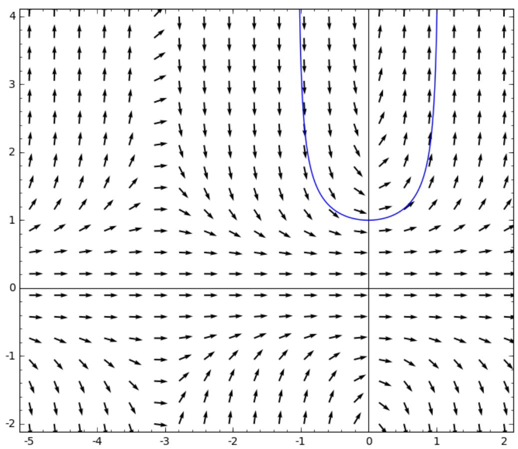
$$\int_{-2}^{x} \frac{dy}{-y^2} = \int_{0}^{t} udu,$$

erhalten
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t^2.$$
Die letzte Gleichung können wir leicht nach $x = x(t)$ auflösen:
$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{t^2-1}.$$
Offensichtlich müssen wir $(-1, 1)$ als Definitionsintervall wählen, das dann auch maximal ist.



Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem
$$x' = \sin(t)\cdot x^3, \quad x(0) = 1.$$
Wir schreiben es als
$$\frac{dx}{dt} = \sin(t)\cdot x^3, \quad x(0) = 1,$$
„trennen die Variablen“
$$\frac{dx}{x^3} = \sin(t)dt, \quad x(0) = 1,$$
integrieren
$$\int_1^x \frac{dy}{y^3} = \int_0^t \sin(u)du,$$
erhalten
$$\left[-\frac{1}{2y^2}\right]_{y=1}^x = \left[-\cos(u)\right]_{u=0}^t,$$
d.h.
$$-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2} = 1-\cos(t), \quad \text{also} \quad \frac{1}{x^2} = 2\cos(t)-1, \quad \text{also} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2\cos(t)-1}}.$$
Wegen $x(0) = 1$ müssen wir das positive Vorzeichen wählen und erhalten
$$x = \frac{1}{\sqrt{2\cos(t)-1}}.$$
Wir definieren also
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos(t)-1}}.$$
Man kann überprüfen, dass $\varphi(t)$ (lokal um $t = 0$) das Anfangswertproblem löst. Die angegebenen Funktion ist genau dann definiert, wenn $2\cos(t)-1 > 0$ ist, was wiederum äquivalent zu $\cos(t) > \frac{1}{2}$ ist. Das größte, 0 enthaltende Intervall mit dieser Eigenschaft ist $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Also setzen wir nun
$$\varphi : (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos(t)-1}}.$$

An den Rändern des Intervalls strebt die Lösung $\varphi(t)$ gegen ∞. Also handelt es sich um eine maximale Lösung.



Der folgende Satz präzisiert nun, was in den vorangegangenen Ansätzen passiert ist.

SATZ. *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ist $h(x_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $\varphi(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems. Daher können wir im Folgenden $h(x_0) \neq 0$ annehmen.

- *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dazu wird definiert*

$$G : I \to \mathbb{R} \text{ mit } G(t) = \int_{t_0}^{t} g(u)du,$$

  d.h. G ist eine Stammfunktion von g mit $G(t_0) = 0$.
- *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in J$ und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen voraus, dass $h(x_0) \neq 0$ gilt. Sei $(x_-, x_+) \subseteq J$ ein maximales offenes Intervall mit $x_0 \in (x_-, x_+)$, sodass $h(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ gilt, und*

$$H : (x_-, x_+) \to \mathbb{R} \text{ mit } H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)},$$

  d.h. H ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit $H(x_0) = 0$. Dann ist H ist injektiv, das Bild $H((x_-, x_+))$ ein offenes Intervall und $H^{-1} : H((x_-, x_+)) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
- *Sei $(t_-, t_+) \subseteq I$ maximal mit $t_0 \in (t_-, t_+)$, sodass gilt*

$$G((t_-, t_+)) \subseteq H((x_-, x_+)).$$

  ($G((t_-, t_+))$ ist ein nicht notwendig offenes Intervall.)
- *Dann ist*

$$\varphi = H^{-1} \circ G : (t_-, t_+) \to (x_-, x_+) \subseteq \mathbb{R}$$

  wohldefiniert, differenzierbar und erfüllt das Anfangswertproblem

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

  (Es gilt: $H(\varphi(t)) = G(t)$ für $t \in (t_-, t_+)$.)
- *(1. Eindeutigkeitsaussage) Ist $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems, so gilt*

$$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in (t_-, t_+) \cap I_\psi.$$

  (Das Anfangswertproblem ist also auf dem Intervall (t_-, t_+) eindeutig lösbar.)

- *(2. Eindeutigkeitsaussage) Ist $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems und gilt*
$$h(\psi(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in I_\psi,$$
so gilt
$$I_\psi \subseteq (t_-, t_+) \text{ und } \psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in I_\psi.$$

Beweis:

(1) Man überlegt zunächst, dass φ sinnvoll definiert ist. Aus $\varphi = H^{-1} \circ G$ folgt dann $H(\varphi(t)) = G(t)$. Differenzieren ergibt
$$H'(\varphi(t))\varphi'(t) = G'(t), \quad \text{also} \quad \frac{1}{h(\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = g(t), \quad \text{und damit} \quad \varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t)).$$
Weiter gilt
$$\varphi(t_0) = H-1(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0.$$
$\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ löst also das Anfangswertproblem.

(2) Wir wollen nun die 1. Eindeutigkeitsaussage anschauen. Sei also $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems. Für die Behauptung können wir $I_\psi \subseteq (t_-, t_+)$ annehmen. Wir zerlegen das Intervall I_ψ in zwei disjunkte Mengen:
$$U_1 = \{t \in I_\psi : \psi(t) = \varphi(t)\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{i \in I_\psi : \psi(t) \neq \varphi(t)\}.$$
- Wir zeigen, dass U_1 offen ist. Sei $t_1 \in U_1$, also $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Dann ist $\psi(t_1) \in (x_-, x_+)$, sodass es wegen der Stetigkeit von ψ ein $\delta > 0$ gibt mit
$$\psi(t) \in (x_-, x_+) \text{ für alle } t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Da H auf (x_-, x_+) definiert ist, können wir H anwenden, d.h. $H(\psi(t))$ bilden und dann differenzieren:
$$(H(\psi(t)))' = H'(\psi(t))\psi'(t) = \frac{1}{h(\psi(t)}g(t)h(\psi(t)) = g(t) = G'(t) \text{ für alle } t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Also existiert eine Konstante c mit
$$H(\psi(t)) = G(t) + c \text{ für alle } t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Wir setzen $t = t_1$ ein und erhalten mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$
$$c = H(\psi(t_1)) - G(t_1) = H(\varphi(t_1)) - G(t_1) = 0,$$
also
$$H(\psi(t)) = G(t) \text{ für alle } t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Es folgt
$$\psi(t) = H^{-1}(G(t)) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta).$$
Daher gilt
$$(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq U_1.$$
Dies zeigt, dass U_1 eine offene Menge ist. Wir bemerken auch, dass U_1 wegen $t_0 \in U_1$ nicht leer ist.
- Da ψ und φ stetige Funktionen sind, ist $U_2 = \{t \in I_\psi : \psi(t) \neq \varphi(t)\}$ natürlich eine offene Menge.

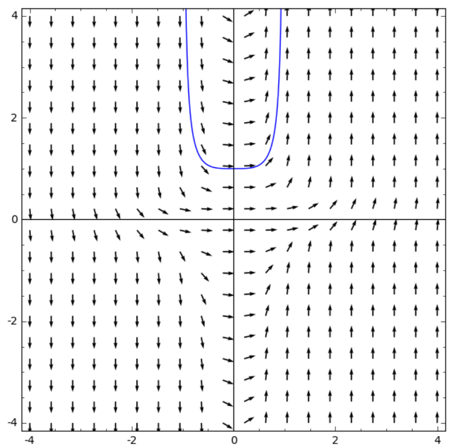
Da sich ein Intervall nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegen lässt, folgt aus der Offenheit von U_1 und U_2 und
$$I_\psi = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \neq \emptyset,$$
dass $U_1 = I_\psi$ gilt, d.h.
$$\psi(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in I_\psi,$$
wie behauptet.

(3) Wir betrachten nun die 2. Eindeutigkeitsaussage. Sei $\psi : I_\psi \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit
$$h(\psi(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in I_\psi.$$
Da (x_-, x_+) maximal gewählt wurde, gilt
$$\psi(t) \in (x_-, x_+) \text{ für alle } t \in J.$$
Also ist $H \circ \psi : J \to \mathbb{R}$ definiert. Wir differenzieren:
$$(H \circ \psi)'(t) = H'(\psi(t))\psi'(t) = \frac{1}{h(\psi(t))} \cdot g(t)h(\psi(t)) = g(t) = G'(t) \text{ für alle } t \in J.$$
Daher gibt es eine Konstante c mit
$$H(\psi(t)) = G(t) + c \text{ für alle } t \in J.$$
Wegen $H(x_0) = 0$, $\psi(t_0) = x_0$, $G(t_0) = 0$ folgt $c = 0$, also
$$H(\psi(t)) = G(t) \text{ für alle } t \in J.$$
Dann gilt also
$$G(J) \subseteq H((x_-, x_+)).$$
Da (t_-, t_+) maximal mit $G((t_-, t_+)) \subseteq H((x_-, x_+))$ gewählt wurde, folgt
$$J \subseteq (t_-, t_+).$$
Der Rest folgt aus der 1. Eindeutigkeitsaussage. ■

Beispiele:

(1) Wir betrachten das Anfangswertproblem
$$x' = 4t^3x^2, \quad x(0) = 1.$$
- Wir definieren $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = 4t^3$ und $t_0 = 0$, dazu $G :\to \mathbb{R}$ mit
$$G(t) = \int_0^t g(u)du = \int_0^t 4u^3 du = t^4.$$
- Wir definieren $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2$ und $x_0 = 1$. Das größte Intervall, das $x_0 = 1$ enthält und in dem h von 0 verschieden ist, ist
$$(x_-, x_+) = (0, \infty).$$
Wir definieren $H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit
$$H(x) = \int_1^x \frac{dy}{h(y)} = \int_1^x \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=1}^x = 1 - \frac{1}{x}.$$
Da H injektiv ist, ist das Bild ein offenes Intervall, nämlich
$$H((0, \infty)) = (-\infty, 1).$$
Wir wissen also:
$$H : (0, \infty) \to (-\infty, 1) \text{ ist bijektiv}$$
und
$$H^{-1} : (-\infty, 1) \to (0, \infty) \text{ ist bijektiv und differenzierbar.}$$
- Wir brauchen das größte Intervall (t_-, t_+) mit $0 \in (t_-, t_+)$ und
$$G((t_-, t_+)) \subseteq H((x_-, x_+)) = (-\infty, 1).$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} G(t) \in H((0, \infty)) = (-\infty, 1) \quad &\iff \quad t^4 \in (-\infty, 1) \quad \iff \quad t^4 < 1 \quad \iff \\ &\iff \quad t \in (-1, 1). \end{aligned}$$
Also ist
$$(t_-, t_+) = (-1, 1).$$

- Daher ist nun
$$\varphi = H^{-1} \circ G : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$$
wohldefiniert, differenzierbar und löst das Anfangswertproblem. Mit $H(\varphi(t)) = G(t)$ führen wir folgende Umformungen aus:
$$H(\varphi(t)) = G(t) \iff 1 - \frac{1}{\varphi(t)} = t^4 \iff \frac{1}{\varphi(t)} = 1 - t^4 \iff$$
$$\iff \varphi(t) = \frac{1}{1-t^4}.$$
Also ist
$$\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \frac{1}{1-t^4}$$
eine Lösung des Anfangswertproblems. Auf dem Intervall $(-1,1)$ ist die Lösung eindeutig. Wegen
$$\lim_{t \downarrow -1} \varphi(t) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \uparrow 1} \varphi(t) = \infty$$
ist die Lösung auch maximal. Daher ist φ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems.



(2) Wir betrachten nochmals das zuvor behandelte Beispiel
$$x' = \sin(t) \cdot x^3, \quad x(0) = 1.$$
Mit den Bezeichnungen des Satzes haben wir
$$I = \mathbb{R}, \quad g(t) = \sin(t), \quad G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } G(t) = \int_0^t \sin(u) du = 1 - \cos(t).$$
$$J = \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3, \quad (x_-, x_+) = (0, \infty), \quad H : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
mit
$$H(x) = \int_1^x \frac{dy}{y^3} = \left[-\frac{1}{2y^2} \right]_{y=1}^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$
Es ist
$$H((0,\infty)) = (-\infty, \frac{1}{2}).$$
Wir suchen nun (t_-, t_+) maximal mit $G((t_-, t_+)) \subseteq H((0,\infty))$. Es gilt
$$G(t) \in (-\infty, \frac{1}{2}) \iff 1 - \cos(t) < \frac{1}{2} \iff \cos(t) > \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}).$$
Da (t_-, t_+) auch $t_0 = 0$ enthalten soll, wählen wir
$$(t_-, t_+) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}).$$

Um die Lösung $\varphi = H^{-1} \circ G : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems zu bestimmen, verwenden wir die Beziehung $H(\varphi(t)) = G(t)$:

$$\begin{aligned} H(\varphi(t)) = G(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\varphi(t)^2}) = 1 - \cos(t) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{\varphi(t)^2} = 2 - 2\cos(t) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varphi(t)^2} = 2\cos(t) - 1 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(t)^2 = \frac{1}{2\cos(t) - 1} \quad \overset{\varphi(t) \in (x_-, x_+)}{\Longleftrightarrow} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos(t) - 1}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also (wie zuvor) die Lösung

$$\varphi : (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos(t) - 1}}.$$

Wegen

$$\lim_{t \downarrow -\frac{\pi}{3}} \varphi(t) = \infty \quad \text{ und } \quad \lim_{t \uparrow \frac{\pi}{3}} \varphi(t) = \infty$$

ist die Lösung auch maximal.

(3) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{\sin(t)}{\cos(x)}, \quad x(0) = 0.$$

Mit den Bezeichnungen des Satzes haben wir

$$I = \mathbb{R}, \quad g(t) = \sin(t), \quad G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } G(t) = \int_0^t \sin(u)du) = 1 - \cos(t)$$

und

$$J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad h(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad (x_-, x_+) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad H : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

mit

$$H(x) = \int_0^x \frac{dy}{h(y)} = \int_0^x \cos(y)dy = \sin(x).$$

Es ist

$$H((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1).$$

Nun suchen wir (t_-, t_+) maximal mit $0 \in (t_-, t_+)$ und $G((t_-, t_+)) \subseteq H((x_-, x_+)) = (-1, 1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(t) \in (-1, 1) \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - \cos(t) \in (-1, 1) \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 1 - \cos(t) < 1 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \cos(t) < 2 \text{ und } \cos(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(t) > 0. \end{aligned}$$

Wir wählen also

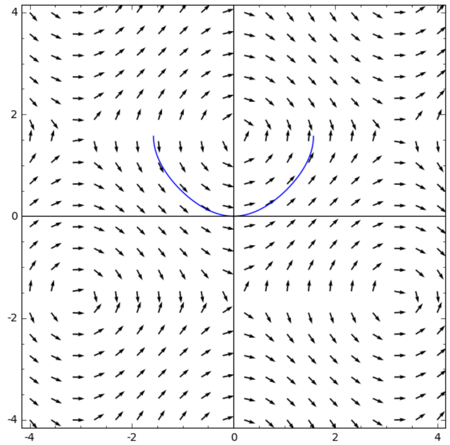
$$(t_-, t_+) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dann löst $\varphi = H^{-1} \circ G : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem. Zur Berechnung von φ benützen wir die Relation $H(\varphi(t)) = G(t)$:

$$H(\varphi(t)) = G(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\varphi(t)) = 1 - \cos(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = \arcsin(1 - \cos(t)).$$

Wir erhalten also die Lösung

$$\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \arcsin(1 - \cos(t)).$$



FOLGERUNG. *Ist $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0 \in I$, ist $h : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in J$, sodass gilt $h(x_0) \neq 0$, so ist das Anfangswertproblem*

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

lokal eindeutig lösbar.

FOLGERUNG. *Ist $\varphi : J \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = g(t)h(x), \quad x(0) = x_0$$

(mit Intervallen stetigen Funtionen g und h) und gilt

$$h(\varphi(t)) \neq 0 \text{ für alle } t \in J,$$

so ist das Anfangswertproblem **global eindeutig lösbar** *und φ ist diese Lösung.*

Auch diese Folgerung liefert ein Kriterium, das in der Praxis hilfreich sein kann: Man bestimmt eine Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}$ eines Anfangswertproblems $x' = g(t)h(x)$, $x(t_0) = x_0$. Dann testet man, ob die Lösung maximal ist und ob $h(\psi(t)) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt. Wenn ja, hat man die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems gefunden.

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{e^x}{t^2+1}, \quad x(0) = 0.$$

Wir schreiben es in der Form

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^x}{t^2+1}, \quad x(0) = 0,$$

„trennen die Variablen“:

$$e^{-x} dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

und integrieren:

$$\int_0^x e^{-y} dy = \int_0^t \frac{du}{u^2+1}.$$

Dies ergibt

$$1 - e^{-x} = \arctan(t), \quad \text{also} \quad e^{-x} = 1 - \arctan(t),$$

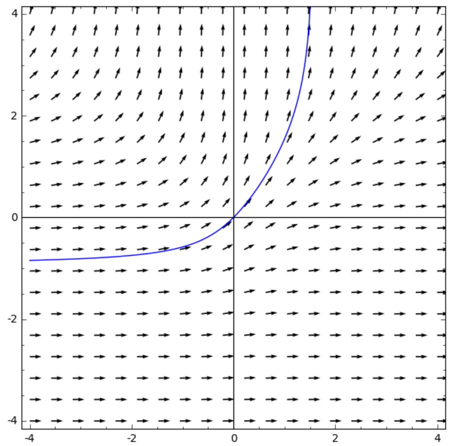
und damit

$$x = -\ln(1 - \arctan(t)).$$

Der letzte Ausdruck ist definiert im Fall $1 - \arctan(t) > 0$, d.h. $\arctan(t) < 1$, also für $t < \tan(1) \approx 1.56$. Daher definieren wir

$$\varphi : (-\infty, \tan(1)) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = -\ln(1 - \arctan(t)).$$

Man überprüft zunächst, dass φ das Anfangswertproblem löst. Wegen $\lim_{t\uparrow\tan(1)}\varphi(t)=\infty$ ist die Lösung maximal. Da e^x nie 0 wird, ist die Lösung auch eindeutig. Also ist φ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems.



5. Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Wir betrachten hier implizite Differentialgleichungen 1. Ordnung der Gestalt

$$g(t,x)+h(t,x)\cdot x'=0.$$

Schreibt man $x'=\frac{dx}{dt}$ und „multipliziert" man die Gleichung mit dt, so erhält man die Gestalt

$$g(t,x)dt+h(t,x)dx=0,$$

unter der man die Gleichung auch findet. Wir bevorzugen aber die erste Darstellung.

Definition. *Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, seien $g,h:D\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Differentialgleichung*

$$g(t,x)+h(t,x)\cdot x'=0$$

heißt **exakte Differentialgleichung**, *wenn es eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ gibt, sodass gilt*

$$g(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\quad \textit{und}\quad h(t,x)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\quad \textit{für alle } (t,x)\in D.$$

Die Funktion f heißt dann eine **Stammfunktion** *für die (exakte) Differentialgleichung.*

Beispiele:

(1) Die Differentialgleichung

$$t+xx'=0$$

ist exakt. Als Stammfunktion kann man

$$f(t,x)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}x^2$$

wählen.

(2) Die Differentialgleichung

$$x+tx'=0$$

ist exakt, denn

$$f(t,x)=tx$$

ist offensichtlich eine Stammfunktion.

Satz. *Sei*

$$g(t,x) + h(t,x)x' = 0$$

eine exakte Differentialgleichung mit Stammfunktion f, d.h.

$$g(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \quad \text{und} \quad h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x},$$

wo f, g, h auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte Funktionen sind.

(1) *Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit*

$$f(t,\varphi(t)) = c \text{ für alle } t \in I.$$

(2) *Ist umgekehrt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktion, sodass eine Konstante c existiert mit*

$$f(t,\varphi(t)) = c \text{ für alle } t \in I,$$

so ist φ eine Lösung der Differentialgleichung.

(3) *Soll eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung das Anfangswertproblem $x(t_0) = x_0$ lösen, so muss gelten*

$$f(t,\varphi(t)) = f(t_0,x_0) \text{ für alle } t \in I.$$

Beweis:

(1) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, d.h.

$$g(t,\varphi(t)) + h(t,\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Wir bilden $f(t,\varphi(t))$ und betrachten die Ableitung:

$$\frac{d}{dt} f(t,\varphi(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\varphi'(t) = g(t,\varphi(t)) + h(t,\varphi(t))\varphi'(t) = 0.$$

Daher existiert eine Konstante c mit

$$f(t,\varphi(t)) = c \text{ für alle } t \in I.$$

(2) Sei nun $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass gilt

$$f(t,\varphi(t)) = c \text{ für alle } t \in I.$$

Differenzieren liefert

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\varphi'(t) = 0,$$

d.h.

$$g(t,\varphi(t)) + h(t,\varphi(t))\varphi'(t) = 0.$$

Also ist φ eine Lösung der Differentialgleichung.

(3) Dies ist unmittelbar klar. ■

Beispiele:

(1) Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung

$$t + xx' = 0$$

exakt ist und

$$f(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2$$

als Stammfunktion hat. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es also eine Konstante c mit

$$f(t,\varphi(t)) = c, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\varphi(t)^2 = c,$$

also

$$\varphi(t)^2 = 2c - t^2 \text{ für alle } t \in I.$$

(2) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$t + xx' = 0, \quad x(1) = 1.$$

Die Differentialgleichung ist exakt, wir verwenden als Stammfunktion wieder

$$f(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2.$$

Löst $\varphi(t)$ das Anfangswertproblem, so gilt

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\varphi(t)^2 = f(t,\varphi(t)) = f(1,1) = 1,$$

also gilt $\varphi(t)^2 = 2 - t^2$, also wegen $\varphi(1) = 1$

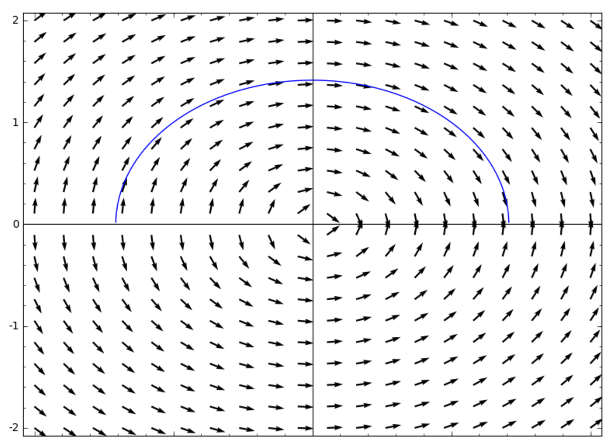
$$\varphi(t) = \sqrt{2-t^2}.$$

Die Lösung ist nur auf dem Intervall $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ definiert. Nun ist aber

$$\varphi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}.$$

In den Punkten $t = \pm\sqrt{2}$ ist die Ableitung nicht mehr definiert, weswegen $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ das maximale Lösungsintervall ist. Die Lösung ist also

$$\varphi : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = \sqrt{2-t^2}.$$



(3) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x + tx' = 0.$$

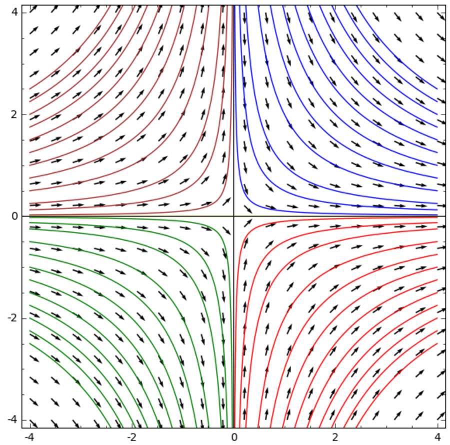
Die Differentialgleichung ist exakt, da man

$$f(t,x) = tx$$

als Stammfunktion wählen kann. Die Lösungen der Differentialgleichung ergeben sich aus

$$tx = c \text{ mit einer Konstanten } c, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{c}{t}.$$

Es gibt verschiedene Lösungen:
- $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = \frac{c}{t}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = \frac{c}{t}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$.



Wie sieht man, dass eine Differentialgleichung $g(t,x) + h(t,x)x' = 0$ exakt ist? Wie findet man gegebenenfalls eine Stammfunktion?

Satz. *Seien g, h auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte und stetig partiell differenzierbare Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$g(t,x) + h(t,x)x' = 0.$$

(1) *Ist die Differentialgleichung exakt, so ist die sogenannte* **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,x) \quad \text{für alle } (t,x) \in D$$

erfüllt.

(2) *Ist D von der Form $(t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ (Rechteckgebiet), wobei $t_1, x_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $t_2, x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt, und ist die Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

erfüllt, so ist die Differentialgleichung exakt, d.h. es existiert eine Stammfunktion. Ist $(t_0, x_0) \in U$, so kann man als Stammfunktion

$$f(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(u,x)du + \int_{x_0}^{x} h(t_0,y)dy$$

wählen.

Beweis:

(1) Ist die Differentialgleichung exakt, so gibt es eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$g(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \quad \text{und} \quad h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \quad \text{für alle } (t,x) \in D.$$

Da g und h als stetig partiell differenzierbar vorausgesetzt waren, ist f mindestens zweimal stetig partiell differenzierbar. Nach einem Satz aus der Analysis, der manchmal auch als „Satz von Schwarz“ bekannt ist, spielt dann die Reihenfolge des Differenzierens keine Rolle, d.h. es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial x} g = \frac{\partial}{\partial t} h,$$

was zu zeigen war.

(2) Sei nun $D = (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ und die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Da D Rechteckform hat, ist $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(u,x)du + \int_{x_0}^{x} h(t_0,y)dy$$

wohldefiniert. Wir bilden die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= g(t,x), \\
\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial g}{\partial x}(u,x)du + h(t_0,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial t}(u,x)du + h(t_0,x) = \\
&= \Big[h(u,x)\Big]_{u=t_0}^{t} + h(t_0,x) = h(t,x).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f eine Stammfunktion der Differentialgleichung ist. Insbesondere ist die Differentialgleichung exakt. ■

Alternativbestimmung einer Stammfunktion: Wie findet man eine Stammfunktion f, sodass also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = g(t,x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = h(t,x),$$

wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind? Aus $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = g(t,x)$ folgt, dass $f(t,x)$ eine Stammfunktion von $g(t,x)$ bezüglich der Variablen t ist. Wir integrieren also $g(t,x)$ bezüglich t und erhalten

$$f(t,x) = \int g(t,x)dt + c(x),$$

wobei die Integrationskonstante noch von x abhängt. (Wir denken uns nun $\int g(t,x)dt$ fest gewählt.) Nun muss noch die Bedingung

$$h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int g(t,x)dt\right) + c'(x)$$

erfüllt sein. Aus dieser Gleichung berechnen wir $c(x)$ (bis auf eine Konstante).

Beispiele:

(1) Die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen

$$g(t,x) = 2tx \quad \text{und} \quad h(t,x) = t^2 + 1$$

erfüllen die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g}{\partial x} = 2t = \frac{\partial h}{\partial t}$. Wir integrieren $g(t,x)$ nach t und erhalten

$$f(t,x) = t^2x + c(x).$$

Nun muss noch gelten

$$t^2 + 1 = h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t^2 + c'(x), \quad \text{also} \quad c'(x) = 1.$$

Wir wählen $c(x) = x$ und erhalten damit die Stammfunktion

$$f(t,x) = t^2x + x.$$

(2) Die auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen

$$g(t,x) = (t - x + 1)e^t + 2t \quad \text{und} \quad h(t,x) = -e^t - 1$$

erfüllen die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -e^t = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Wir integrieren $g(t,x)$ nach t und erhalten aus

$$\int \left(te^t - xe^t + e^t + 2t\right) dt = (t-1)e^t - xe^t + e^t + t^2 + \widetilde{c}$$

den Ansatz

$$f(t,x) = te^t - xe^t + t^2 + c(x).$$

Nun muss weiter gelten

$$-e^t - 1 = h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -e^t + c'(x), \quad \text{also} \quad c'(x) = -1.$$

Wir wählen $c(x) = -x$ und erhalten damit die Stammfunktion

$$f(t,x) = te^t - xe^t + t^2 - x.$$

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass die Integrabilitätsbedingung notwendig für die Exaktheit einer Differentialgleichung $g(t,x) + h(t,x)x' = 0$ (unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) ist. Hinreichend ist die Bedingung, wenn die Definitionsmenge D beispielsweise Rechteckgestalt $(t_1,t_2) \times (x_1,x_2)$ hat. Dies lässt sich auf Mengen D verallgemeinern, die sogenannte Sterngebiete oder einfach zusammenhängend sind. (Wir gehen nicht näher darauf ein.) Allerdings kann man dann nicht erwarten, dass die Formel des Satzes für die Stammfunktion weiterhin anwendbar ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass es Differentialgleichungen gibt, bei denen die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, die aber nicht exakt sind.

Beispiel: Auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+x^2} \cdot x' = 0.$$

Es gilt mit $g(t,x) = \frac{x}{t^2+x^2}$ und $h(t,x) = -\frac{t}{t^2+x^2}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2} = \frac{\partial h}{\partial t}(t,x),$$

die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt. Angenommen, es gäbe eine Stammfunktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{x}{t^2+x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{t}{t^2+x^2}.$$

Wir definieren $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\ell(t) = f(\cos(t), \sin(t)).$$

(Wegen $(\cos(t), \sin(t)) \neq (0,0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion wohldefiniert.) Offensichtlich ist die Funktion ℓ periodisch mit Periode 2π, d.h.

$$\ell(t+2\pi) = \ell(t).$$

Nun bilden wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} \ell'(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\cos(t),\sin(t)) \cdot (-\sin(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t),\sin(t)) \cdot \cos(t) = \\ &= \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} \cdot (-\sin(t)) - \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} \cdot \cos(t) = -\frac{\sin(t)^2 - \cos(t)^2}{\cos(t)^2+\sin(t)^2} = -1. \end{aligned}$$

Die Funktion $\ell(t)$ ist also streng monoton fallend, was aber im Widerspruch zur Periodizität $\ell(t+2\pi) = \ell(t)$ steht. Also muss die Annahme, dass eine Stammfunktion f existiert, falsch sein.

Wir betrachten noch ein paar Beispiele.

Beispiele:

(1) Die Differentialgleichung

$$2tx + (t^2+1) \cdot x' = 0$$

ist exakt mit Stammfunktion

$$f(t,x) = t^2x + x,$$

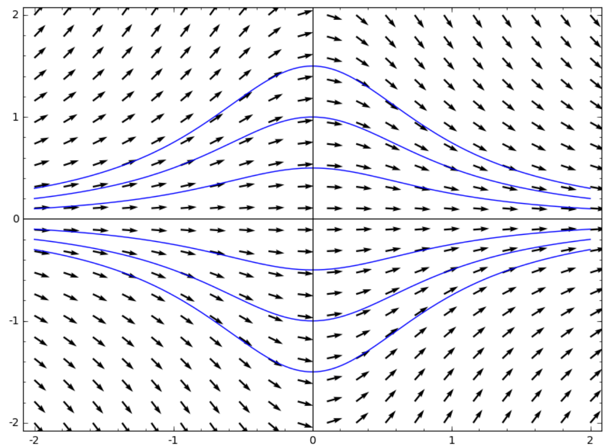
wie wir oben gesehen haben. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit

$$f(t,\varphi(t)) = c, \quad \text{also} \quad t^2\varphi(t) + \varphi(t) = c,$$

und somit

$$\varphi(t) = \frac{c}{1+t^2}.$$

Die Skizze zeigt einige Lösungskurven.



Schreibt man die Differentialgleichung in der Form

$$x' = -\frac{2t}{1+t^2}x,$$

so sieht man, dass es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt, die man natürlich auch mit den früheren Methoden lösen kann.

(2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$t + \sin(x) + (t\cos(x) - 2x)x' = 0.$$

Um die vorangegangenen Formeln anwenden zu können, setzen wir

$$g(t,x) = t + \sin(x), \quad h(t,x) = t\cos(x) - 2x.$$

Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos(x) = \frac{\partial h}{\partial t},$$

die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt, die Differentialgleichung ist exakt, da der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}^2$ ist. Zur Berechnung einer Stammfunktion $f(t,x)$ integrieren wir $g(t,x)$ nach t:

$$f(t,x) = \int g(t,x)dt + c(x) = \int (t + \sin(x))\,dt + c(x) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin(x) + c(x).$$

Nun muss noch gelten

$$t\cos(x) - 2x = h(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t\cos(x) + c'(x).$$

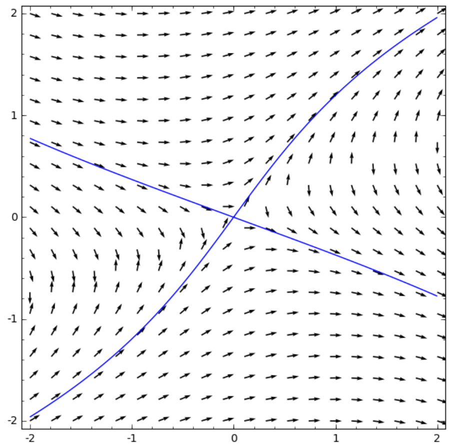
Wir wählen $c(x) = -x^2$ und erhalten daher als Stammfunktion

$$f(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin(x) - x^2.$$

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit

$$f(t,\varphi(t)) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin(\varphi(t)) - \varphi(t)^2 = c \text{ für alle } t \in I.$$

Aus dieser Gleichung erhält man keine explizite Darstellung für $\varphi(t)$. Die Skizze zeigt die Kurve $f(t,x)=0$.



Natürlich wird eine Differentialgleichung der Form $g(t,x)+h(t,x)x'=0$ im Allgemeinen nicht exakt sein. Manchmal kann man sie aber exakt machen:

Integrierende Faktoren - Eulersche Multiplikatoren: Ist die Differentialgleichung

$$g(x,y)+h(x,y)\cdot y'=0$$

nicht exakt, so kann man versuchen, die Gleichung mit einem sogenannten **integrierenden Faktor** (oder **Eulerschen Multiplikator**) $\mu(t,x)$ zu multiplizieren, sodass sie exakt wird:

$$\mu(t,x)g(t,x)+\mu(t,x)h(t,x)\cdot x'=0.$$

Die Bedingung für die Exaktheit lautet nun

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(t,x)g(t,x))=\frac{\partial}{\partial t}(\mu(t,x)h(t,x)).$$

Natürlich muss $\mu(t,x)$ entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaften haben. Im optimalen Fall wird $\mu(t,x)$ nie 0. (Die letzte Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung für μ. Man kann nicht hoffen, sie allgemein zu lösen. Deshalb versucht man es meist mit konkreten Ansätzen für μ.)

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1+2t^2x^2)+t^3x\cdot x'=0.$$

Wir setzen

$$g(t,x)=1+2t^2x^2,\quad h(t,x)=t^3x.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}=4t^2x,\quad \frac{\partial h}{\partial t}=3t^2x.$$

Die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Wir versuchen es mit einem integrierenden Faktor $\mu=\mu(t,x)$, betrachten also

$$\mu(t,x)(1+2t^2x^2)+\mu(t,x)\cdot t^3x\cdot x'=0.$$

Wir bilden

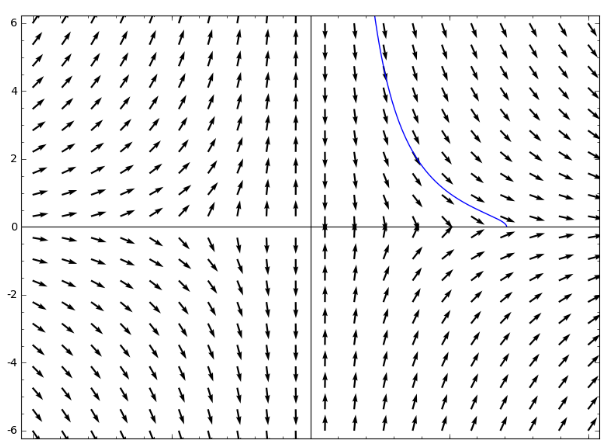
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mu(t,x)(1+2t^2x^2)) &= \frac{\partial \mu}{\partial x}(1+2t^2x^2)+\mu\cdot 4t^2x,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t,x)\cdot t^3x) &= \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot t^3x+\mu\cdot 3t^2x.\end{aligned}$$

Für die Exaktheit erhalten wir die Bedingung

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot t^3x-\frac{\partial \mu}{\partial x}(1+2t^2x^2)=\mu\cdot t^2x.$$

Wir versuchen es mit
$$\mu(t,x) = t.$$
Dann ist die Differentialgleichung
$$(t + 2t^3x^2) + t^4x \cdot x' = 0$$
exakt. Wir suchen nach einer Stammfunktion:
$$f(t,x) = \int_0^t (u + 2u^3x^2)du + \int_0^x 0dy = \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u^4x^2\right]_{u=0}^t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4x^2.$$
Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit
$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4\varphi(t)^2 = c \text{ für alle } t \in I.$$
Es folgt
$$\varphi(t)^2 = \frac{2c - t^2}{t^4}.$$

(1') Wir betrachten nun das Anfangswertproblem
$$(1 + 2t^2x^2) + t^3x \cdot x' = 0, \quad x(1) = 1.$$
Wir setzen in die in (1) gefundene Lösung ein:
$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4\varphi(t)^2 = c$$
und erhalten $c = 1$, also
$$\varphi(t)^2 = \frac{2 - t^2}{t^4},$$
also wegen $\varphi(1) = 1$
$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2 - t^2}{t^4}}.$$
Das maximale, 1 enthaltende Intervall, auf dem der Ausdruck $\sqrt{\frac{2-t^2}{t^4}}$ definiert ist, ist $(0, \sqrt{2}]$. Wäre aber φ in $\sqrt{2}$ definiert, so müsste $\varphi(\sqrt{2}) = 0$ gelten, was den Widerspruch $1 = 0$ liefert, wenn man dies in die Differentialgleichung einsetzt. Daher ist das maximale Definitionsintervall $(0, \sqrt{2})$.



(2) Wir betrachten die Differentialgleichung
$$2\sin(x) + t\cos(x) \cdot x' = 0.$$
Wir setzen
$$g(x,y) = 2\sin(x), \quad h(x,y) = t\cos(x).$$
Wegen
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2\cos(x), \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \cos(x)$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt. Wir versuchen, einen integrierenden Faktor $\mu(t,x)$ zu finden. Wir versuchen zunächst den Ansatz $\mu = \mu(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mu(t)\cdot 2\sin(x)) &= 2\mu(t)\cos(x),\\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu(t)\cdot t\cos(x)) &= \mu'(t)\cdot t\cos(x)+\mu(t)\cdot\cos(x).\end{aligned}$$

Für die Exaktheit erhalten wir die Bedingung

$$\mu'(t)\cdot t\cos(x)+\mu(t)\cdot\cos(x) = 2\mu(t)\cdot\cos(x),$$

also

$$\mu'(t)\cdot t\cos(x) = \mu(t)\cdot\cos(x).$$

Offensichtlich löst $\mu(t)=t$ die Gleichung. Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$2t\sin(x)+t^2\cos(x)\cdot x' = 0.$$

Setzen wir nun

$$g(t,x) = 2t\sin(x) \quad \text{und} \quad h(t,x) = t^2\cos(x),$$

so gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2t\cos(x) = \frac{\partial h}{\partial t},$$

die Differentialgleichung ist also exakt. Wir suchen nach einer Stammfunktion:

$$\begin{aligned}f(t,x) &= \int_0^t g(u,x)du + \int_0^x h(0,y)dy = \int_0^t 2u\sin(x)du + \int_0^x 0dy =\\ &= \left[u^2\sin(x)\right]_{u=0}^t = t^2\sin(x).\end{aligned}$$

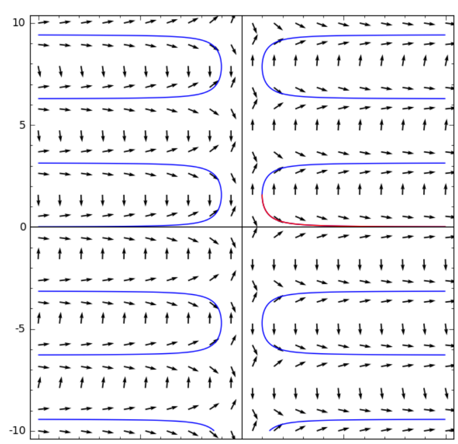
Ist also $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit

$$t^2\sin(\varphi(t)) = c.$$

Es folgt

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{c}{t^2}.$$

Natürlich ist $\varphi(t)$ durch diese Gleichung nicht eindeutig bestimmt. In der folgenden Skizze sind die blauen Kurven die Niveaulinie $f(t,x)=1$.



(2') Wir wollen nun das Anfangswertproblem

$$2\sin(x)+t\cos(x)\cdot x' = 0, \quad x(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}$$

lösen. Nach (2) gilt dann

$$c = t^2\sin(\varphi(t)) = (\sqrt{2})^2\cdot\sin(\frac{\pi}{6}) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

also

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{1}{t^2}.$$

Es folgt

$$\varphi(t) = \arcsin(\frac{1}{t^2}).$$

$\arcsin(\frac{1}{t^2})$ ist auf dem $\sqrt{2}$ enthaltenden Intervall $[1, \infty)$ definiert. Wäre φ auch in 1 definiert, so wäre $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$. Setzt man aber $t = 1$ in die Differentialgleichung ein: $2\sin(\varphi(t)) + t\cos(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$, so erhält man $1 = 0$, einen Widerspruch. Das maximale Definitionsintervall ist also das Intervall $(1, \infty)$. Die Funktion $\varphi(t)$ ist in der letzten Zeichnung rot eingetragen.

(3) (Explosives Wachstum) Wir betrachten für $x_0 > 0$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \kappa x^\alpha, \quad x(0) = x_0,$$

die „explosives Wachstum“ beschreibt. (Natürlich handelt es sich auch um eine autonome Differentialgleichung, die wir auch mit anderen Methoden behandeln können.) Wir können die Differentialgleichung in der Form

$$\kappa x^\alpha - x' = 0$$

schreiben. So geschrieben ist die Differentialgleichung aber noch nicht exakt wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa x^\alpha) = \kappa\alpha x^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(-1) = 0.$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit dem Faktor $\mu(x) = x^{-\alpha}$ und erhalten

$$\kappa - x^{-\alpha}x' = 0.$$

Setzen wir nun

$$g(t, x) = \kappa, \quad h(t, x) = -x^{-\alpha},$$

so ist

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 = \frac{\partial h}{\partial t},$$

die Differentialgleichung ist also exakt. Wir bestimmen eine Stammfunktion, wobei wir $t_0 = 0$ wählen:

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \int_0^t g(u,x)du + \int_{x_0}^x h(0,y)dy = \int_0^t \kappa du + \int_{x_0}^x (-y^{-\alpha})dy = \\ &= \kappa t + \left[-\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{y=x_0}^x = \kappa t + \left[\frac{1}{(\alpha-1)y^{\alpha-1}}\right]_{y=x_0}^x = \\ &= \kappa t + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_0^{\alpha-1}}\right). \end{aligned}$$

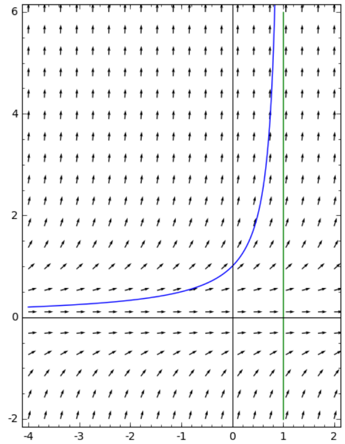
Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir aus $f(t, \varphi(t)) = f(0, x_0) = 0$. Wir formen die Bedingung um:

$$\begin{aligned} f(t,\varphi(t)) = 0 \quad &\iff \quad (\alpha-1)\kappa t + \frac{1}{\varphi(t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} = 0 \quad \iff \\ &\iff \quad \frac{1}{\varphi(t)^{\alpha-1}} = \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} - (\alpha-1)\kappa t \quad \iff \\ &\iff \quad \varphi(t)^{\alpha-1} = \frac{1}{\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} - (\alpha-1)\kappa t} \quad \iff \\ &\iff \quad \varphi(t) = \left(\frac{1}{\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} - (\alpha-1)\kappa t}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass

$$\lim_{x \to \frac{1}{x_0^{\alpha-1}(\alpha-1)\kappa}} \varphi(t) = \infty$$

gilt. Anders als beim exponentiellen Wachstum ist die Lösung also nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Skizze zeigt den Fall $x_0 = 1$, $\alpha = 2$, $\kappa = 1$:



(4) Die Differentialgleichung
$$x - t \cdot x' = 0$$
ist wegen
$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial t}(-t)$$
nicht exakt. Wir haben zuvor gesehen, dass die nach Multiplikation mit $\frac{1}{t^2+x^2}$ zu einer Differentialgleichung
$$\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+x^2} \cdot x' = 0$$
wird, die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert ist und die Integrabilitätsbedingung erfüllt, die aber nicht exakt ist. Wir multiplizieren die ursprüngliche Gleichung nun mit $\mu(t,x) = \frac{1}{tx}$, wobei wir uns auf den Definitionsbereich $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, x > 0\}$, also auf den ersten Quadranten einschränken:
$$\frac{1}{t} - \frac{1}{x} \cdot x' = 0.$$
Diese Differentialgleichung ist offensichtlich exakt. Wir bestimmen eine Stammfunktion, integrieren also $\frac{1}{t}$ nach t:
$$f(t,x) = \int \frac{1}{t} dt + c(x) = \ln(t) + c(x).$$
Nun muss weiter gelten
$$-\frac{1}{x} = \frac{\partial f}{\partial x} = c'(x),$$
also wählen wir
$$f(t,x) = \ln(t) - \ln(x) = \ln(\frac{t}{x}).$$
Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit $f(t,\varphi(t)) = c$ für alle $t \in I$, also
$$\frac{t}{\varphi(t)} = c, \quad \text{also} \quad \varphi(t) = \frac{1}{c} \cdot t \text{ für alle } t \in I.$$
(Natürlich ist dies nicht überraschend, wenn man die Differentialgleichung in der Form $x' = \frac{1}{t} \cdot x$ schreibt.)

Wir erinnern an einen wichtigen Spezialfall, den wir schon behandelt haben:

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen: Seien $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ auf Intervallen definierte und stetige Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung
$$x' = g(t)h(x),$$

die wir auch in der Form

$$g(t)h(x) - x' = 0$$

schreiben können. In dieser Form wird die Differentialgleichung im Allgemeinen nicht exakt sein. Ist $\widetilde{J} \subseteq J$ ein Teilintervall, sodass gilt

$$h(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \widetilde{J},$$

so wird die Differentialgleichung auf $I \times \widetilde{J}$ mit dem integrierenden Faktor $\mu(x) = \frac{1}{h(x)}$ zu

$$g(t) - \frac{1}{h(x)} \cdot x' = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist offensichtlich exakt mit einer Stammfunktion

$$f(t,x) = \int g(t)dt - \int \frac{dx}{h(x)}.$$

Die Bernoullische Differentialgleichung: Darunter versteht man eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha,$$

wobei α eine reelle Zahl ist. In den Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung, weswegen wir hier $\alpha \neq 0, 1$ annehmen können. Wir wollen die Differentialgleichung durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor $\mu(t,x)$ zu einer exakten Differentialgleichung machen. Zwar könnten wir den integrierenden Faktor gleich angeben, wir wollen aber schrittweise vorgehen:

Überlegungen:

(1) Wir bringen die Gleichung zunächst in die Gestalt

$$(a(t)x + b(t)x^\alpha) - x' = 0.$$

Setzen wir

$$g_1(t,x) = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad h_1(t,x) = -1,$$

so gilt

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = a(t) + \alpha b(t)x^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0.$$

Die Differentialgleichung $g_1(t,x) + h_1(t,x) \cdot x' = 0$ ist noch nicht exakt.

(2) Nun multiplizieren wir die Differentialgleichung mit $x^{-\alpha}$:

$$(a(t)x^{1-\alpha} + b(t)) + (-x^{-\alpha}) \cdot x' = 0.$$

Setzen wir

$$g_2(t,x) = a(t)x^{1-\alpha} + b(t), \quad h_2(t,x) = -x^{-\alpha},$$

so gilt

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = (1-\alpha)a(t)x^{-\alpha}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0.$$

Die Differentialgleichung ist noch nicht exakt.

(3) Wir multiplizieren mit $e^{L(t)}$:

$$\left(e^{L(t)}a(t)x^{1-\alpha} + e^{L(t)}b(t)\right) + \left(-e^{L(t)}x^{-\alpha}\right) \cdot x' = 0.$$

Setzen wir

$$g_3(t,x) = e^{L(t)}a(t)x^{1-\alpha} + e^{L(t)}b(t), \quad h_3(t,x) = -e^{L(t)}x^{-\alpha},$$

so gilt

$$\frac{\partial g_3}{\partial x} = (1-\alpha)e^{L(t)}a(t)x^{-\alpha}, \quad \frac{\partial h_3}{\partial t} = -L'(t)e^{L(t)}x^{-\alpha}.$$

Die Differentialgleichung $g_3(t,x) + h_3(t,x) \cdot x' = 0$ ist also genau dann exakt, wenn gilt

$$(1-\alpha)a(t)e^{L(t)}x^{-\alpha} = \frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{\partial h_3}{\partial t} = -L'(t)e^{L(t)}x^{-\alpha},$$

also wenn gilt

$$L'(t) = (\alpha - 1)a(t).$$

Ist $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, d.h. $A'(t) = a(t)$, so können wir $L(t) = (\alpha - 1)A(t)$ wählen. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

SATZ. *Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung*

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha.$$

Ist $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, d.h. $A'(t) = a(t)$, definiert man

$$\mu(t,x) = e^{(\alpha-1)A(t)}x^{-\alpha},$$

so ist $\mu(t,x)$ ein integrierender Faktor, wenn man die Differentialgleichung in der From

$$(a(t)x + b(t)x^\alpha) - x' = 0$$

schreibt.

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Bernoullische Differentialgleichung

$$x' = x + \frac{\sin t}{x}.$$

(Als Definitionsbereich können wir die Halbebene $x > 0$ wählen.) Mit den Notationen des Satzes ist also

$$a(t) = 1, \quad b(t) = \sin(t), \quad \alpha = -1.$$

$A(t) = t$ ist eine Stammfunktion von $a(t) = 1$. Als integrierenden Faktor wählen wir daher

$$\mu(t,x) = e^{(\alpha-1)A(t)}x^{-\alpha} = e^{-2t}x.$$

Schreiben wir die Differentialgleichung in der Form

$$x + \frac{\sin(t)}{x} - x' = 0,$$

so entsteht nach Multiplikation mit $\mu(t,x)$ die exakte Differentialgleichung

$$(e^{-2t}x^2 + e^{-2t}\sin(t)) + (-e^{-2t}x)x' = 0.$$

Wir setzen

$$g(t,x) = e^{-2t}x^2 + e^{-2t}\sin(t), \quad h(t,x) = -e^{-2t}x$$

und erhalten mit der vorangegangenen Formel eine Stammfunktion, wenn wir $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ wählen:

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \int_0^t g(u,x)du + \int_1^x h(0,y)dy = \int_0^t \left(e^{-2u}x^2 + e^{-2u}\sin(u)\right)du + \int_1^x (-y)\,dy = \\ &= e^{-2t}\left(-\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Wir wollen eine Lösung des Anfangswertproblems

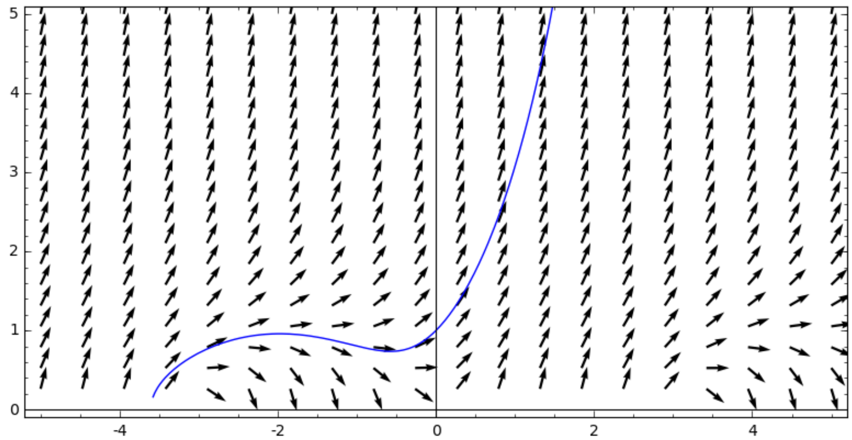
$$x(0) = 1$$

bestimmen. Wegen $f(0,1) = 0$ gilt für die Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ die Bedingung $f(t,\varphi(t)) = 0$, die wir umformen können:

$$\begin{aligned} f(t,\varphi(t)) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-2t}\left(-\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)^2\right) + \frac{7}{10} = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)^2 = -\frac{7}{10}e^{2t} \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(t)^2 = -\frac{2}{5}\cos(t) - \frac{4}{5}\sin(t) + \frac{7}{5}e^{2t}. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(0) = 1 > 0$ folgt

$$\varphi(t) = \sqrt{-\frac{2}{5}\cos(t) - \frac{4}{5}\sin(t) + \frac{7}{5}e^{2t}}.$$



Das maximale Definitionsintervall der Lösung ist hier nicht offensichtlich.

(2) Wir hatten zuvor die Differentialgleichung

$$x' = \kappa x^\alpha$$

(mit $\kappa > 0$, $\alpha > 1$) für explosives Wachstum behandelt. Auch diese Differentialgleichung kann man als Bernoullische Differentialgleichung auffassen.

6. Lösen einer Differentialgleichung durch Zurückführung auf einen bekannten Differentialgleichungstyp durch eine geeignete Substitution

Wir geben nur ein paar Beispiele an.

Homogene Differentialgleichung: Eine Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ nennt man **homogen**, wenn gilt

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \text{ für alle } \lambda.$$

Dann ist $f(t,x) = f(1, \frac{x}{t})$, die Differentialgleichung lässt sich also in der Form

$$x' = g(\frac{x}{t})$$

schreiben. Durch die Substitution

$$y = \frac{x}{t}$$

erhält man eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für y:

$$y' = \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{g(\frac{x}{t})}{t} - \frac{\frac{x}{t}}{t} = \frac{g(y) - y}{t}.$$

Beispiel:

$$x' = \frac{x}{t} - \frac{t^2}{x^2}.$$

Substituieren wir $y = \frac{x}{t}$, so erhalten wir

$$y' \quad = \quad \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}\left(\frac{x}{t} - (\frac{t}{x})^2\right) - \frac{1}{t} \cdot \frac{x}{t} = \frac{1}{t}\left(y - \frac{1}{y^2}\right) - \frac{y}{t} = -\frac{1}{ty^2}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für y.

Differentialgleichungstyp $x' = g(at + bx + c)$ mit $b \neq 0$: Wir verwenden die Substitution

$$y = at + bx + c.$$

Dann gilt

$$y' = a + bx' = a + bg(y),$$

y genügt also einer autonomen Differentialgleichung 1. Ordnung.

Beispiel:
$$x' = (t+x)^2.$$
Wir substitutieren $y = t + x$ und erhalten
$$y' = 1 + x' = 1 + (t+x)^2 = 1 + y^2,$$
y genügt also einer autonomen Differentialgleichung 1. Ordnung.

Bernoullische Differentialgleichung: Hier handelt es sich um eine Differentialgleichung der Gestalt
$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha,$$
wo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist. Wir haben bereits einen Lösungsansatz gesehen, der die Differentialgleichung mit einem integrierenden Faktor multipliziert und sie damit auf eine exakte Differentialgleichung zurückführt. Eine andere Möglichkeit ist die Substitution
$$y = x^{1-\alpha}.$$
Dann gilt für y:
$$\begin{aligned} y' &= (1-\alpha)x^{-\alpha}x' = (1-\alpha)x^{-\alpha} \cdot (a(t)x + b(t)x^\alpha) = (1-\alpha)a(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t) = \\ &= (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t), \end{aligned}$$
y genügt also einer linearen Differentialgleichung.

Beispiel: Wir betrachten die Bernoullische Differentialgleichung
$$x' = x + \frac{\sin(t)}{x}.$$
Hier ist $a(t) = 1$, $b(t) = \sin(t)$ und $\alpha = -1$. Wir substituieren
$$y = x^{1-\alpha} = x^2.$$
Dann gilt für y:
$$y' = 2xx' = 2x \cdot \left(x + \frac{\sin t}{x}\right) = 2x^2 + 2\sin(t) = 2y + 2\sin(t).$$
Bei
$$y' = 2y + 2\sin(t)$$
handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Gleichung $y' = 2y$ hat die allgemeine Lösung $y(t) = ce^{2t}$ mit $c \in \mathbb{R}$, weswegen wir den Ansatz $y(t) = c(t)e^{2t}$ machen (Variation der Konstanten) um die Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden:
$$\begin{aligned} y'(t) = 2y(t) + 2\sin(t) \quad &\iff \quad c'(t)e^{2t} + c(t)\cdot 2e^{2t} = 2c(t)e^{2t} + 2\sin(t) \quad \iff \\ &\iff \quad c'(t)e^{2t} = 2\sin(t) \quad \iff \quad c'(t) = 2e^{-2t}\sin(t) \quad \iff \\ &\iff \quad c(t) = e^{-2t}\left(-\frac{2}{5}\cos(t) - \frac{4}{5}\sin(t)\right) + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Die allgemeine Lösung für y ist daher
$$y(t) = c(t)e^{2t} = -\frac{2}{5}\cos(t) - \frac{4}{5}\sin(t) + Ce^{2t} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$
Für x erhalten wir dann wegen $y = x^2$
$$x(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t) + Ce^{2t}}.$$