Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 2 (26.4.2024)

Aufgabe 6: Sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Folge der Primzahlen. Zeige:

(1) Für $n \geq 0$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} < \frac{1}{10^{2^n}}.$$

(Hinweis: Benutze die aus Aufgabe 4 folgende Aussage $p_k \leq 2^{2^k}$.) Insbesondere wird dann durch

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} = 0.02030005000000070000000000000001100000000\ldots$$

eine reelle Zahl definiert.

(2) Für $n \geq 0$ gilt

$$\left\lfloor 10^{2^n} \alpha \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot 10^{2^n - 2^k}.$$

(3) Für $n \geq 1$ gilt

$$p_n = \left\lfloor 10^{2^n} \alpha \right\rfloor - 10^{2^{n-1}} \left\lfloor 10^{2^{n-1}} \alpha \right\rfloor$$

(Sierpinski-Formel für die n-te Primzahl).

Aufgabe 7:

(1) Bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass alle 6 Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

Primzahlen sind.

(2) Bestimme mindestens zwei natürliche Zahlen n, sodass alle 6 Zahlen

$$n, \quad n+4, \quad n+6, \quad n+10, \quad n+12, \quad n+16$$

Primzahlen sind. Gibt es weitere?

(3) Bestimme alle Primzahl-6-Tupel $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ mit $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ und $p_6 - p_1 \leq 14$.

Aufgabe 8: Für jedes der folgenden Polynome

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$,
(2) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$,
(3) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

teste man, ob die Voraussetzungen der Hypothese H für $f(x)$ erfüllt sind, und gebe alle oder mindestens 10 Primzahlen der Gestalt $f(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ an.

Datei: anazt_u2.tex. Version vom 25.4.2024

Aufgabe 9:

(1) Zeige, dass sich jede rationale Zahl $r > 0$ als
$$r = \frac{p-1}{q-1} \quad \text{mit Primzahlen } p \text{ und } q$$
schreiben lässt, falls Schinzels Hypothese H gilt.

(2) Verifiziere die Aussage in (1) für alle rationalen Zahlen $r = \frac{a}{b}$ mit $1 \leq a, b \leq 10$.

Aufgabe 10: Zeige: Ist $n \geq 12$ eine natürliche Zahl, so gibt es zusammengesetzte natürliche Zahlen $a, b \geq 2$ mit
$$n = a + b.$$
(Beispielsweise ist $100 = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 25$ und $1000 = 11 \cdot 43 + 17 \cdot 31$.)