Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 14 (17.7.2024)

Präsenzaufgaben

Aufgabe P66: (Staatsexamen Frühjahr 2024)

(a) Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom über K. Begründen Sie, warum die Ordnung der Galoisgruppe von f über K durch den Grad von f teilbar ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, wieso die Aussage in (a) im Allgemeinen falsch wird, wenn f nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt wird.

(c) Begründen Sie, warum es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine Galoiserweiterung E/F von Körpern E, F gibt, deren Galoisgruppe die Ordnung n hat.

(d) Zeigen Sie, dass die Aussage in (c) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Körper F fest vorgegeben wird.

Aufgabe P67: (Staatsexamensaufgabe)
Sei $f(X) = X^5 - X - \frac{1}{16} \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) $f(X)$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X)$ hat genau drei reelle Nullstellen.

c) Die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ besitzt eine Einbettung in die Gruppe S_5 der Permutationen von 5 Elementen und enthält dann eine Transposition.

Aufgabe P68: (Staatsexamensaufgabe)
Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gleichen Grades, so dass $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber $\mathrm{Gal}(f)$ abelsch und $\mathrm{Gal}(g)$ nicht abelsch ist.
(Hinweis, nicht Teil der Staatsexamensaufgabe: Es ist nicht gefordert, dass die Polynome f, g irreduzibel sind.)

Aufgabe P69: (Staatsexamensaufgabe)
Bestimmen Sie zwei irreduzible Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, sodass die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber nicht isomorph sind.

Aufgabe P70: (Teil einer Staatsexamensaufgabe)
Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f. Sei $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ die zugehörige Galoisgruppe.
Beweisen Sie: Falls G eine abelsche Gruppe ist, hat sie die Ordnung n.

Datei: kt_u14.tex. Version vom 15.7.2024